수능특강

수 학 영 역

확률과 통계

정답과 풀이

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 24 **2** ⑤ **3** ② **4** ③ **5** ⑤ **6** ④

1 A, B를 제외한 나머지 4명을 C, D, E, F라 하자.
이때 A, B가 서로 마주 보고 앉아야 하므로 A의 자리가 정해지면 B의 자리도 정해진다.
따라서 구하는 경우의 수는 A, C, D, E, F가 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로
$(5-1)!=4!=24$

답 24

2 서로 다른 6가지 색 중에서 정오각형에 칠할 1가지 색을 택하는 경우의 수는
${}_6C_1=6$
나머지 5가지 색을 모두 한 번씩 사용하여 5개의 정삼각형에 칠하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times24=144$

답 ⑤

3 양 끝에 서로 다른 두 문자를 나열하는 경우의 수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 서로 다른 두 문자를 택해 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
${}_4P_2=4\times3=12$
양 끝을 제외한 세 자리에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 세 문자를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times64=768$

답 ②

4 집합 $X=\{a, b, c, d, e\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3\}$으로의 함수 f의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_5=3^5=243$
이때 $f(a)+f(b)=4$에서 $f(a)=1$, $f(b)=3$ 또는 $f(a)=f(b)=2$ 또는 $f(a)=3$, $f(b)=1$이므로
$f(a)$, $f(b)$를 정하는 경우의 수는 3
$f(c)$, $f(d)$, $f(e)$를 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_3=3^3=27$
그러므로 $f(a)+f(b)=4$를 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\times27=81$
따라서 $f(a)+f(b)\neq4$인 함수 f의 개수는
$243-81=162$

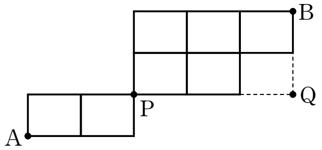
답 ③

5 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$의 값은 각각 1, 2, 4, 8 중의 하나이고
$8=1\times1\times1\times8$
$\quad=1\times1\times2\times4$
$\quad=1\times2\times2\times2$
이므로 $f(1)\times f(2)\times f(4)\times f(8)=8$을 만족시키는 함수의 개수는 다음과 같다.
(i) 함수 f의 치역이 $\{1, 8\}$인 경우
함수 f의 개수는 1, 1, 1, 8을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{4!}{3!}=4$
(ii) 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$인 경우
함수 f의 개수는 1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{4!}{2!}=12$
(iii) 함수 f의 치역이 $\{1, 2\}$인 경우
함수 f의 개수는 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{4!}{3!}=4$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는
$4+12+4=20$

답 ⑤

다른 풀이
$f(1)=2^a$, $f(2)=2^b$, $f(4)=2^c$, $f(8)=2^d$ (a, b, c, d는 3 이하의 음이 아닌 정수)라 하면
$f(1)\times f(2)\times f(4)\times f(8)=8$에서
$2^{a+b+c+d}=2^3$
$a+b+c+d=3$ …… ㉠
따라서 구하는 함수의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로
${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

6 그림과 같이 P지점을 정하고, Q지점에 도로망이 연결되어 있다고 하자.



A지점을 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}=3\times 10=30$

A지점을 출발하여 P지점과 Q지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times 1\times 1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$30-3=27$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 10~11쪽

1 ① **2** ② **3** 3 **4** ③ **5** ⑤ **6** ③
7 ④ **8** ①

1 서로 다른 6가지 색 중에서 부채꼴에 칠할 5가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

택한 5가지 색을 모두 사용하여 5개의 부채꼴에 칠하는 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 24=144$

답 ①

2 같은 학년의 학생끼리는 서로 이웃하지 않게 앉으려면 3학년 학생 3명을 앉힌 후, 3학년 학생 사이사이에 나머지 3명의 학생을 앉히면 된다.

3학년 학생 3명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

3학년 학생 3명 사이사이인 3곳에 1학년 학생 1명과 2학년 학생 2명이 한 명씩 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times 6=12$

답 ②

3 ${}_2\Pi_{2n}=64$에서

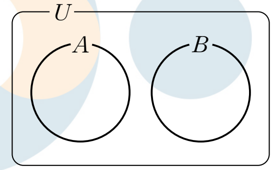
$2^{2n}=64=2^6$

이므로 $2n=6$

따라서 $n=3$

답 3

4 조건 (가)에서 $A\cap B=\varnothing$이므로 세 집합 U, A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



조건 (나)에서 $n(A\cup B)=5$이고 $n(U)=6$이므로

집합 $A\cup B$를 정하는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

전체집합 U의 원소 중 집합 $A\cup B$에 속하는 5개의 원소는 각각 두 집합 A, B 중 한 집합의 원소이므로 두 집합 A, B를 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는

$6\times 32=192$

답 ③

5 주어진 조건에 따라

$4=1+3$이므로 $f(4)=f(1)$

$5=2+3$이므로 $f(5)=f(2)$

즉, $f(1)$과 $f(2)$의 값이 정해지면 $f(4)$와 $f(5)$의 값도 정해지므로 세 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$만 정하면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

답 ⑤

6 빨간 공, 노란 공, 흰 공을 각각 R, Y, W라 하자.

(i) 양 끝에 R이 놓이는 경우

양 끝을 제외한 곳에 4개의 공 R, Y, Y, W를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 양 끝에 Y가 놓이는 경우

양 끝을 제외한 곳에 4개의 공 R, R, R, W를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$12+4=16$

답 ③

7 3개의 숫자 1, 2, 3을 모두 x로 놓고 x, x, x, 4, 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times3!}=140$

1과 2가 적힌 카드가 3이 적힌 카드보다 모두 왼쪽에 있도록 나열하는 경우의 수는 3개의 x에 왼쪽부터 차례대로 1, 2, 3 또는 2, 1, 3을 놓아야 하므로 이 경우의 수는

2

따라서 구하는 경우의 수는

$140\times2=280$

답 ④

8 주어진 규칙에 따라 원점에 있던 점 P가 점 $(3, 8)$로 이동할 때, 점 P의 x좌표가 3이므로 동전의 앞면이 3번 나와야 하고 점 P의 y좌표가 8이므로 동전의 뒷면이 4번 나와야 한다.

따라서 한 개의 동전을 7번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 4번 나와야 하므로 구하는 경우의 수는

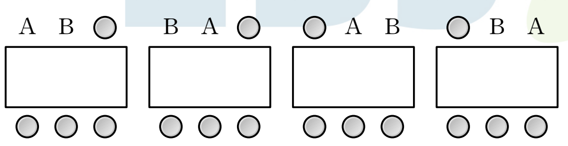
$\dfrac{7!}{3!\times4!}=35$

답 ①

Level **2** **기본 연습** 본문 12~13쪽

1 ① **2** ② **3** ② **4** ⑤ **5** ② **6** ②
7 ① **8** ④

1 A, B, C를 포함한 6명이 각각 1개의 의자에 한 사람씩 모두 앉을 때 회전하여 일치하는 것을 고려하여 A, B가 같은 면에 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는 다음 그림과 같이 4이다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3] [그림 4]

A, C는 서로 다른 면에 앉아야 하므로 C가 앉을 자리를 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

남은 세 자리에 A, B, C를 제외한 나머지 3명이 앉을 자리를 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times6=72$

답 ①

2 $8=2+6=3+5$이므로 주어진 그림의 한 가운데의 원을 C라 하면 원 C에 적힌 수에 따라 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) 원 C에 1 또는 4가 적힌 경우

원 C에 적을 수를 정하는 경우의 수는

2

원 C를 제외한 나머지 5개의 원에 적힌 수 중 2, 6이 적힌 두 원이 서로 이웃하려면 2, 6을 묶어 한 숫자로 생각하여 4개의 수를 원형으로 배열한 후, 2, 6이 서로 자리를 바꾸는 것을 고려하면 되므로 이 경우의 수는

$(4-1)!\times2=3!\times2=12$

마찬가지 방법으로 원 C를 제외한 나머지 5개의 원에 적힌 수 중 3, 5가 적힌 두 원이 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!\times2=3!\times2=12$

원 C를 제외한 나머지 5개의 원에 적힌 수 중 2, 6과 3, 5가 각각 서로 이웃하려면 2, 6을 묶어 한 숫자로 생각하고 3, 5를 묶어 한 숫자로 생각하여 3개의 수를 원형으로 배열한 후, 2, 6이 서로 자리를 바꾸는 것과 3, 5가 서로 자리를 바꾸는 것을 고려하면 되므로 이 경우의 수는

$(3-1)!\times2\times2=8$

그러므로 이 경우의 수는

$2\times(12+12-8)=32$

(ⅱ) 원 C에 2 또는 3 또는 5 또는 6이 적힌 경우

원 C에 적을 수를 정하는 경우의 수는

4

나머지 5개의 수를 원 C를 제외한 나머지 5개의 원에 적으면 2, 6이 적힌 두 원이 서로 이웃하거나 3, 5가 적힌 두 원이 서로 이웃한다.

이때 나머지 5개의 수를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

그러므로 이 경우의 수는

$4\times24=96$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$32+96=128$

답 ②

3 30000보다 커야 하므로 만의 자리의 수는 3이다.

(ⅰ) 만의 자리를 제외한 네 자리의 수 중 같은 숫자가 두 쌍인 경우

1, 2, 3 중 쌍으로 존재하는 두 수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

택한 두 수를 a, b라 하면 네 자리의 자연수의 개수는 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

그러므로 이 경우의 자연수의 개수는

$3\times6=18$

(ⅱ) 만의 자리를 제외한 네 자리의 수 중 같은 숫자가 한 쌍인 경우

1, 2, 3 중 쌍으로 존재하는 한 수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

택한 수를 c라 하고 나머지 두 수를 d, e라 하면 네 자리의 자연수의 개수는 c, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

그러므로 이 경우의 자연수의 개수는

$3\times12=36$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$18+36=54$

답 ②

4 서로 다른 m개의 공을 남김없이 서로 다른 3개의 주머니에 넣는 경우의 수는

${}_3\Pi_m=3^m$

이때 빈 주머니의 개수에 따른 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) 빈 주머니가 1개인 경우

서로 다른 3개의 주머니 중 빈 주머니가 될 주머니 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

남은 2개의 주머니에 빈 주머니가 없도록 공을 넣으려면 서로 다른 m개의 공을 남김없이 서로 다른 2개의 주머니에 넣는 경우에서 모든 공을 1개의 주머니에 넣는 경우를 제외해야 하므로 이 경우의 수는

${}_2\Pi_m-2=2^m-2$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times(2^m-2)$

(ⅱ) 빈 주머니가 2개인 경우

모든 공을 1개의 주머니에 넣어야 하므로 이 경우의 수는

3

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 빈 주머니가 있도록 넣는 경우의 수는

$3\times(2^m-2)+3=3(2^m-1)$

그러므로 $a_m=3^m-3(2^m-1)=3^m-3\times2^m+3$

$a_{n+1}-2a_n=240$에서

$a_{n+1}-2a_n$

$=(3^{n+1}-3\times2^{n+1}+3)-2(3^n-3\times2^n+3)$

$=3^n-3=240$

$3^n=243=3^5$

$n=5$

따라서

$a_n=a_5=3^5-3\times2^5+3=243-96+3=150$

답 ⑤

5 조건 (가)에 의하여 $f(a)=1$, $f(b)=3$ 또는 $f(a)=f(b)=2$ 또는 $f(a)=3$, $f(b)=1$이다.

함수 f의 치역을 Y라 하자.

(ⅰ) $f(a)=1$, $f(b)=3$일 때

$1\in Y$, $3\in Y$이므로 집합 Y의 모든 원소의 합이 9이려면 $Y=\{1, 3, 5\}$, 즉 $f(c)=5$ 또는 $f(d)=5$이어야 한다.

이 경우의 함수 f의 개수는 $f(c)$와 $f(d)$의 값이 1 또는 3 또는 5인 함수 f의 개수에서 $f(c)$와 $f(d)$의 값이 1 또는 3인 함수 f의 개수를 제외해야 하므로

${}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2=3^2-2^2=5$

(ⅱ) $f(a)=f(b)=2$일 때

$2\in Y$이므로 집합 Y의 모든 원소의 합이 9이려면 $Y=\{2, 3, 4\}$, 즉 $f(c)=3$, $f(d)=4$ 또는 $f(c)=4$, $f(d)=3$이어야 하므로 이 경우의 함수 f의 개수는 2이다.

(ⅲ) $f(a)=3$, $f(b)=1$일 때

(ⅰ)과 마찬가지 방법으로 이 경우의 함수 f의 개수는 5이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$5+2+5=12$

답 ②

6 $n(U)=6$이므로 $n(A-B)\times n(A)=n(U)$에서

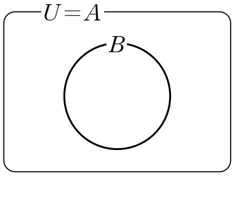
$n(A-B)\times n(A)=6$

이때 $(A-B)\subset A$이므로 $n(A-B)\le n(A)$

따라서 $n(A-B)=1$, $n(A)=6$ 또는

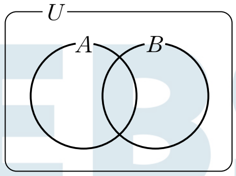
$n(A-B)=2$, $n(A)=3$

(ⅰ) $n(A-B)=1$, $n(A)=6$인 경우



$n(U)=n(A)=6$이므로 $U=A$이다.
집합 $A-B$, 즉 집합 B^C에 속하는 원소 1개를 택하면 나머지 원소는 모두 집합 B에 속한다.
그러므로 이 경우의 순서쌍 (A, B)의 개수는
${}_6C_1=6$

(ii) $n(A-B)=2$, $n(A)=3$인 경우



집합 $A-B$에 속하는 원소 2개를 택하는 경우의 수는
${}_6C_2=15$
$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=3-2=1$
이므로 나머지 4개의 원소 중 집합 $A\cap B$에 속하는 원소 1개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
나머지 3개의 원소는 각각 두 집합 $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중 한 집합의 원소이므로 두 집합 $B-A$, $(A\cup B)^C$을 정하는 경우의 수는
${}_2\Pi_3=2^3=8$
그러므로 이 경우의 순서쌍 (A, B)의 개수는
$15\times4\times8=480$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는
$6+480=486$

답 ②

7 '→ 방향'을 a, '↑ 방향'을 b, '↗ 방향'을 c라 하자.

(i) a가 5번, b가 2번일 때
a, a, a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{5!\times2!}=21$

(ii) a가 4번, b가 1번, c가 1번일 때
a, a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{4!}=30$

(iii) a가 3번, c가 2번일 때
a, a, a, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$21+30+10=61$

답 ①

8 a가 적어도 2개 연속하려면 a를 2번 이상 나열하여야 한다.

(i) a를 2번 나열하는 경우
a를 제외한 나열되는 두 문자는 b, b이거나 b, c이거나 c, c이다.
aa를 한 문자 X로 생각하여
X, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$
X, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
X, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$
그러므로 이 경우의 수는
$3+6+3=12$

(ii) a를 3번 나열하는 경우
a, a, a, b 또는 a, a, a, c를 일렬로 나열하면 적어도 2개 연속되는 a가 항상 존재하고 이 경우의 수는
$\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{3!}=4+4=8$

(iii) a를 4번 나열하는 경우
a, a, a, a를 일렬로 나열하면 연속되는 a가 4개 존재하고 이 경우의 수는
1

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$12+8+1=21$

답 ④

다른 풀이

세 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
이때 a를 3번 이상 나열하면 적어도 2개 연속되는 a가 반드시 존재하므로 적어도 2개 연속되는 a가 존재하지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) a를 나열하지 않는 경우
두 문자 b, c에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$

(ii) a를 1번 나열하는 경우
네 자리 중 a를 나열할 한 자리를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
나머지 세 자리에 두 문자 b, c에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_2\Pi_3=2^3=8$
그러므로 이 경우의 수는
$4\times8=32$

(iii) a를 2번 나열하는 경우
적어도 2개 연속되는 a가 존재하지 않도록 두 a를 나열하는 경우의 수는 $a○a○$, $a○○a$, $○a○a$로
3

나머지 두 자리에 두 문자 b, c에서 중복을 허락하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_{2}\Pi_{2}=2^2=4$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times4=12$

(i), (ii), (iii)에 의하여 적어도 2개 연속되는 a가 존재하지 않는 경우의 수는

$16+32+12=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$81-60=21$

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 17 **2** ③ **3** ③

1 n의 값에 따른 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $n=2k$ ($k=2, 3, 4, \cdots$)일 때

1부터 $2k$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $2k$개의 공 중에서 홀수가 적혀 있는 공과 짝수가 적혀 있는 공의 개수는 모두 k이다.

이때 홀수가 적혀 있는 k개의 공을 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(k-1)!$

짝수가 적혀 있는 공끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로 홀수가 적혀 있는 k개의 공 사이사이인 k곳에 짝수가 적혀 있는 k개의 공을 나열하는 경우의 수는

$k!$

그러므로 $f(2k)=(k-1)!\times k!$

(ii) $n=2k+1$ ($k=2, 3, 4, \cdots$)일 때

1부터 $2k+1$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2k+1)$개의 공 중에서 홀수가 적혀 있는 공과 짝수가 적혀 있는 공의 개수는 각각 $k+1$, k이다.

이때 홀수가 적혀 있는 $(k+1)$개의 공을 원형으로 나열하는 경우의 수는

$\{(k+1)-1\}!=k!$

짝수가 적혀 있는 공끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로 홀수가 적혀 있는 $(k+1)$개의 공 사이사이인 $(k+1)$곳에 짝수가 적혀 있는 k개의 공을 나열하는 경우의 수는

${}_{k+1}\mathrm{P}_{k}=(k+1)!$

그러므로 $f(2k+1)=k!\times(k+1)!$

(i), (ii)에서

$f(2k)=(k-1)!\times k!$, $f(2k+1)=k!\times(k+1)!$

$45(f(n)+f(n+1))=f(n+2)$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $n=2k$인 경우

$45(f(2k)+f(2k+1))=f(2k+2)$

이때

$f(2k)>0$, $f(2k+1)=f(2k+2)=k!\times(k+1)!$

이므로 방정식 ㉠을 만족시키는 n의 값이 존재하지 않는다.

㉠에서 $n=2k+1$인 경우

$45(f(2k+1)+f(2k+2))=f(2k+3)$

$45\{k!\times(k+1)!+k!\times(k+1)!\}=(k+1)!\times(k+2)!$

$45\times2\times k!\times(k+1)!=(k+1)!\times(k+2)!$

$90=(k+1)(k+2)$

$k^2+3k-88=0$

$(k+11)(k-8)=0$

$n=2k+1>3$이므로 $k=8$

따라서 $n=2\times8+1=17$

답 17

2 네 자리의 비밀번호에 이용하는 문자의 개수에 따른 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 2개의 문자를 이용하는 경우

문자 a는 한 번 이상 나열되어야 하므로 4개의 문자 b, c, d, e 중 나열될 한 문자를 택하는 경우의 수는

${}_{4}\mathrm{C}_{1}=4$

이때 택한 문자를 x라 하자.

두 문자 a, x에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_{2}\Pi_{4}=2^4=16$

이때 한 문자만 4번 나열하거나 같은 문자가 연속 3번 나오는 경우인

$aaaa$, $aaax$, $axxx$, $xaaa$, $xxxa$, $xxxx$

의 6가지를 제외해야 한다.

그러므로 이 경우의 수는

$4\times(16-6)=40$

(ii) 3개의 문자를 이용하는 경우

문자 a는 한 번 이상 나열되어야 하므로 4개의 문자 b, c, d, e 중 나열될 서로 다른 두 문자를 택하는 경우의 수는

${}_{4}\mathrm{C}_{2}=6$

이때 택한 두 문자를 y, z라 하자.

세 문자 a, y, z를 모두 한 번 이상 포함하고 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우는

a, a, y, z 또는 a, y, y, z 또는 a, y, z, z

이고 이 세 가지 경우 모두 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

이때 이 12가지 경우 모두 같은 문자가 연속 3번 이상 나오지 않는다.

그러므로 이 경우의 수는

$6\times3\times12=216$

(iii) 4개의 문자를 이용하는 경우

문자 a는 한 번 이상 나열되어야 하므로 4개의 문자 b, c, d, e 중 나열될 서로 다른 세 문자를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$

이때 택한 세 문자를 p, q, r이라 하자.

