수능특강

수학영역
수학 Ⅱ

정답과 풀이

01 함수의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ② **2** ② **3** ① **4** 24 **5** ⑤ **6** ②
7 ① **8** ③

1 $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x+a)=-1+a$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+2a)=1+2a$

$\lim_{x\to1-}f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)=3$에서

$-1+a-(1+2a)=3$

$-2-a=3,\ a=-5$

따라서

$f(1)=1+2a=1+(-10)=-9$

답 ②

2 $\lim_{x\to-1-}f(x+2)$에서 $x+2=s$로 놓으면

$x\to-1-$일 때 $s\to1-$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x+2)=\lim_{s\to1-}f(s)=0$

$\lim_{x\to1+}f(-x)$에서 $-x=t$로 놓으면

$x\to1+$일 때 $t\to-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=-1$

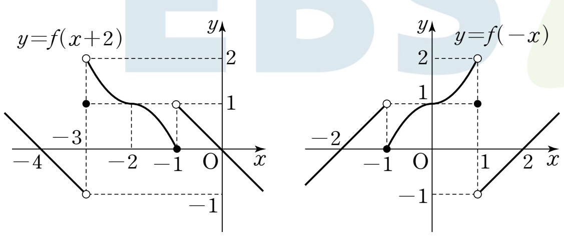
따라서

$\lim_{x\to-1-}f(x+2)+\lim_{x\to1+}f(-x)=0+(-1)=-1$

답 ②

다른 풀이

함수 $y=f(x+2)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 두 함수 $y=f(x+2)$, $y=f(-x)$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1-}f(x+2)=0,\ \lim_{x\to1+}f(-x)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x+2)+\lim_{x\to1+}f(-x)=0+(-1)=-1$

3 $\lim_{x\to2}\{(f(x))^2+f(x)g(x)\}=\lim_{x\to2}f(x)(f(x)+g(x))=12$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)(f(x)+g(x))}{f(x)+g(x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to2}f(x)(f(x)+g(x))}{\lim_{x\to2}(f(x)+g(x))}$$

$$=\frac{12}{6}=2$$

$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\{(f(x)+g(x))-f(x)\}$

$=\lim_{x\to2}(f(x)+g(x))-\lim_{x\to2}f(x)$

$=6-2=4$

따라서

$\lim_{x\to2}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to2}f(x)-\lim_{x\to2}g(x)$

$=2-4=-2$

답 ①

4 $$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\left\{\left(\frac{g(x)}{x+1}+3x\right)-3x\right\}$$

$$=\lim_{x\to-1}\left(\frac{g(x)}{x+1}+3x\right)-\lim_{x\to-1}3x$$

$$=8-(-3)=11$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1}\left\{(x+1)f(x)\times\frac{g(x)}{x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)\times\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{x+1}$$

$$=2\times11=22$$

$\lim_{x\to-1}(x^2+3x+2)f(x)$

$=\lim_{x\to-1}(x+2)(x+1)f(x)$

$=\lim_{x\to-1}(x+2)\times\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)$

$=1\times2=2$

따라서

$\lim_{x\to-1}\{f(x)g(x)+(x^2+3x+2)f(x)\}$

$=\lim_{x\to-1}f(x)g(x)+\lim_{x\to-1}(x^2+3x+2)f(x)$

$=22+2=24$

답 24

참고

$\lim_{x\to-1}\{f(x)g(x)+(x^2+3x+2)f(x)\}$

$$=\lim_{x\to-1}\left[(x+1)f(x)\left\{\frac{g(x)}{x+1}+(x+2)\right\}\right]$$

$$=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)\times\left\{\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{x+1}+\lim_{x\to-1}(x+2)\right\}$$

$=2\times(11+1)=24$

5 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{2}+\frac{x-4}{(x+2)^3}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{(x+2)^3+2(x-4)}{2(x+2)^3}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{x^3+6x^2+14x}{2(x+2)^3}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+6x+14}{2(x+2)^3}$

$=\frac{14}{2\times8}=\frac{7}{8}$

답 ⑤

6 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x}-2x}{x+4}$에서 $-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x}-2x}{x+4}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4t^2-3t}+2t}{-t+4}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{3}{t}}+2}{-1+\frac{4}{t}}$

$=\frac{\sqrt{4}+2}{-1+0}=-4$

답 ②

7 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-3}{x-2}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-3)=\sqrt{2+a}-3=0$

$\sqrt{2+a}=3$에서 $2+a=9$, $a=7$

㉠에서

$b=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{6}$

따라서 $ab=7\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

답 ①

8 $x^2+3x\le f(x)\le 2x^2+3x$ ...... ㉠

$x>0$일 때 ㉠의 각 변을 x로 나누면

$x+3\le\frac{f(x)}{x}\le2x+3$

이고 $\lim_{x\to0+}(x+3)=3$, $\lim_{x\to0+}(2x+3)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=3$

마찬가지의 방법으로 $x<0$일 때 ㉠의 각 변을 x로 나누면

$x+3\ge\frac{f(x)}{x}\ge2x+3$

이고 $\lim_{x\to0-}(x+3)=3$, $\lim_{x\to0-}(2x+3)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=3$

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=3$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$에서 $x=2t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(2t)}{2t}=3$, 즉 $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{2x}=3$

따라서

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+f(2x)}{6x+f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{f(2x)}{2x}\times2}{6+\frac{f(x)}{x}}$

$=\frac{0+3\times2}{6+3}=\frac{2}{3}$

답 ③

Level **1** **기초 연습** 본문 12~13쪽

1 ③	**2** ③	**3** ③	**4** ①	**5** ②	**6** ⑤
7 ④	**8** ④				

1 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to1-}f(x)=-1$

$\lim_{x\to0+}f(x-1)$에서 $x-1=t$로 놓으면

$x\to0+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x-1)=\lim_{t\to-1+}f(t)=2$

따라서 $\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x-1)=-1+2=1$

답 ③

2 $\lim_{x\to2}f(x)=b$이므로 $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=b$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x+1)=3$,

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(ax-1)=2a-1$

에서 $3=2a-1=b$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=2+3=5$

답 ③

3 $\lim_{x\to 1}(x^3-1)f(x)$

$=\lim_{x\to 1}\left\{(x^2-1)f(x)\times\frac{x^3-1}{x^2-1}\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{(x^2-1)f(x)\times\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{(x^2-1)f(x)\times\frac{x^2+x+1}{x+1}\right\}$

$=\lim_{x\to 1}(x^2-1)f(x)\times\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}$

$=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

답 ③

4 $x>0$일 때

$f(x)=\frac{ax+|x|}{|x|}=\frac{ax+x}{x}=\frac{(a+1)x}{x}=a+1$

이고 $\lim_{x\to 0+}f(x)=5$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(a+1)=a+1=5$

에서 $a=4$

$x<0$일 때

$f(x)=\frac{ax+|x|}{|x|}=\frac{4x+|x|}{|x|}=\frac{4x-x}{-x}=\frac{3x}{-x}=-3$

따라서

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(-3)=-3$

답 ①

5 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+6}{x-2}=b$ …… ㉠

㉠에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+ax+6)=4+2a+6=0$에서 $a=-5$

㉠에서

$b=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x-3)$

$=2-3=-1$

따라서 $a+b=-5+(-1)=-6$

답 ②

6 $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}+b}=6$ …… ㉠

㉠에서 $x\to -1$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -1}(\sqrt{x+a}+b)=\sqrt{-1+a}+b=0$에서

$b=-\sqrt{-1+a}$ …… ㉡

㉠에서

$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}+b}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{-1+a}}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{-1+a})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{-1+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{-1+a})}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{-1+a})}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(\sqrt{x+a}+\sqrt{-1+a})$

$=2\sqrt{-1+a}=6$

이므로

$\sqrt{-1+a}=3$에서 $-1+a=9$, $a=10$

㉡에서 $b=-3$

따라서 $a+b=10+(-3)=7$

답 ⑤

7 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=3$이므로 함수 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+ax+b}{x}=7$ …… ㉠

㉠에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(3x^2+ax+b)=b=0$

㉠에서

$7=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(3x+a)=a$

따라서 $f(x)=3x^2+7x$이므로

$f(1)=3+7=10$

답 ④

8 모든 양의 실수 x에 대하여

$x(x+4)\le f(x)+x^2\le (x+2)^2$이 성립하므로

$x^2+4x\le f(x)+x^2\le x^2+4x+4$

$4x\le f(x)\le 4x+4$

$8x\le f(2x)\le 8x+4$ …… ㉠

$x>0$에서 $6x+1>0$이므로 ㉠의 각 변을 $6x+1$로 나누면

$$\frac{8x}{6x+1} \le \frac{f(2x)}{6x+1} \le \frac{8x+4}{6x+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{6x+1}=\frac{4}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{8x+4}{6x+1}=\frac{4}{3}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{6x+1}=\frac{4}{3}$$

답 ④

Level 2 **기본 연습** 본문 14~15쪽

1 ② **2** ④ **3** ① **4** 16 **5** 51 **6** ②
7 ②

1 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-2x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{f(x)}-2x)(\sqrt{f(x)}+2x)}{\sqrt{f(x)}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^2}{\sqrt{f(x)}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-4)x^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-4)x+b+\frac{c}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+2}=1$$

에서

$$a-4=0,\ \frac{b}{\sqrt{a}+2}=1$$

이어야 하므로

$a=4$, $b=4$

이때 $f(x)=4x^2+4x+c$이고

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=f(0)$에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+c-(4x^2-4x+c)}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x}=\lim_{x\to\infty}8=8,$$

$f(0)=c$

이므로 $c=8$

따라서 $f(x)=4x^2+4x+8$이므로

$f(1)=4+4+8=16$

답 ②

2 $f(k)+\lim_{x\to k-}f(x)=2a+2$ …… ㉠

(ⅰ) $k<a$일 때

$f(k)=k$, $\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k-}x=k$이므로 ㉠에서

$k+k=2a+2$, $k=a+1$

이때 $k<a$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k=a$일 때

$f(k)=f(a)=4$, $\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to a-}x=a$이므로 ㉠에서

$4+a=2a+2$, 즉 $a=2$이면 $k=2$일 때 ㉠을 만족시킨다.

(ⅲ) $k>a$일 때

$f(k)=k-1$, $\lim_{x\to k-}f(x)=\lim_{x\to k-}(x-1)=k-1$이므로 ㉠에서

$(k-1)+(k-1)=2a+2$, $k=a+2$

이때 $k>a$를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 ㉠을 만족시키는 모든 실수 k가 2개이려면 이러한 k의 값은 a와 $a+2$이어야 하므로 (ⅱ)에서 $a=2$이어야 한다. 이때 $k_1=2$, $k_2=4$ 또는 $k_1=4$, $k_2=2$이다.

따라서 $k_1+k_2=2+4=6$

답 ④

3 함수 $f(x)$는 $k<1$ 또는 $k>1$인 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}f(x)$의 값이 존재한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+3)=4$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x-3)=-2$

에서 $\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

함수 $g(x)$는 $k<a$ 또는 $k>a$인 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}g(x)$의 값이 존재한다.

모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}(f(x)-g(x))$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to1}(f(x)-g(x))$의 값이 존재한다.

