• 2교시 수학 영역 •

1	③	**2**	⑤	**3**	④	**4**	④	**5**	①
6	②	**7**	③	**8**	⑤	**9**	①	**10**	③
11	②	**12**	①	**13**	⑤	**14**	②	**15**	⑤
16	④	**17**	①	**18**	②	**19**	③	**20**	④
21	③	**22**	8	**23**	7	**24**	34	**25**	6
26	385	**27**	54	**28**	22	**29**	48	**30**	75

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$$(\sqrt[3]{4})^2\times 2^{\frac{2}{3}}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^2\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}=2^2=4$$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}=\frac{f'(2)}{4}=3$$

따라서 $f'(2)=3\times 4=12$

3. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{4}\right|}=8$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)=3+1=4$$

5. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$x>\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$\dfrac{3}{2x+1}<f(x)<\dfrac{3}{2x-1}$이므로

$\dfrac{3x}{2x+1}<xf(x)<\dfrac{3x}{2x-1}$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x-1}=\frac{3}{2}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xf(x)=\frac{3}{2}$

6. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$$a_2\times a_4=(a_3-3)(a_3+3)=a_3^2-9=72$$

에서 $a_3=9$ 또는 $a_3=-9$

$a_3=-9$이면 $a_1=a_3-6=-15<0$

따라서 $a_3=9$

7. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$에서

$2-a=4+2b+a,\ b=-a-1$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x-a)-(2-a)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x^2+bx+a)-(2-a)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2-(a+1)x+2(a-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x-a+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(x-a+1)=3-a$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$1=3-a$에서 $a=2,\ b=-3$

따라서 $f(2)=0$

8. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_1=S_1=\frac{1}{2}$

$a_5=S_5-S_4=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{30}$

따라서 $a_1+a_5=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{30}\right)=\frac{7}{15}$

9. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=\log_2(x+a)+1$의 밑이 1보다 크므로

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

그러므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, 5]$에서

$x=a$일 때 최솟값 3을 갖는다.

$f(a)=\log_2 2a+1=3$에서 $a=2$

따라서 $f(a+4)=f(6)=\log_2 8+1=3+1=4$

10. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r\neq 0)$이라 하자.

$a_1=0$이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k=0\neq 33$이므로 $a_1\neq 0$

$a_3+2a_4=a_1r^2+2a_1r^3=a_1r^2(1+2r)=0$

에서 $r=-\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{a_1\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{11}{16}a_1=33$$

따라서 $a_1=48$

11. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\sin\theta,\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\times\tan\theta=-\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{8}{3}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\dfrac{\cos^2\theta-1}{\cos\theta}=\dfrac{8}{3}$

$3\cos^2\theta-8\cos\theta-3=0$

$(\cos\theta-3)(3\cos\theta+1)=0$

$-1\le\cos\theta\le 1$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

12. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n-1}(k-a_k)=\sum_{k=1}^{2n-1}k-\sum_{k=1}^{2n-1}a_k$$

$\displaystyle a_{2n}+\sum_{k=1}^{2n-1}a_k=\sum_{k=1}^{2n-1}k$에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{2n-1}k$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{9}k=\frac{9\times 10}{2}=45$

13. [출제의도] 삼각함수의 정의 이해하기

점 P의 x좌표를 $a(a>0)$이라 하면 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(a, a+1)$

각의 크기 θ를 나타내는 동경과 각의 크기 7θ를

나타내는 동경이 일치하므로

$7\theta=\theta+2n\pi$(n은 정수)

$\theta=\frac{n}{3}\pi$

이때 점 P는 제1사분면 위의 점이고

$0<\theta<2\pi$이므로 $n=1,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$\tan\frac{\pi}{3}=\dfrac{a+1}{a}$에서 $\sqrt{3}a=a+1,\ (\sqrt{3}-1)a=1$

따라서 $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

14. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

조건 (가)의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0\times f(0)=b$에서 $b=0$

조건 (가)의 식의 양변에 $x=4$를 대입하면

$2f(4)=16+4a$

조건 (나)에 의하여 $4=16+4a$에서 $a=-3$

그러므로 $x\ge-\frac{1}{2}$이고 $x\neq 0$인 모든 실수 x에

대하여 $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{\sqrt{2x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-3)(\sqrt{2x+1}+1)}{2}=\frac{-3\times 2}{2}=-3$$

15. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

(ⅰ) n이 홀수일 때

$f(n)=1$이므로 $f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=1$

(ⅱ) n이 짝수일 때

$n=2,\ 4$이면 $\sin\frac{n}{5}\pi>0$이므로 $f(2)=f(4)=2$

$n=6,\ 8$이면 $\sin\frac{n}{5}\pi<0$이므로 $f(6)=f(8)=0$

$n=10$이면 $\sin\frac{10}{5}\pi=0$이므로 $f(10)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=2}^{10}f(n)=1\times 4+2\times 2+1=9$

16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\log_n 4\times\left(\frac{4}{\log_m 2}+\log_2 n\right)=2\log_n 2\times(4\log_2 m+\log_2 n)=8\log_n 2\times\log_2 m+2\log_n 2\times\log_2 n=8\log_n m+2=8$$

$\log_n m=\frac{3}{4}$에서 $m=n^{\frac{3}{4}}$

$n^{\frac{3}{4}}$이 자연수가 되기 위해서는 어떤 자연수

k에 대하여 $n=k^4$이어야 한다.

$1<n<100$이므로 $n=2^4$ 또는 $n=3^4$이다.

$n=2^4$이면 $m=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$이므로
$m+n=8+16=24$
$n=3^4$이면 $m=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27$이므로
$m+n=27+81=108$
따라서 $m+n$의 최댓값은 108

17. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

$f(x)=\cos^2 x-\sin x-1$
$\quad=(1-\sin^2 x)-\sin x-1$
$\quad=-\sin^2 x-\sin x=-\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$
$f(\pi)=0$이고 π가 구간 $(\pi, a]$에 속하지 않으므로
구간 $(\pi, a]$에서 함수 $f(x)$가 최솟값을 갖기
위해서는 $f(x)\le 0$을 만족시키는 x의 값이
구간 $(\pi, a]$에 존재해야 한다.
$f(x)\le 0$에서 $\sin x=-1$ 또는 $\sin x\ge 0$
$x>\pi$에서 $\sin x=-1$인 x의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}\pi$
$x>\pi$에서 $\sin x\ge 0$인 x의 최솟값은 2π
그러므로 $p=\dfrac{3}{2}\pi$
한편 구간 $\left(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right]$에서 $-1\le \sin x<0$이므로
$f(x)=-\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}$
그러므로 $M=\dfrac{1}{4}$
따라서 $p\times M=\dfrac{3}{8}\pi$

18. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

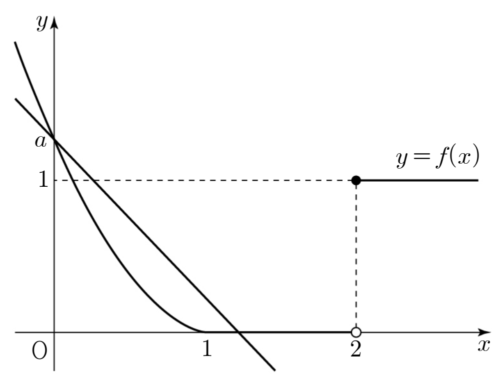
점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(p, 3p+2)$라 하면
점 B는 선분 DA를 $2:1$로 외분하는 점이므로
점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(2p, 6p+2)$이다.
함수 $y=a^x+k$의 그래프와 함수 $y=\log_a(x-k)$의
그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고,
곡선 $y=a^x+k$ 위의 점 B와 곡선 $y=\log_a(x-k)$
위의 점 C를 지나는 직선이 직선 $y=x$와
서로 수직이므로 점 C는 점 B를 직선 $y=x$에
대하여 대칭이동시킨 점이다.
그러므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(6p+2, 2p)$이다.
삼각형 CBD는 이등변삼각형이므로
두 직선 BD, AC는 서로 수직이다.
직선 BD의 기울기가 3이므로
직선 AC의 기울기는
$\dfrac{2p-(3p+2)}{(6p+2)-p}=\dfrac{-p-2}{5p+2}=-\dfrac{1}{3}$에서 $p=2$
그러므로 $\mathrm{A}(2, 8)$, $\mathrm{B}(4, 14)$
점 A가 곡선 $y=a^x+k$ 위의 점이므로 $a^2+k=8$
점 B가 곡선 $y=a^x+k$ 위의 점이므로 $a^4+k=14$
두 식을 연립하면
$a^4-a^2-6=0$, $(a^2+2)(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$
$a>1$이므로 $a=\sqrt{3}$, $k=5$
따라서 $a\times k=5\sqrt{3}$

19. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

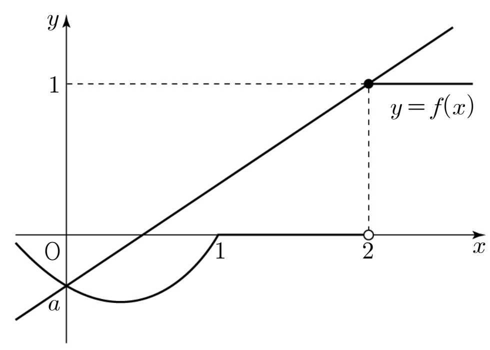
두 호 AD, DE의 길이가 같으므로
두 호 AD, DE에 대한 원주각의 크기가 같다.
$\angle\mathrm{DBA}=\angle\mathrm{EBD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=k$라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=2k$
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
$k^2=2^2+\sqrt{6}^{\,2}-2\times2\times\sqrt{6}\times\cos\theta$
$k^2=10-4\sqrt{6}\cos\theta$ ⋯ ㉠
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여
$(2k)^2=\sqrt{6}^{\,2}+4^2-2\times\sqrt{6}\times4\times\cos\theta$
$2k^2=11-4\sqrt{6}\cos\theta$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $k=1$, $\cos\theta=\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$
$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{8}\sqrt{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$
원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}=2R$에서 $R=\dfrac{2}{5}\sqrt{10}$
따라서 원 C의 넓이는 $\pi\times\left(\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2=\dfrac{8}{5}\pi$

20. [출제의도] 평균변화율을 이용하여 추론하기

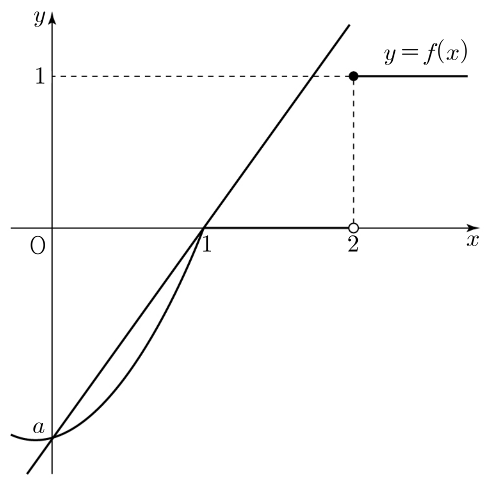
$f(0)=a$이므로 양수 t에 대하여
$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=\dfrac{f(t)-a}{t}$
이고, 함수 $g(t)$의 값은 두 점 $(0, a)$, $(t, f(t))$를
지나는 직선의 기울기와 같다.
ㄱ. $a=1$일 때 $g(1)=\dfrac{f(1)-1}{1}=-1$ (참)
ㄴ. (ⅰ) $a\ge1$일 때



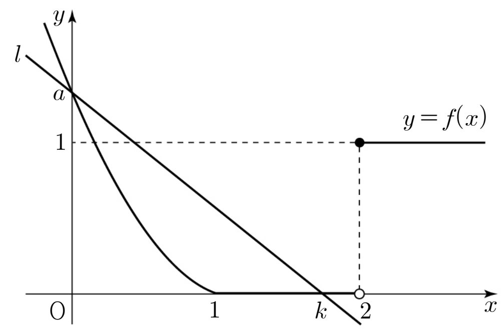
모든 양수 t에 대하여
$f(t)\le a$이므로 $g(t)=\dfrac{f(t)-a}{t}\le 0$
그러므로 함수 $g(t)$의 최댓값은 1이 될 수 없다.
(ⅱ) $-1<a<1$일 때