네 문자 a, p, q, r을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

이때 이 24가지 경우 모두 같은 문자가 연속 3번 이상 나오지 않는다.

그러므로 이 경우의 수는

$4\times24=96$

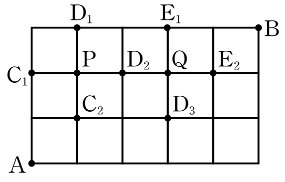
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 비밀번호의 개수는

$40+216+96=352$

답 ③

3 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{5!\times3!}=56$



그림과 같이 7개의 지점 C_1, C_2, D_1, D_2, D_3, E_1, E_2를 정하고, A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 갈 때 조건 (가)를 만족시키지 않거나 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) P지점에서 이동하는 방향을 바꾸는 경우

$A\to C_1\to P\to D_1\to B$로 가는 경우의 수는

$1\times1\times1\times1=1$

$A\to C_2\to P\to D_2\to B$로 가는 경우의 수는

$2\times1\times1\times\dfrac{4!}{3!}=8$

이므로 이 경우의 수는 $1+8=9$

(ii) Q지점을 지나고 Q지점에서 이동하는 방향을 바꾸지 않는 경우

$A\to D_2\to Q\to E_2\to B$로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}\times1\times1\times2=12$

$A\to D_3\to Q\to E_1\to B$로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\times1\times1\times1=4$

이므로 이 경우의 수는 $12+4=16$

(iii) P지점에서 이동하는 방향을 바꾸고 Q지점을 지나고 Q지점에서 이동하는 방향을 바꾸지 않는 경우

$A\to C_2\to P\to D_2\to Q\to E_2\to B$로 가는 경우의 수는

$2\times1\times1\times1\times1\times2=4$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건 (가)를 만족시키지 않거나 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는

$9+16-4=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$56-21=35$

답 ③

02 중복조합과 이항정리

유제 본문 17~23쪽

1 ③ **2** ② **3** 56 **4** ⑤ **5** 255 **6** ④
7 ③ **8** ④

1 3명의 학생에게 검은색 볼펜 1자루를 나누어 주는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

3명의 학생에게 같은 종류의 파란색 볼펜 2자루를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

3명의 학생에게 같은 종류의 빨간색 볼펜 3자루를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times6\times10=180$

답 ③

2 서로 다른 상자 3개에 흰 공을 각각 1개씩 담은 후, 나머지 흰 공 1개를 서로 다른 상자 3개 중 1개에 담는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

검은 공 6개를 서로 다른 상자 3개에 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times28=84$

답 ②

3 주어진 조건에 의하여

$f(1)\le f(3)\le f(5)\le f(7)\le f(9)<8$

이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 네 원소 1, 3, 5, 7 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

답 56

4 $(a+b+c)^5(a+b+c+d)$

$=(a+b+c)^6+d(a+b+c)^5$

이때 두 다항식 $(a+b+c)^6$, $d(a+b+c)^5$의 전개식에서 동류항은 존재하지 않는다.

$(a+b+c)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

$d(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$28+21=49$

답 ⑤

5 ${}_4C_1\times3+{}_4C_2\times3^2+{}_4C_3\times3^3+{}_4C_4\times3^4$

$=({}_4C_0+{}_4C_1\times3+{}_4C_2\times3^2+{}_4C_3\times3^3+{}_4C_4\times3^4)-{}_4C_0$

$=(1+3)^4-1$

$=4^4-1$

$=256-1=255$

답 255

6 $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r x^{6-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_6C_r a^r x^{6-3r}$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

x^3의 계수는 $6-3r=3$, 즉 $r=1$일 때

${}_6C_1 a=6a$

상수항은 $6-3r=0$, 즉 $r=2$일 때

${}_6C_2 a^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times a^2=15a^2$

x^3의 계수와 상수항의 합이 72이므로

$6a+15a^2=72$

$5a^2+2a-24=0$

$(a-2)(5a+12)=0$

$a=2$ 또는 $a=-\frac{12}{5}$

따라서 양수 a의 값은 2

답 ④

7 $\sum_{n=1}^{6}{}_{11}C_{2n-1}={}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+\cdots+{}_{11}C_{11}$

$=2^{11-1}=2^{10}$

$\sum_{n=1}^{7}{}_{12}C_{2n-2}={}_{12}C_0+{}_{12}C_2+{}_{12}C_4+\cdots+{}_{12}C_{12}$

$=2^{12-1}=2^{11}$

$$\sum_{n=1}^{11} {}_{10}C_{n-1} = {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10} = 2^{10}$$

이므로

$$\frac{\sum_{n=1}^{6} {}_{11}C_{2n-1} + \sum_{n=1}^{7} {}_{12}C_{2n-2}}{\sum_{n=1}^{11} {}_{10}C_{n-1}} = \frac{2^{10}+2^{11}}{2^{10}} = 1+2=3$$

답 ③

8 $f(4)$는 4명의 학생에게 연필 4개를 각각 1개씩 나누어 주는 경우의 수이므로

$f(4)=1$

5 이상의 자연수 n에 대하여 모든 학생이 적어도 1개의 연필을 받도록 나누어 주려면 4명의 학생에게 먼저 연필을 1개씩 나누어 준 후, 남은 연필 $(n-4)$개를 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 $f(n)$은 서로 다른 4개에서 $(n-4)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$f(n) = {}_4H_{n-4} = {}_{4+(n-4)-1}C_{n-4} = {}_{n-1}C_{n-4} = {}_{n-1}C_3\ (n \geq 5)$

따라서

$f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$

$= 1 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3$

$= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3$

$= {}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_6C_3$

$= {}_6C_4 + {}_6C_3$

$= {}_7C_4 = {}_7C_3 = {}_mC_3$

이므로 $\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = \frac{m(m-1)(m-2)}{3\times2\times1}$

$7\times6\times5 = m(m-1)(m-2)$

이때 m은 자연수이므로

$m=7$

답 ④

Level 1 **기초 연습** 본문 24~25쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ③ **4** ④ **5** ③ **6** ④
7 ③ **8** ①

1 ${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2\times1} = 45$

$n^2+3n-88=0$

$(n+11)(n-8)=0$

n은 자연수이므로 $n=8$

따라서

${}_8H_3 = {}_{8+3-1}C_3 = {}_{10}C_3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

답 ⑤

2 학생 A가 받는 카드의 색에 따른 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 학생 A가 빨간색 카드 1장을 받는 경우

빨간색 카드 2장을 세 학생 B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

노란색 카드 4장을 세 학생 B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

따라서 이 경우의 수는

$6\times15=90$

(ii) 학생 A가 노란색 카드 1장을 받는 경우

빨간색 카드 3장을 세 학생 B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

노란색 카드 3장을 세 학생 B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수도

${}_3H_3 = 10$

따라서 이 경우의 수는

$10\times10=100$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$90+100=190$

답 ④

3 5의 약수가 적힌 공의 개수가 2이려면 꺼낸 4개의 공 중 2개의 공에는 1, 1 또는 1, 5 또는 5, 5가 적혀 있어야 하고, 나머지 2개의 공에는 2, 3, 4 중 하나가 적혀 있어야 한다.

이때 2개의 공에 2, 3, 4 중 하나가 적혀 있는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times6=18$

답 ③

4 $(x+y+z)^{10}$의 전개식에서 xyz를 인수로 갖는 서로 다른 항의 개수는 세 문자 x, y, z 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9\times8}{2\times1} = 36$

답 ④

5 자연수 n에 대하여 $(a-x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r a^{n-r}(-x)^r = {}_nC_r a^{n-r}(-1)^r x^r$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

3 이상의 자연수 n에 대하여 x^3의 계수는 $r=3$일 때

${}_{n}C_{3}a^{n-3}(-1)^3=-{}_{n}C_{3}a^{n-3}$

이때 $(a-x)^3+(a-x)^4+(a-x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수가 -7이므로

$$-{}_{3}C_{3}a^0-{}_{4}C_{3}a^1-{}_{5}C_{3}a^2=-{}_{3}C_{3}-{}_{4}C_{1}a-{}_{5}C_{2}a^2$$
$$=-1-4a-10a^2=-7$$

$5a^2+2a-3=0$

$(a+1)(5a-3)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}$

답 ③

6 두 조건 (가), (나)에 의하여

$$a+b+c+d+e=2b+b+c+d+e$$
$$=3b+c+d+e=5$$

이므로 $c+d+e=5-3b$

(i) $b=0$인 경우

순서쌍 $(0, 0, c, d, e)$의 개수는 방정식 $c+d+e=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e의 순서쌍 (c, d, e)의 개수와 같으므로

$${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

(ii) $b=1$인 경우

순서쌍 $(2, 1, c, d, e)$의 개수는 방정식 $c+d+e=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e의 순서쌍 (c, d, e)의 개수와 같으므로

$${}_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$21+6=27$

답 ④

7
$$\sum_{n=1}^{7}{}_{7}C_{n-1}={}_{7}C_{0}+{}_{7}C_{1}+{}_{7}C_{2}+\cdots+{}_{7}C_{6}$$
$$=({}_{7}C_{0}+{}_{7}C_{1}+{}_{7}C_{2}+\cdots+{}_{7}C_{6}+{}_{7}C_{7})-{}_{7}C_{7}$$
$$=2^7-1=127$$

$$\sum_{n=1}^{7}{}_{8}C_{n-1}={}_{8}C_{0}+{}_{8}C_{1}+{}_{8}C_{2}+\cdots+{}_{8}C_{6}$$
$$=({}_{8}C_{0}+{}_{8}C_{1}+{}_{8}C_{2}+\cdots+{}_{8}C_{7}+{}_{8}C_{8})-({}_{8}C_{7}+{}_{8}C_{8})$$
$$=2^8-({}_{8}C_{1}+{}_{8}C_{8})$$
$$=2^8-(8+1)=247$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{7}({}_{7}C_{n-1}+{}_{8}C_{n-1})=\sum_{n=1}^{7}{}_{7}C_{n-1}+\sum_{n=1}^{7}{}_{8}C_{n-1}$$
$$=127+247=374$$

답 ③

8
$$N={}_{9}C_{1}+{}_{9}C_{2}+{}_{9}C_{4}+{}_{9}C_{6}+{}_{9}C_{8}$$
$$=({}_{9}C_{0}+{}_{9}C_{2}+{}_{9}C_{4}+{}_{9}C_{6}+{}_{9}C_{8})-{}_{9}C_{0}+{}_{9}C_{1}$$
$$=2^{9-1}-1+9$$
$$=264=2^3\times3\times11$$

따라서 N의 소인수는 2, 3, 11이므로 모든 소인수의 합은

$2+3+11=16$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 26~27쪽

1 ④ **2** ② **3** 22 **4** ① **5** ③ **6** ④ **7** 256 **8** ④

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여

$f(1)\in X$, $f(2)\in X$, $f(3)\in X$이고

$f(1)+f(2)+f(3)=5$ …… ㉠

이므로 $f(3)$의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

(i) $f(3)=1$일 때

㉠에서

$f(1)+f(2)+1=5$, $f(1)+f(2)=4$

이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값은 각각 1, 3 또는 2, 2 또는 3, 1이다.

이때 $1=f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키는 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 6개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{6}H_{2}={}_{6+2-1}C_{2}={}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

그러므로 $f(3)=1$일 때 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times21=63$

(ii) $f(3)=2$일 때

㉠에서

$f(1)+f(2)+2=5$, $f(1)+f(2)=3$

이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값은 각각 1, 2 또는 2, 1이다.

이때 $2=f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키는 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 중 2 이상인 원소 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{5}H_{2}={}_{5+2-1}C_{2}={}_{6}C_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

그러므로 $f(3)=2$일 때 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times15=30$

(iii) $f(3)=3$일 때

㉠에서

$f(1)+f(2)+3=5$, $f(1)+f(2)=2$

이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값은 모두 1이다.

이때 $3=f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키는 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 중 3 이상인 원소 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

그러므로 $f(3)=3$일 때 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$1\times10=10$

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$63+30+10=103$

한편, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_1=6$이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$103\times6=618$

답 ④

2 흰 공을 받은 사람의 수에 따른 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 흰 공을 받은 사람이 1명일 때

흰 공 3개를 받을 사람 1명을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

흰 공을 받지 않은 2명에게 검은 공을 1개씩 나누어 준 후, 남은 검은 공 2개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times6=18$

(ii) 흰 공을 받은 사람이 2명일 때

흰 공 1개, 흰 공 2개를 받을 사람 2명을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

흰 공을 받지 않은 1명에게 검은 공 1개를 나누어 준 후, 남은 검은 공 3개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

그러므로 이 경우의 수는

$6\times10=60$

(iii) 흰 공을 받은 사람이 3명일 때

세 사람 모두에게 흰 공을 1개씩 나누어 준 후, 검은 공 4개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$18+60+15=93$

답 ②

3 $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$

(a', b', c', d', e'은 음이 아닌 정수)

라 하면 조건 (가)의 $a+b+c+2(d+e)=11$에서

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+2\{(d'+1)+(e'+1)\}=11$

$a'+b'+c'+2(d'+e')=4$

이므로

$a'+b'+c'=4$, $d'+e'=0$

또는 $a'+b'+c'=2$, $d'+e'=1$

또는 $a'+b'+c'=0$, $d'+e'=2$

또 조건 (나)의 $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)(e-2)=0$에서 a, b, c, d, e 중 적어도 하나는 2이어야 하므로 a', b', c', d', e' 중 적어도 하나는 1이어야 한다.

(i) $a'+b'+c'=4$, $d'+e'=0$일 때

$d'+e'=0$에서 $d'=e'=0$

$a'+b'+c'=4$를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c')의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

이때 $a'\ne1$, $b'\ne1$, $c'\ne1$인 순서쌍 (a', b', c')은

$(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$, $(2, 2, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(0, 2, 2)$

따라서 이 경우의 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는

$15-6=9$

(ii) $a'+b'+c'=2$, $d'+e'=1$일 때

$d'+e'=1$에서 $d'=1$, $e'=0$ 또는 $d'=0$, $e'=1$이므로 d', e' 중 하나는 항상 1이다.

이때 $a'+b'+c'=2$를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c')의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

따라서 이 경우의 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는

$2\times6=12$

(iii) $a'+b'+c'=0$, $d'+e'=2$일 때

$a'+b'+c'=0$에서 $a'=b'=c'=0$이므로 d', e' 중 적어도 하나는 1이어야 한다.

$d'+e'=2$에서 $d'=e'=1$

따라서 이 경우의 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$9+12+1=22$

답 22

4 $\left(ax+\frac{b}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(ax)^{6-r}\left(\frac{b}{x}\right)^r={}_6C_r a^{6-r}b^r x^{6-2r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

x^2의 계수는 $6-2r=2$, 즉 $r=2$일 때

${}_6C_2 a^4b^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times a^4b^2=15a^4b^2$

x^4의 계수는 $6-2r=4$, 즉 $r=1$일 때

${}_6C_1 a^5b^1=6a^5b$

x^2의 계수와 x^4의 계수가 c로 같으므로

$c=15a^4b^2=6a^5b$

$15a^4b^2=6a^5b$에서

$\frac{a^4b^2}{a^5b}=\frac{6}{15}$

$\frac{b}{a}=\frac{2}{5}$

한편, $\left(ax+\frac{b}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항 d는

$6-2r=0$, 즉 $r=3$일 때

$d={}_6C_3 a^3b^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times a^3b^3=20a^3b^3$

따라서

$\frac{d}{c}=\frac{20a^3b^3}{15a^4b^2}=\frac{4}{3}\times\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$

답 ①

5 네 학생 A, B, C, D가 받은 사탕의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 조건 (가)에 의하여 $a\ge1$, $b\ge1$, $c\ge1$, $d\ge1$

$a+b+c+d=10$에서

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$ (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=10$

$a'+b'+c'+d'=6$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 $a+b=(a'+1)+(b'+1)=a'+b'+2$가 홀수이므로 $a'+b'$도 홀수이다.

㉠에서 $a'+b'=1$, $c'+d'=5$ 또는 $a'+b'=3$, $c'+d'=3$ 또는 $a'+b'=5$, $c'+d'=1$

(ⅰ) $a'+b'=1$, $c'+d'=5$일 때

순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

${}_2H_1\times{}_2H_5$

$={}_{2+1-1}C_1\times{}_{2+5-1}C_5$

$={}_2C_1\times{}_6C_5$

$={}_2C_1\times{}_6C_1$

$=2\times6=12$

(ⅱ) $a'+b'=3$, $c'+d'=3$일 때

순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

${}_2H_3\times{}_2H_3$

$=({}_{2+3-1}C_3)^2$

$=({}_4C_3)^2$

$=({}_4C_1)^2$

$=4^2=16$

(ⅲ) $a'+b'=5$, $c'+d'=1$일 때

순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

${}_2H_5\times{}_2H_1$

$={}_6C_1\times{}_2C_1$

$=6\times2=12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$12+16+12=40$

답 ③

6 천의 자리의 수가 a이므로 $a\ge1$

$a<b\le c\le d$인 네 자리의 자연수의 개수는

$1\le a\le b\le c\le d\le9$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수인 ${}_9H_4$에서

$1\le a=b\le c\le d\le9$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수인 ${}_9H_3$을 뺀 것과 같으므로

${}_9H_4-{}_9H_3$

$={}_{9+4-1}C_4-{}_{9+3-1}C_3$

$={}_{12}C_4-{}_{11}C_3$

$=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}-\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}$

$=495-165=330$

답 ④

참고

${}_9H_4-{}_9H_3$의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$ $(1\le r\le n-1)$에서

${}_nC_r-{}_{n-1}C_{r-1}={}_{n-1}C_r$이므로

${}_9H_4-{}_9H_3={}_{12}C_4-{}_{11}C_3={}_{11}C_4=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$

다른 풀이

천의 자리의 수가 a이므로 $a\ge1$

$a'=a+1$이라 하면 $a<b\le c\le d$인 네 자리의 자연수의 개수는 $2\le a'\le b\le c\le d\le9$를 만족시키는 자연수 a', b, c, d의 모든 순서쌍 (a', b, c, d)의 개수인 ${}_8H_4$이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

${}_8H_4={}_{8+4-1}C_4={}_{11}C_4=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$

7 조건 (가)의 $1\in X$에서 $n(X)\geq 1$이고 조건 (나)의 $n(X)\leq 5$에서

$1\leq n(X)\leq 5$

이때 $2\notin X$이므로 집합 X의 개수는 $n(X)$의 값에 따라 다음과 같다.

$n(X)=1$일 때, $X=\{1\}$로 집합 X의 개수는 1

$n(X)=2$일 때, 1, 2를 제외한 전체집합 U의 원소 중 한 원소를 택하면 되므로 집합 X의 개수는 ${}_9C_1$

$n(X)=3$일 때, 1, 2를 제외한 전체집합 U의 원소 중 서로 다른 두 원소를 택하면 되므로 집합 X의 개수는 ${}_9C_2$

$n(X)=4$일 때, 1, 2를 제외한 전체집합 U의 원소 중 서로 다른 세 원소를 택하면 되므로 집합 X의 개수는 ${}_9C_3$

$n(X)=5$일 때, 1, 2를 제외한 전체집합 U의 원소 중 서로 다른 네 원소를 택하면 되므로 집합 X의 개수는 ${}_9C_4$

따라서 집합 X의 개수는

$$\begin{aligned}1+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4&={}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4\\&=\frac{1}{2}({}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9)\\&=\frac{1}{2}\times 2^9=2^8=256\end{aligned}$$

답 256

참고

${}_9C_0={}_9C_9$, ${}_9C_1={}_9C_8$, ${}_9C_2={}_9C_7$, ${}_9C_3={}_9C_6$, ${}_9C_4={}_9C_5$이므로

${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9=2\times({}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4)$

따라서

${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4=\frac{1}{2}({}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9)$

8 $(1+ax)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax)^r={}_4C_ra^rx^r$ (단, $r=0, 1, 2, 3, 4$)

x의 계수는 $r=1$일 때

${}_4C_1a=4a$

x^2의 계수는 $r=2$일 때

${}_4C_2a^2=\frac{4\times 3}{2\times 1}\times a^2=6a^2$

x^4의 계수는 $r=4$일 때

${}_4C_4a^4=a^4$

이때 x, x^4, x^2의 계수, 즉 $4a$, a^4, $6a^2$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a^4=4a+6a^2$

$a^4-3a^2-2a=0$

$a(a-2)(a+1)^2=0$

이때 $a\neq 0$이므로 $a=2$ 또는 $a=-1$

따라서 서로 다른 모든 a의 값의 합은

$2+(-1)=1$

답 ④

Level 3 **실력 완성** 본문 28쪽

1 50 **2** ④ **3** ①

1 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d\geq 4$이고 조건 (나)에서 $a+b+c+d$가 한 자리의 홀수이므로 $a+b+c+d$의 값은 5 또는 7 또는 9이다.