$a\neq1$이면 $\lim_{x\to1}g(x)$와 $\lim_{x\to1}(f(x)-g(x))$의 값이 존재하고

$f(x)=(f(x)-g(x))+g(x)$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(f(x)-g(x))+\lim_{x\to1}g(x)$의 값이 존재하게 되어 모순이다.

그러므로 $a=1$이다.

$a=1$일 때,

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}x+3-(x^2+x) & (x\le1)\\ x-3-bx & (x>1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-x^2+3 & (x\le1)\\ (1-b)x-3 & (x>1)\end{cases}$$

$\lim_{x\to1}(f(x)-g(x))$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to1-}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to1+}(f(x)-g(x))$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to1-}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to1-}(-x^2+3)=2,$$

$$\lim_{x\to1+}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to1+}\{(1-b)x-3\}=-b-2$$

이므로

$2=-b-2$에서 $b=-4$

따라서

$a+b=1+(-4)=-3$

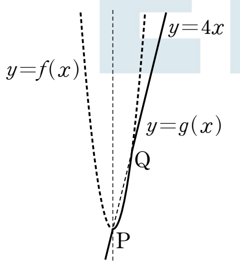
답 ①

4 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4x$가 만나지 않거나 한 점에서만 만나면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge4x$이므로 $g(x)=4x$이고, 모든 실수 t에 대하여 $h(t)=1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다. 그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

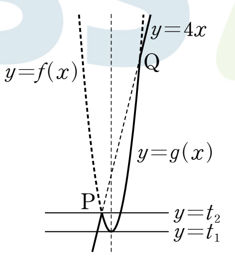
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4x$가 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$, $\mathrm{Q}(q,\ f(q))(p<q)$라 하면

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (p<x<q) \\ 4x & (x\le p \text{ 또는 } x\ge q) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 점 P가 곡선 $y=f(x)$의 축 위에 있거나 축보다 오른쪽에 있으면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 이때 모든 실수 t에 대하여 $h(t)=1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

[그림 2]와 같이 점 P가 곡선 $y=f(x)$의 축보다 왼쪽에 있을 때 함수 $g(x)$는 증가에서 감소로, 다시 증가로 바뀐다. 이때 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수가 2가 되는 t의 값을 작은 것부터 차례로 t_1, t_2라 하면 함수 $h(t)$는

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<t_1) \\ 2 & (t=t_1) \\ 3 & (t_1<t<t_2) \\ 2 & (t=t_2) \\ 1 & (t>t_2) \end{cases}$$

이다.

조건 (가)에서 $\lim_{t\to0+}h(t)>\lim_{t\to0-}h(t)$이므로

$t_1=0$이다. …… ㉠

$h(-2)=1$이므로 조건 (나)에서 $h(1)+h(4)=5$이다.

$h(1)\ge h(4)$이고 $h(1)$, $h(4)$의 값은 1 또는 2 또는 3이므로 $h(1)=3$, $h(4)=2$이다.

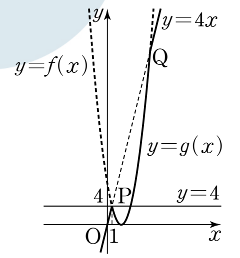
이때 $t_2=4$이다.

직선 $y=4$가 직선 $y=4x$와 만나는 점의 x좌표는

$4=4x$, $x=1$

이다. 이 교점 $(1,\ 4)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=4$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 1보다 크고 y좌표가 0이므로

$f(x)=(x-a)^2$ (a는 $a>1$인 상수)

로 놓을 수 있다.

㉡에서 $(1-a)^2=4$

$1-a=2$ 또는 $1-a=-2$

$a=-1$ 또는 $a=3$

$a>1$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=(x-3)^2$이므로

$f(7)=4^2=16$

답 16

5 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 k의 값이 0과 2뿐이므로 $k\ne0$이고 $k\ne2$인 경우에 이 극한값이 존재한다.

$k\ne0$이고 $k\ne2$인 경우

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$에서

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(f(x)+3)=0$

$f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\ne0$)

으로 놓으면

$$\lim_{x\to1}(f(x)+3)=\lim_{x\to1}(ax^2+bx+c+3)$$
$$=a+b+c+3=0$$

에서 $c=-a-b-3$

$f(x)=ax^2+bx-a-b-3$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{ax^2+bx-a-b}{(x-1)(f(x)+f(k))}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(ax+a+b)}{(x-1)(f(x)+f(k))}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{ax+a+b}{f(x)+f(k)}\quad\cdots\cdots ㉡$$

$k=0$일 때 ㉡의 값이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x\to1}(f(x)+f(k))=\lim_{x\to1}(f(x)+f(0))=0$$

이고 ㉠에서 $f(0)=-a-b-3$이므로

$$\lim_{x\to1}(f(x)+f(0))=\lim_{x\to1}(ax^2+bx-2a-2b-6)$$
$$=-a-b-6=0$$

에서 $a+b=-6$ …… ㉢

$k=2$일 때 ㉡의 값이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x\to1}(f(x)+f(k))=\lim_{x\to1}(f(x)+f(2))=0$$

이고 ㉠에서 $f(2)=3a+b-3$이므로

$$\lim_{x\to1}(f(x)+f(2))=\lim_{x\to1}(ax^2+bx+2a-6)$$
$$=3a+b-6=0$$

에서 $3a+b=6$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-12$

이므로 ㉠에서

$f(x)=6x^2-12x+3$

따라서 $f(4)=96-48+3=51$

답 51

참고

$f(x)=6x^2-12x+3=6(x-1)^2-3$이므로 ㉡에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{6(x-1)}{f(x)+f(k)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{6(x-1)}{6(x-1)^2+6(k-1)^2-6}$$

이고 $k=0$ 또는 $k=2$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{6(x-1)}{6(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}$$

이므로 극한값이 존재하지 않고, $k\neq0$이고 $k\neq2$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{6(x-1)}{6(x-1)^2+6(k-1)^2-6}=\frac{0}{6(k-1)^2-6}=0$$

으로 극한값이 존재하므로 조건을 만족시킨다.

6 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=4p$에서

$\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^n}=4p$$

즉, $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x^n}=4p$

이때 다항함수 $f(x)$의 모든 항의 차수는 n 이상이고 x^n의 계수는 $4p$이다. …… ㉠

(i) $n=1$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2x^2-x}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2x^2-x}{2x}=p$$

에서

$f(x)+2x^2-x=2px+q$ (q는 상수)

즉, $f(x)=-2x^2+(2p+1)x+q$

㉠에서 $2p+1=4p$, $q=0$

$2p+1=4p$에서 $p=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-2x^2+2x$이므로

$f(-1)=-4$

(ii) $n=2$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2x^2-x}{x^2+x}=p\text{에서}$$

$f(x)+2x^2-x=px^2+rx+s$ (r, s는 상수)

즉, $f(x)=(p-2)x^2+(r+1)x+s$

㉠에서 $p-2=4p$, $r+1=0$, $s=0$

$p=-\dfrac{2}{3}$, $r=-1$, $s=0$

따라서 $f(x)=-\dfrac{8}{3}x^2$이므로

$f(-1)=-\dfrac{8}{3}$

(iii) $n\geq3$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2x^2-x}{x^n+x}=p$$

에서 $(n-1)$차 이하의 다항식 $g(x)$에 대하여

$f(x)+2x^2-x=px^n+g(x)$

즉, $f(x)=px^n+g(x)-2x^2+x$로 놓으면

㉠에서 $p=4p$, $g(x)-2x^2+x=0$

$p=4p$에서 $p=0$이 되어 p가 0이 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.

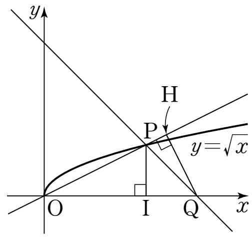
(i), (ii), (iii)에서 모든 $f(-1)$의 값은 -4, $-\dfrac{8}{3}$이다.

따라서 구하는 합은

$$-4+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{20}{3}$$

답 ②

7 $t>1$인 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(t^2,\ t)$에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하자.



직선 PQ의 기울기가 -1이므로 $\angle\mathrm{IQP}=\frac{\pi}{4}$이다.

삼각형 PIQ는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{IQ}}=t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}t$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OI}}+\overline{\mathrm{IQ}}=t^2+t$이므로 점 Q의 좌표는 $(t^2+t,\ 0)$

직선 OP의 방정식이 $y=\frac{1}{t}x$, 즉 $x-ty=0$이므로 점 Q와 직선 OP 사이의 거리 $\overline{\mathrm{QH}}$는

$$\overline{\mathrm{QH}}=\frac{|t^2+t-t\times 0|}{\sqrt{1+(-t)^2}}=\frac{|t^2+t|}{\sqrt{1+t^2}}$$

이고 $t>1$에서 $t^2+t>0$이므로

$$\overline{\mathrm{QH}}=\frac{t^2+t}{\sqrt{1+t^2}}$$

직각삼각형 PQH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{QH}}^2}$$
$$=\sqrt{2t^2-\frac{(t^2+t)^2}{1+t^2}}=\sqrt{\frac{2t^2(1+t^2)-(t^2+t)^2}{1+t^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{t^2(t-1)^2}}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{|t(t-1)|}{\sqrt{1+t^2}}$$

이고 $t>1$에서 $t(t-1)>0$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{t^2-t}{\sqrt{1+t^2}}$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{QH}})=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2-t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{t^2+t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{1+t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}$$
$$=\frac{-2}{1}=-2$$

답 ②

Level 3 실력 완성 본문 16쪽

1 ② **2** 7 **3** ②

1 어떤 두 실수 p, q $(p<q)$에 대해 $p<x<q$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면 $p<a<q$인 모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{0}{x-a}=0$$

이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$이어야 한다.

한편, $f(x)$가 이차함수일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이면 모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)-f(x)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-2f(x)}{x-a}$$

이고 $x\to a$일 때 (분모) $\to 0$이지만 (분자) $\to 0$이 아니므로 이 극한값이 존재하지 않게 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x)=0$이 되는 실수 x가 반드시 존재하고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=0$이 되는 실수 x가 오직 하나이다.

$f(x)=0$이 되는 x의 값을 m이라 하면 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=k(x-m)^2$ (k는 $k<0$인 상수)

로 놓을 수 있다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$이므로 조건 (가)에서

$a=m$일 때,

$$\lim_{x\to m}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-m}=\lim_{x\to m}\frac{-f(x)-f(x)}{x-m}$$
$$=\lim_{x\to m}\frac{-2k(x-m)^2}{x-m}$$
$$=\lim_{x\to m}\{-2k(x-m)\}=0$$

으로 극한값이 존재하므로 $m=3$이다.

즉, $f(x)=k(x-3)^2$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$f(x)+2=k(x-\alpha)(x-\beta)$

이므로 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x-2)f(x+2)}{f(x)+2}=\lim_{x\to b}\frac{k^2(x-5)^2(x-1)^2}{k(x-\alpha)(x-\beta)}\ \cdots\cdots\ ㉡$$

$b\ne\alpha$이고 $b\ne\beta$일 때 ㉡의 값이 존재한다.

$b=\alpha$ 또는 $b=\beta$일 때 ㉡의 값이 존재하려면 α, β의 값은 1 또는 5이어야 한다. $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=1$, $\beta=5$이다.