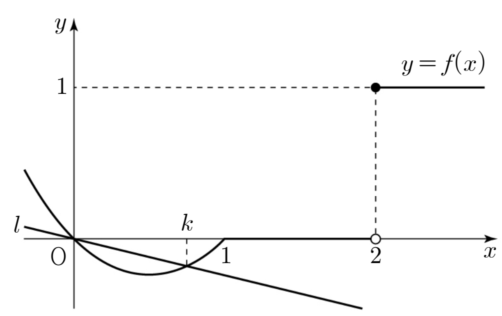
함수 $g(t)$는 $t=2$일 때 최댓값을 갖는다.
$g(2)=\dfrac{f(2)-a}{2}=\dfrac{1-a}{2}<1$
그러므로 함수 $g(t)$의 최댓값은 1보다 작다.
(ⅲ) $a\le-1$일 때



함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 최댓값을 갖는다.
$g(1)=\dfrac{f(1)-a}{1}=-a$
함수 $g(t)$의 최댓값이 1이기 위해서는
$a=-1$
이때 $g(2)=\dfrac{f(2)-a}{2}=\dfrac{1-(-1)}{2}=1$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
함수 $g(t)$의 최댓값이 1일 때, $g(2)=1$ (거짓)
ㄷ. $0<k<2$인 k에 대하여
두 점 $(0, a)$, $(k, f(k))$를 지나는 직선을 l이라
하자. $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$인
양수 $k(0<k<2)$가 존재하기 위해서는
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l의 교점 중
$(0, a)$가 아닌 점이 3개이어야 하고,
이 세 교점의 x좌표는 k, $k+1$, $k+2$이어야
한다.
(ⅰ) $a>0$일 때



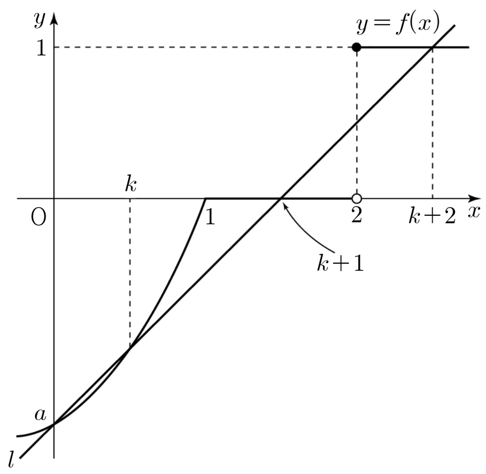
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l의 교점 중
x좌표가 양수인 점은 $(k, f(k))$뿐이므로
$g(k)=g(k+1)=g(k+2)$인 k가 존재하지
않는다.
(ⅱ) $a=0$일 때



$0<k<1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와
직선 l의 교점 중 x좌표가 양수인 점은
$(k, f(k))$뿐이므로 $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$인
k가 존재하지 않는다.
$1\le k<2$일 때, 직선 l의 기울기가 0이므로
$g(k)=0$
이때 $g(k+1)=\dfrac{1-0}{(k+1)-0}=\dfrac{1}{k+1}>0$이므로
$g(k)\ne g(k+1)$
그러므로 $g(k)=g(k+1)=g(k+2)$인 k가

존재하지 않는다.

(iii) $a<0$일 때



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l의 교점 중 $(0,\ a)$가 아닌 점이 3개이기 위해서는

$0<k<1$이고

$f(k+1)=0$, $f(k+2)=1$이어야 한다.

$\dfrac{1-0}{(k+2)-(k+1)}=1$이므로 직선 l의 기울기는 1

직선 l 위의 두 점 $(k,\ f(k))$, $(k+1,\ 0)$에 대하여 $\dfrac{0-f(k)}{(k+1)-k}=1$에서 $f(k)=-1$

즉, $(k-1)(k-a)=-1$ ⋯ ㉠

직선 l 위의 두 점 $(0,\ a)$, $(k,\ f(k))$에 대하여 $\dfrac{f(k)-a}{k-0}=\dfrac{-1-a}{k}=1$에서

$a=-k-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(k-1)(2k+1)=-1$, $2k^2-k=0$

$0<k<1$이므로 $k=\dfrac{1}{2}$, $a=-\dfrac{3}{2}$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right) & (x<1) \\ 0 & (1\le x<2) \\ 1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

이때

$$(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$
$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\ge-\frac{25}{16}$$

함수 $y=f(x)$의 최솟값 $-\dfrac{25}{16}$가 $-\dfrac{3}{2}$보다 작으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{3}{2}$은 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_1\ge 2$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$