조건 (가)에서 a가 홀수이므로 음이 아닌 정수 a', b', c', d'에 대하여

$a=2a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하자.

(i) $a+b+c+d=5$일 때

$(2a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=5$

$2a'+b'+c'+d'=1$ ······ ㉠

$a'=0$, $b'+c'+d'=1$

이므로 방정식 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

따라서 방정식 $a+b+c+d=5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 3

(ii) $a+b+c+d=7$일 때

$(2a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=7$

$2a'+b'+c'+d'=3$ ······ ㉡

$a'=0$, $b'+c'+d'=3$ 또는 $a'=1$, $b'+c'+d'=1$

이므로 방정식 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

$$\begin{aligned}{}_3H_3+{}_3H_1&={}_{3+3-1}C_3+{}_{3+1-1}C_1\\&={}_5C_3+{}_3C_1\\&={}_5C_2+{}_3C_1=\frac{5\times 4}{2\times 1}+3=13\end{aligned}$$

따라서 방정식 $a+b+c+d=7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 13

(iii) $a+b+c+d=9$일 때

$(2a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=9$

$2a'+b'+c'+d'=5$ ······ ㉢

$a'=0$, $b'+c'+d'=5$ 또는 $a'=1$, $b'+c'+d'=3$ 또는 $a'=2$, $b'+c'+d'=1$

이므로 방정식 ㉢을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

$$\begin{aligned}{}_3H_5+{}_3H_3+{}_3H_1&={}_{3+5-1}C_5+{}_{3+3-1}C_3+{}_{3+1-1}C_1\\&={}_7C_5+{}_5C_3+{}_3C_1\\&={}_7C_2+{}_5C_2+{}_3C_1\\&=\frac{7\times 6}{2\times 1}+\frac{5\times 4}{2\times 1}+3=34\end{aligned}$$

따라서 방정식 $a+b+c+d=9$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 34

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$3+13+34=50$

답 50

2 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(2x^2)^{n-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_nC_r2^{n-r}(-1)^rx^{2n-3r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

x^{10}의 계수는 $2n-3r=10$, 즉 $r=\frac{2n-10}{3}$일 때이므로

$\frac{2n-10}{3}=k$ …… ㉠

라 하면 x^{10}의 계수는

${}_nC_k2^{n-k}(-1)^k$

x^7의 계수는 $2n-3r=7$, 즉 $r=\frac{2n-7}{3}$일 때이고,

$\frac{2n-7}{3}=\frac{2n-10}{3}+1=k+1$이므로 x^7의 계수는

${}_nC_{k+1}2^{n-k-1}(-1)^{k+1}$

이때 k와 $k+1$이 모두 0 이상 n 이하의 정수이어야 하므로 k는 0 이상 $n-1$ 이하의 정수이다.

한편, $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 x^{10}의 계수와 x^7의 계수의 합이 0이므로

${}_nC_k2^{n-k}(-1)^k+{}_nC_{k+1}2^{n-k-1}(-1)^{k+1}=0$

$2^{n-k-1}(-1)^k(2\times{}_nC_k-{}_nC_{k+1})=0$

$2^{n-k-1}(-1)^k\neq0$이므로

$2\times{}_nC_k-{}_nC_{k+1}=0$

$$2\times\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=0$$

$$\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{2}{n-k}-\frac{1}{k+1}\right)=0$$

$\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\neq0$이므로

$$\frac{2}{n-k}-\frac{1}{k+1}=0$$

$2(k+1)-(n-k)=0$

$k=\frac{n-2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{2n-10}{3}=\frac{n-2}{3}$

$n=8$

따라서 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^n$, 즉 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_r2^{8-r}(-1)^rx^{16-3r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

이므로 $\frac{1}{x^2}$의 계수는 $16-3r=-2$, 즉 $r=6$일 때

$${}_8C_6\times2^2\times(-1)^6={}_8C_2\times4=\frac{8\times7}{2\times1}\times4=112$$

답 ④

3 조건 '집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.'를 만족시키는 모든 함수 f의 집합을 A라 하고 집합 A의 부분집합 중에서 조건 '집합 X의 어떤 서로 다른 세 원소 x_1, x_2, x_3에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$이다.'를 만족시키는 모든 함수 f의 집합을 B라 하면 구하는 함수의 개수는 $n(A)-n(B)$이다.

집합 A에 속하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$$n(A)={}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

집합 A에 속하는 함수 중 집합 B에 속하는 함수의 개수는 함수 f의 치역의 원소의 개수에 따라 다음과 같다.

(ⅰ) 치역의 원소의 개수가 1인 경우

집합 X의 원소 5개에서 치역의 원소 1개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

이고 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)$이므로 이 경우의 함수는 모두 집합 B에 속한다.

따라서 이 경우 집합 B에 속하는 함수의 개수는 5

(ⅱ) 치역의 원소의 개수가 2인 경우

집합 X의 원소 5개에서 치역의 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

택한 두 원소를 a, b $(a<b)$라 하면 집합 A의 부분집합인 집합 B에 속하는 함수는 함숫값이 다음 표와 같은 4개의 함수이다.

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$
a	a	a	a	b
a	a	a	b	b
a	a	b	b	b
a	b	b	b	b

따라서 이 경우 집합 B에 속하는 함수의 개수는

$10\times4=40$

(ⅲ) 치역의 원소의 개수가 3인 경우

집합 X의 원소 5개에서 치역의 원소 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

택한 세 원소를 c, d, e $(c<d<e)$라 하면 집합 A의 부분집합인 집합 B에 속하는 함수는 함숫값이 다음 표와 같은 3개의 함수이다.

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$
c	c	c	d	e
c	d	d	d	e
c	d	e	e	e

따라서 이 경우 집합 B에 속하는 함수의 개수는

$10\times3=30$

(iv) 치역의 원소의 개수가 4 또는 5인 경우

이 경우 집합 A의 부분집합인 집합 B에 속하는 함수는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $n(B)=5+40+30=75$

따라서 구하는 함수의 개수는

$n(A)-n(B)=126-75=51$

답 ①

참고

$n(B)$를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$n(B)$는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 5개를 선택하되 특정한 1개를 3번 이상 선택하는 경우의 수와 같다.

이때 3번 이상 선택되는 것을 정하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 $n(B)=5\times15=75$

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 31~37쪽

1 ④ 2 21 3 ⑤ 4 ④ 5 ③ 6 ⑤
7 ④ 8 ①

1 한 개의 동전을 세 번 던지는 시행의 표본공간을 S라 하고, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면

$S=\{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$

사건 A와 서로 배반사건인 사건을 B라 하면 $A\cap B=\varnothing$이므로 사건 B는 사건 A의 여사건 A^C의 부분집합이다.

A^C은 세 번 모두 앞면 또는 세 번 모두 뒷면이 나오는 사건이므로

$A^C=\{\text{HHH, TTT}\}$

$B\subset A^C$이므로 사건 B의 개수는 $2^2=4$

따라서 사건 A와 서로 배반사건인 사건의 개수는 4

답 ④

2 이 시행의 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

조건 (가)에서 $A\cap X=\varnothing$

조건 (나)에서 $B\cap X=\varnothing$

즉, $(A\cap X)\cup(B\cap X)=\varnothing$에서 $(A\cup B)\cap X=\varnothing$

두 사건 $A\cup B$와 X는 서로 배반사건이므로

$X\subset(A\cup B)^C$

이때 사건 X의 개수가 $16=2^4$이기 위해서는

$n((A\cup B)^C)=4$이어야 한다.

즉, $n(A\cup B)=n(S)-n((A\cup B)^C)=9-4=5$ …… ㉠

이때 9 이하의 자연수 k에 대하여 $n(A\cup B)\le k$이므로 ㉠을 만족시키려면 $k\ge5$이어야 한다.

$k=5$일 때, $A=\{2, 4\}$, $B=\{1, 5\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$

$k=6$일 때, $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$

$k=7$일 때, $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 7\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 7\}$

$k=8$일 때, $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8\}$

$k=9$일 때, $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 3, 9\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

따라서 사건 X의 개수가 16이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값은 6, 7, 8이고, 그 합은

$6+7+8=21$

답 21

3 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 경우의 수는

${}_6\Pi_3=216$

$ab=c$, 즉 $c=ab$에서 두 수 a, b는 c의 양의 약수이다.

$c=1$일 때, 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$

$c=2$일 때, 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$

$c=3$일 때, 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3)$, $(3, 1)$

$c=4$일 때, 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$

$c=5$일 때, 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$, $(5, 1)$

$c=6$일 때, 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$

그러므로 $ab=c$를 만족시키는 경우의 수는

$1+2+2+3+2+4=14$

따라서 구하는 확률은

$\frac{14}{216}=\frac{7}{108}$

답 ⑤

4 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!=720$

A와 B 사이에 C가 서게 되는 경우의 수는 6개의 문자 A, B, C, D, E, F에서 A, B, C를 각각 문자 X, X, X라 생각하고 여섯 개의 문자를 일렬로 나열한 후, 두 번째에 나열된 X를 C로 바꾸고 나머지 두 개의 X, X를 각각 A, B 또는 B, A로 바꾸는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{3!}\times 2!=240$

따라서 구하는 확률은

$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$

답 ④

5 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수 중 큰 수가 6인 사건을 A, 두 수의 곱이 12의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수 중 큰 수가 6인 경우는 6이 적혀 있는 카드를 꺼내고, 1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 카드에서 한 장을 꺼내는 경우와 같으므로 이 경우의 수는 5

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{28}$

꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 12의 배수인 경우는 다음과 같다.

6이 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우, 6이 아닌 짝수 2, 4, 8이 적혀 있는 카드 한 장을 꺼내면 되므로 이 경우의 수는 3

6이 아닌 다른 수가 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우, 3과 4 또는 3과 8이 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로 이 경우의 수는 2

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3+2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{28}$

사건 $A\cap B$는 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수 중 큰 수가 6이면서 두 수의 곱이 12의 배수인 사건이고, 2와 6 또는 4와 6이 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로 이 경우의 수는 2

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{14}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{5}{28}+\frac{5}{28}-\frac{1}{14}=\frac{2}{7}\end{aligned}$$

답 ③

6 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내어 일렬로 나열할 때 이웃하는 공의 색이 서로 다른 공의 배열인 사건을 A, 공에 적힌 세 수의 합이 5인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

사건 A는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 꺼내어 흰 공 2개를 일렬로 나열한 후 2개의 흰 공 사이에 검은 공 1개를 놓거나, 흰 공 1개와 검은 공 2개를 꺼내어 검은 공 2개를 일렬로 나열한 후 2개의 검은 공 사이에 흰 공 1개를 놓는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{({}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1)\times 2!+({}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2)\times 2!}{{}_5\mathrm{C}_3\times 3!}=\frac{3}{10}$$

사건 B는 숫자 1이 적혀 있는 흰 공 1개와 숫자 1, 3이 하나씩 적혀 있는 검은 공 2개를 꺼내어 일렬로 나열하거나, 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 흰 공 2개와 숫자 2가 적혀 있는 검은 공 1개를 꺼내어 일렬로 나열하거나, 숫자 2가 적혀 있는 흰 공 1개와 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 검은 공 2개를 꺼내어 일렬로 나열하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3!+3!+3!}{{}_5\mathrm{C}_3\times 3!}=\frac{3}{10}$$

사건 $A\cap B$는 숫자 1, 3이 하나씩 적혀 있는 검은 공 2개와 숫자 1이 적혀 있는 흰 공을 꺼내어 2개의 검은 공을 일렬로 나열한 후 2개의 검은 공 사이에 흰 공 1개를 놓거나, 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 흰 공 2개와 숫자 2가 적혀 있는

검은 공을 꺼내어 2개의 흰 공을 일렬로 나열한 후 2개의 흰 공 사이에 검은 공 1개를 놓거나, 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 검은 공 2개와 숫자 2가 적혀 있는 흰 공을 꺼내어 2개의 검은 공을 일렬로 나열한 후 2개의 검은 공 사이에 흰 공 1개를 놓는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2!+2!+2!}{{}_5\mathrm{C}_3\times 3!}=\dfrac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{2}$

답 ⑤

7 흰 공 3개, 검은 공 3개, 파란 공 2개가 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공의 색이 모두 같거나 3개 중 2개의 공의 색이 같은 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 꺼낸 3개의 공의 색이 모두 다른 사건이다.

세 가지 색의 공을 모두 포함하여 3개의 공을 꺼내는 경우는 흰 공 1개, 검은 공 1개, 파란 공 1개를 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{9}{28}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{9}{28}=\dfrac{19}{28}$

답 ④

8 1부터 10까지의 10개의 자연수 중에서 4개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_4=210$

택한 4개의 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱이 40 이하인 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱이 40보다 큰 사건이다.

여섯 개의 수 5, 6, 7, 8, 9, 10에서 4개의 수를 택할 때, 5, 6, 7, 8을 택한 경우를 제외한 나머지 경우는 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱이 모두 40보다 크다.

그러므로 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4-1}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{15-1}{210}=\dfrac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$

답 ①

Level 1 **기초 연습** 본문 38~39쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ① **4** ④ **5** ② **6** ①
7 ③ **8** ②

1 두 수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4\times 4=16$

$a^b>b^a$인 두 수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$

이고, 그 개수는 5이다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{5}{16}$

답 ③

2 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택해 만들 수 있는 모든 숫자열의 개수는

${}_5\mathrm{P}_3=60$

서로 이웃한 두 수의 합이 모두 홀수인 경우는 나열한 3개의 수가 차례로 홀수, 짝수, 홀수 또는 짝수, 홀수, 짝수인 경우이므로 이 경우의 수는

$({}_3\mathrm{C}_2\times 2!)\times{}_2\mathrm{C}_1+({}_2\mathrm{C}_2\times 2!)\times{}_3\mathrm{C}_1=12+6=18$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{18}{60}=\dfrac{3}{10}$

답 ⑤

3 여섯 개의 문자 a, a, b, b, X, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times 2!}=180$

두 대문자 사이에 소문자가 2개만 있도록 나열하는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 대문자 사이에 같은 소문자가 2개만 있는 경우

두 대문자 사이에 a, a만 있도록 나열하는 경우의 수는 X, a, a, Y의 한 묶음을 T라 하고 T, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수가

$\dfrac{3!}{2!}=3$

이고, 묶음 T에서 X, Y가 자리를 바꾸는 경우의 수가 2이므로

$3\times 2=6$

마찬가지 방법으로 두 대문자 사이에 b, b만 있도록 나열하는 경우의 수는 6

그러므로 두 대문자 사이에 같은 소문자가 2개만 있도록 나열하는 경우의 수는

$6+6=12$

(ii) 두 대문자 사이에 서로 다른 소문자가 2개만 있는 경우

두 대문자 사이에 a, b만 있는 경우이므로 X, a, b, Y의 한 묶음을 S라 하고 S, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수가

$3!=6$

이고, 묶음 S에서 X, Y가 자리를 바꾸고 a, b가 자리를 바꾸는 경우의 수가

$2!\times2!=4$

이므로 이 경우의 수는

$6\times4=24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{12+24}{180}=\frac{1}{5}$

답 ①

4 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$이고 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{5}{6}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

답 ④

5 1부터 7까지의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

짝수를 모두 짝수 번째에 나열하는 사건을 A, 소수를 모두 소수 번째에 나열하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

짝수 2, 4, 6을 모두 짝수 번째에 나열하고 나머지 숫자를 나머지 자리에 나열하는 경우의 수는

$3!\times4!$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3!\times4!}{7!}=\frac{1}{35}$

소수 2, 3, 5, 7을 모두 소수 번째에 나열하고 나머지 숫자를 나머지 자리에 나열하는 경우의 수는

$4!\times3!$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{4!\times3!}{7!}=\frac{1}{35}$

사건 $A\cap B$는 숫자 2를 두 번째 자리, 숫자 3, 5, 7을 남은 소수 번째에, 숫자 4, 6을 남은 짝수 번째에, 그리고 숫자 1을 첫 번째 자리에 나열하는 사건이므로 이 경우의 수는

$3!\times2!$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3!\times2!}{7!}=\frac{1}{420}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{35}+\frac{1}{35}-\frac{1}{420}=\frac{23}{420}$

답 ②

6 같은 종류의 빨간 펜 3자루, 같은 종류의 파란 펜 4자루가 들어 있는 상자에서 임의로 4자루의 펜을 동시에 꺼낼 때, 빨간 펜 3자루를 꺼내는 사건을 A, 파란 펜 3자루를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

사건 A는 빨간 펜 3자루, 파란 펜 1자루를 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{4}{35}$

사건 B는 빨간 펜 1자루, 파란 펜 3자루를 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{12}{35}$

이때 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{4}{35}+\frac{12}{35}=\frac{16}{35}$

답 ①

7 10명의 학생 중 임의로 3명의 대표를 선택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

10명의 학생 중 임의로 3명의 대표를 선택할 때, 세 학생 A, B, C 중 적어도 한 명이 대표인 사건을 X라 하면 X의 여사건 X^C은 세 학생 A, B, C를 모두 대표로 선택하지 않는 사건이다.

세 학생 A, B, C를 모두 대표로 선택하지 않는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 7명의 학생 중 3명의 대표를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7\mathrm{C}_3=35$

그러므로 $\mathrm{P}(X^C)=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$

답 ③

8 전체집합 U의 공집합이 아닌 한 부분집합 X를 택하는 경우의 수는

$2^5-1=31$

집합 $A\cup X$의 모든 원소의 곱이 짝수인 사건을 B라 하면 B의 여사건 B^C은 집합 $A\cup X$의 모든 원소의 곱이 홀수인 사건이다.

이때 $A=\{1, 3, 5\}$이므로 집합 $A\cup X$의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 $X\subset A$이어야 한다.

이를 만족시키는 집합 X의 개수는 $2^3-1=7$이므로

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{31}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{7}{31}=\frac{24}{31}$

답 ②

Level **2** **기본 연습** 본문 40~41쪽

1 ④	**2** ③	**3** ①	**4** ②	**5** ③	**6** ④
7 27	**8** ⑤				

1 세 수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

$(a-b)(b-c)>0$인 경우는 다음과 같다.

(i) $a-b>0$이고 $b-c>0$, 즉 $a>b>c$일 때

이를 만족시키는 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5에서 택한 서로 다른 3개의 수의 대소 관계에 따라 a, b, c의 값을 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3={}_5C_2=10$

(ii) $a-b<0$이고 $b-c<0$, 즉 $a<b<c$일 때

이를 만족시키는 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5에서 택한 서로 다른 3개의 수의 대소 관계에 따라 a, b, c의 값을 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3={}_5C_2=10$

(i), (ii)에서 $(a-b)(b-c)>0$을 만족시키는 세 수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$10+10=20$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{20}{125}=\dfrac{4}{25}$

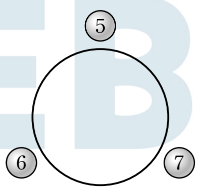
답 ④

2 7개의 공을 원형으로 배열하는 경우의 수는

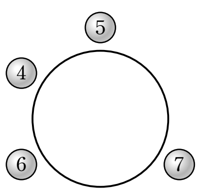
$(7-1)!=6!=720$

숫자 5, 6, 7이 적혀 있는 공을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(3-1)!=2!=2$

이 중 숫자 5, 6, 7이 다음과 같이 배열되어 있다고 하자.