즉, $f(1)=f(5)=-2$

㉠에서 $f(1)=4k$이므로 $4k=-2$에서 $k=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2$이므로

$f(5)=-2$

답 ②

2 -1이 주어진 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to-1}(f(x)+x)\neq0$이면

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\frac{\lim_{x\to-1}(f(x)+2x+1)}{\lim_{x\to-1}(f(x)+x)}=\frac{\lim_{x\to-1}f(x)-1}{\lim_{x\to-1}f(x)-1}=1$$

이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

즉, $\lim_{x\to-1}(f(x)+x)=0$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)+x$도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$f(x)+x=(x+1)g(x) \quad \cdots\cdots ㉡$

로 놓을 수 있다.

㉠에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+x+x+1}{f(x)+x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)g(x)+(x+1)}{(x+1)g(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+1}{g(x)}=\frac{3}{2}$$

$\lim_{x\to-1}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+1}{g(x)}$의 값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $\lim_{x\to-1}g(x)\neq0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+1}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to-1}(g(x)+1)}{\lim_{x\to-1}g(x)}=\frac{\lim_{x\to-1}g(x)+1}{\lim_{x\to-1}g(x)}=\frac{3}{2}$$

에서

$2\lim_{x\to-1}g(x)+2=3\lim_{x\to-1}g(x)$

$\lim_{x\to-1}g(x)=2$

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$를

$g(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)

로 놓으면

$$\lim_{x\to-1}g(x)=\lim_{x\to-1}(x^2+px+q)=1-p+q=2$$

에서 $q=p+1$이므로

$$g(x)=x^2+px+q=x^2+px+p+1$$

또한 0이 주어진 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)g(x)+(x+1)}{(x+1)g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)+1}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+px+p+2}{x^2+px+p+1}=\frac{3}{2}$$

에서 $p\neq-1$이어야 하고

$\frac{p+2}{p+1}=\frac{3}{2}$, $2p+4=3p+3$, 즉 $p=1$

그러므로 $g(x)=x^2+x+2$이고

㉡에서 $f(x)+x=(x+1)(x^2+x+2)$

즉, $f(x)=(x+1)(x^2+x+2)-x$

따라서 $f(1)=2\times4-1=7$

답 7

참고

삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 함수 $f(x)$를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\frac{3}{2}$에서 $\lim_{x\to-1}(f(x)+x)=0$

이어야 하므로

$\lim_{x\to-1}(f(x)+x)=f(-1)-1=0$, 즉 $f(-1)=1$

이때

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)+2(x+1)}{f(x)-f(-1)+(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}+2}{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}+1}=\frac{3}{2}$$

에서 $f'(-1)\neq-1$이어야 하고

$\frac{f'(-1)+2}{f'(-1)+1}=\frac{3}{2}$, 즉 $f'(-1)=1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\frac{3}{2}$에서 $f(0)\neq0$이어야 하고

$\frac{f(0)+1}{f(0)}=\frac{3}{2}$, 즉 $f(0)=2$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=1$, $f'(-1)=1$이므로 $f(x)-(x+2)=(x+1)^2(x+k)$, 즉 $f(x)=(x+1)^2(x+k)+x+2$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(0)=2$이므로 $k+2=2$, 즉 $k=0$

따라서 $f(x)=x(x+1)^2+x+2$

3 ㄱ. $g(-1)=\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to-1-}f(x+2)$

$\lim_{x\to-1-}f(x+2)$에서 $x+2=s$로 놓으면

$x \to -1-$일 때 $s \to 1-$이므로

$g(-1)=\lim_{x \to -1+} f(x)+\lim_{s \to 1-} f(s)$

$=\lim_{x \to -1+} x+\lim_{s \to 1-} s=-1+1=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x \to t+} f(x)=\begin{cases} t & (t<1) \\ t+p & (t \ge 1) \end{cases}$

$\lim_{x \to t-} f(x+2)$에서 $x+2=u$로 놓으면

$x \to t-$일 때 $u \to (t+2)-$이므로

$\lim_{x \to t-} f(x+2)=\lim_{u \to (t+2)-} f(u)$

$=\begin{cases} t+2 & (t+2 \le 1) \\ t+2+p & (t+2>1) \end{cases}$

$=\begin{cases} t+2 & (t \le -1) \\ t+2+p & (t>-1) \end{cases}$

이므로

$g(t)=\lim_{x \to t+} f(x)+\lim_{x \to t-} f(x+2)$

$=\begin{cases} 2t+2 & (t \le -1) \\ 2t+2+p & (-1<t<1) \\ 2t+2+2p & (t \ge 1) \end{cases}$

$t \le -1$, $-1<t<1$, $t \ge 1$에서 각각 t의 값이 증가하면 $g(t)$의 값도 증가한다.

$p>0$이면

$\lim_{t \to -1-} g(t)=\lim_{t \to -1-} (2t+2)=0$,

$g(-1)=0$,

$\lim_{t \to -1+} g(t)=\lim_{t \to -1+} (2t+2+p)=p$

에서

$\lim_{t \to -1-} g(t)=g(-1)<\lim_{t \to -1+} g(t)$

또

$\lim_{t \to 1-} g(t)=\lim_{t \to 1-} (2t+2+p)=4+p$,

$g(1)=4+2p$,

$\lim_{t \to 1+} g(t)=\lim_{t \to 1+} (2t+2+2p)=4+2p$

에서

$\lim_{t \to 1-} g(t)<g(1)=\lim_{t \to 1+} g(t)$

따라서 t의 값이 증가하면 $g(t)$의 값도 증가한다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $g(t)$는 $t \le -1$, $-1<t<1$, $t \ge 1$에서 각각 증가한다.

그러므로 $g(m)>g(m+1)>g(m+2)$가 되도록 하는 정수 m이 존재할 때 이 m의 값은 -1뿐이다.

$g(-1)>g(0)>g(1)$이려면 ㄴ에서

$0>2+p>4+2p$, 즉 $p<-2$

따라서 정수 p의 최댓값은 -3이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

02 함수의 연속

유제 본문 19~25쪽

1 ④	2 ④	3 ③	4 2	5 ④	6 ⑤

1 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$

이때

$\lim_{x \to -1} f(x)=\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3}}{x+1}$,

$f(-1)=b$

이므로

$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3}}{x+1}=b$ …… ㉠

㉠에서 $x \to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -1} (\sqrt{x+a}-\sqrt{3})=\sqrt{-1+a}-\sqrt{3}=0$

$\sqrt{-1+a}=\sqrt{3}$에서 $-1+a=3$, 즉 $a=4$

㉠에서

$b=\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3}}{x+1}$

$=\lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{3})(\sqrt{x+4}+\sqrt{3})}{(x+1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{3})}$

$=\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+\sqrt{3})}$

$=\lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

따라서 $\frac{a}{b}=a \times \frac{1}{b}=4 \times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

답 ④

2 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1+} f(x)=f(1)$

이다. 이때

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1-} (x^2+a)=1+a$,

$\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1+} (3x+4a)=3+4a$,

$f(1)=1+a$

이므로 $1+a=3+4a$에서 $a=-\frac{2}{3}$

또 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이므로

$\lim_{x \to b-} f(x)=\lim_{x \to b+} f(x)=f(b)$

이다. 이때

$\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b-}\left(3x-\frac{8}{3}\right)=3b-\frac{8}{3}$,

$\lim_{x\to b+} f(x)=\lim_{x\to b+}\left(x^2-\frac{2}{3}\right)=b^2-\frac{2}{3}$,

$f(b)=b^2-\frac{2}{3}$

이므로 $3b-\frac{8}{3}=b^2-\frac{2}{3}$에서

$b^2-3b+2=0$

$(b-1)(b-2)=0$

$b>1$이므로 $b=2$

따라서 $a+b=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$

답 ④

다른 풀이

함수 $f(x)$가 $x=1$과 $x=b$에서 모두 연속이려면 곡선 $y=x^2+a$와 직선 $y=3x+4a$가 x좌표가 1, b인 두 점에서 만나야 한다.

두 수 1, b는 이차방정식 $x^2+a=3x+4a$, 즉 $x^2-3x-3a=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=3$, $1\times b=-3a$

$1+b=3$에서 $b=2$

$1\times b=-3a$에서 $2=-3a$, 즉 $a=-\frac{2}{3}$

따라서 $a+b=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$

3 함수 $(f(x)+1)^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $(f(x)+1)^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $(f(x)+1)^2$이 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-}(f(x)+1)^2=\lim_{x\to a+}(f(x)+1)^2=(f(a)+1)^2$

이어야 한다.

$\lim_{x\to a-}(f(x)+1)^2=\lim_{x\to a-}(2x-1)^2=(2a-1)^2$,

$\lim_{x\to a+}(f(x)+1)^2=\lim_{x\to a+}(-x+4)^2=(-a+4)^2$,

$(f(a)+1)^2=(-a+4)^2$

이므로 $(2a-1)^2=(-a+4)^2$

$3a^2+4a-15=0$

$(a+3)(3a-5)=0$

$a=-3$ 또는 $a=\frac{5}{3}$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-3+\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$

답 ③

4 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$과 $x=4$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

이다. 이때

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} ax=a$,

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-2ax+b)=1-2a+b$,

$f(1)=1-2a+b$

이므로 $a=1-2a+b$에서 $b=3a-1$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4+} f(x)=f(4)$

이다. 이때

$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}(x^2-2ax+b)=16-8a+b$,

$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+} f(x-4)$에서

$x-4=t$로 놓으면 $x\to 4+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+} f(x-4)=\lim_{t\to 0+} f(t)=\lim_{t\to 0+} at=0$,

$f(4)=f(0)=0$

이므로 $16-8a+b=0$에서 $b=8a-16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3a-1=8a-16$이므로 $a=3$

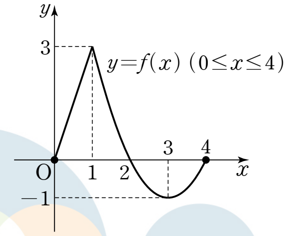
㉠에서 $b=3\times 3-1=8$

따라서 연속함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3x & (0\le x<1) \\ x^2-6x+8 & (1\le x\le 4)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 3x & (0\le x<1) \\ (x-3)^2-1 & (1\le x\le 4)\end{cases}$$

이고, 이 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 10]$에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 한편, 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같고 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이다. 그러므로 닫힌구간 $[0, 10]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값은 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값과 각각 같다.

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=3$이고 최솟값은 $f(3)=-1$이다.

따라서 닫힌구간 $[0, 10]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값도 각각 3, -1이므로 그 합은

$3+(-1)=2$

답 2

5 $f(x)=x^3+2x-16$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(-1)=-19<0$, $f(0)=-16<0$, $f(1)=-13<0$,

$f(2)=-4<0$, $f(3)=17>0$, $f(4)=56>0$

$f(2)f(3)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 열린구간 $(2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 오직 하나의 실근 α는 열린구간 $(2, 3)$에 존재한다.