$a_2=\dfrac{1}{2}a_1\ge 1$이므로 $a_3=\dfrac{1}{4}a_1$

$a_5<1$이라 하면 $a_6=\dfrac{1}{2}(a_5+a_1)$에서

$a_5+2a_6=2a_5+a_1>2$이므로 $a_5\ge 1$

그러므로 $a_6=\dfrac{1}{2}a_5$이고 $a_5+2a_6=2a_5=2$에서

$a_5=1$

$a_4<1$이라 하면 $a_5=\dfrac{1}{2}(a_4+a_1)=1$에서

$a_4=2-a_1\le 0$이므로 $a_4\ge 1$

그러므로 $a_5=\dfrac{1}{2}a_4=1$에서 $a_4=2$

(i) $a_1\ge 4$일 때

$a_3=\dfrac{1}{4}a_1\ge 1$이므로 $a_4=\dfrac{1}{8}a_1=2$에서

$a_1=16$

(ii) $a_1<4$일 때

$a_3=\dfrac{1}{4}a_1<1$이므로

$a_4=\dfrac{1}{2}(a_3+a_1)=\dfrac{5}{8}a_1=2$에서 $a_1=\dfrac{16}{5}$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$16+\dfrac{16}{5}=\dfrac{96}{5}$

22. [출제의도] 지수방정식 계산하기

방정식 $\left(\sqrt{3}\right)^{x-2}=27$에서

$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x-2}=3^3$, $3^{\frac{x}{2}-1}=3^3$

$\dfrac{x}{2}-1=3$에서 $x=8$

23. [출제의도] 호도법 이해하기

$\dfrac{1}{2}\times 8\times a\pi=28\pi$에서 $a=7$

24. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(x)$가 다항함수이고 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=3$이므로

$f(x)=2x^3+3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$이고 $\displaystyle\lim_{x\to 0}x=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$

그러므로 $b=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2+ax}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(2x^2+3x+a)$$
$$=a=3$$

그러므로 $f(x)=2x^3+3x^2+3x$

따라서 $f(2)=34$

25. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_{|a|}\left(-a^2-4a+21\right)$의 밑이 $|a|$이므로

$|a|>0$이고 $|a|\ne 1$ ⋯ ㉠

$\log_{|a|}\left(-a^2-4a+21\right)$의 진수가 $-a^2-4a+21$이므로

$-a^2-4a+21>0$

$a^2+4a-21=(a+7)(a-3)<0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 a는

-6, -5, -4, -3, -2, 2

따라서 구하는 정수 a의 개수는 6

26. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)+\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}\right)+\cdots+\left(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}\right)$$
$$=\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}=\frac{n-1}{n}$$

$a_1=1$이므로 $n\ge 2$일 때 $\sqrt{a_n}=1-\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{1}{n}$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$

27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\dfrac{2t}{x}=-\dfrac{1}{t}x+3$에서 $2t^2=-x^2+3tx$

$x^2-3tx+2t^2=0$, $(x-t)(x-2t)=0$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 $\mathrm{A}(t,\ 2)$, $\mathrm{B}(2t,\ 1)$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{t^2+4}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{4t^2+1}$

$$\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{\left(\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}\right)\left(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}\right)}{(t-1)\left(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{3(t^2-1)}{(t-1)\left(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}\right)}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{3(t+1)}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$$

따라서 $30\times k^2=30\times\left(\dfrac{3}{5}\sqrt{5}\right)^2=54$

28. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}=3a_{k+1}=21$에서 $a_{k+1}=7$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 자연수)라 하자.