(i) 숫자 4가 적힌 공이 숫자 5, 6이 적힌 공 사이에 놓일 경우



숫자 1, 2, 3이 적힌 공 중 2개의 공을 숫자 5, 7이 적힌 공 사이에 배열하고 나머지 1개의 공을 숫자 6, 7이 적힌 공 사이에 놓는 경우의 수는

$({}_3C_2\times2!)\times1=6$

숫자 1, 2, 3이 적힌 공 중 2개의 공을 숫자 6, 7이 적힌 공 사이에 배열하고 나머지 1개의 공을 숫자 5, 7이 적힌 공 사이에 놓는 경우의 수는

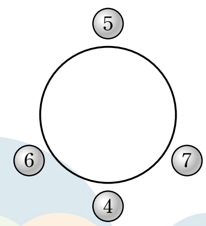
$({}_3C_2\times2!)\times1=6$

숫자 1, 2, 3이 적힌 공 중 2개의 공을 숫자 6, 7이 적힌 공 사이와 숫자 5, 7이 적힌 공 사이에 각각 놓고 나머지 1개의 공을 숫자 4, 6이 적힌 공 사이 또는 숫자 4, 5가 적힌 공 사이에 놓는 경우의 수는

$({}_3C_2\times2!)\times2=12$

그러므로 이 경우의 수는 $6+6+12=24$

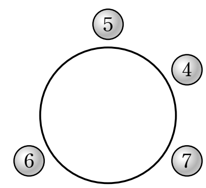
(ii) 숫자 4가 적힌 공이 숫자 6, 7이 적힌 공 사이에 놓일 경우



숫자 1, 2, 3이 적힌 공을 숫자 5, 6이 적힌 공 사이, 숫자 4, 7이 적힌 공 사이, 숫자 7, 5가 적힌 공 사이에 놓아야 하므로 이 경우의 수는

$3!=6$

(iii) 숫자 4가 적힌 공이 숫자 5, 7이 적힌 공 사이에 놓일 경우



숫자 1, 2, 3이 적힌 공을 숫자 5, 6이 적힌 공 사이, 숫자 6, 7이 적힌 공 사이, 숫자 7, 4가 적힌 공 사이에 놓아야 하므로 이 경우의 수는

$3!=6$

(i), (ii), (iii)에서 경우의 수는 $24+6+6=36$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{2\times36}{720}=\dfrac{1}{10}$

답 ③

다른 풀이

7개의 공을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

숫자 7이 적혀 있는 공을 먼저 배열하고, 이 공의 양 옆에

숫자 1 또는 숫자 2 또는 숫자 3이 적혀 있는 공을 배열하는 경우의 수는

$1\times{}_3\mathrm{P}_2=6$

이때 숫자 1, 2, 3 중 숫자 7이 적혀 있는 공의 양 옆에 배열하지 않은 공에 적혀 있는 숫자를 a라 하자.

$\vee$ a $\vee$ 4 $\vee$

숫자 a, 4, 5, 6이 각각 적혀 있는 4개의 공을 숫자 5, 숫자 6이 적혀 있는 공이 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는 위의 그림과 같이 숫자 a, 숫자 4가 적혀 있는 공을 먼저 배열하고, 이 2개의 공 사이와 양 옆의 3개의 $\vee$ 중 2개를 택한 후 숫자 5, 숫자 6이 적혀 있는 공을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$2!\times{}_3\mathrm{P}_2=2\times6=12$

그러므로 이웃하는 두 공에 적힌 수의 합이 모두 10 이하가 되도록 배열하는 경우의 수는

$6\times12=72$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{72}{720}=\dfrac{1}{10}$

3 집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_9\mathrm{P}_4$

주어진 조건을 만족시키기 위해서는

$f(2)\in\{2, 4, 6, 8\}$,

$f(3)\in\{3, 6, 9\}$,

$f(4)\in\{4, 8\}$

이어야 하므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $f(4)=4$일 때

$f(2)\in\{2, 6, 8\}$, $f(3)\in\{3, 6, 9\}$이고

$f(2)\neq f(3)$이므로 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times3-1=8$

이 각각에 대하여 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 6

그러므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$8\times6=48$

(ii) $f(4)=8$일 때

$f(2)\in\{2, 4, 6\}$, $f(3)\in\{3, 6, 9\}$이고

$f(2)\neq f(3)$이므로 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times3-1=8$

이 각각에 대하여 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 6

그러므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$8\times6=48$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$48+48=96$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{96}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{2}{63}$

답 ①

4 조건 (가)에 의하여 문자는 2개 또는 3개 택할 수 있으므로 2개의 문자와 3개의 숫자를 선택하여 조건을 만족시키도록 나열하는 사건을 A, 3개의 문자와 2개의 숫자를 선택하여 조건을 만족시키도록 나열하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이고, 이때 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

(i) 2개의 문자와 3개의 숫자를 선택할 때

2개의 문자와 숫자 1, 2, 3을 택한 후, 숫자 1, 2, 3을 나열하고 숫자와 숫자 사이의 두 곳에 택한 2개의 문자를 배열하면 되므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times({}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1)\times(3!\times2!)}{{}_8\mathrm{C}_5\times5!}=\dfrac{3}{140}$

(ii) 3개의 문자와 2개의 숫자를 선택할 때

문자 A, B, C와 숫자 2, 3을 택한 후, 문자 A, B, C를 나열하고 문자와 문자 사이의 두 곳에 숫자 2, 3을 배열하면 되므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3\times({}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1)\times(3!\times2!)}{{}_8\mathrm{C}_5\times5!}=\dfrac{1}{280}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{3}{140}+\frac{1}{280}=\frac{1}{40}\end{aligned}$$

답 ②

5 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6\times6=36$

a가 짝수이고 $2<a_4<5$인 사건을 A, a가 홀수이고 $2<a_4<5$인 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

(i) a가 짝수일 때

$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{b}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 $\dfrac{1}{b}$인 등차수열이다.

$2<a_4<5$에서 $2<3+\dfrac{3}{b}<5$

즉, $b>\frac{3}{2}$을 만족시키는 b의 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3\times5}{36}=\frac{5}{12}$

(ii) a가 홀수일 때

$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{b}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 $-\frac{1}{b}$인 등차수열이다.

$2<a_4<5$에서 $2<3-\frac{3}{b}<5$

즉, $b>3$을 만족시키는 b의 값은 4, 5, 6이다.

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

답 ③

6 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

집합 A의 원소의 개수가 2인 사건을 M, 집합 A의 모든 원소가 홀수인 사건을 N이라 하면 사건 $M\cap N$은 집합 A의 원소의 개수가 2이고 집합 A의 모든 원소가 홀수인 사건이다.

1, 2, 3, 4 중 집합 A의 원소가 될 2개의 수를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

집합 A의 원소의 개수가 2이므로 a, b, c를 2개, 1개의 두 개의 조로 나누고 각 조가 집합 A의 원소를 각각 하나씩 갖도록 하는 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$({}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1)\times2!=6$ ...... ㉠

그러므로 $\mathrm{P}(M)=\frac{6\times6}{64}=\frac{9}{16}$

집합 A의 모든 원소가 홀수인 경우는 a, b, c가 모두 홀수인 경우이므로 이 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

그러므로 $\mathrm{P}(N)=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$

이때 집합 A의 원소의 개수가 2이고 집합 A의 모든 원소가 홀수인 경우는

$A=\{1, 3\}$일 때뿐이므로 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ㉠과 같이

$({}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1)\times2!=6$

그러므로 $\mathrm{P}(M\cap N)=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(M\cup N)=\mathrm{P}(M)+\mathrm{P}(N)-\mathrm{P}(M\cap N)$

$=\frac{9}{16}+\frac{1}{8}-\frac{3}{32}=\frac{19}{32}$

답 ④

7 $\mathrm{P}(A\cap B)>0$이므로

$\mathrm{P}(A)\geq\mathrm{P}(A\cap B)>0$, $\mathrm{P}(B)\geq\mathrm{P}(A\cap B)>0$

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이려면 상자 안에 1이 적혀 있는 공의 개수를 n이라 할 때, $1\leq n\leq6$이어야 한다.

이때 상자 안에 2가 적혀 있는 공의 개수는 $8-n$이다.

사건 $A\cap B$는 꺼낸 3개의 공에 숫자 1이 적혀 있는 공이 존재하고, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 곱이 4의 배수인 사건이다. 즉, 꺼낸 3개의 공에 각각 숫자 1, 2, 2가 적혀 있는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_{8-n}\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_3}$

$=\frac{n\times\frac{(8-n)(7-n)}{2}}{56}$

$=\frac{n(n-7)(n-8)}{112}$

즉, $\frac{n(n-7)(n-8)}{112}=\frac{3}{7}$에서

$n^3-15n^2+56n-48=0$

$(n-4)(n^2-11n+12)=0$

n은 6 이하의 자연수이므로 $n=4$

즉, 상자 안에 두 수 1, 2가 하나씩 적혀 있는 공이 각각 4개씩 있고, 사건 B의 여사건 B^C은 꺼낸 3개의 공에 모두 숫자 2가 적혀 있는 사건이므로

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{14}$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

따라서 $p=14$, $q=13$이므로 $p+q=27$

답 27

8 9명의 학생을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$9!$

$xy<9$인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 $xy\geq9$인 사건이다. 즉, $x=3$, $y=3$ 또는 $x=4$, $y=3$인 사건이다.

(i) $x=3$, $y=3$일 때

3학년 학생 2명 사이에 있을 1학년 학생 3명과 2학년 학생 3명을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3=4$

3학년 학생 2명을 양 끝에 있도록 하고, 3학년 학생 사이에 위에서 정한 6명을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!\times6!$

이 8명의 한 묶음을 T라 하고, 남은 1학년 학생 1명과 T를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!$

그러므로 $x=3$, $y=3$일 확률은

$\frac{\{4\times(2!\times6!)\}\times2!}{9!}=\frac{2}{63}$

(ii) $x=4$, $y=3$일 때

3학년 학생 2명을 양 끝에 있도록 하고, 3학년 학생 사이에 1학년, 2학년 학생 7명을 일렬로 나열하는 경우이므로 이 경우의 수는

$2!\times7!$

그러므로 $x=4$, $y=3$일 확률은

$\frac{2!\times7!}{9!}=\frac{1}{36}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{63}+\frac{1}{36}=\frac{5}{84}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{84}=\frac{79}{84}$

답 ⑤

Level 3 **실력 완성** 본문 42쪽

1 ① **2** ② **3** ④

1 세 수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수는

${}_{12}\Pi_3=12^3=1728$

$B=\{1, 2, 4, 8\}$이고, $k=a_1\times a_2\times a_3$이라 하면

$A\cap B\neq\varnothing$이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $1\in A\cap B$일 때

$x=1$이 이차방정식 $x^2-kx+32=0$의 근이므로

$33-k=0$에서 $k=33$

$33=1\times3\times11$이므로

세 수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수는

$3!=6$

(ii) $2\in A\cap B$일 때

$x=2$가 이차방정식 $x^2-kx+32=0$의 근이므로

$36-2k=0$에서 $k=18$

$18=1\times2\times9=1\times3\times6=2\times3\times3$

이므로 세 수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수는

$3!+3!+\frac{3!}{2!}=15$

(iii) $4\in A\cap B$일 때

$x=4$가 이차방정식 $x^2-kx+32=0$의 근이므로

$48-4k=0$에서 $k=12$

$12=1\times1\times12=1\times2\times6=1\times3\times4=2\times2\times3$

이므로 세 수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수는

$\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}=18$

(iv) $8\in A\cap B$일 때

$x=8$이 이차방정식 $x^2-kx+32=0$의 근이므로

$96-8k=0$에서 $k=12$

이는 (iii)의 경우와 동일하다.

(i)~(iv)에서 세 수 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수는

$6+15+18=39$

따라서 구하는 확률은

$\frac{39}{1728}=\frac{13}{576}$

답 ①

2 $a>b$인 사건을 A, $ab=5$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이고, 이때 사건 $A\cap B$는 $a>b$이고 $ab=5$인 사건이다.

(i) $a>b$일 때

$a+b=6$이므로 $a=4$, $b=2$ 또는 $a=5$, $b=1$이다.

$a=4$, $b=2$일 때는 다음과 같다.

	주머니 A	주머니 B
흰 공의 개수	2	2
검은 공의 개수	1	1

	주머니 A	주머니 B
흰 공의 개수	1	3
검은 공의 개수	2	0

그러므로 $a=4$, $b=2$일 확률은

$\frac{({}_2C_2\times{}_4C_1)\times({}_3C_2\times{}_3C_1)+({}_2C_1\times{}_4C_2)\times({}_3C_3\times{}_3C_0)}{{}_6C_3\times{}_6C_3}$

$=\frac{48}{400}=\frac{3}{25}$

$a=5$, $b=1$일 때는 다음과 같다.

	주머니 A	주머니 B
흰 공의 개수	2	3
검은 공의 개수	1	0

그러므로 $a=5$, $b=1$일 확률은

$\frac{({}_2C_2\times{}_4C_1)\times({}_3C_3\times{}_3C_0)}{{}_6C_3\times{}_6C_3}=\frac{4}{400}=\frac{1}{100}$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{25}+\frac{1}{100}=\frac{13}{100}$

(ii) $ab=5$일 때

$a+b=6$이므로 $a=1$, $b=5$ 또는 $a=5$, $b=1$이다.

$a=1$, $b=5$일 때는 다음과 같다.

	주머니 A	주머니 B
흰 공의 개수	1	0
검은 공의 개수	2	3

	주머니 A	주머니 B
흰 공의 개수	0	1
검은 공의 개수	3	2

그러므로 $a=1$, $b=5$일 확률은

$\frac{({}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2)\times({}_3\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3)+({}_2\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_3)\times({}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2)}{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3}$

$=\frac{48}{400}=\frac{3}{25}$

$a=5$, $b=1$일 확률은 (i)에서와 같이 $\frac{1}{100}$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{25}+\frac{1}{100}=\frac{13}{100}$

(iii) $a>b$이고 $ab=5$일 때

$a+b=6$이므로 $a=5$, $b=1$이다.

$a=5$, $b=1$일 확률은 (i)에서와 같이 $\frac{1}{100}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{100}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{13}{100}+\frac{13}{100}-\frac{1}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

답 ②

3 전체 경우의 수는

${}_6\Pi_3=216$

3번의 시행 이후, 6개의 원의 내부에 모두 한 장 이상의 스티커가 붙어 있는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 내부에 스티커가 붙어 있지 않은 원이 존재하는 사건이다.

한 개의 주사위를 3번 던져 나온 3개의 눈의 수를 차례로 a, b, c라 할 때, 내부에 스티커가 붙어 있지 않은 원이 존재하려면

$\{a, b, c\}\subset\{1, 2, 4\}$ 또는

$\{a, b, c\}\subset\{4, 5, 6\}$ 또는

$\{a, b, c\}\subset\{1, 3, 6\}$

이어야 한다.

$\{a, b, c\}\subset\{1, 2, 4\}$가 되도록 하는 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 3^3

마찬가지로

$\{a, b, c\}\subset\{4, 5, 6\}$, $\{a, b, c\}\subset\{1, 3, 6\}$

이 되도록 하는 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 각각 3^3

이때 중복되는 순서쌍은 $(1, 1, 1)$, $(4, 4, 4)$, $(6, 6, 6)$이다.

그러므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{(3^3+3^3+3^3)-3}{216}=\frac{78}{216}=\frac{13}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{13}{36}=\frac{23}{36}$

답 ④

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 ① **2** 87 **3** 11 **4** ② **5** 53

1 이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 A사의 디지털 기기를 선호하는 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때

$\mathrm{P}(A)=\frac{80}{160}=\frac{1}{2}$

이고, 사건 $A\cap B$는 선택한 한 학생이 A사의 디지털 기기를 선호하는 남학생인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{160}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

답 ①

2 이 시행 후, 상자에 남아 있는 검은 공의 개수가 흰 공의 개수보다 큰 경우는 다음과 같다.

(i) A가 흰 공 2개를 꺼내고 B가 흰 공 2개를 꺼내는 경우

A가 흰 공 2개를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{14}$

이어서 B가 흰 공 2개를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

그러므로 이 경우의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여

$\frac{3}{14}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{70}$

(ii) A가 흰 공 2개를 꺼내고, B가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우

A가 흰 공 2개를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{14}$

이어서 B가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

그러므로 이 경우의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여

$\frac{3}{14}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{35}$

(iii) A가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내고 B가 흰 공 2개를 꺼내는 경우

A가 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$

이어서 B가 흰 공 2개를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$

그러므로 이 경우의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여

$\frac{4}{7}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{35}$

(i), (ii), (iii)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{1}{70}+\frac{4}{35}+\frac{4}{35}=\frac{17}{70}$

따라서 $p=70$, $q=17$이므로 $p+q=87$

답 87

3 주어진 시행을 2번 반복했을 때의 표본공간을 S라 하면

$S=\{(a, b)|1\le a\le 4, 1\le b\le 4, a, b$는 자연수$\}$

$=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

이고,

$A=\{(1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

두 사건 A, B_m이 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B_m)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_m)$이어야 하므로

$\frac{n(A\cap B_m)}{n(S)}=\frac{1}{2}\times\frac{n(B_m)}{n(S)}$

즉, $n(A\cap B_m)=\frac{1}{2}\times n(B_m)$ …… ㉠

$n(A\cap B_m)$의 값이 자연수이므로 $n(B_m)$의 값은 2의 배수이다.

이때

$n(B_2)=8$, $n(B_3)=5$, $n(B_4)=4$, $n(B_5)=4$,
$n(B_6)=3$, $n(B_7)=2$, $n(B_8)=1$

이므로 $m=2$ 또는 $m=4$ 또는 $m=5$ 또는 $m=7$일 때 ㉠을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $m=2$일 때

$n(B_2)=8$이고

$A\cap B_2=\{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(ii) $m=4$일 때

$n(B_4)=4$이고, $A\cap B_4=\{(2, 2), (4, 4)\}$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(iii) $m=5$일 때

$n(B_5)=4$이고, $A\cap B_5=\{(1, 4), (4, 1)\}$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(iv) $m=7$일 때

$n(B_7)=2$이고, $A\cap B_7=\{(3, 4), (4, 3)\}$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 모든 m의 값의 합은

$2+4+5=11$

답 11

4 앞면이 나온 동전의 개수가 뒷면이 나온 동전의 개수보다 큰 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 주사위의 눈의 수가 2 이하인 경우

4개의 동전을 동시에 던졌을 때, 앞면이 나온 동전의 개수가 4 또는 3인 경우이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{3}\times\left\{{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{48}$$

(ⅱ) 주사위의 눈의 수가 3 이상인 경우

3개의 동전을 동시에 던졌을 때, 앞면이 나온 동전의 개수가 3 또는 2인 경우이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{2}{3}\times\left\{{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\right\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{48}+\frac{1}{3}=\frac{7}{16}$$

답 ②

5 7번의 시행 후 얻은 점수가 짝수인 사건을 A, 얻은 점수가 10점 이하인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

7번의 시행 후 동전의 앞면이 나온 횟수를 n $(0\le n\le 7)$이라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $7-n$이고, 이때 얻은 점수는

$2n+(7-n)=n+7$

사건 A가 일어날 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) $n=1$일 때

$${}_7C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{2^7}$$

(ⅱ) $n=3$일 때

$${}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{2^7}$$

(ⅲ) $n=5$일 때

$${}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{2^7}$$

(ⅳ) $n=7$일 때

$${}_7C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{2^7}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{2^7}+\frac{35}{2^7}+\frac{21}{2^7}+\frac{1}{2^7}=\frac{64}{2^7}=\frac{1}{2}$$

사건 $A\cap B$는 (ⅰ), (ⅱ)의 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{2^7}+\frac{35}{2^7}=\frac{42}{2^7}=\frac{21}{2^6}$$

그러므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{21}{2^6}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{32}$$

따라서 $p=32$, $q=21$이므로 $p+q=53$

답 53

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ④	**2** ②	**3** ③	**4** ②	**5** ⑤	**6** ①
7 ③	**8** ④				

1 한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수가 차례로 a, b이므로 $a>b$인 사건을 A, $|a-b|=2$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 경우의 수는

$6\times6=36$

$a>b$인 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$,

$(3, 1)$, $(3, 2)$,

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$,

$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$,

$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

$a>b$이고 $|a-b|=2$인 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{15}$$

답 ④

2 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{6}}=6\times\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{3}}=3\times\mathrm{P}(A\cap B)$$

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)+\frac{1}{4}$에서

$6\times\mathrm{P}(A\cap B)=3\times\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{4}$

즉, $3\times\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

답 ②

3 이 동아리에 속한 $(n+7)$명의 학생 중 임의로 택한 2명의 학생이 같은 학년의 학생인 사건을 A, 2명이 모두 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+7}\mathrm{C}_2}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{n+7}\mathrm{C}_2}$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{n+7}\mathrm{C}_2}}{\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+7}\mathrm{C}_2}}=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2}$$

즉, $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{1}{4}$에서

$4\times{}_4\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2$, $24=3+6+{}_n\mathrm{C}_2$, ${}_n\mathrm{C}_2=15$

$\frac{n(n-1)}{2}=15$

$n^2-n-30=0$, $(n-6)(n+5)=0$

n은 자연수이므로 $n=6$

답 ③

4 A가 꺼낸 카드에 적힌 두 수의 곱과 B가 꺼낸 카드에 적힌 두 수의 곱이 같은 경우는 A, B 모두 숫자 1이 적힌 카드와 숫자 2가 적힌 카드를 꺼내는 경우이다.
A가 숫자 1이 적힌 카드와 숫자 2가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A, B가 숫자 1이 적힌 카드와 숫자 2가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이다.
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{15}$$

답 ②

5 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A라 하고, 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공의 색깔이 서로 다른 사건을 B라 하자. 이때 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개인 사건은 A^C이다.