답 ④

6 모든 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=x^3+2x^2+nx$, $y=x^2+8$이 오직 하나의 점에서 만나고 이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작으므로 x에 대한 방정식

$x^3+2x^2+nx=x^2+8$, 즉 $x^3+x^2+nx-8=0$

은 모든 자연수 n에 대하여 오직 하나의 실근을 갖고 이 실근은 열린구간 $(1, 2)$에 존재한다.

$f(x)=x^3+x^2+nx-8$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 x에 대한 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지므로 이 실근이 열린구간 $(1, 2)$에 존재하려면 $f(1)f(2)<0$이어야 한다.

$f(1)=n-6$, $f(2)=2n+4$이므로

$(n-6)(2n+4)<0$에서 $-2<n<6$

n은 자연수이므로 $1\le n<6$

따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 5이다.

답 ⑤

Level 1 **기초 연습** 본문 26~27쪽

1 ⑤	**2** ③	**3** ②	**4** ①	**5** ①	**6** ①
7 ⑤	**8** ④				

1 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(x+a)=-1+a$,

$f(-1)=4$

이므로 $-1+a=4$

따라서 $a=5$

답 ⑤

2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$, $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$

연속함수의 성질에 의하여 두 함수 $f(x)+g(x)$, $2f(x)-g(x)$도 $x=2$에서 연속이므로 연속의 정의와 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))&=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} g(x)\\&=f(2)+g(2)=5 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(2f(x)-g(x))&=2\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)\\&=2f(2)-g(2)=7 \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $f(2)=4$, $g(2)=1$

따라서 $f(2)-g(2)=3$

답 ③

3 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$

이다. 이때

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x}$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(2x+b)=b$,

$f(0)=b$

이므로 $\lim_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x}=b \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠에서 $x\to 0-$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-}(\sqrt{x+1}-a)=1-a=0$

이므로 $a=1$

㉠에서

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0-}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\&=\lim_{x\to 0-}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\&=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a+b=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

답 ②

4 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $2x^2+nx+3\neq 0$이어야 한다.
이차방정식 $2x^2+nx+3=0$의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로
$D=n^2-24<0$에서 $n^2<24$
따라서 자연수 n의 최댓값은 4이다.

답 ①

5 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 연속이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 2-}|f(x)|=\lim_{x\to 2+}|f(x)|=|f(2)|$이어야 한다.
이때
$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=\lim_{x\to 2-}|2x+1|=5$,
$\lim_{x\to 2+}|f(x)|=\lim_{x\to 2+}|3x+a|=|6+a|$,
$|f(2)|=|6+a|$
이므로 $5=|6+a|$에서
$6+a=5$ 또는 $6+a=-5$
$a=-1$ 또는 $a=-11$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-1+(-11)=-12$

답 ①

6 $(x+1)f(x)=x^3+3x^2+a$ ······ ㉠
모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$0=-1+3+a$, $a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$(x+1)f(x)=x^3+3x^2-2$
$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$
$x\neq -1$일 때, $f(x)=x^2+2x-2$
함수 $f(x)$는 $x<-1$ 또는 $x>-1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
$f(b)=2+\lim_{x\to b}f(x)$ ······ ㉡
에서 $f(b)\neq\lim_{x\to b}f(x)$이므로
함수 $f(x)$는 $x=b$에서 불연속이다.
그러므로 $b=-1$이고 ㉡에서
$f(-1)=2+\lim_{x\to -1}f(x)$
$=2+\lim_{x\to -1}(x^2+2x-2)$
$=2+(-3)=-1$
따라서
$b+f(b)=-1+f(-1)=-1+(-1)=-2$

답 ①

7 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$
이어야 한다. 이때 이차함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)\times\lim_{x\to -1-}g(x)$
$=2g(-1)$,
$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)\times\lim_{x\to -1+}g(x)$
$=-4g(-1)$,
$f(-1)g(-1)=-4g(-1)$
이므로
$2g(-1)=-4g(-1)$에서 $g(-1)=0$
따라서 $g(-1)=2-a=0$이므로 $a=2$

답 ⑤

8 $f(x)=x^3+nx-30$이라 하자.
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 x에 대한 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지므로 이 실근이 열린구간 $(2, 3)$에 속하려면 $f(2)f(3)<0$이어야 한다.
$f(2)=8+2n-30=2n-22$,
$f(3)=27+3n-30=3n-3$
이므로
$f(2)f(3)=(2n-22)(3n-3)=6(n-11)(n-1)<0$
에서
$1<n<11$
따라서 자연수 n의 값은 2, 3, 4, …, 10이므로 그 개수는 9이다.

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 28~29쪽

1 ① **2** ④ **3** 12 **4** ② **5** ④ **6** ③
7 ③

1 $\lim_{x\to 2+}f(x)<6$에서
$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(2x+a)=4+a<6$
이므로 $a<2$ ······ ㉠
$a\neq 2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.
함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=2$에서 연속이다. 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $f(x)=(f(x)+g(x))-g(x)$에서 함수

$f(x)$도 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$이다.

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x+1) = -1$,

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (2x+a) = 4+a$,

$f(2) = -1$

이므로 $-1 = 4+a$에서 $a = -5$

이때 $a = -5$는 ㉠을 만족시킨다.

함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=a$, 즉 $x=-5$에서 연속이다. 함수 $f(x)$가 $x=-5$에서 연속이므로

$g(x) = (f(x)+g(x)) - f(x)$에서 함수 $g(x)$도 $x=-5$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \to -5-} g(x) = \lim_{x \to -5+} g(x) = g(-5)$이다.

$\lim_{x \to -5-} g(x) = \lim_{x \to -5-} (x+2) = -3$,

$\lim_{x \to -5+} g(x) = \lim_{x \to -5+} (-x+b) = 5+b$,

$g(-5) = -3$

이므로 $-3 = 5+b$에서 $b = -8$

따라서 $a+b = -5+(-8) = -13$

답 ①

참고

주어진 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $a \neq 2$일 때

함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

2 $(2x-1)f(x) = (f(x))^2 + 2x - 2$에서

$(f(x))^2 - (2x-1)f(x) + 2x - 2 = 0$

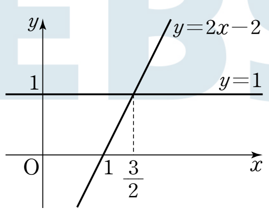
$(f(x))^2 + (-2x+1)f(x) + (-1) \times (-2x+2) = 0$

$(f(x)-1)(f(x)-2x+2) = 0$

$f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 2x-2$

이때 두 직선 $y=1$, $y=2x-2$의 교점의 x좌표는

$1 = 2x-2$에서 $x = \frac{3}{2}$



$f(1)$의 값은 $f(1)=1$ 또는 $f(1)=2\times1-2=0$,

$f(3)$의 값은 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=2\times3-2=4$

이고 $f(3)-f(1)=1$이므로

$f(1)=0$이고 $f(3)=1$

따라서 연속함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \left(x \leq \frac{3}{2}\right) \\ 1 & \left(x > \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

이므로

$f(2)-f(0) = 1-(-2) = 3$

답 ④

3 함수 $f(x)$는 $x<2$ 또는 $x>2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (ax^2+4x) = 4a+8$,

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (3x+2) = 8$,

$f(2) = 4a+8$

에서 $a=0$이면 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $f(x-1)$과 함수 $f(x)f(x-1)$도 모두 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이때 함수 $f(x)f(x-1)$이 $x=b$에서만 불연속이라는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a \neq 0$이고 함수 $f(x)$는 $x=2$에서만 불연속이다.

함수 $f(x)$는 $x=2$에서만 불연속이므로 함수 $f(x-1)$은 $x=3$에서만 불연속이고, 함수 $f(x)f(x-1)$이 $x=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 값으로 가능한 것은 2 또는 3이다.

(i) 함수 $f(x)f(x-1)$이 $x=2$에서 연속인 경우

$\lim_{x \to 2-} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 2+} f(x)f(x-1) = f(2)f(1)$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x \to 2-} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 2-} f(x) \times \lim_{x \to 2-} f(x-1)$

에서 $x-1=t$로 놓으면 $x \to 2-$일 때 $t \to 1-$이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 2-} f(x) \times \lim_{t \to 1-} f(t)$

$= (4a+8)(a+4)$,

$\lim_{x \to 2+} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 2+} f(x) \times \lim_{x \to 2+} f(x-1)$

에서 $x-1=t$로 놓으면 $x \to 2+$일 때 $t \to 1+$이므로

$\lim_{x \to 2+} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 2+} f(x) \times \lim_{t \to 1+} f(t)$

$= 8(a+4)$,

$f(2)f(1) = (4a+8)(a+4)$

이므로 $(4a+8)(a+4) = 8(a+4)$, $4a(a+4) = 0$

$a \neq 0$이므로 $a = -4$

(ii) 함수 $f(x)f(x-1)$이 $x=3$에서 연속인 경우

$\lim_{x \to 3-} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 3+} f(x)f(x-1) = f(3)f(2)$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x \to 3-} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 3-} f(x) \times \lim_{x \to 3-} f(x-1)$

에서 $x-1=t$로 놓으면 $x \to 3-$일 때 $t \to 2-$이므로

$\lim_{x \to 3-} f(x)f(x-1) = \lim_{x \to 3-} f(x) \times \lim_{t \to 2-} f(t)$

$= 11(4a+8)$,

$\lim_{x\to3+} f(x)f(x-1)=\lim_{x\to3+} f(x)\times\lim_{x\to3+} f(x-1)$

에서 $x-1=t$로 놓으면 $x\to3+$일 때 $t\to2+$이므로

$\lim_{x\to3+} f(x)f(x-1)=\lim_{x\to3+} f(x)\times\lim_{t\to2+} f(t)=11\times8$,

$f(3)f(2)=11(4a+8)$

에서 $a\neq0$이므로

$\lim_{x\to3-} f(x)f(x-1)=f(3)f(2)\neq\lim_{x\to3+} f(x)f(x-1)$

이다.

즉, 함수 $f(x)f(x-1)$이 $x=3$에서 연속인 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a\neq-4$이면 함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=2$와 $x=3$에서 불연속이고, $a=-4$이면 함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=3$에서만 불연속이다. 함수 $f(x)f(x-1)$이 $x=b$에서만 불연속이므로 $a=-4$, $b=3$이다.

따라서 $|ab|=|-4\times3|=12$

답 12

4 조건 (가)의 $f(x)=x^2+ax-f(1)$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+a-f(1)$, $f(1)=\frac{1+a}{2}$ …… ㉠

이때

$g(x)=x^2+ax-f(1)=x^2+ax-\frac{1+a}{2}$ …… ㉡

라 하면 $x\leq1$일 때 $f(x)=g(x)$이고

$x>1$일 때 $-x^2-a^2<-1-a^2<-1\leq1$이므로

조건 (나)에서

$f(x)=f(-x^2-a^2)=g(-x^2-a^2)$

함수 $g(x)$가 이차함수이므로 함수 $g(-x^2-a^2)$은 사차함수이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$

이다. 이때 두 다항함수 $g(x)$, $g(-x^2-a^2)$이 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-} g(x)=g(1)$,

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} g(-x^2-a^2)=g(-1-a^2)$,

$f(1)=g(1)$

이므로 $g(1)=g(-1-a^2)$이다.