$a_1=a_{k+1}-dk=7-dk$,

$a_{k+4}=a_{k+1}+3d=7+3d$이므로

$$S_{k+4}=\frac{(k+4)(a_1+a_{k+4})}{2}$$
$$=\frac{(k+4)\{14+(3-k)d\}}{2}=11$$

에서 $(k+4)\{14+(3-k)d\}=22$

$k+4$는 4보다 큰 자연수이므로

$k+4=11$ 또는 $k+4=22$

즉, $k=7$ 또는 $k=18$

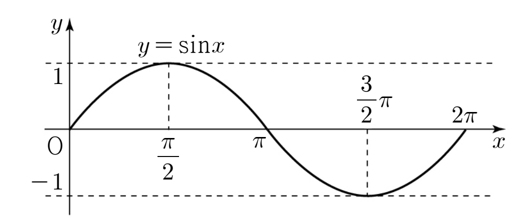
$k=7$일 때, $14+(3-7)d=2$에서 $d=3$

$k=18$일 때, $14+(3-18)d=1$에서 $d=\dfrac{13}{15}$

d는 자연수이므로 $d=3$, $k=7$

따라서 $a_{k+6}=a_{k+1}+5d=7+5\times 3=22$

29. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기



$\dfrac{1}{4}k=-\dfrac{1}{4}k^2+\dfrac{3}{4}k$에서 $k(k-2)=0$

$k=0$ 또는 $k=2$

(i) $k=0$ 또는 $k=2$일 때

방정식 $\left(\sin x-\dfrac{1}{4}k\right)\left(\sin x+\dfrac{1}{4}k^2-\dfrac{3}{4}k\right)=0$의 서로 다른 해의 개수는 방정식 $\sin x=\dfrac{1}{4}k$의 서로 다른 해의 개수와 같다.

방정식 $\sin x=\dfrac{1}{4}k$의 서로 다른 해의 개수는 $k=0$일 때 3이고 $k=2$일 때 2이다.

그러므로

방정식 $\left(\sin x-\dfrac{1}{4}k\right)\left(\sin x+\dfrac{1}{4}k^2-\dfrac{3}{4}k\right)=0$의

서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는
k의 값은 2이다.

(ii) $k \neq 0$이고 $k \neq 2$일 때

방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right)=0$의
서로 다른 해의 개수는

방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$의 서로 다른 해의 개수와

방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$의 서로 다른 해의
개수의 합과 같다.

(a) 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$의 서로 다른 해의 개수가
0일 때

$|k|>4$이고,

$|k|>4$일 때 방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$의
서로 다른 해의 개수는 0이다.

그러므로

방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right)=0$의
서로 다른 해의 개수는 0이다.

(b) 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$의 서로 다른 해의 개수가
1일 때

$|k|=4$이므로 $k=4$ 또는 $k=-4$

방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$의 서로 다른 해의
개수는

$k=4$일 때 1이고 $k=-4$일 때 0이므로

방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right)=0$의
서로 다른 해의 개수가 2가 되도록 하는 k의
값은 4이다.

(c) 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$의 서로 다른 해의 개수가
2일 때

$|k|<4$ ⋯ ㉠

방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{4}k\right)\left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k\right)=0$의
서로 다른 해의 개수가 2가 되기 위해서는

방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$의 서로 다른 해의
개수가 0이어야 하므로 $k<-1$, $k>4$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 k는 -3, -2

(i), (ii)에 의하여 구하는 정수 k는
-3, -2, 2, 4이므로 모든 정수 k의 값의 곱은
$-3\times(-2)\times2\times4=48$

30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

$y=\frac{bx}{x+a}=-\frac{ab}{x+a}+b$이므로

함수 $y=\frac{bx}{x+a}$의 그래프의 점근선은

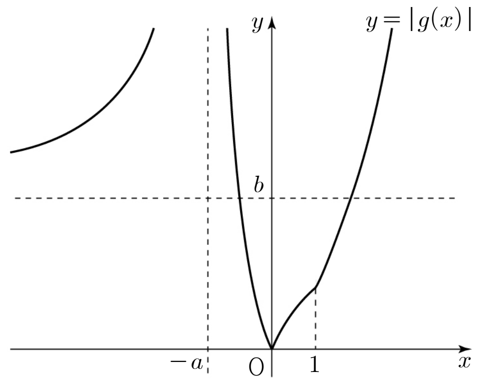
$x=-a$, $y=b$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim_{x\to1-}\frac{bx}{x+a}=\frac{b}{1+a}<b$

이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표를 k라 하자.

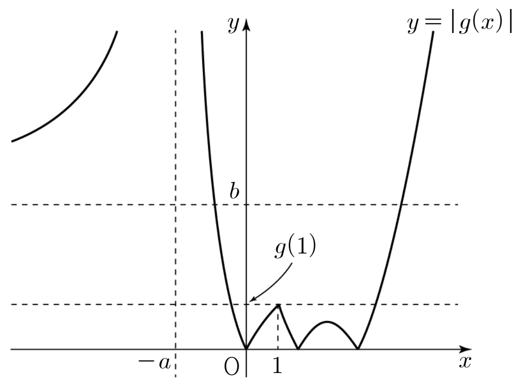
$k\le1$일 때, 함수 $y=|g(x)|$의 그래프의 개형은
그림과 같다.