(ⅰ) 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$

이 경우 주머니 B에는 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있으므로 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공의 색깔이 서로 다를 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

그러므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{45}$

(ⅱ) 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개일 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

이 경우 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있으므로 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공의 색깔이 서로 다를 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

그러므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\times\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{8}{45}+\frac{2}{5}=\frac{26}{45}$$

답 ⑤

6 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

즉, $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$ …… ㉠

㉠에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=(\mathrm{P}(A))^2$

즉, $(\mathrm{P}(A))^2=\frac{1}{9}$에서 $\mathrm{P}(A)>0$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

답 ①

7 주사위의 눈의 수가 앞면이 나오는 동전의 개수와 같은 경우는 주사위의 눈의 수가 1 또는 2 또는 3인 경우이다.

(i) 주사위의 눈의 수가 1이고 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$$

(ii) 주사위의 눈의 수가 2이고 앞면이 나오는 동전의 개수가 2일 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{16}$$

(iii) 주사위의 눈의 수가 3이고 앞면이 나오는 동전의 개수가 3일 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{7}{48}$$

답 ③

8 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차는 2 또는 4 또는 6이다.

(i) 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차가 2일 때

꺼낸 공에 적힌 두 수가 1, 3 또는 3, 5 또는 5, 7인 경우이고, 이때 한 개의 동전을 2번 던져 앞면이 나온 동전의 개수가 2일 확률은

$$\frac{3}{{}_4C_2}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(ii) 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차가 4일 때

꺼낸 공에 적힌 두 수가 1, 5 또는 3, 7인 경우이고, 이때 한 개의 동전을 4번 던져 앞면이 나온 동전의 개수가 2일 확률은

$$\frac{2}{{}_4C_2}\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

(iii) 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차가 6일 때

꺼낸 공에 적힌 두 수가 1, 7인 경우이고, 이때 한 개의 동전을 6번 던져 앞면이 나온 동전의 개수가 2일 확률은

$$\frac{1}{{}_4C_2}\times{}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{6}\times\frac{15}{64}=\frac{5}{128}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{5}{128}=\frac{37}{128}$$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 54~55쪽

1 ② **2** ⑤ **3** ⑤ **4** ④ **5** ⑤ **6** ①
7 56

1 15 이하의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13이므로

$n(A)=6$

이 시행에서 표본공간을 S라 하면

$$\mathrm{P}(B_n|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B_n)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B_n)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B_n)}{n(A)}$$

즉, $\frac{n(A\cap B_n)}{n(A)}=\frac{2}{3}$에서 $n(A\cap B_n)=4$

n 이하의 자연수 중 소수의 개수가 4이기 위한 n의 값은 7, 8, 9, 10이므로 그 합은

$7+8+9+10=34$

답 ②

2 집합 A의 원소 중 임의로 하나를 택할 때, 이 원소가 b, b를 포함한 문자열인 사건을 M, 이 원소가 같은 문자끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열된 문자열인 사건을 N이라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(N|M)$이다.

이때 $\mathrm{P}(N|M)=\frac{n(M\cap N)}{n(M)}$이므로

$n(M)$, $n(M\cap N)$의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) b, b, a, a, a를 택한 경우

이 다섯 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times3!}=10$$

이때 같은 문자끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 $ababa$의 1이다.

(ii) b, b, a, a, c를 택한 경우

이 다섯 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times2!}=30$$

이때 같은 문자끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우는 다음과 같다.

• a, a, c가 이 순서대로 나열된 경우

$\vee a\vee a\vee c\vee$

a와 a 사이의 $\vee$에 b를 배치하고, 나머지 3개의 $\vee$ 중 하나에 b를 배치하면 되므로 이 경우의 수는 3

- a, c, a가 이 순서대로 나열된 경우
  $\vee a \vee c \vee a \vee$
  4개의 $\vee$ 중 2개에 b를 배치하면 되므로 이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$
- c, a, a가 이 순서대로 나열된 경우
  $\vee c \vee a \vee a \vee$
  a와 a 사이의 $\vee$에 b를 배치하고, 나머지 3개의 $\vee$ 중 하나에 b를 배치하면 되므로 이 경우의 수는 3

그러므로 같은 문자끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 $3+6+3=12$

(iii) b, b, a, c, c를 택한 경우
이 다섯 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!\times 2!}=30$
이때 같은 문자끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는 (ii)에서와 마찬가지로 12

(i), (ii), (iii)에서
$n(M)=10+30+30=70$,
$n(M\cap N)=1+12+12=25$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(N|M)=\frac{n(M\cap N)}{n(M)}=\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$$

답 ⑤

3 주사위의 눈의 수가 3의 배수인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 조건을 만족시키는 확률을 구하면 다음과 같다.
(i) 주사위의 눈의 수가 3의 배수인 경우
주머니 A에서 꺼낸 첫 번째 공에 적힌 수가 2이면 되므로 이 경우의 확률은
$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$
(ii) 주사위의 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우
주머니 B에서 꺼낸 첫 번째 공에 적힌 수가 2이면 되므로 이 경우의 확률은
$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$
(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\dfrac{1}{12}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{29}{60}$

답 ⑤

4 학생 A가 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸 후 학생 B가 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니에 세 가지 색깔의 공이 각각 한 개 이상 남아 있는 사건을 E, 학생 B가 서로 같은 색깔의 공을 꺼내는 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|E)$이다.
학생 A가 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸 후 학생 B가 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 주머니에 세 가지 색깔의 공이 각각 한 개 이상 남아 있을 확률은 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때 주머니에 세 가지 색깔의 공이 각각 한 개 이상 남아 있을 확률과 같다.
이 경우는 주머니에서 빨간 공 2개, 파란 공 2개 또는 빨간 공 2개, 파란 공 1개, 노란 공 1개 또는 빨간 공 1개, 파란 공 2개, 노란 공 1개를 꺼내는 경우이므로
$$\mathrm{P}(E)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4}$$
$$=\frac{45}{70}=\frac{9}{14}$$
이때 학생 B가 서로 같은 색깔의 공을 꺼낼 확률은 다음과 같다.
(i) 학생 B가 빨간 공 2개를 꺼내는 경우
학생 A가 파란 공 2개 또는 파란 공 1개, 노란 공 1개를 꺼내는 경우이므로 이때의 확률은
$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{9}{140}$
(ii) 학생 B가 파란 공 2개를 꺼내는 경우
학생 A가 빨간 공 2개 또는 빨간 공 1개, 노란 공 1개를 꺼내는 경우이므로 이때의 확률은
$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{9}{140}$
(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{9}{140}+\dfrac{9}{140}=\dfrac{9}{70}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{9}{70}}{\frac{9}{14}}=\frac{1}{5}$$

답 ④

5 이 시행에서 표본공간을 S라 할 때, $n(S)={}_6\mathrm{C}_3=20$
사건 A는 흰 공 2개, 검은 공 1개 또는 흰 공 3개를 꺼내는 사건이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$
사건 B는 흰 공 1개, 검은 공 2개 또는 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 사건이므로
$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$$
사건 C는 홀수가 적혀 있는 공 2개, 짝수가 적혀 있는 공 1개 또는 짝수가 적혀 있는 공 3개를 꺼내는 사건이므로
$$\mathrm{P}(C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

ㄱ. 사건 $A\cap B$는 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. 사건 $B\cap C$는 다음과 같다.

(i) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼내는 경우

짝수가 적힌 흰 공 1개, 짝수가 적힌 검은 공 2개를 꺼내는 경우 또는

홀수가 적힌 흰 공 1개, 짝수, 홀수가 각각 적힌 검은 공 2개를 꺼내는 경우이므로

이 경우의 확률은

$$\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\times({}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1)}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

(ii) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우

짝수가 적힌 검은 공 1개, 홀수가 적힌 흰 공 2개를 꺼내는 경우 또는

홀수가 적힌 검은 공 1개, 짝수, 홀수가 각각 적힌 흰 공 2개를 꺼내는 경우이므로

이 경우의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2+{}_1\mathrm{C}_1\times({}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1)}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

(i), (ii)에 의하여 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. 사건 $C\cap A$는 홀수가 적힌 흰 공 2개, 짝수가 적힌 검은 공 1개를 꺼내는 경우 또는 짝수, 홀수가 각각 적힌 흰 공 2개, 홀수가 적힌 검은 공 1개를 꺼내는 경우 또는 흰 공 3개를 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1+({}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1)\times{}_1\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

$\mathrm{P}(C\cap A)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)$이므로 두 사건 C와 A는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 사건인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

6 8번의 시행을 할 때, $x_8>0$인 사건을 A, $x_3=0$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

8번의 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수를 a $(0\le a\le 8)$이라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $8-a$이므로

$x_8=1\times a+(-2)\times(8-a)=3a-16$

$x_8>0$인 경우는 $a=6$ 또는 $a=7$ 또는 $a=8$일 때이므로

$$\mathrm{P}(A)={}_8\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_8\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_8\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$=\frac{37}{256}$$

이때 $x_8>0$이고 $x_3=0$인 경우는 다음과 같다.

(i) $a=6$일 때

3번째 시행까지 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나온 후 다음 5번의 시행에서 앞면이 4번, 뒷면이 1번 나와야 하므로

이 경우의 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$=\frac{3}{8}\times\frac{5}{32}=\frac{15}{256}$$

(ii) $a=7$일 때

3번째 시행까지 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나온 후 다음 5번의 시행에서 앞면이 5번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=\frac{3}{8}\times\frac{1}{32}=\frac{3}{256}$$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{15}{256}+\frac{3}{256}=\frac{18}{256}=\frac{9}{128}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{128}}{\frac{37}{256}}=\frac{18}{37}$$

답 ①

7 한 개의 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 2 이하인 사건을 A라 하면 A^C은 주사위의 눈의 수가 3 이상인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$

$g(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)+1$로 놓으면 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 사건 A가 적어도 한 번 일어나야 한다.

(i) 사건 A가 1번 일어난 경우

$g(x)=x^2+6x+1$이고, 이때 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-1=8>0$이므로 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때의 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

(ii) 사건 A가 2번 일어난 경우

$g(x)=2x^2+4x+1$이고, 이때 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-2=2>0$이므로 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때의 확률은 ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(iii) 사건 A가 3번 일어난 경우

$g(x)=3x^2+2x+1$이고, 이때 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3=-2<0$이므로 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(iv) 사건 A가 4번 일어난 경우

$g(x)=4x^2+1$이고, 이때 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i)~(iv)에서 $p=\frac{32}{81}+\frac{8}{27}=\frac{56}{81}$

따라서 $3^4\times p=3^4\times\frac{56}{81}=56$

답 56

Level 3 **실력 완성** 본문 56쪽

1 ② **2** ① **3** ④

1 함수 f가 $f(f(1))=f(1)$을 만족시키는 사건을 A, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$이므로 $n(A)$, $n(A\cap B)$의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $f(1)=1$일 때

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 함수 f의 개수는 다음과 같다.

공역의 원소 2, 3, 4 중 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

이 중 치역이 $\{1, 2, 3\}$이 되도록 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

• $\{f(n)|n=2, 3, 4, 5\}=\{1, 2, 3\}$인 경우

치역의 원소 1, 2, 3 중 두 번 나열할 하나의 수를 a, 나머지 두 수를 각각 b, c라 하면 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{C}_1\times\frac{4!}{2!}=3\times12=36$

• $\{f(n)|n=2, 3, 4, 5\}=\{2, 3\}$인 경우

서로 다른 2개에서 4개를 선택하는 중복순열의 수에서

$\{f(n)|n=2, 3, 4, 5\}=\{2\}$ 또는

$\{f(n)|n=2, 3, 4, 5\}=\{3\}$인 경우를 제외한 것과 같으므로

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

그러므로 치역이 $\{1, 2, 3\}$이 되도록 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$36+14=50$

나머지 두 가지의 경우도 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 각각 50이다.

그러므로 $f(1)=1$이고 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 함수 f의 개수는

$50\times3=150$

(ii) $f(1)\neq1$일 때

$f(1)=2$일 때, $f(f(1))=f(1)$에서 $f(2)=2$

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

마찬가지로 $f(1)=3$, $f(1)=4$인 경우에도 가능한 함수 f의 개수는 각각 64이므로

$f(f(1))=f(1)$을 만족시키는 함수 f의 개수는

$64\times3=192$

$f(1)=2$일 때, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 함수 f의 개수는 다음과 같다.

공역의 원소 1, 3, 4 중 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

이 중 치역이 $\{1, 2, 3\}$이 되도록 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

• $\{f(n)|n=3, 4, 5\}=\{1, 2, 3\}$인 경우

1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

• $\{f(n)|n=3, 4, 5\}=\{1, 3\}$인 경우

서로 다른 2개에서 3개를 선택하는 중복순열의 수에서

$\{f(n)|n=3, 4, 5\}=\{1\}$ 또는

$\{f(n)|n=3, 4, 5\}=\{3\}$인 경우를 제외한 것과 같으므로

${}_2\Pi_3-2=2^3-2=6$

그러므로 치역이 $\{1, 2, 3\}$이 되도록 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$6+6=12$

나머지 두 가지의 경우도 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 각각 12이다.

그러므로 $f(1)=2$, $f(2)=2$이고 함수 f의 치역의 원

소의 개수가 3인 함수 f의 개수는

$12\times3=36$

마찬가지로 $f(1)=3$, $f(1)=4$인 경우도 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 각각 36이므로 $f(1)\neq1$이고 함수 f의 치역의 원소가 3이 되도록 하는 함수 f의 개수는

$36\times3=108$

(i), (ii)에서

$n(A)=256+192=448$, $n(A\cap B)=150+108=258$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{258}{448}=\frac{129}{224}$$

답 ②

2 한 개의 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하면 세 수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$6\times6\times6=216$

주어진 시행을 3회 반복한 후 앞면이 보이는 카드의 개수가 4인 사건을 A, 주사위의 2의 눈이 적어도 한 번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$이므로 $n(A)$, $n(A\cap B)$의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 3번 던져 나온 주사위의 눈의 수가 모두 같은 경우

사건 A가 일어나는 경우는 다음과 같다.

$(4, 4, 4)$, $(5, 5, 5)$, $(6, 6, 6)$

그러므로 이 경우 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$1\times3=3$

(ii) 3번 던져 나온 주사위의 눈의 수 중 두 수가 같은 경우

사건 A가 일어나는 경우는 다음과 같다.

$(1, 1, 4)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 1, 6)$,
$(2, 2, 4)$, $(2, 2, 5)$, $(2, 2, 6)$,
$(3, 3, 4)$, $(3, 3, 5)$, $(3, 3, 6)$,
$(4, 4, 5)$, $(4, 4, 6)$,
$(5, 5, 4)$, $(5, 5, 6)$,
$(6, 6, 4)$, $(6, 6, 5)$

그러므로 이 경우 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times15=45$

(iii) 3번 던져 나온 주사위의 눈의 수가 모두 다른 경우

사건 A가 일어나는 경우는 다음과 같다.

• 주사위의 1의 눈이 나온 경우

사건 A가 일어나는 경우는 다음의 경우이다.

$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 3, 5)$

그러므로 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$3!\times3=18$

• 주사위의 1의 눈이 나오지 않은 경우

사건 A가 일어나는 경우는 다음의 경우이다.

$(2, 4, 6)$

그러므로 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 이 경우 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$18+6=24$

(i), (ii), (iii)에서

$n(A)=3+45+24=72$

사건 $A\cap B$는 (ii)에서 $(2, 2, 4)$, $(2, 2, 5)$, $(2, 2, 6)$인 경우와 (iii)에서 $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$인 경우이므로 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는

$n(A\cap B)=\dfrac{3!}{2!}\times3+3!\times2=21$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{21}{72}=\frac{7}{24}$$

답 ①

3 i $(i=1, 2, 3, 4)$번째 시행에서 앞면이 나오는 동전의 개수를 x_i라 하면 점 P는 $x_i-(3-x_i)=2x_i-3$만큼 이동한다.

이 시행을 4번 반복한 후 점 P의 좌표가 2이므로

$\sum_{i=1}^{4}(2x_i-3)=2$

즉, $2\sum_{i=1}^{4}x_i-12=2$에서 $\sum_{i=1}^{4}x_i=7$

각각의 i $(i=1, 2, 3, 4)$에 대하여 x_i의 값은 3개의 동전을 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수이므로 $\sum_{i=1}^{4}x_i=7$일 확률은 12개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수가 7일 확률과 같다.

따라서 구하는 확률은

$${}_{12}\mathrm{C}_7\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{99}{512}$$

답 ④

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 59~67쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** ② **4** ① **5** 27 **6** ③
7 ④ **8** 70 **9** ④ **10** ②

1 $X^2-6X+8>0$에서
$(X-2)(X-4)>0$
$X<2$ 또는 $X>4$
즉, $X=1$ 또는 $X=5$
이산확률변수 X의 확률질량함수가
$P(X=x)=\frac{6-x}{15}$ $(x=1, 2, 3, 4, 5)$
이므로
$P(X^2-6X+8>0)=P(X=1)+P(X=5)$
$=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$

답 ④

2 이산확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.
$|X-1|=1$에서
$X-1=-1$ 또는 $X-1=1$
즉, $X=0$ 또는 $X=2$
$X=0$일 때, 노란 공 3개를 꺼내는 경우이므로
$P(X=0)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$
$X=2$일 때, 노란 공 1개와 빨간 공 2개를 꺼내는 경우이므로
$P(X=2)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{4\times3}{35}=\frac{12}{35}$
따라서
$P(|X-1|=1)=P(X=0)+P(X=2)$
$=\frac{4}{35}+\frac{12}{35}=\frac{16}{35}$

답 ⑤

3 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	0	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{5}$	a	$\frac{a}{5}$	$\frac{a}{10}$	1

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로
$\frac{a}{5}+a+\frac{a}{5}+\frac{a}{10}=\frac{3}{2}a=1$에서 $a=\frac{2}{3}$
따라서
$E(X)=(-2)\times\frac{a}{5}+0\times a+2\times\frac{a}{5}+3\times\frac{a}{10}$
$=\frac{3}{10}a=\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$

답 ②

4 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이므로 확률변수 Y가 갖는 값은 0, 1, 2이다.
확률변수 X의 확률질량함수는
$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}$ $(x=0, 1, 2, 3)$
$P(Y=0)=P(X=2)$
$={}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$
$P(Y=1)=P(X=0)+P(X=3)$
$={}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0$
$=\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{3}$
$P(Y=2)=P(X=1)$
$={}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$
이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	합계
$P(Y=y)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	1

따라서
$E(Y)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{4}{9}=\frac{11}{9}$

답 ①

5 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로
$a+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+b=1$에서
$a+b=\frac{1}{2}$ ...... ㉠
$E(X)=\frac{5}{4}$에서
$0\times a+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+4\times b=\frac{5}{4}$
$4b=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{8}$
㉠에서 $a=\frac{1}{2}-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{8}=\frac{13}{4}$

따라서

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{13}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{27}{16}$

이므로

$16V(X)=16\times\frac{27}{16}=27$

답 27

6 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이다.