$1\neq-1-a^2$이고 ㉡에서 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{a}{2}$이므로

$\frac{1+(-1-a^2)}{2}=-\frac{a}{2}$에서 $a^2=a$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 ㉠에서

$f(1)=\frac{1+1}{2}=1$

답 ②

다른 풀이

조건 (가)의 $f(x)=x^2+ax-f(1)$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+a-f(1)$, $f(1)=\frac{1+a}{2}$ …… ㉠

$x\leq1$일 때 $f(x)=x^2+ax-f(1)=x^2+ax-\frac{1+a}{2}$,

$x>1$일 때 $-x^2-a^2<-1-a^2<-1\leq1$이므로

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}f(x)&=f(-x^2-a^2)\\&=(-x^2-a^2)^2+a(-x^2-a^2)-\frac{1+a}{2}\\&=x^4+(2a^2-a)x^2+a^4-a^3-\frac{1+a}{2}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$

이다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-} f(x)&=\lim_{x\to1-}\left(x^2+ax-\frac{1+a}{2}\right)\\&=1+a-\frac{1+a}{2}=\frac{1+a}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+} f(x)&=\lim_{x\to1+}\left\{x^4+(2a^2-a)x^2+a^4-a^3-\frac{1+a}{2}\right\}\\&=1+2a^2-a+a^4-a^3-\frac{1+a}{2}\\&=a^4-a^3+2a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$f(1)=\frac{1+a}{2}$

이므로

$\frac{1+a}{2}=a^4-a^3+2a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}$

$a^4-a^3+2a^2-2a=0$

$a(a-1)(a^2+2)=0$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 ㉠에서

$f(1)=\frac{1+1}{2}=1$

5 함수 $\frac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이어야 한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)$

가 $x=0$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=f(0)$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-} (ax+1)=1$,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+} (bx^2+ax+c)=c$,

$f(0)=1$

이므로 $c=1$

이때 $c\in A$라는 조건을 만족시킨다.

$x\le0$일 때 $f(x)=ax+1$이고 $f(0)=1$이므로 $x\le0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne0$이려면 집합 A의 원소 a에 대하여 $a<0$이어야 한다.

$x>0$일 때 $f(x)=bx^2+ax+c=bx^2+ax+1$이고

$\lim_{x\to0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to\infty} |f(x)|=\infty$이므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne0$이려면 집합 A의 원소 b에 대하여 $b>0$이어야 한다. 이때 곡선

$y=bx^2+ax+1$의 축의 방정식이 $x=-\dfrac{a}{2b}>0$이므로

$$f\left(-\frac{a}{2b}\right)=\frac{a^2}{4b}-\frac{a^2}{2b}+1$$
$$=-\frac{a^2}{4b}+1>0$$

이어야 한다.

$\dfrac{a^2}{4b}<1$에서 $a^2<4b$

따라서 $a<0$, $b>0$, $a^2<4b$이고 $c=1$을 만족시키는 집합 A의 서로 다른 세 원소 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)는

$(-1, 2, 1)$, $(-1, 3, 1)$, $(-2, 2, 1)$, $(-2, 3, 1)$, $(-3, 3, 1)$

이므로 그 개수는 5이다.

답 ④

6 $h(x)=x-2$라 하면

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge1) \\ h(x) & (f(x)<1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $f(x)<1$ 또는 $f(x)>1$을 만족시키는 모든 실수 x에서 연속이다.

한편,

$\lim_{x\to1-} g(x)<\lim_{x\to1+} g(x)$ …… ㉠

에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 $f(1)=1$이다.

또한 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 개수가 1이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이어야 한다.

(i) $f(x)=1$인 x가 1뿐일 때

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 1이므로 $f(x)=(x-1)^2+1$ 또는 $f(x)=-(x-1)^2+1$이다.

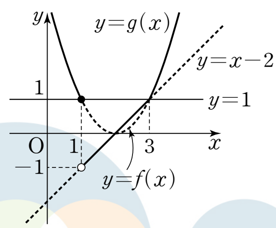
$f(x)=(x-1)^2+1$이면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x)$이므로 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. $f(x)=-(x-1)^2+1$이면 $x\ne1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=h(x)$이므로 $\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1+} g(x)$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=1$, $f(\beta)=1$ $(\beta\ne1)$일 때

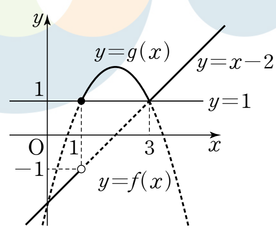
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과 두 점 $(1, 1)$, $(\beta, 1)$에서 만나므로 $x=\beta$의 좌우에서 함수 $g(x)$는 $f(x)$에서 $h(x)$로 바뀌거나 $h(x)$에서 $f(x)$로 바뀐다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서만 불연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 연속이다.

즉, $h(\beta)=1$이어야 하므로 $\beta-2=1$에서 $\beta=3$이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



[함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1일 때]



[함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1일 때]

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이면

$\lim_{x\to1-} g(x)>\lim_{x\to1+} g(x)$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이면

$\lim_{x\to1-} g(x)<\lim_{x\to1+} g(x)$를 만족시킨다.

그러므로 $f(x)=-(x-1)(x-3)+1$이다.

이때 $f(1)=1$이고,

$f(2)=2\ge1$이므로 $g(2)=f(2)=2$

따라서 $f(1)+g(2)=1+2=3$

답 ③

7 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1+} g(x)=g(1)$

이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1-}(-x)=-1$,

$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+} f(ax)$에서 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(ax)$는 $x=1$에서 연속이므로

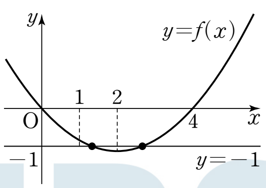
$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+} f(ax)=f(a)$,

$g(1)=-1$

이므로 $f(a)=-1$이다.

$f(a)=-1$인 1보다 큰 실수 a가 2개 존재하려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$이 두 점에서 만나고 이 두 점의 x좌표가 모두 1보다 커야 한다.

$f(x)=\frac{k}{60}(x^2-4x)=\frac{k}{60}x(x-4)$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이다.



이때 $f(1)>-1$이고 $f(2)<-1$이면 조건을 만족시킨다.

$f(1)>-1$에서 $-\frac{k}{20}>-1$, $k<20$

$f(2)<-1$에서 $-\frac{k}{15}<-1$, $k>15$

따라서 $15<k<20$에서 자연수 k의 값은 16, 17, 18, 19이므로 그 합은

$16+17+18+19=70$

답 ③

Level 3 실력 완성		본문 30쪽
1 39	**2** ③	**3** 44

1 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$가 $x=-1$과 $x=0$에서 연속이고, $-1<x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-} g(x)=\lim_{x\to-1+} g(x)=g(-1)$이다.

이때 이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-} g(x)=\lim_{x\to-1-} 2f(x)=2f(-1)$이고,

$\lim_{x\to-1+} g(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)f(2x)}{f(x)}$,

$g(-1)=2f(-1)$

이므로

$\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)f(2x)}{f(x)}=2f(-1)$ …… ㉠

$f(-1)\neq0$이면 ㉠에서 이차함수 $f(x)$와 함수 $f(2x)$가 모두 $x=-1$에서 연속이므로

(좌변)$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)f(2x)}{f(x)}=\frac{0\times f(-2)}{f(-1)}=0$,

(우변)$=2f(-1)\neq0$이 되어 모순이다.

그러므로 $f(-1)=0$

이때 $f(x)=(x+1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)으로 놓을 수 있다.

㉠에서

$\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)f(2x)}{f(x)}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(2x+1)(2ax+b)}{(x+1)(ax+b)}$

$=\lim_{x\to-1+}\frac{(2x+1)(2ax+b)}{ax+b}=0$

$x\to-1+$일 때 극한값이 0이므로

$\lim_{x\to-1+}(2x+1)(2ax+b)=-(-2a+b)=0$에서 $b=2a$

이때 $\lim_{x\to-1+}(ax+b)=\lim_{x\to-1+}(ax+2a)=a\neq0$이므로 조건을 만족시킨다.

$b=2a$에서 $f(x)=(x+1)(ax+2a)=a(x+1)(x+2)$이고, $-1<x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq0$을 만족시킨다.

또한 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0+} g(x)=g(0)$이다.

이때

$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-}\frac{(x+1)f(2x)}{f(x)}$,

이차함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} 2f(x)=2f(0)$이고,

$g(0)=2f(0)$

이므로 $\lim_{x\to0-}\frac{(x+1)f(2x)}{f(x)}=2f(0)$ …… ㉡

$f(x)=a(x+1)(x+2)$와 ㉡에서

(좌변)$=\lim_{x\to0-}\frac{a(x+1)(2x+1)(2x+2)}{a(x+1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{(2x+1)(2x+2)}{x+2}=1$,

(우변)$=2\times2a=4a$

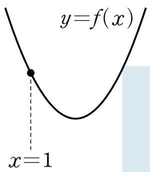
이므로 $1=4a$, 즉 $a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)(x+2)$이므로

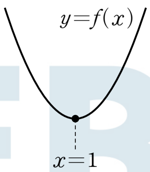
$f(11)=\frac{1}{4}\times12\times13=39$

답 39

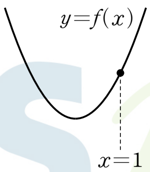
2



[그림 1]



[그림 2]



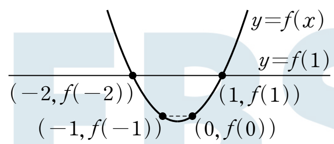
[그림 3]

[그림 1], [그림 2]와 같이 $x\le1$에서 함수 $f(x)$가 감소하면 $t<1$인 모든 t에 대하여 $x\le t$에서 $f(x)\le f(1)$인 정수 x가 존재하지 않으므로 $g(t)=0$이고 $\lim_{t\to1-}g(t)=0$, 즉 $\lim_{x\to1-}g(x)=0$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

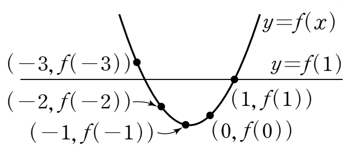
그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같아야 한다.

$\lim_{x\to1-}g(x)=3$, 즉 $\lim_{t\to1-}g(t)=3$이어야 하므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$[f(-2)=f(1)$일 때$]$



$[f(-2)<f(1)<f(-3)$일 때$]$

두 경우 모두

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<-2)\\ 1 & (-2\le t<-1)\\ 2 & (-1\le t<0)\\ 3 & (0\le t<1)\\ 4 & (t\ge1)\end{cases}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서만 불연속이므로 x가 -2, -1, 0, 1이 아닌 실수이면 함수 $f(x)g(x)$는 이 x의 값에서 연속이다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$에서만 불연속이고 $\alpha_1\ne0$이고 $\alpha_2\ne0$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ 중 하나의 값에서만 연속이어야 한다.