$0<t\le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고
$t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로
조건 (가)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $k>1$

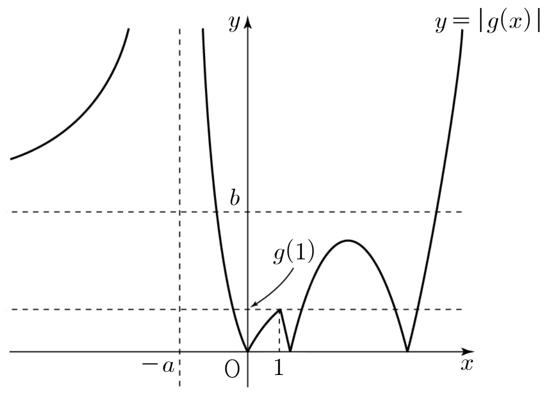
(i) $f(k)>-b$일 때

(a) $f(k)\ge-g(1)$일 때



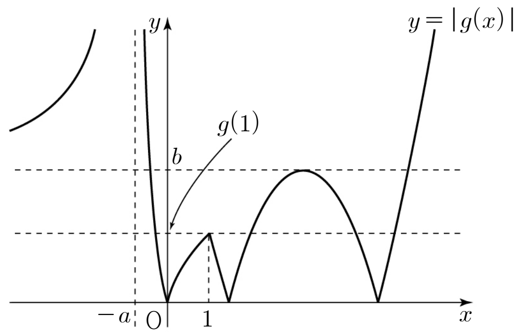
$|f(k)|\le g(1)$이므로
$g(1)<t\le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고
$t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로
조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b) $-b<f(k)<-g(1)$일 때



$g(1)<-f(k)<b$이므로
$-f(k)<t\le b$인 t에 대하여 $h(t)=2$이고
$t>b$인 t에 대하여 $h(t)=3$이므로
조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(k)=-b$일 때



$t<0$일 때, $h(t)=0$
$t=0$일 때, $h(0)=3$
$0<t<g(1)$일 때, $h(t)=6$
$t=g(1)$일 때, $h(g(1))=5$
$g(1)<t<b$일 때, $h(t)=4$
$t\ge b$일 때, $h(t)=3$
그러므로

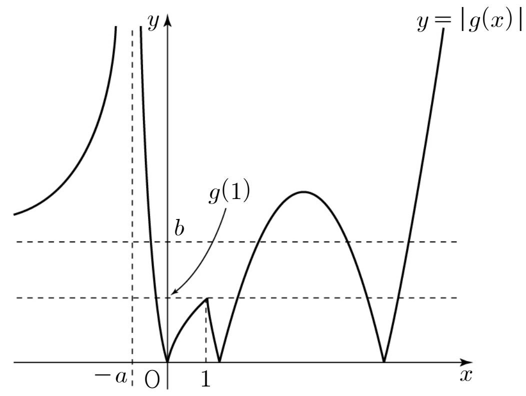
$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3 & (t=0,\ t\ge b)\\ 4 & (g(1)<t<b)\\ 5 & (t=g(1))\\ 6 & (0<t<g(1))\end{cases}$$

이며 함수 $h(t)$는 조건 (가)를 만족시킨다.
함수 $h(t)$가 $t=0$, $t=g(1)$, $t=b$에서만
불연속이므로 조건 (나)에 의하여
$\alpha=g(1)$, $\beta=b$

$g(1)=\alpha=h(0)=3$이므로 $g(1)=\frac{b}{1+a}=3$

$h(\alpha)=h(g(1))=5$이고
$h(\alpha)=\beta-1=b-1$이므로 $b=6$, $a=1$
$f(k)=-6$이므로 $f(x)=(x-k)^2-6$
$f(1)=g(1)=3$이므로
$(1-k)^2-6=3$에서 $k=4$
그러므로 $f(x)=(x-4)^2-6$

(iii) $f(k)<-b$일 때



$-f(k)>b$이므로
$g(1)<t\le b$인 t에 대하여 $h(t)=4$이고
$b<t<-f(k)$인 t에 대하여 $h(t)=5$이므로
조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$f(a-b)=f(1-6)=(-5-4)^2-6=75$