$X=1$일 때, 검은 공 2개, 흰 공 1개를 꺼낸 경우이므로

$P(X=1)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

$X=2$일 때, 검은 공 1개, 흰 공 2개를 꺼낸 경우이므로

$P(X=2)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$

$X=3$일 때, 흰 공 3개를 꺼낸 경우이므로

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

따라서

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

답 ③

7 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$4a+3a+2a+a=1$에서

$10a=1,\ a=\frac{1}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}=5$

따라서

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=5-2^2=1$

이므로

$V(-4X+1)=(-4)^2V(X)=16\times1=16$

답 ④

8 확률변수 X가 갖는 값은 4, 6, 9이다.

(i) $X=4$일 때, 2가 적혀 있는 구슬 2개를 꺼낸 경우이므로

$P(X=4)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

(ii) $X=6$일 때, 2가 적혀 있는 구슬 1개와 3이 적혀 있는 구슬 1개를 꺼낸 경우이므로

$P(X=6)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

(iii) $X=9$일 때, 3이 적혀 있는 구슬 2개를 꺼낸 경우이므로

$P(X=9)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

따라서

$E(X)=4\times\frac{1}{10}+6\times\frac{3}{5}+9\times\frac{3}{10}=\frac{67}{10}$

이므로

$E(10X+3)=10E(X)+3$

$=10\times\frac{67}{10}+3=70$

답 70

9 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$E(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

$V(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

$E(X^2)=105$에서

$E(X^2)=V(X)+(E(X))^2$

$=\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n+n^2}{4}=105$

$n^2+n-420=0,\ (n-20)(n+21)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=20$

답 ④

10 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수가 각각 a, b이므로 두 수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6\times6=36$

$a^2+b^2\le10$인 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$

이고 그 개수는 6이다.

즉, 한 번의 시행에서 사건 C가 일어날 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(144,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

따라서

$$\mathrm{V}(X)=144\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=20$$

이므로

$$\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\times20=5$$

답 ②

Level 1 **기초 연습** 본문 68~69쪽

1 ①	**2** ③	**3** ③	**4** ②	**5** ⑤	**6** ④
7 5	**8** ①	**9** ④			

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{a}{1\times2}+\frac{a}{2\times3}+\frac{a}{3\times4}+\frac{a}{4\times5}+\frac{3}{5}=1$에서

$$a\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\right\}=\frac{2}{5}$$

$$a\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}a=\frac{2}{5}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(2<X<5)&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{20}\\&=\frac{1}{15}\end{aligned}$$

답 ①

2 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

$X=5$일 때, 양 끝에 1, 4 또는 2, 3이 적혀 있는 카드가 나열되는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{2\times2!\times2!}{4!}=\frac{1}{3}$$

$X=7$일 때, 양 끝에 3, 4가 적혀 있는 카드가 나열되는 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=7)=\frac{2!\times2!}{4!}=\frac{1}{6}$$

따라서

$$\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=7)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

답 ③

3 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$일 때, 첫 번째에 3이 적혀 있는 구슬을 꺼낸 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{5}$$

(ii) $X=2$일 때, 첫 번째에 3이 적혀 있지 않은 구슬을 꺼내고 두 번째에 3이 적혀 있는 구슬을 꺼낸 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

(iii) $X=3$일 때, 첫 번째와 두 번째에 3이 적혀 있지 않은 구슬을 꺼낸 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$$

답 ③

4 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$2a+a+2a+a=1$에서

$6a=1$, $a=\frac{1}{6}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times2a+2\times a+3\times2a+4\times a\\&=14a=14\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=1^2\times2a+2^2\times a+3^2\times2a+4^2\times a\\&=40a=40\times\frac{1}{6}=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

답 ②

5 $\mathrm{E}(3X-2)=13$에서

$3\mathrm{E}(X)-2=13$, $3\mathrm{E}(X)=15$

즉, $\mathrm{E}(X)=5$

$\mathrm{V}(3X-2)=27$에서

$3^2\mathrm{V}(X)=27$, $\mathrm{V}(X)=3$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=3+5^2=28$

답 ⑤

6 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{5-x}\ (x=-1,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이므로

$\mathrm{P}(X=-1)=\frac{a}{6}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{a}{4}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{a}{3}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{a}{2}$

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{a}{6}+\frac{a}{4}+\frac{a}{3}+\frac{a}{2}=\frac{5}{4}a=1$

$a=\frac{4}{5}$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{a}{6}+1\times\frac{a}{4}+2\times\frac{a}{3}+3\times\frac{a}{2}$$
$$=\frac{9}{4}a=\frac{9}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$$

이므로

$$\mathrm{E}(aX-1)=a\mathrm{E}(X)-1=\frac{4}{5}\times\frac{9}{5}-1=\frac{11}{25}$$

답 ④

7 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이다.

4장의 카드에서 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

(i) $X=1$일 때, 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4가 적혀 있는 카드를 꺼낸 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(ii) $X=2$일 때, 1, 3 또는 2, 4가 적혀 있는 카드를 꺼낸 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(iii) $X=3$일 때, 1, 4가 적혀 있는 카드를 꺼낸 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\mathrm{V}(3X)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times\frac{5}{9}=5$$

답 5

8 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10p$, $\mathrm{V}(X)=10p(1-p)$

$\mathrm{E}(aX+2)=12$에서 $a\mathrm{E}(X)+2=12$이므로

$10ap+2=12$

$ap=1$ …… ㉠

$\mathrm{V}(aX+2)=20$에서 $a^2\mathrm{V}(X)=20$이므로

$10a^2p(1-p)=20$, $a^2p(1-p)=2$

$ap\times a(1-p)=2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1\times a(1-p)=a-ap=a-1=2$, $a=3$

$ap=1$에서 $p=\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$

따라서 $a+p=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

답 ①

9 1부터 9까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이다.

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{4}{9}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{4}{9}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=36$에서

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{4}{9}=36$, $n=81$

따라서 $\mathrm{V}(X)=81\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}=20$이므로

$n+\mathrm{V}(X)=81+20=101$

답 ④

Level **2** **기본 연습** 본문 70~71쪽

1 ①	**2** ③	**3** ②	**4** ③	**5** 23	**6** ②
7 ⑤	**8** ④				

1 a가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고 b가 갖는 값은 0, 1이다.

$X^2=1$에서 $X=-1$ 또는 $X=1$

$X=-1$일 때, $a=0$, $b=1$인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=-1)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{16}$$

$X=1$일 때, $a=1$, $b=0$ 또는 $a=2$, $b=1$인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$$

따라서

$$\mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{3}{8}=\frac{7}{16}$$

답 ①

2 $\mathrm{P}(X=-1)=a$, $\mathrm{P}(X=0)=b$라 하면
$\mathrm{P}(X=1)=2\mathrm{P}(X=0)=2b$
$\mathrm{P}(X=2)=2\mathrm{P}(X=1)=2\times 2b=4b$
이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$2b$	$4b$	1

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로
$a+b+2b+4b=1$
$a+7b=1$ ...... ㉠
$\mathrm{E}(X)=\frac{8}{9}$에서
$\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times b+1\times 2b+2\times 4b$
$=-a+10b=\frac{8}{9}$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{9}$, $b=\frac{1}{9}$
따라서
$\mathrm{P}(X=-1)-\mathrm{P}(X=0)=a-b=\frac{2}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$

답 ③

3 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로
$a+\frac{1}{2}+b=1$
$a=\frac{1}{2}-b$ ...... ㉠
$\mathrm{E}(X)=1\times a+2\times\frac{1}{2}+4\times b$
$=a+4b+1$
$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times b$
$=a+16b+2$
이므로 $\mathrm{E}(X)+3=\mathrm{E}(X^2)$에서
$(a+4b+1)+3=a+16b+2$
$12b=2$, $b=\frac{1}{6}$
㉠에서 $a=\frac{1}{2}-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$
따라서 $\frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

답 ②

4 확률변수 X가 갖는 값은 2, 3, 4이다.
주머니에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2$
(i) $X=2$일 때
숫자 1, 2가 적혀 있는 공 3개 중 공 2개를 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$
(ii) $X=3$일 때
숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공 5개 중 공 2개를 꺼내는 경우에서 숫자 1, 2가 적혀 있는 공 3개 중 공 2개를 꺼내는 경우를 제외해야 하므로
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2-{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{10-3}{21}=\frac{1}{3}$
(iii) $X=4$일 때
전체 경우에서 숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공 5개 중 공 2개를 꺼내는 경우를 제외해야 하므로
$\mathrm{P}(X=4)=1-\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=1-\frac{10}{21}=\frac{11}{21}$
(i), (ii), (iii)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{21}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{11}{21}=\frac{71}{21}$

답 ③

5 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이다.
(i) $X=1$일 때, 주머니에서 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼내어 상자에 넣은 후 상자에서 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼내거나, 주머니에서 2가 적혀 있는 공을 한 개 꺼내어 상자에 넣은 후 상자에서 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$
(ii) $X=2$일 때, 주머니에서 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼내어 상자에 넣은 후 상자에서 2가 적혀 있는 공을 한 개 꺼내거나, 주머니에서 2가 적혀 있는 공을 한 개 꺼내어 상자에 넣은 후 상자에서 2가 적혀 있는 공을 한 개 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{3}$
(iii) $X=3$일 때, 주머니에서 1 또는 2가 적혀 있는 공을 한 개 꺼내어 상자에 넣은 후 상자에서 3이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=3)=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{4}=\frac{11}{6}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{5}{12}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{4}=4$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=4-\left(\frac{11}{6}\right)^2=\frac{23}{36}$

$36\mathrm{V}(X)=36\times\frac{23}{36}=23$

답 23

6 확률변수 X가 갖는 값은 -1, 1, 2이고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

이때

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=2$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

확률변수 Y가 갖는 값은 -12, 12, 24이고 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-12	12	24	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

이때 확률변수 Y와 확률변수 $12X$의 확률분포가 서로 같으므로

$\sigma(Y)=\sigma(12X)=12\sigma(X)$

따라서

$$\begin{aligned}\sigma(X)+\sigma(2Y+3)&=\sigma(X)+2\sigma(Y)\\&=\sigma(X)+2\times12\sigma(X)\\&=25\sigma(X)\\&=25\times\frac{\sqrt{14}}{3}=\frac{25\sqrt{14}}{3}\end{aligned}$$

답 ②

7 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(12,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=12p(1-p)$

$\mathrm{V}(4X-3)=36$에서

$4^2\mathrm{V}(X)=36$, $\mathrm{V}(X)=\frac{9}{4}$

$12p(1-p)=\frac{9}{4}$

$16p^2-16p+3=0$, $(4p-1)(4p-3)=0$

이때 $0<p<\frac{1}{2}$이므로 $p=\frac{1}{4}$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르고 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{12}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{12-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=1)}&=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{10}}{{}_{12}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{11}}\\&=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2\times3^{10}}{{}_{12}\mathrm{C}_1\times3^{11}}=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_1\times3}\\&=\frac{\frac{12\times11}{2\times1}}{12\times3}=\frac{11}{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

8 6개의 공 중 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

꺼낸 공에 적혀 있는 수가 각각 a, b, c $(a<b<c)$인 경우를 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$로 나타내자.

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수의 합이 나머지 한 수와 같은 경우는

$(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 5)$, $(1,\ 5,\ 6)$, $(2,\ 3,\ 5)$, $(2,\ 4,\ 6)$

일 때이므로 경우의 수는 6이다.

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{3}{10}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{3}{10}=30$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=21$

따라서 $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=30+21=51$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 72쪽

1 ② **2** 10 **3** ①

1 $_3\mathrm{H}_k - {}_2\mathrm{H}_k = {}_{k+2}\mathrm{C}_k - {}_{k+1}\mathrm{C}_k$

$= {}_{k+2}\mathrm{C}_2 - {}_{k+1}\mathrm{C}_1$

$= \dfrac{(k+2)(k+1)}{2\times 1} - (k+1)$

$= \dfrac{(k+1)(k+2-2)}{2}$

$= \dfrac{k^2+k}{2}$

이므로

$\mathrm{P}(X=k) = \dfrac{a(k^2+k)}{2}$ $(1\le k\le n)$

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(X=k)=1$에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a(k^2+k)}{2} = \frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$= \frac{a}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$= \frac{a}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$
$$= \frac{an(n+1)(n+2)}{6} = 1$$

즉, $a = \dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}$

$\mathrm{E}(X)=7$에서

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n}k\mathrm{P}(X=k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\frac{a(k^2+k)}{2}\right\}$$
$$= \frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$$
$$= \frac{a}{2}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$= \frac{a}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}\right\}$$
$$= \frac{a}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{3n^2+7n+2}{6}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{6}{n(n+1)(n+2)}\times\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(n+2)(3n+1)}{6}$$
$$= \frac{3n+1}{4} = 7$$

$3n+1=28$

따라서 $n=9$

답 ②

2 주머니 A에서 숫자 1이 적혀 있는 공 2개 또는 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 공 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣을 수 있으므로 확률변수 X가 갖는 값은 3, 4, 5이다.

(i) 주머니 A에서 숫자 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣는 경우

주머니 A에서 임의로 동시에 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자가 1, 1일 확률은 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{3}$

숫자 1이 적혀 있는 공 2개를 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 숫자 1, 1, 1, 1, 2가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다.

(i-1) 주머니 B에서 임의로 동시에 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 숫자가 1, 1, 1일 확률, 즉 세 수의 합이 3일 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{2}{5}$

(i-2) 주머니 B에서 임의로 동시에 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 숫자가 1, 1, 2일 확률, 즉 세 수의 합이 4일 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{5}$

(ii) 주머니 A에서 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 공 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣는 경우

주머니 A에서 임의로 동시에 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자가 1, 2일 확률은 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{3}$

숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 공 2개를 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 숫자 1, 1, 1, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다.

(ii-1) 주머니 B에서 임의로 동시에 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 숫자가 1, 1, 1일 확률, 즉 세 수의 합이 3일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{10}$

(ii-2) 주머니 B에서 임의로 동시에 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 숫자가 1, 1, 2일 확률, 즉 세 수의 합이 4일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{5}$

(ii-3) 주머니 B에서 임의로 동시에 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 숫자가 1, 2, 2일 확률, 즉 세 수의 합이 5일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{10}$

(i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{5}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{3}{5}+5\times\dfrac{1}{5}=4$

이므로

$V(X)=E((X-4)^2)$

$=(-1)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{3}{5}+1^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$V(5X+9)=5^2V(X)=25\times\frac{2}{5}=10$

답 10

3 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, ⋯, n이고 서로 다른 n 종류의 도시락을 5명의 학생에게 한 개씩만 나누어 주는 경우의 수는

${}_{n}\Pi_{5}=n^5$

(i) $X=1$일 때, 한 종류의 도시락을 나누어 주는 경우이므로 나누어 줄 도시락 종류를 정하는 경우의 수는 ${}_{n}C_{1}=n$

$P(X=1)=\frac{n}{n^5}=\frac{1}{n^4}$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $X=2$일 때, 두 종류의 도시락을 나누어 주는 경우이므로 나누어 줄 도시락 종류를 정하는 경우의 수는

${}_{n}C_{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

(ii−1) 두 종류의 도시락을 각각 1개, 4개 나누어 주는 경우

두 종류의 도시락 중에서 1개 나누어 줄 도시락 종류를 정하는 경우는 ${}_{2}C_{1}=2$(가지)이므로

이 경우의 수는 $2\times\frac{5!}{4!}=10$

(ii−2) 두 종류의 도시락을 각각 2개, 3개 나누어 주는 경우

두 종류의 도시락 중에서 2개 나누어 줄 도시락 종류를 정하는 경우는 ${}_{2}C_{1}=2$(가지)이므로

이 경우의 수는 $2\times\frac{5!}{2!\times3!}=20$

따라서

$$P(X=2)=\frac{\frac{n(n-1)}{2}\times(10+20)}{n^5}=\frac{15(n-1)}{n^4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $\frac{1}{4}<P(X=2)<\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{4}<\frac{15(n-1)}{n^4}<\frac{1}{2}$

즉, $30(n-1)<n^4<60(n-1)$ ⋯⋯ ㉢

㉢에 $n=2, 3, 4, 5$를 차례로 대입하면 $n=3$일 때만 부등식 ㉢이 성립한다.

㉠에서 $P(X=1)=\frac{1}{n^4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$

㉡에서 $P(X=2)=\frac{15(n-1)}{n^4}=\frac{15\times2}{3^4}=\frac{10}{27}$

한편, 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이므로

$P(X=3)=1-(P(X=1)+P(X=2))$

$=1-\left(\frac{1}{81}+\frac{10}{27}\right)=\frac{50}{81}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{50}{81}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{81}+2\times\frac{10}{27}+3\times\frac{50}{81}=\frac{211}{81}$

따라서

$E(nX-n)=3E(X)-3$

$=3\times\frac{211}{81}-3=\frac{130}{27}$

답 ①

참고1

(ii−1)과 (ii−2)를 합한 경우의 수는 두 종류의 도시락을 나누어 주는 전체 경우의 수 2^5에서 한 종류의 도시락만 나누어 주는 경우의 수 2를 뺀 것과 같으므로

$2^5-2=30$

으로도 구할 수 있다.

참고2

$P(X=3)$을 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 세 종류의 도시락을 각각 1개, 1개, 3개 나누어 주는 경우

세 종류의 도시락 중에서 3개 나누어 줄 도시락 종류를 정하는 경우는 ${}_{3}C_{1}=3$(가지)이므로

이 경우의 수는

$3\times\frac{5!}{3!}=60$

(ii) 세 종류의 도시락을 각각 1개, 2개, 2개 나누어 주는 경우

세 종류의 도시락 중에서 1개 나누어 줄 도시락 종류를 정하는 경우는 ${}_{3}C_{1}=3$(가지)이므로

이 경우의 수는

$3\times\frac{5!}{2!\times2!}=90$

따라서

$P(X=3)=\frac{60+90}{3^5}=\frac{50}{3^4}=\frac{50}{81}$

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ④ **2** ③ **3** ② **4** ② **5** ① **6** ③
7 ② **8** ⑤

1 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times(4+1)\times a=1$, $\frac{5}{2}a=1$이므로

$a=\frac{2}{5}$

한편, $0\le x\le 2$에서 $f(x)=\frac{a}{2}x=\frac{1}{5}x$이므로

$f(1)=\frac{1}{5}$, $f(2)=\frac{2}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}P(1\le X\le 3)&=P(1\le X\le 2)+P(2\le X\le 3)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)\times 1+1\times\frac{2}{5}\\&=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

답 ④

2 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 $0\le x\le 5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned}P(-3\le X\le 7)&=P(-3\le X\le 2)+P(2\le X\le 7)\\&=2P(2\le X\le 7)=1\end{aligned}$$

에서 $P(2\le X\le 7)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}P(4\le X\le 5)&=P(2+2\le X\le 2+3)\\&=P(2-3\le X\le 2-2)\\&=P(-1\le X\le 0)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(0\le X\le 4)&=P(0\le X\le 2)+P(2\le X\le 4)\\&=2P(2\le X\le 4)=\frac{2}{7}\end{aligned}$$

에서 $P(2\le X\le 4)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$

따라서

$$\begin{aligned}P(X\ge 5)&=P(2\le X\le 7)-P(2\le X\le 5)\\&=\frac{1}{2}-(P(2\le X\le 4)+P(4\le X\le 5))\\&=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{28}\end{aligned}$$

답 ③

3 평균이 24인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=24$에 대하여 대칭이므로

$P(X\le 24)=0.5$

$P(X\le 26)=0.84$에서

$$\begin{aligned}P(24\le X\le 26)&=P(X\le 26)-P(X\le 24)\\&=0.84-0.5\\&=0.34\end{aligned}$$

$P(21\le X\le 26)=0.77$에서

$$\begin{aligned}P(21\le X\le 24)&=P(21\le X\le 26)-P(24\le X\le 26)\\&=0.77-0.34\\&=0.43\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}P(|X-24|\ge 3)&=P(X-24\le -3)+P(X-24\ge 3)\\&=P(X\le 24-3)+P(X\ge 24+3)\\&=2P(X\le 21)\\&=2(P(X\le 24)-P(21\le X\le 24))\\&=2\times(0.5-0.43)\\&=0.14\end{aligned}$$

답 ②

4 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$P(X\le 26)=0.23<0.5$이므로 $m>26$

$$\begin{aligned}P(X\le m)&=P(X\le 26)+P(26\le X\le m)\\&=0.23+P(26\le X\le m)=0.5\end{aligned}$$

이므로

$P(26\le X\le m)=0.5-0.23=0.27$ …… ㉠

$P(26\le X\le m+5)$

$=P(26\le X\le m)+P(m\le X\le m+5)$

$=0.27+P(m\le X\le m+5)=0.54$

이므로

$P(m\le X\le m+5)=0.54-0.27=0.27$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$m=\frac{26+(m+5)}{2}=\frac{m+31}{2}$

따라서 $m=31$

답 ②

5 Z를 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

$P(X\ge a)=P(Y\le 21)$에서

확률변수 X는 정규분포 $N(7, 2^2)$을 따르므로

$P(X\ge a)=P\left(Z\ge\frac{a-7}{2}\right)$

확률변수 Y는 정규분포 $N(15, 4^2)$을 따르므로

$$P(Y\le 21)=P\left(Z\le \frac{21-15}{4}\right)$$
$$=P\left(Z\le \frac{3}{2}\right)=P\left(Z\ge -\frac{3}{2}\right)$$

따라서 $\frac{a-7}{2}=-\frac{3}{2}$, $a=4$

답 ①

6 확률변수 X는 정규분포 $N(m, 15^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{15}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 2m-30)=0.8413$에서

$$P(X\le 2m-30)=P\left(Z\le \frac{(2m-30)-m}{15}\right)$$
$$=P\left(Z\le \frac{m-30}{15}\right)=0.8413$$

$0.8413>0.5$이므로 $\frac{m-30}{15}>0$

$$P\left(Z\le \frac{m-30}{15}\right)=P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{m-30}{15}\right)$$
$$=0.5+P\left(0\le Z\le \frac{m-30}{15}\right)$$
$$P\left(0\le Z\le \frac{m-30}{15}\right)=P\left(Z\le \frac{m-30}{15}\right)-0.5$$
$$=0.8413-0.5$$
$$=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{m-30}{15}=1$, $m=45$

답 ③

7 확률변수 X는 이항분포 $B\left(288, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=288\times\frac{2}{3}=192$$
$$V(X)=288\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=64$$

이때 288은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(192, 8^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-192}{8}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$P(X\le 196)=P\left(Z\le \frac{196-192}{8}\right)$$
$$=P(Z\le 0.5)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5+0.1915=0.6915$$

답 ②

8 서로 다른 두 주사위의 눈의 수의 곱이 소수가 되려면 한 개의 주사위의 눈의 수는 1이고, 다른 주사위의 눈의 수는 소수이어야 하므로 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 주사위의 눈의 수의 곱이 소수일 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$이다.