한편, ㉠에서 어떤 실수 β에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=\beta$에서 불연속이면

$\lim_{x\to\beta-}g(x)\ne\lim_{x\to\beta+}g(x)=g(\beta)$

이다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=\beta$에서 연속이려면

$\lim_{x\to\beta-}f(x)g(x)=\lim_{x\to\beta+}f(x)g(x)=f(\beta)g(\beta)$

이어야 하고 이차함수 $f(x)$가 $x=\beta$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\beta-}f(x)g(x)&=\lim_{x\to\beta-}f(x)\times\lim_{x\to\beta-}g(x)\\&=f(\beta)\times\lim_{x\to\beta-}g(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\beta+}f(x)g(x)&=\lim_{x\to\beta+}f(x)\times\lim_{x\to\beta+}g(x)\\&=f(\beta)\times\lim_{x\to\beta+}g(x)=f(\beta)g(\beta)\end{aligned}$$

에서

$f(\beta)\times\lim_{x\to\beta-}g(x)=f(\beta)\times\lim_{x\to\beta+}g(x)=f(\beta)g(\beta)$

이어야 하므로 $f(\beta)=0$이어야 한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속이고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=0$이다.

조건 (나)를 만족시키려면 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$의 값 중 하나만 0이어야 한다.

$f(-2)=f(1)$이면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=-\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$f(-1)=f(0)=0$이고 $f(-2)=f(1)>0$

이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

$f(-2)<f(1)<f(-3)$이면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=p\left(-1<p<-\frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$f(-1)<f(0)=0<f(-2)<f(1)$

이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x+1)$이고 ㉠에서

$g(f(-1))=g(0)=3$

답 ③

3 함수 $f(x)$에서

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(x^2+2x+1)=1$,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(ax^2-\frac{8}{3}ax+1\right)=1$,

$f(0)=1$

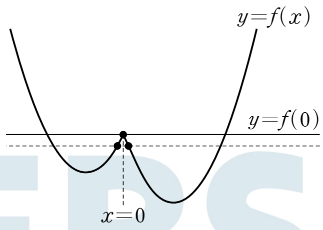
이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수와 같다.

한편, 곡선 $y=ax^2-\frac{8}{3}ax+1$의 축의 방정식은 $x=\frac{4}{3}$이다.

(i) $a>0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같이 $x>0$에서 아래로 볼록하다.



[그림 1]

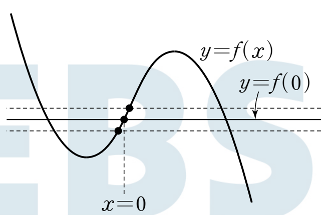
이때 $g(0)=3$, $\lim\limits_{t\to 0-}g(t)=4$, $\lim\limits_{t\to 0+}g(t)=4$이므로

$g(0)\neq\lim\limits_{t\to 0}g(t)$

가 되어 함수 $g(t)$가 $t=0$에서 연속이라는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같이 $x>0$에서 위로 볼록하다.



[그림 2]

이때 $g(0)=3$, $\lim\limits_{t\to 0-}g(t)=3$, $\lim\limits_{t\to 0+}g(t)=3$이므로

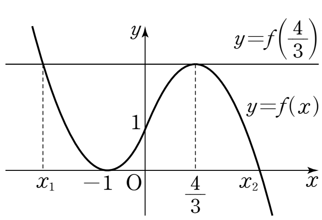
$g(0)=\lim\limits_{t\to 0}g(t)$

가 되어 함수 $g(t)$가 $t=0$에서 연속이라는 조건 (가)를 만족시킨다.

이제 조건 (나)의 $\lim\limits_{t\to k-}g(t)\neq\lim\limits_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 k의 값을 찾아보자.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f\left(\dfrac{4}{3}\right)$가 만나는 점의 x좌표 중 $\dfrac{4}{3}$가 아닌 것을 x_1이라 하자.

또 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 x_2라 하자.



[그림 3]

[그림 3]에서 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<x_1)\\ 2 & (t=x_1)\\ 3 & (x_1<t<-1)\\ 2 & (t=-1)\\ 3 & \left(-1<t<\dfrac{4}{3}\right)\\ 2 & \left(t=\dfrac{4}{3}\right)\\ 3 & \left(\dfrac{4}{3}<t<x_2\right)\\ 2 & (t=x_2)\\ 1 & (t>x_2)\end{cases}$$

이다.

t의 값이 x_1, -1, $\dfrac{4}{3}$, x_2가 아니면 이 t의 값에서 함수 $g(t)$는 연속이므로 좌극한과 우극한이 같아서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

한편, $\lim\limits_{t\to x_1-}g(t)=1$, $\lim\limits_{t\to x_1+}g(t)=3$이므로

$\lim\limits_{t\to x_1-}g(t)\neq\lim\limits_{t\to x_1+}g(t)$,

$\lim\limits_{t\to -1-}g(t)=3$, $\lim\limits_{t\to -1+}g(t)=3$이므로

$\lim\limits_{t\to -1-}g(t)=\lim\limits_{t\to -1+}g(t)$,

$\lim\limits_{t\to \frac{4}{3}-}g(t)=3$, $\lim\limits_{t\to \frac{4}{3}+}g(t)=3$이므로

$\lim\limits_{t\to \frac{4}{3}-}g(t)=\lim\limits_{t\to \frac{4}{3}+}g(t)$,

$\lim\limits_{t\to x_2-}g(t)=3$, $\lim\limits_{t\to x_2+}g(t)=1$이므로

$\lim\limits_{t\to x_2-}g(t)\neq\lim\limits_{t\to x_2+}g(t)$

그러므로 조건 (나)의 $\lim\limits_{t\to k-}g(t)\neq\lim\limits_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 k의 값은 x_1, x_2뿐이다.

$x_1<0$, $x_2>0$이므로 조건 (나)에서 $x_1=b$, $x_2=3$

$x_2=3$에서 $f(3)=0$이므로

$f(3)=9a-8a+1=0$, $a=-1$

$f(x_1)=f\left(\dfrac{4}{3}\right)$, 즉 $f(b)=f\left(\dfrac{4}{3}\right)$이므로

$b^2+2b+1=-\dfrac{16}{9}+\dfrac{32}{9}+1$

$(b+1)^2=\dfrac{25}{9}$

$b<-1$이므로 $b+1=-\dfrac{5}{3}$, $b=-\dfrac{8}{3}$

따라서 $a=-1$, $b=-\dfrac{8}{3}$이므로

$12\times|a+b|=12\times\left|-1-\dfrac{8}{3}\right|$

$=12\times\dfrac{11}{3}=44$

답 44

03 미분계수와 도함수

유제 본문 33~39쪽

1 10	**2** 3	**3** 3	**4** 6	**5** ④	**6** ①

1 두 점 $(-1, a^2)$, $(1, a+4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(-1)=a^2$, $f(1)=a+4$ ...... ㉠

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이 1이므로

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$$

즉, $f(1)-f(-1)=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$f(1)-f(-1)=(a+4)-a^2=2$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

이때 a는 양수이므로

$a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$f(-1)=2^2=4$, $f(1)=2+4=6$

따라서

$f(1)+f(-1)=6+4=10$

답 10

2 조건 (가)의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=g'(1)$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

이때 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$, $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

즉, $\lim_{x\to1}(f(x)-g(x))=f(1)-g(1)=0$에서

$f(1)=g(1)$ ...... ㉠

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서의 미분계수가 각각 존재하므로 ㉠에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-g(x)+g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)-g'(1)$$

즉, 조건 (가)에서

$f'(1)-g'(1)=g'(1)$

이므로

$f'(1)=2g'(1)$ ...... ㉡

㉡과 조건 (나)에 의하여

$f'(1)\times(g'(1))^2=2g'(1)\times(g'(1))^2=2(g'(1))^3=2$

$(g'(1))^3=1$ ...... ㉢

이때 $g'(1)$의 값은 실수이므로 ㉡, ㉢에서

$g'(1)=1$, $f'(1)=2$

따라서

$f'(1)+g'(1)=2+1=3$

답 3

3 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b$,

$f(1)=0$

이므로

$1+a+b=0$

$b=-(1+a)$ ...... ㉠

이때

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+ax+b)-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1+a)=2+a$$

이므로

$f'(1)=3$에서 $2+a=3$, $a=1$

㉠에서 $b=-(1+1)=-2$

따라서 $a-b=1-(-2)=3$

답 3

4 조건 (가)의

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x\to-2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2}(f(x)-f(2))=f(-2)-f(2)=0$에서

$f(-2)=f(2)$

이때 ㉠에서

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\left(\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\times\frac{1}{x-2}\right)$$
$$=f'(-2)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=6$$

이므로

$f'(-2)=-24$ …… ㉡

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=ax^3+bx$$

이고, 도함수의 정의에 의하여

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(x)$$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=ax^3+bx$

이다.

㉡에서 $f'(-2)=-24$이므로

$f'(-2)=-8a-2b=-24$

$b=12-4a$

이때 a와 b는 모두 자연수이므로

$b=12-4a\geq 1$에서 $a\leq\frac{11}{4}$

즉, $a=1$ 또는 $a=2$

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서상 (a, b)는

$(1, 8), (2, 4)$

이므로 $a+b$의 최솟값은 6이다.

답 6

5 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 0이 아닌 실수 x에 대하여

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t^2-x^2}=\lim_{t\to x}\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\times\frac{1}{t+x}\right)$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\times\lim_{t\to x}\frac{1}{t+x}$$
$$=\frac{f'(x)}{2x}$$

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t^2-x^2}=2x+1$

이 성립하므로

$\frac{f'(x)}{2x}=2x+1$ (단, $x\neq 0$)

$f'(x)=2x(2x+1)=4x^2+2x$ (단, $x\neq 0$)

에서

$f'(-1)=4\times(-1)^2+2\times(-1)=2$

$g(x)=(x^2+2x)f(x)$로 놓으면

$g'(x)=(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)$

이므로 함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$$g'(-1)=0\times f(-1)+(1-2)f'(-1)$$
$$=-f'(-1)$$
$$=-2$$

답 ④

6 다항함수 $f(x)$의 차수를 n (n은 자연수)라 하자.

다항함수 $f(x^2+1)$의 차수는 $2n$이고, 다항함수 $2x^3f'(x)$의 차수는

$n-1+3=n+2$

이다. 모든 실수 x에 대하여 등식

$4f(x^2+1)=2x^3f'(x)+3x^2-1$ …… ㉠

이 성립하려면 양변의 차수가 같아야 하므로 $2n=n+2$에서

$n=2$

즉, $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수, $a\neq 0$)

$f'(x)=2ax+b$

㉠에서

$4a(x^2+1)^2+4b(x^2+1)+4c=2x^3(2ax+b)+3x^2-1$

$4ax^4+(8a+4b)x^2+4a+4b+4c$

$=4ax^4+2bx^3+3x^2-1$ …… ㉡

등식 ㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 양변의 상수항과 계수를 비교하면

$2b=0$, $8a+4b=3$, $4a+4b+4c=-1$

$b=0$, $a=\frac{3}{8}$, $c=-\frac{5}{8}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{8}$이므로

$f(0)=-\frac{5}{8}$

답 ①

Level 1 **기초 연습** 본문 40~41쪽

1 ④	**2** 2	**3** ⑤	**4** ④	**5** ①	**6** ②
7 ②					

1 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)

으로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이 3이므로

$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{(4a+2b+c)-(a-b+c)}{3}=a+b$

에서 $a+b=3$ …… ㉠

점 $(2,\ 4)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=4a+2b+c=4$ …… ㉡

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$f'(2)=4a+b=-3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-2,\ b=5,\ c=2$

따라서 $f(x)=-2x^2+5x+2$이므로

$f(1)=-2+5+2=5$

답 ④

2 $h=\dfrac{1}{x}$로 놓으면 $x\rightarrow\infty$일 때 $h\rightarrow 0+$이므로

$\lim\limits_{x\rightarrow\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(f\left(\dfrac{2}{x}-3\right)-f(-3)\right)$

$=\lim\limits_{h\rightarrow 0+}\dfrac{1}{h}f(h)(f(2h-3)-f(-3))$

$=\lim\limits_{h\rightarrow 0+}\left\{2f(h)\times\dfrac{f(2h-3)-f(-3)}{(2h-3)-(-3)}\right\}$ …… ㉠

이때 이차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{h\rightarrow 0+} f(h)=f(0)$

$2h-3=t$로 놓으면 $h\rightarrow 0+$일 때 $t\rightarrow -3+$이고, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{h\rightarrow 0+}\dfrac{f(2h-3)-f(-3)}{(2h-3)-(-3)}=\lim\limits_{t\rightarrow -3+}\dfrac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)}$

$=f'(-3)$

이고, ㉠에서

$\lim\limits_{x\rightarrow\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(f\left(\dfrac{2}{x}-3\right)-f(-3)\right)=2f(0)f'(-3)$

이므로

$2f(0)f'(-3)=8a$ …… ㉡

$f(x)=ax^2+2x-1$에서 $f(0)=-1$이고,

$f'(x)=2ax+2$에서 $f'(-3)=-6a+2$이므로

㉡에서

$2\times(-1)\times(-6a+2)=8a$

$12a-4=8a,\ a=1$

따라서 $f(x)=x^2+2x-1$이므로

$f(a)=f(1)=1+2-1=2$

답 2

3 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\rightarrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow 1}(ax^2+2ax)=3a,$

$f(1)=a^2+2$

이므로 $\lim\limits_{x\rightarrow 1} f(x)=f(1)$에서

$3a=a^2+2$

$a^2-3a+2=0,\ (a-1)(a-2)=0$

$a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=1$일 때

$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & (x\neq 1) \\ 3 & (x=1)\end{cases}$

이므로

$f'(1)=\lim\limits_{x\rightarrow 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\rightarrow 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\rightarrow 1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\rightarrow 1}(x+3)=4$

이때 $f'(1)<5$이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때

$f(x)=\begin{cases} 2x^2+4x & (x\neq 1) \\ 6 & (x=1)\end{cases}$

이므로

$f'(1)=\lim\limits_{x\rightarrow 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\rightarrow 1}\dfrac{2x^2+4x-6}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\rightarrow 1}\dfrac{2(x-1)(x+3)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\rightarrow 1}2(x+3)=8$

이때 $f'(1)>5$이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여

$a=2$이고 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+4x & (x\neq 1) \\ 6 & (x=1)\end{cases}$

따라서

$f(a)=f(2)=2\times 2^2+4\times 2=16$

답 ⑤

4 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\dfrac{4-2}{1-(-1)}\times(x+1)$, 즉 $y=x+3$

이므로

$f(x)=x+3$ …… ㉠

이때 x에 대한 이차방정식 $g(x)=f(x)$의 두 근이 $-1,\ 1$이므로

$g(x)-f(x)=a(x+1)(x-1)$ (a는 상수, $a\neq 0$)

으로 놓을 수 있고, ㉠에 의하여

$g(x)=a(x+1)(x-1)+f(x)$

$\quad=ax^2+x+3-a$ …… ㉡

한편, 함수 $h(x)=\begin{cases} f(x-1) & (x\le 0) \\ g(x)-2 & (x>0) \end{cases}$이 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0-} h(x)=h(0)$ …… ㉢

이때 ㉠, ㉡에 의하여

$\lim_{x\to 0+} h(x)=\lim_{x\to 0+} (g(x)-2)$

$\quad=g(0)-2=(3-a)-2=1-a$,

$\lim_{x\to 0-} h(x)=\lim_{x\to 0-} f(x-1)$

$\quad=\lim_{t\to -1-} f(t)=f(-1)=2$,

$h(0)=f(-1)=2$

이므로 ㉢에서

$1-a=2$, 즉 $a=-1$이고,

$g(x)=-x^2+x+4$ …… ㉣

㉠, ㉣에서 $h(x)=\begin{cases} x+2 & (x\le 0) \\ -x^2+x+2 & (x>0) \end{cases}$이므로

$h'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$\quad=\lim_{x\to 1}\frac{(-x^2+x+2)-(-1+1+2)}{x-1}$

$\quad=\lim_{x\to 1}\frac{-x(x-1)}{x-1}$

$\quad=\lim_{x\to 1}(-x)=-1$

답 ④

5 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=ax(3x-4)$

를 만족시키므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)$가 존재한다. 즉,

$f'(x)=ax(3x-4)$

이므로

$f'(1)=a\times 1\times(3-4)=-a$

$f'(2)=a\times 2\times(6-4)=4a$

$f'(1)+f'(2)=10$이므로

$-a+4a=3a=10$

$a=\frac{10}{3}$

답 ①

6 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$g(x)=f(x)-f(0)\ (x\ge 0)$에서

$g'(x)=f'(x)\ (x>0)$

이때 $f'(0)=0$이므로

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0+} f'(x)=f'(0)=0$

한편,

$g(x)=2x^3-4x\ (x<0)$에서

$g'(x)=6x^2-4\ (x<0)$

이므로

$\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0-} (6x^2-4)=-4$

따라서

$\lim_{x\to 0+} g'(x)+\lim_{x\to 0-} g'(x)=0+(-4)=-4$

답 ②

7 점 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+2t+a)$와 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리 $f(t)$가

$f(t)=\frac{|2t-(-t^2+2t+a)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|t^2-a|}{\sqrt{5}}$

이므로

$g(x)=(f(x))^2=\left(\frac{|x^2-a|}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{(x^2-a)^2}{5}$ …… ㉠

곡선 $y=g(x)$가 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로 ㉠에서

$g(-1)=\frac{(1-a)^2}{5}=5$, $(1-a)^2=5^2$

$a=-4$ 또는 $a=6$

이때 a는 양수이므로

$a=6$

즉, $g(x)=\frac{(x^2-6)^2}{5}=\frac{x^4-12x^2+36}{5}$이므로

$g'(x)=\frac{4x^3-24x}{5}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는

$g'(-1)=\frac{4\times(-1)^3-24\times(-1)}{5}=4$

답 ②

Level **2** **기본 연습** 본문 42~43쪽

1 ④	**2** ②	**3** ③	**4** ③	**5** 20	**6** 7
7 ②	**8** ②				

1 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 존재하고 $x^2=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)$$

이때

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)-(f(x)-f(1))}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}-\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$

$$=f'(1)-\frac{1}{2}f'(1)$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-1}=12$에서

$\frac{1}{2}f'(1)=12$

따라서 $f'(1)=24$

답 ④

2 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)-4}=\frac{1}{2}$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{x-1}{f(x)-4}}$$

$$=\frac{1}{\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)-4}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

이차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}(f(x)-4)=f(1)-4=0$에서 $f(1)=4$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)이므로

$f(1)=1+a+b=4$에서

$a+b=3$

㉠에서 미분계수의 정의에 의하여

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x-1}=2$$

$f'(x)=2x+a$이므로

$f'(1)=2+a=2$에서

$a=0$이고 $b=3$

따라서 $f(x)=x^2+3$이므로

$f(-1)=1+3=4$

답 ②

3 $g(2)=2^2-2+1=3$

다항함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}(f(x)-f(3))$$
$$=f(2)-f(3)$$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2-}g(x)=g(2)$이므로

$f(2)-f(3)=3$

즉, $f(2)=f(3)+3$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편,

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x^2-x+1)-3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}(x+1)=3$$

이고, 다항함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(3)-3}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

이때 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$에서

$f'(2)=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

함수 $f(x)$는 이차함수이고, $f(0)=3$이므로

$f(x)=ax^2+bx+3$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

㉠에서 $4a+2b+3=(9a+3b+3)+3$

$5a+b=-3$ $\cdots\cdots$ ㉢

$f'(x)=2ax+b$이므로 ㉡에서

$4a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $a=-6$, $b=27$

따라서 $f(x)=-6x^2+27x+3$이므로

$f(1)=-6+27+3=24$

답 ③

4 $f'(1)$, $g'(1)$의 값이 모두 존재하므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 모두 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$, $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to1}h(x)=h(1)$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $h(1)=f(1)$이므로 ㉠에 의하여

$\lim_{x\to1}(f(x)g(x))=f(1)g(1)=f(1)$

이때 $f(1)\neq 0$이므로 $g(1)=1$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$이므로

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$\quad =1\times 1+f(1)\times(-2)$

$\quad =1-2f(1)$

조건 (나)에서 $h'(1)=-3$이므로

$1-2f(1)=-3$

$f(1)=2$

따라서

$f(1)+g(1)=2+1=3$

답 ③

5 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$f(2)=0$

모든 실수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 a^3-2a+1이므로

$f'(a)=a^3-2a+1$

$f'(2)=2^3-2\times 2+1=5$

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

따라서

$\lim_{x\to 2}\frac{g'(x)}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-1)f(x)+x(x-2)f'(x)}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2f(x)}{x-2}+\frac{xf'(x)}{x-1}\right)$

$=2\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+\lim_{x\to 2}\frac{xf'(x)}{x-1}$

$=2f'(2)+2f'(2)$

$=4f'(2)$

$=4\times 5=20$

답 20

6 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1, 5)$에서 만나므로

$f(1)=g(1)=5$ …… ㉠

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로 ㉠에 의하여

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$\quad =5(f'(1)+g'(1))$

이고, 함수 $h(x)=f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수가 15이므로

$5(f'(1)+g'(1))=15$

$f'(1)+g'(1)=3$

$f'(1)g'(1)=-10$이므로

$(f'(1)-g'(1))^2=(f'(1)+g'(1))^2-4f'(1)g'(1)$

$\quad =3^2-4\times(-10)$

$\quad =49$

이때 $f'(1)>g'(1)$이므로

$f'(1)-g'(1)=\sqrt{49}=7$

답 7

7 $g(x)=(x^2+1)f(x)+2x-f(0)$ …… ㉠

에서 $g(1)=0$이므로

$g(1)=2f(1)+2-f(0)=0$

$f(0)=2f(1)+2$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)+2$

$g'(0)=1$이므로

$g'(0)=f'(0)+2=1$

$f'(0)=-1$ …… ㉢

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

㉡에서 $b=2(1+a+b)+2$

정리하면 $b=-2a-4$ …… ㉣

$f'(x)=2x+a$이므로

㉢에서 $f'(0)=a=-1$

이므로 ㉣에 대입하면

$b=-2\times(-1)-4=-2$

따라서 $f(x)=x^2-x-2$이므로

$f(4)=16-4-2=10$

답 ②

8 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$, $x=1$에서 모두 연속이다.