확률변수 X는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$E(X)=720\times\frac{1}{6}=120$$
$$V(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-120}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$P(100\le X\le 120)=P\left(\frac{100-120}{10}\le Z\le \frac{120-120}{10}\right)$$
$$=P(-2\le Z\le 0)$$
$$=P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.4772$$

답 ⑤

Level 1 **기초 연습** 본문 82~83쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ③ **4** ⑤ **5** ④ **6** ③ **7** ④ **8** ②

1 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\right)\times a+(2-a)\times\frac{1}{4}=1$

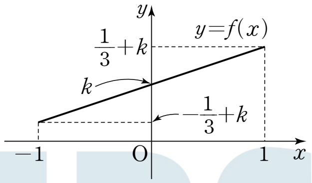
$\frac{5}{16}a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{8}{5}$

따라서

$$P(0\le X\le a)=P\left(0\le X\le \frac{8}{5}\right)$$
$$=1-P\left(\frac{8}{5}\le X\le 2\right)$$
$$=1-\left(2-\frac{8}{5}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{9}{10}$$

답 ⑤

2 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.



즉, $\frac{1}{2}\times\left\{\left(-\frac{1}{3}+k\right)+\left(\frac{1}{3}+k\right)\right\}\times2=2k=1$이므로

$k=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$에서

$f(-k)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{k}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(-k\le X\le\frac{k}{2}\right)&=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{12}\right)\times\left\{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\frac{11}{32}\end{aligned}$$

답 ②

3 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(35,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=35$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(X\le35-\sigma)=\mathrm{P}(X\ge40)$이므로

$\frac{(35-\sigma)+40}{2}=35$

$75-\sigma=70$, $\sigma=5$

$\mathrm{P}\left(\frac{35}{\sigma}\le X\le45\right)=\mathrm{P}(25\le X\le k)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{35}{\sigma}\le X\le45\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{35}{5}\le X\le45\right)\\&=\mathrm{P}(7\le X\le45)\\&=\mathrm{P}(35-28\le X\le35+10)\\&=\mathrm{P}(35-10\le X\le35+28)\\&=\mathrm{P}(25\le X\le63)\\&=\mathrm{P}(25\le X\le k)\end{aligned}$$

따라서 $k=63$

답 ③

4 평균이 10인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(12\le X\le13)&=\mathrm{P}(10+2\le X\le10+3)\\&=\mathrm{P}(10-3\le X\le10-2)\\&=\mathrm{P}(7\le X\le8)=0.09\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(10\le X\le12)&=\mathrm{P}(10\le X\le13)-\mathrm{P}(12\le X\le13)\\&=0.43-0.09=0.34 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le7)&=\mathrm{P}(X\le10-3)\\&=\mathrm{P}(X\ge10+3)\\&=\mathrm{P}(X\ge10)-\mathrm{P}(10\le X\le13)\\&=0.5-0.43=0.07 \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(10\le X\le12)-\mathrm{P}(X\le7)&=0.34-0.07\\&=0.27\end{aligned}$$

답 ⑤

5 Z를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(42,\ 10^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le30)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{30-42}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1.2) \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

또한 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-40}{5}\right) \quad\cdots\cdots ㉡$

$\mathrm{P}(X\le30)+\mathrm{P}(Y\ge a)=1$이므로

㉠, ㉡에서

$\frac{a-40}{5}=-1.2$

따라서 $a=34$

답 ④

6 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(35,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-35}{4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le33)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{33-35}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-0.5)=\mathrm{P}(Z\ge0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

답 ③

7 이 가게에서 판매하는 바나나 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(135,\ 20^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-135}{20}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(115\le X\le 165)&=\mathrm{P}\left(\frac{115-135}{20}\le Z\le\frac{165-135}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332\\&=0.7745\end{aligned}$$

답 ④

8 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 두 주사위의 눈의 수의 곱이 짝수인 사건은 적어도 한 주사위의 눈의 수가 짝수인 사건이므로 두 주사위의 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은

$1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \dfrac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=192\times\dfrac{3}{4}=144,\ \mathrm{V}(X)=192\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=36$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(144,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-144}{6}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(132\le X\le 147)&=\mathrm{P}\left(\frac{132-144}{6}\le Z\le\frac{147-144}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0.5)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4772+0.1915\\&=0.6687\end{aligned}$$

답 ②

Level **2** **기본 연습** 본문 84~85쪽

1 ① **2** ⑤ **3** ② **4** ③ **5** ② **6** ④
7 ⑤ **8** ③

1 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0\le x\le 5$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다. 즉,

$\dfrac{1}{2}\times 1\times b+\dfrac{1}{2}\times(a+b)\times 1+2\times a+\dfrac{1}{2}\times 1\times a=1$

$3a+b=1$

$b=1-3a$ …… ㉠

$ab=\dfrac{1}{12}$에 ㉠을 대입하면

$a(1-3a)=\dfrac{1}{12},\ (6a-1)^2=0$

$a=\dfrac{1}{6},\ b=\dfrac{1}{2}$

이때 $0\le x\le 1$에서 $f(x)=bx=\dfrac{1}{2}x$이므로

$f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a\le X\le b)&=\mathrm{P}\left(\frac{1}{6}\le X\le\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{18}\end{aligned}$$

답 ①

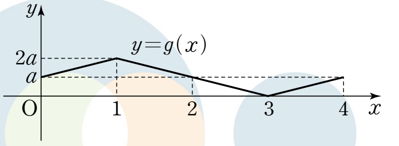
2 $2<x\le 4$일 때, $0<x-2\le 2$이므로

$$\begin{aligned}g(x)&=-f(x-2)+2a\\&=-\{-a|(x-2)-1|+2a\}+2a\\&=a|x-3|\end{aligned}$$

따라서

$$g(x)=\begin{cases}-a|x-1|+2a & (0\le x\le 2)\\ a|x-3| & (2<x\le 4)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$\dfrac{1}{2}\times(a+2a)\times 1+\dfrac{1}{2}\times 2\times 2a+\dfrac{1}{2}\times 1\times a=1$에서

$4a=1,\ a=\dfrac{1}{4}$

따라서 $0\le x\le 2$일 때, $g(x)=-\dfrac{1}{4}|x-1|+\dfrac{1}{2}$

이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)+\mathrm{P}\left(1\le X\le\frac{3}{2}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$$
$$=2\times\frac{1}{2}\times\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{16}$$

답 ⑤

참고

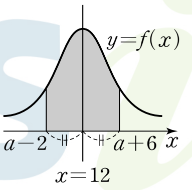
함수 $y=g(x)$의 그래프의 $2\le x\le 4$인 부분은 함수 $y=g(x)$의 그래프의 $0\le x\le 2$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 것이다.

3 평균이 m인 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고

$\mathrm{P}(X\le 9)=\mathrm{P}(X\ge 15)$이므로

$m=\frac{9+15}{2}=12$

$\mathrm{P}(a-2\le X\le a+6)$의 값이 최대이려면



$\frac{(a-2)+(a+6)}{2}=12$

이어야 한다.

즉, $a+2=12$, $a=10$

$\mathrm{P}(X\le 2a)=\mathrm{P}(X\le 20)$
$=\mathrm{P}(X\le 12+8)=\mathrm{P}(X\ge 12-8)$
$=\mathrm{P}(X\ge 4)\ge\mathrm{P}(X\ge b)$

에서 $b\ge 4$

따라서 $a+b\ge 10+4=14$이므로

구하는 $a+b$의 최솟값은 14이다.

답 ②

4 모든 실수 x에 대하여

$\mathrm{P}(X\le x)=\mathrm{P}(X\ge 20-x)$이므로

$\frac{x+(20-x)}{2}=m$, $m=10$

Z를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m, (2\sigma)^2)$, 즉 $\mathrm{N}(20, (2\sigma)^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y\ge 40)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{40-20}{2\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{10}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.0228$$

에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{10}{\sigma}=2$, $\sigma=5$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10, 5^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\le 5)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{5-10}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

답 ③

5 이 농가에서 수확한 방울토마토 한 개의 당도를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(7.4, 0.8^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-7.4}{0.8}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge a)\ge 0.9332>0.5$에서 $a<7.4$

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-7.4}{0.8}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{7.4-a}{0.8}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{7.4-a}{0.8}\right)$$
$$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{7.4-a}{0.8}\right)\ge 0.9332$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{7.4-a}{0.8}\right)\ge 0.9332-0.5=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로 $\frac{7.4-a}{0.8}\ge 1.5$이어야 한다.

$7.4-a\ge 1.2$, $a\le 6.2$

따라서 a의 최댓값은 6.2이다.

답 ②

6 Z를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

이 공장에서 생산한 빨간 공 한 개의 지름의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(51, 4^2)$을 따르므로

$$p_1=\mathrm{P}(X\le 45)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{45-51}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$$

또한 파란 공 한 개의 지름의 길이를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(46,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$\begin{aligned} p_2&=\mathrm{P}(46\le Y\le 55)\\ &=\mathrm{P}\left(\frac{46-46}{\sigma}\le Z\le \frac{55-46}{\sigma}\right)\\ &=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{9}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$p_1+p_2=\frac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(Z\ge 1.5)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{9}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{9}{\sigma}=1.5$이므로 $\sigma=6$

답 ④

7 $\mathrm{P}(X=x)={}_{400}\mathrm{C}_x\frac{4^{400-x}}{5^{400}}$

$$\begin{aligned} &={}_{400}\mathrm{C}_x\frac{4^{400-x}}{5^x\times 5^{400-x}}\\ &={}_{400}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{400-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 400)\end{aligned}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{5}=80$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=64$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-80}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(72\le X\le 96)&=\mathrm{P}\left(\frac{72-80}{8}\le Z\le\frac{96-80}{8}\right)\\ &=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\ &=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\ &=0.3413+0.4772\\ &=0.8185\end{aligned}$$

답 ⑤

8 주머니에서 꺼낸 두 공의 색이 서로 같을 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$

150번의 시행에서 두 공의 색이 서로 같게 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{2}{5}=60$, $\mathrm{V}(X)=150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=36$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-60}{6}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한 150번의 시행에서 얻을 수 있는 모든 점수의 합을 확률변수 Y라 하면

$Y=2X+3(150-X)=450-X$

이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(381\le Y\le 399)&=\mathrm{P}(381\le 450-X\le 399)\\ &=\mathrm{P}(51\le X\le 69)\\ &=\mathrm{P}\left(\frac{51-60}{6}\le Z\le\frac{69-60}{6}\right)\\ &=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)\\ &=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\ &=2\times 0.4332=0.8664\end{aligned}$$

답 ③

Level **3** **실력 완성** 본문 86쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ③

1 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{3}{5}$이므로

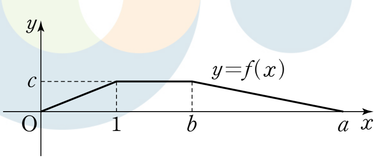
$\frac{1}{2}\times(2c+c)\times 1=\frac{3c}{2}=\frac{3}{5}$에서 $c=\frac{2}{5}$

$g(x)=\begin{cases}-cx+2c & (0\le x<1)\\ c & (1\le x<b)\\ \frac{c}{a-b}(x-b)+c & (b\le x\le a)\end{cases}$에서

$f(x)=2c-g(x)$이므로

$f(x)=\begin{cases}cx & (0\le x<1)\\ c & (1\le x<b)\\ -\frac{c}{a-b}(x-b)+c & (b\le x\le a)\end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\{a+(b-1)\}\times c=1$에서

$c(a+b-1)=2$ ······ ㉠

$c=\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면

$a+b=6$ ...... ㉡

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{10}$에서

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{c}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{a+b}{2}\right)\times\frac{c}{2}=\frac{1}{10}$

$c(a-b)=\frac{4}{5}$ ...... ㉢

$c=\frac{2}{5}$를 ㉢에 대입하면

$a-b=2$ ...... ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=2$

따라서 $abc=4\times2\times\frac{2}{5}=\frac{16}{5}$

답 ⑤

2 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge a\sigma+m)=0.0228$에서

$\mathrm{P}(X\ge a\sigma+m)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a\sigma+m-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge a)=0.0228$

$0.0228<0.5$이므로 $a>0$

$\mathrm{P}(Z\ge a)=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le a)$에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.5-\mathrm{P}(Z\ge a)$

$=0.5-0.0228=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로 $a=2$

$\mathrm{P}(X\ge2-2\sigma)=0.8413>0.5$에서 $m>2-2\sigma$

$\mathrm{P}(X\ge2-2\sigma)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{(2-2\sigma)-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{-2+2\sigma+m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{-2+2\sigma+m}{\sigma}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{-2+2\sigma+m}{\sigma}\right)$

$=0.8413$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{-2+2\sigma+m}{\sigma}\right)=0.8413-0.5=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{-2+2\sigma+m}{\sigma}=1$

$m+\sigma=2$ ...... ㉠

$\mathrm{P}(X\ge(a+t)\sigma+m)\le0.0062$에서

$\mathrm{P}(X\ge(2+t)\sigma+m)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\{(2+t)\sigma+m\}-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge2+t)\le0.0062$

$0.0062<0.5$이므로 $2+t>0$

$\mathrm{P}(Z\ge2+t)=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2+t)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2+t)\le0.0062$

$\mathrm{P}(0\le Z\le2+t)\ge0.5-0.0062=0.4938$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)=0.4938$이므로

$2+t\ge2.5$

$t\ge0.5$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $m+\sigma+t\ge2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

답 ②

3 확률변수 Y의 평균을 m_1, 표준편차를 σ_1이라 하자.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고,

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma_1{}^2)$을 따른다.

Z를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$\mathrm{P}(X\le x-3)=\mathrm{P}(Y\le x+3)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{x-3-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{x+3-m_1}{\sigma_1}\right)$에서

$\frac{x-3-m}{\sigma}=\frac{x+3-m_1}{\sigma_1}$ ...... ㉠

㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$m_1=m+6,\ \sigma_1=\sigma$

조건 (나)의 $\mathrm{P}(Y\ge m)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(Y\ge m)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-(m+6)}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{6}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.9772$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.9772-0.5=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{6}{\sigma}=2,\ \sigma=3$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m+6,\ 3^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(13\le X\le22)-\mathrm{P}(22\le Y\le28)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{13-m}{3}\le Z\le\frac{22-m}{3}\right)$

$-\mathrm{P}\left(\frac{22-(m+6)}{3}\le Z\le\frac{28-(m+6)}{3}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{13-m}{3}\le Z\le\frac{22-m}{3}\right)$

$-\mathrm{P}\left(\frac{16-m}{3}\le Z\le\frac{22-m}{3}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{13-m}{3}\le Z\le\frac{16-m}{3}\right)$

이때 $m<13$이므로 $\frac{13-m}{3}>0$이고

$\frac{16-m}{3}-\frac{13-m}{3}=1$

한편,

$\mathrm{P}(13\le X\le 22)-\mathrm{P}(22\le Y\le 28)=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

이므로 표준정규분포의 확률밀도함수의 그래프의 성질에 의하여

$\frac{13-m}{3}=1$이고 $\frac{16-m}{3}=2$이어야 한다.

즉, $m=10$

따라서 $m+\sigma=10+3=13$

답 ③

참고

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때

$0<a<1$이면 $\mathrm{P}(a\le Z\le a+1)>\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$a>1$이면 $\mathrm{P}(a\le Z\le a+1)<\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

07 통계적 추정

유제

본문 89~95쪽

1 ① **2** ③ **3** ② **4** ③ **5** ① **6** 18
7 516 **8** ③

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=1,\ a=\frac{1}{4}$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 표본평균 $\overline{X}$가 갖는 값은

$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4$이다.

$\overline{X}=\frac{3}{2}$인 경우는 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$

따라서

$\mathrm{P}(1<\overline{X}<2)=\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{16}$

답 ①

2 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{3}+b+a=1$

$b=\frac{1}{3}-a$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하자.

$\overline{X}=-2$인 경우는 $(-2,\ -2)$뿐이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=-2)=a\times a=a^2$

$\overline{X}=2$인 경우는 $(2,\ 2)$뿐이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=a\times a=a^2$

$\mathrm{P}(|\overline{X}|=2)=\frac{1}{8}$에서

$\mathrm{P}(|\overline{X}|=2)=\mathrm{P}(\overline{X}=-2)+\mathrm{P}(\overline{X}=2)$

$=a^2+a^2=2a^2=\frac{1}{8}$

$a^2=\frac{1}{16}$

$a=\frac{1}{4}$

따라서 $b=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$이므로

$a-b=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

답 ③

3 모평균이 20, 모표준편차가 8이고 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{8^2}{4}=16$

따라서

$\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\overline{X}-2\right)+\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}\overline{X}-3\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\mathrm{E}(\overline{X})-2\right)+\frac{1}{2^2}\mathrm{V}(\overline{X})$

$=\left(\frac{1}{2}\times20-2\right)+\frac{1}{4}\times16=12$

답 ②

4 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{3}=1$

$a+b=\frac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{7}{2}$이므로

$\mathrm{E}(X)=2\times a+3\times b+5\times\frac{1}{3}=\frac{7}{2}$

$2a+3b=\frac{11}{6}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{2}+5^2\times\frac{1}{3}=\frac{27}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$

$=\frac{27}{2}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

이때 표본의 크기가 5이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$

답 ③

5 이 회사에서 생산한 태블릿 PC 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(480,\ 12^2)$을 따른다.

이때 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=480$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{9}=\frac{12^2}{3^2}=4^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(480,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-480}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq488)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{488-480}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

답 ①

6 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 표본의 크기가 36이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{36}=\left(\frac{\sigma}{6}\right)^2$

즉, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

Z를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

$\mathrm{P}(X\leq6)+\mathrm{P}(\overline{X}\leq13)=1$에서

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{6-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{13-m}{\frac{\sigma}{6}}\right)=1$이므로

$\frac{6-m}{\sigma}+\frac{13-m}{\frac{\sigma}{6}}=0$

즉, $\frac{6-m}{\sigma}+\frac{6(13-m)}{\sigma}=0$에서 $\frac{84-7m}{\sigma}=0$

그러므로 $m=12$

또 $\mathrm{P}(\overline{X}\leq14)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\leq14)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{14-12}{\frac{\sigma}{6}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{12}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{12}{\sigma}\right)=0.9772$에서 $\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{12}{\sigma}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)=0.4772$이므로

$\frac{12}{\sigma}=2$에서 $\sigma=6$

따라서 $m+\sigma=12+6=18$

답 18

7 크기가 400인 표본으로부터 구한 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{2}{\sqrt{400}}\leq m\leq\overline{x}+2.58\times\frac{2}{\sqrt{400}}$

즉, $\overline{x}-0.258\leq m\leq\overline{x}+0.258$

따라서 $1000(b-a)=1000\times0.516=516$

답 516

8 크기가 9인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{9}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{9}}$

즉, $\bar{x}-3.92\le m\le \bar{x}+3.92$

이 구간이 $\frac{4}{5}\bar{x}\le m\le a$이므로

$\bar{x}-3.92=\frac{4}{5}\bar{x}$에서

$\frac{1}{5}\bar{x}=3.92$, $\bar{x}=19.6$

따라서 $a=\bar{x}+3.92=19.6+3.92=23.52$

답 ③

Level 1 **기초 연습** 본문 96~97쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ④ **4** ① **5** ② **6** ⑤ **7** ③ **8** ①

1 $\mathrm{P}(X\ge 2)=1-\mathrm{P}(X=1)$

$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(\bar{X}\ge 2)=1-\mathrm{P}(\bar{X}<2)$ ...... ㉠

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\bar{X}<2$인 경우는 (1, 1), (1, 2), (2, 1)일 때이므로

$\mathrm{P}(\bar{X}<2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

그러므로 ㉠에서 $\mathrm{P}(\bar{X}\ge 2)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

따라서 $\frac{\mathrm{P}(\bar{X}\ge 2)}{\mathrm{P}(X\ge 2)}=\frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{6}$

답 ③

2 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b=1$에서

$a+b=\frac{3}{4}$ ...... ㉠

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\bar{X}=2$인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)일 때이므로

$\mathrm{P}(\bar{X})=\frac{1}{4}\times b+a\times a+b\times\frac{1}{4}=a^2+\frac{1}{2}b$

즉, $a^2+\frac{1}{2}b=\frac{5}{16}$ ...... ㉡

㉠에서 $b=\frac{3}{4}-a$를 ㉡에 대입하면

$a^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-a\right)-\frac{5}{16}=0$, $a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}=0$

$\left(a-\frac{1}{4}\right)^2=0$

즉, $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+2b=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

답 ⑤

3 $\mathrm{E}(\bar{X})=15$, $\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{16}{n}$이므로

$\mathrm{E}(\bar{X})\times\mathrm{V}(\bar{X})\ge 12$에서

$15\times\frac{16}{n}\ge 12$

$n\le 20$

따라서 자연수 n의 개수는 20이다.

답 ④

4 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 확인한 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{n+6}$	$\frac{3}{n+6}$	$\frac{n}{n+6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{n+6}+2\times\frac{3}{n+6}+3\times\frac{n}{n+6}=\frac{3n+9}{n+6}$

크기가 4인 표본의 표본평균 $\bar{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\bar{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{9}{4}$이므로

$\frac{3n+9}{n+6}=\frac{9}{4}$에서

$12n+36=9n+54$, $3n=18$, $n=6$

즉, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{23}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$

$=\frac{23}{4}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

따라서 $\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{11}{64}$

답 ①

5 $\mathrm{E}(\bar{X})=\mathrm{E}(X)=36$

$\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2$

이므로 확률변수 $\bar{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(36, \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-36}{\dfrac{3}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|\overline{X}-37|\le 1)=0.4772$에서

$\mathrm{P}(-1\le\overline{X}-37\le 1)=\mathrm{P}(36\le\overline{X}\le 38)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{36-36}{\dfrac{3}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{38-36}{\dfrac{3}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2\sqrt{n}}{3}\right)$

즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2\sqrt{n}}{3}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{2\sqrt{n}}{3}=2$에서 $\sqrt{n}=3$

따라서 $n=9$

답 ②

6 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{4}=\dfrac{4^2}{4}=2^2$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.

정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 6^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 Y라 하면

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=2m$

$\mathrm{V}(\overline{Y})=\dfrac{\mathrm{V}(Y)}{9}=\dfrac{6^2}{9}=2^2$

즉, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$을 따른다.

Z를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-m}{2}\right)$

$\mathrm{P}(\overline{Y}\le 12)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-2m}{2}\right)$

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le 12)=1$이므로

$\dfrac{12-m}{2}+\dfrac{12-2m}{2}=0$에서

$\dfrac{24-3m}{2}=0,\ m=8$

이때

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-8}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 2)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$\mathrm{P}(\overline{Y}\le 12)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-16}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

따라서

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)-\mathrm{P}(\overline{Y}\le 12)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=2\times 0.4772=0.9544$

답 ⑤

7 이 지역 성인 1명의 일주일 개인 운동 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(256,\ 32^2)$을 따른다. 이 지역 성인 중 임의추출한 64명의 일주일 개인 운동 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=256$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{32}{\sqrt{64}}=4$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(256,\ 4^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-256}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 임의추출한 64명의 일주일 개인 운동 시간의 평균이 262분 이상일 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 262)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{262-256}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

답 ③

8 크기가 49인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{49}}$

즉, $\overline{x}-2.8\le m\le\overline{x}+2.8$

이 구간이 $a\le m\le 132.4$이므로

$\overline{x}+2.8=132.4$에서 $\overline{x}=129.6$

이때 $a=\overline{x}-2.8=126.8$

따라서 $\overline{x}+a=129.6+126.8=256.4$

답 ①

Level **2** **기본 연습** 본문 98~99쪽

1 15 **2** ④ **3** ③ **4** ④ **5** ② **6** ③
7 400 **8** 695

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+a+b=1$

$a+b=\frac{1}{2}$ ...... ㉠

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 표본평균 $\overline{X}$가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

$\overline{X}=4$인 경우는 (1, 7), (3, 5), (5, 3), (7, 1)이고

$P(\overline{X}=4)=\frac{3}{16}$이므로

$$P(\overline{X}=4)=2\times\left(\frac{3}{8}\times b\right)+2\times\left(\frac{1}{8}\times a\right)$$
$$=\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b=\frac{3}{16}$$

$a+3b=\frac{3}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{8}$, $b=\frac{1}{8}$

한편, 부등식 $P(\overline{X}<n)<\frac{7}{8}$에서

$1-P(\overline{X}\geq n)<\frac{7}{8}$

$P(\overline{X}\geq n)>\frac{1}{8}$ ...... ㉢

$\overline{X}=7$인 경우는 (7, 7)뿐이므로

$P(\overline{X}=7)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$

$\overline{X}=6$인 경우는 (5, 7), (7, 5)이므로

$P(\overline{X}=6)=2\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{32}$

$\overline{X}=5$인 경우는 (3, 7), (5, 5), (7, 3)이므로

$P(\overline{X}=5)=2\times\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{11}{64}$

이때

$P(\overline{X}\geq 7)=P(\overline{X}=7)=\frac{1}{64}<\frac{1}{8}$

$$P(\overline{X}\geq 6)=P(\overline{X}=6)+P(\overline{X}=7)$$
$$=\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}<\frac{1}{8}$$

$$P(\overline{X}\geq 5)=P(\overline{X}=5)+P(\overline{X}=6)+P(\overline{X}=7)$$
$$=\frac{11}{64}+\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=\frac{9}{32}>\frac{1}{8}$$

이고 모든 자연수 n에 대하여

$P(\overline{X}\geq n)\geq P(\overline{X}\geq n+1)$이므로 부등식 ㉢을 만족시키려면 $n\leq 5$이어야 한다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

2 주어진 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 표본평균 $\overline{X}$가 갖는 값은

a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+6$이므로 $m=6$이고

$b_1=a$, $b_2=a+1$, $b_3=a+2$, $b_4=a+3$, $b_5=a+4$, $b_6=a+6$

이때 $\sum_{n=1}^{m} b_n=40$이므로

$$\sum_{n=1}^{6} b_n=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6$$
$$=a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+6)$$
$$=6a+16=40$$

$a=4$

따라서 모집단의 확률변수 X가 갖는 값은 4, 6, 10이고 표본평균 $\overline{X}$가 갖는 값은 4, 5, 6, 7, 8, 10이다.

0 이상 1 이하인 두 실수 p_1, p_2에 대하여

$P(X=4)=p_1$, $P(X=6)=p_2$,

$P(X=10)=1-(p_1+p_2)$라 하자.

$\overline{X}=b_1$, 즉 $\overline{X}=4$인 경우는 (4, 4)뿐이고

$P(\overline{X}=b_1)=\frac{1}{16}$이므로

$P(\overline{X}=b_1)=P(\overline{X}=4)=p_1\times p_1=p_1{}^2=\frac{1}{16}$

$0\leq p_1\leq 1$이므로 $p_1=\frac{1}{4}$

$\overline{X}=b_2$, 즉 $\overline{X}=5$인 경우는 (4, 6), (6, 4)이고

$P(\overline{X}=b_2)=\frac{1}{4}$이므로

$P(\overline{X}=b_2)=P(\overline{X}=5)=2\times\left(\frac{1}{4}\times p_2\right)=\frac{p_2}{2}=\frac{1}{4}$

$p_2=\frac{1}{2}$

$P(X=10)=1-(p_1+p_2)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	6	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서

$E(X)=4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{4}=\frac{13}{2}$

이므로

$E(\overline{X})=E(X)=\frac{13}{2}$

답 ④

참고

표본의 크기가 2이므로

$\sum_{n=1}^{6} b_n=2\{a+(a+2)+(a+6)\}=6a+16=40$

$a=4$

3 주머니에서 한 장의 카드를 꺼낼 때 꺼낸 카드에 적힌 수를 확률변수 Y라 하고 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(Y)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$

$\mathrm{E}(Y^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}=6$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(\mathrm{E}(Y))^2=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이 주머니에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=\frac{7}{3}$

$\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{\mathrm{V}(Y)}{n}=\frac{5}{9n}$

한편, $\overline{Y}=\frac{X}{n}$, 즉 $X=n\overline{Y}$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(n\overline{Y})=n\mathrm{E}(\overline{Y})=\frac{7}{3}n$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(n\overline{Y})=n^2\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{5}{9}n$

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=26$에서

$\frac{7}{3}n+\frac{5}{9}n=\frac{26}{9}n=26$

$n=9$

따라서

$\mathrm{E}(X)=\frac{7}{3}\times 9=21$

$\mathrm{V}(X)=\frac{5}{9}\times 9=5$

이므로

$\mathrm{E}(2X)+\mathrm{V}(2X)$

$=2\mathrm{E}(X)+2^2\mathrm{V}(X)$

$=2\times 21+4\times 5$

$=62$

답 ③

4 이 농장에서 수확한 양파 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 24^2)$을 따른다.

이때 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=120$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{9}=\frac{24^2}{9}=8^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 8^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-120}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(112\le\overline{X}\le 132)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{112-120}{8}\le Z\le\frac{132-120}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.3413+0.4332=0.7745$

답 ④

5 정규분포 $\mathrm{N}(105,\ 20^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=105,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{20^2}{25}=4^2$

따라서 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(105,\ 4^2)$을 따른다.

확률변수 $\overline{X}$의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=105$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이므로 함수 $f(x)$는 $x=105$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $\mathrm{P}(k\le\overline{X}\le k+10)$은 $\frac{k+(k+10)}{2}=105$, 즉 $k=100$일 때 최댓값을 가지므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le k)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge k+10)=1-\mathrm{P}(k\le\overline{X}\le k+10)$은 $k=100$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $k_1=100$

$Z=\frac{\overline{X}-105}{4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$m=\mathrm{P}(\overline{X}\le 100)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge 110)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{100-105}{4}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{110-105}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -1.25)+\mathrm{P}(Z\ge 1.25)$

$=1-\mathrm{P}(-1.25\le Z\le 1.25)$

$=1-2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)$

$=1-2\times 0.3944=0.2112$

따라서

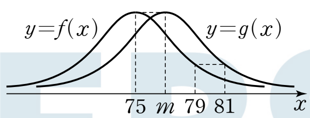
$k_1\times m=100\times 0.2112=21.12$

답 ②

6 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 4^2)$을 따르고, 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 16^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{Y}$이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다.

이때 두 확률변수 $\overline{X}$, $\overline{Y}$의 표준편차가 모두 4이므로 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 평행이동하여 일치시킬 수 있다.
또 $f(79)=g(81)$이므로 m의 값에 따라 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 다음과 같다.

(i) $m<79$일 때



곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $81-79$, 즉 2만큼 평행이동한 것이므로

$m-75=2$

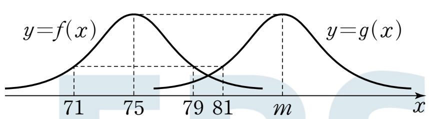
$m=77$

(ii) $m>79$일 때

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=75$에 대하여 대칭이므로

$f(71)=f(79)$

이때 $f(79)=g(81)$이고 $f(75)=g(m)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $81-71$, 즉 10만큼 평행이동한 것이므로

$m-75=10$

$m=85$

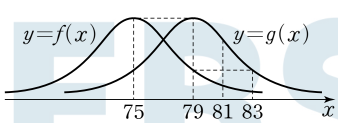
(i), (ii)에 의하여 모든 m의 값의 합은

$77+85=162$

답 ③

참고

$m=79$이면 $f(75)=g(79)$이므로 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $79-75$, 즉 4만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $f(79)=g(83)<g(81)$이므로

$f(79)\neq g(81)$

7 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n, 표본평균이 $\bar{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\leq m\leq\bar{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때

$a=\bar{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

$b=\bar{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이므로 $b-a\leq1.29$에서

$b-a=2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\leq1.29$

$\sqrt{n}\geq20$

$n\geq20^2=400$

따라서 자연수 n의 최솟값은 400이다.

답 400

8 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 25, 표본평균이 $\bar{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\leq m\leq\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$

$\bar{x}-0.392\sigma\leq m\leq\bar{x}+0.392\sigma$

이때 $27.08\leq m\leq a$이므로

$\bar{x}-0.392\sigma=27.08$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\bar{x}+0.392\sigma=a$

또한 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 100, 표본평균이 $\bar{x}+1$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$(\bar{x}+1)-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\leq m\leq(\bar{x}+1)+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$

$\bar{x}+1-0.258\sigma\leq m\leq\bar{x}+1+0.258\sigma$

이때 $29.42\leq m\leq b$이므로

$\bar{x}+1-0.258\sigma=29.42$

$\bar{x}-0.258\sigma=28.42$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$\bar{x}+1+0.258\sigma=b$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\bar{x}=31$, $\sigma=10$

따라서

$a=31+0.392\times10=34.92$

$b=31+1+0.258\times10=34.58$

이므로

$10(a+b)=10\times(34.92+34.58)=695$

답 695

Level 3 실력 완성 본문 100쪽

1 39 **2** ③ **3** ②

1 주어진 시행을 2번 반복하여 기록한 수를 차례로 X_1, X_2라 하면 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

X_1의 값은 2, 3, 4, 5이고 X_2의 값도 2, 3, 4, 5이므로 표본평균 $\overline{X}$가 갖는 값은 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5이다.

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 3) = 1 - \mathrm{P}(\overline{X} < 3)$

$= 1 - \left(\mathrm{P}(\overline{X}=2) + \mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)\right)$ …… ㉠

(i) $\overline{X}=2$일 때

즉, $X_1=2$, $X_2=2$일 때

첫 번째 시행에서 1, 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼내고, 두 번째 시행에서도 1, 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=2) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

(ii) $\overline{X}=\frac{5}{2}$일 때

즉, $X_1=2$, $X_2=3$ 또는 $X_1=3$, $X_2=2$일 때

첫 번째 시행에서 1, 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 1, 2가 적혀 있는 2개의 공 중에서 1개, 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내는 경우이거나

첫 번째 시행에서 1, 2가 적혀 있는 2개의 공 중에서 1개, 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 1, 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right) = 2 \times \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}$$

$$= 2 \times \frac{1}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{25}$$

(i), (ii)에 의하여 ㉠에서

$$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 3) = 1 - \left(\mathrm{P}(\overline{X}=2) + \mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{25}\right) = \frac{19}{20}$$

따라서 $p=20$, $q=19$이므로

$p+q=20+19=39$

답 39

2 정규분포 $\mathrm{N}(10, 12^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X) = 10$

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\mathrm{V}(X)}{n} = \frac{12^2}{n} = \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

Z를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르는 확률변수라 하자.

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = 0.0668 < 0.5$이므로 $a > 10$

$$\mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{a-10}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-10}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-10}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right) = 0.0668$$

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a-10}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right) = 0.5 - 0.0668 = 0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) = 0.4332$이므로

$$\frac{a-10}{\frac{12}{\sqrt{n}}} = 1.5, \ a-10 = \frac{18}{\sqrt{n}}$$

$a = \frac{18}{\sqrt{n}} + 10$ …… ㉠

a는 자연수이고 $18 = 2 \times 3^2$이므로 가능한 자연수 n의 값은 $n=1, 4, 9, 36, 81, 324$이다.

이때 $30 \le n \le 80$이므로 $n=36$

따라서 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \left(\frac{12}{\sqrt{36}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(10, 2^2)$을 따른다.

또한 ㉠에서 $a = \frac{18}{\sqrt{36}} + 10 = 13$

한편, 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 Y라 하면 크기가 100인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{Y}) = \mathrm{E}(Y) = m$

$$\mathrm{V}(\overline{Y}) = \frac{\mathrm{V}(Y)}{100} = \frac{5^2}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

조건 (나)의 $\mathrm{P}(\overline{X} \ge \sqrt{n}) = \mathrm{P}(\overline{Y} \le \sqrt{n})$, 즉

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 6) = \mathrm{P}(\overline{Y} \le 6)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{6-10}{2}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{6-m}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z \ge -\frac{6-m}{\frac{1}{2}}\right)$$

이므로

$$\frac{6-10}{2} = -\frac{6-m}{\frac{1}{2}}$$

$-2 = -12 + 2m$

$m=5$

따라서 $a+m+n = 13+5+36 = 54$

답 ③

3 표본의 크기가 n인 표본으로부터 구한 표본평균을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$\overline{x_1}-\frac{19.6}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x_1}+\frac{19.6}{\sqrt{n}}$

이때 $297.2 \le m \le a$이므로

$\overline{x_1}-\frac{19.6}{\sqrt{n}}=297.2$에서

$\overline{x_1}=297.2+\frac{19.6}{\sqrt{n}}$

$a=\overline{x_1}+\frac{19.6}{\sqrt{n}}=297.2+2\times\frac{19.6}{\sqrt{n}}$

$=297.2+\frac{39.2}{\sqrt{n}}$

한편, 표본의 크기가 36인 표본으로부터 구한 표본평균을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{10}{\sqrt{36}} \le m \le \overline{x_2}+2.58\times\frac{10}{\sqrt{36}}$

$\overline{x_2}-4.3 \le m \le \overline{x_2}+4.3$

이때 $b \le m \le 294.3$이므로

$\overline{x_2}+4.3=294.3$에서

$\overline{x_2}=294.3-4.3=290$

$b=\overline{x_2}-4.3=290-4.3=285.7$

따라서

$a-b=\left(297.2+\frac{39.2}{\sqrt{n}}\right)-285.7=11.5+\frac{39.2}{\sqrt{n}}$

$a-b \le 17.1$에서

$11.5+\frac{39.2}{\sqrt{n}} \le 17.1$, $\frac{39.2}{\sqrt{n}} \le 5.6$

$\sqrt{n} \ge \frac{39.2}{5.6}$, $n \ge 7$

양변을 제곱하면 $n \ge 49$이므로 자연수 n의 최솟값은 49이다.

답 ②