$\lim_{x\to -1+}g(x)=\lim_{x\to -1-}g(x)=g(-1)$에서

$\lim_{x\to -1+}g(x)=\lim_{x\to -1+}(x^2+3x+a)=a-2$,

$\lim_{x\to -1-}g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)=f(-1)$,

$g(-1)=f(-1)$

이므로

$g(-1)=f(-1)=a-2$ …… ㉠

$\lim_{x\to 1+}g(x)=\lim_{x\to 1-}g(x)=g(1)$에서

$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$,

$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1-} (x^2+3x+a)=a+4$,

$g(1)=f(1)$

이므로

$g(1)=f(1)=a+4$ …… ㉡

한편, ㉠에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}&=\lim_{x\to-1+}\frac{(x^2+3x+a)-(a-2)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}(x+2)\\&=1\end{aligned}$$

이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}&=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\\&=f'(-1)\end{aligned}$$

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$g'(-1)=f'(-1)=1$ …… ㉢

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

이고, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+3x+a)-(a+4)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(x+4)\\&=5\end{aligned}$$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$g'(1)=f'(1)=5$ …… ㉣

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

이므로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned}h'(-1)&=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)\\&=2f'(-1)f(-1)\\&=2a-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h'(1)&=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\\&=2f'(1)f(1)\\&=10a+40\end{aligned}$$

$h'(-1)+h'(1)=12$에서

$(2a-4)+(10a+40)=12$

$a=-2$

따라서

$g(0)=a=-2$

답 ②

Level 3 실력 완성 본문 44쪽

1 ② **2** ② **3** 248

1 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{f(x)-2}=\frac{1}{3}$ …… ㉠

에서 $x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이어야 한다.

이때 다항함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}(f(x)-2)=f(1)-2=0$에서

$f(1)=2$ …… ㉡

다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로 ㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{f(x)-2}&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{f(x)-f(1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\\&=\frac{\lim_{x\to1}(x-2)}{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\\&=-\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=-3$ …… ㉢

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값이 존재하므로 다항함수 $f(x)$의 차수는 2 이하이다.

이때 $f(x)$가 상수함수이면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

즉, $f(x)$는 일차함수 또는 이차함수이다.

만약 $f(x)$가 일차함수이면

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

으로 놓을 수 있고, $f'(x)=a$이므로 ㉡, ㉢에서

$f(1)=a+b=2$, $f'(1)=a=-3$

즉, $b=2-a=5$이므로 $f(x)=-3x+5$

이때 부등식 $f(x)>5$의 해를 구하면

$-3x+5>5$, $x<0$

즉, 부등식 $f(x)>5$를 만족시키는 실수 x가 존재하므로 $f(x)$가 일차함수이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=px^2+qx+r$ (p, q, r은 상수, $p\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2px+q$이므로 ㉡, ㉢에서

$f(1)=p+q+r=2$, $f'(1)=2p+q=-3$

즉, $q=-2p-3$, $r=p+5$이므로

$f(x)=px^2-(2p+3)x+p+5$

$=p\left(x-\frac{2p+3}{2p}\right)^2+p+5-\frac{(2p+3)^2}{4p}$ ...... ㉣

조건 (나)에서 부등식 $f(x)>5$를 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 5$를 만족시켜야 한다.

㉣에서 $p<0$이고, 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 5 이하이어야 하므로

$p+5-\frac{(2p+3)^2}{4p}\le 5$

$p\le\frac{(2p+3)^2}{4p}$ ...... ㉤

이때 $p<0$이므로 ㉤의 양변에 $4p$를 곱하면

$4p^2\ge(2p+3)^2$, $12p+9\le 0$

$p\le-\frac{3}{4}$ ...... ㉥

㉣, ㉥에서

$f(-3)=9p+3(2p+3)+p+5=16p+14$

$\le 16\times\left(-\frac{3}{4}\right)+14=2$

따라서 $f(-3)$의 최댓값은 $p=-\frac{3}{4}$일 때 2이다.

답 ②

2 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 그 도함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 정의된다.

$g(x)=ax^2+bx+a$로 놓으면 조건 (나)에서

$f'(x)=1-\sqrt{g(x)}$ 또는 $f'(x)=1+\sqrt{g(x)}$ ...... ㉠

모든 실수 x에 대하여 $(f'(x)-1)^2\ge 0$이므로

$g(x)=ax^2+bx+a\ge 0$ ...... ㉡

이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $ax^2+bx+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4a^2$

이때 a, b는 0이 아닌 상수이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉡이 성립하려면 이차함수의 성질에 의하여

$a>0$, $D\le 0$

이어야 한다.

$D=b^2-4a^2=(b+2a)(b-2a)\le 0$

에서 $a>0$이므로

$-2a\le b\le 2a$ ...... ㉢

조건 (가)에서 $f'(-1)<1<f'(2)$이므로 ㉠에서

점 $(-1, f'(-1))$은 곡선 $y=1-\sqrt{g(x)}$ 위의 점이고

점 $(2, f'(2))$는 곡선 $y=1+\sqrt{g(x)}$ 위의 점이다. 즉,

$f'(-1)=1-\sqrt{a-b+a}=1-\sqrt{2a-b}$,

$f'(2)=1+\sqrt{4a+2b+a}=1+\sqrt{5a+2b}$

$f'(-1)<1$에서

$\sqrt{2a-b}>0$, 즉 $2a-b>0$

이고, $f'(2)>1$에서

$\sqrt{5a+2b}>0$, 즉 $5a+2b>0$

이므로

$-\frac{5}{2}a<b<2a$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서

$-2a\le b<2a$ ...... ㉤

이때 조건 (가)에서 함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 $f'(c)=1$을 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 조건 (나)에서

$(f'(x)-1)^2=g(x)$

이므로

$g(c)=(f'(c)-1)^2=(1-1)^2=0$

㉡에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이므로 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=c$인 점에서 x축에 접한다. 즉,

$D=b^2-4a^2=0$이므로

$b=-2a$ 또는 $b=2a$

㉤에 의하여 $b=-2a$

이때 $g(x)=ax^2-2ax+a=a(x-1)^2$이므로

$c=1$

$\sqrt{g(x)}=\sqrt{a(x-1)^2}=\sqrt{a}|x-1|$

이때 $x\ne 1$인 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{g(x)}>0$이고, 연속함수 $f'(x)$에 대하여 $f'(-1)<1$이므로 $x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=1-\sqrt{g(x)}$이어야 한다.

만약 어떤 실수 $\alpha\,(\alpha<1)$에 대하여

$x<\alpha$일 때 $f'(x)=1+\sqrt{g(x)}$,

$\alpha<x<1$일 때 $f'(x)=1-\sqrt{g(x)}$

이면 함수 $f'(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

마찬가지 방법으로 $f'(2)>1$이므로 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=1+\sqrt{g(x)}$이다.

$$f'(x)=\begin{cases}1-\sqrt{a}|x-1| & (x<1)\\ 1+\sqrt{a}|x-1| & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\sqrt{a}(1-x) & (x<1)\\ 1+\sqrt{a}(x-1) & (x\ge 1)\end{cases}$$

$=x\sqrt{a}+1-\sqrt{a}$

$f'(-4)=-4\sqrt{a}+1-\sqrt{a}=1-5\sqrt{a}$

$f'(3)=3\sqrt{a}+1-\sqrt{a}=1+2\sqrt{a}$

$f'(-4)+f'(3)=0$에서

$1-5\sqrt{a}+1+2\sqrt{a}=0$

$\sqrt{a}=\frac{2}{3}$에서 $a=\frac{4}{9}$이므로

$b=-2a=-\frac{8}{9}$

따라서

$a+b=\frac{4}{9}+\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{4}{9}$

답 ②

3 원점 O와 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에 대하여 직선 OP가 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 두 점 중 점 P에 가까운 점을 $\mathrm{Q_1}$, 먼 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ_1}}\le\overline{\mathrm{PQ}}\le\overline{\mathrm{PQ_2}}$

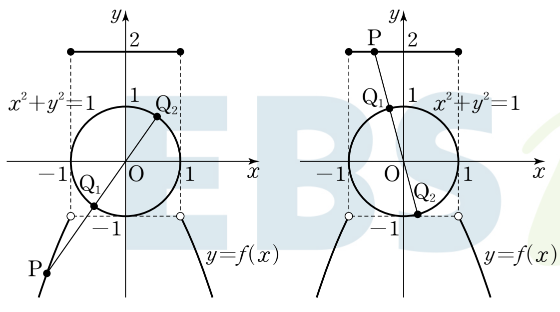
에서

$M(t)=\overline{\mathrm{PQ_2}}^2=(\overline{\mathrm{OP}}+1)^2$,

$m(t)=\overline{\mathrm{PQ_1}}^2=(\overline{\mathrm{OP}}-1)^2$

이므로

$$\begin{aligned}g(t)&=\{(\overline{\mathrm{OP}}+1)^2-(\overline{\mathrm{OP}}-1)^2\}^2\\&=(4\overline{\mathrm{OP}})^2\\&=16\overline{\mathrm{OP}}^2\\&=16\{t^2+(f(t))^2\}\end{aligned}$$



(i) $t<-1$ 또는 $t>1$일 때

$f(t)=-t^2$이므로

$g(t)=16\{t^2+(-t^2)^2\}=16(t^4+t^2)$

(ii) $-1\le t\le 1$일 때

$f(t)=2$이므로

$g(t)=16(t^2+2^2)=16(t^2+4)$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases}16(t^2+4) & (|t|\le 1)\\ 16(t^4+t^2) & (|t|>1)\end{cases}$$

이다. 즉, 함수 $g(t)$는 $|t|<1$, $|t|>1$인 모든 실수 t의 값에서 미분가능하다.

이제 함수 $g(t)$가 $t=1$, $t=-1$에서 미분가능한지 조사해 보자.

$g(1)=g(-1)=80$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1+}(g(t)-g(1))&=\lim_{t\to1+}\{16(t^4+t^2)-80\}\\&=-48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-1-}(g(t)-g(-1))&=\lim_{t\to-1-}\{16(t^4+t^2)-80\}\\&=-48\end{aligned}$$

즉, $\lim_{t\to1+}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}$의 값과 $\lim_{t\to-1-}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}$의 값이 모두 존재하지 않으므로 함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=-1$에서 모두 미분가능하지 않다.

즉, $a=-1+1=0$

$-1<t<1$일 때

$g'(t)=16\times 2t=32t$ …… ㉠

$t<-1$ 또는 $t>1$일 때

$g'(t)=16(4t^3+2t)=32(2t^3+t)$ …… ㉡

이므로 ㉠, ㉡에서

$g'\left(a-\frac{1}{2}\right)=g'\left(-\frac{1}{2}\right)=32\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-16$

$g'\left(a+\frac{3}{2}\right)=g'\left(\frac{3}{2}\right)=32\times\left\{2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}\right\}=264$

따라서

$g'\left(a-\frac{1}{2}\right)+g'\left(a+\frac{3}{2}\right)=-16+264=248$

답 248

04 도함수의 활용(1)

유제 본문 47~53쪽

1 ①	**2** ⑤	**3** 2	**4** 7	**5** ③	**6** ②

1 $f(x)=-2x^4+3x^2+a$라 하면

$f'(x)=-8x^3+6x$

$f'(1)=-8+6=-2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, a+1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a+1)=-2(x-1)$

즉, $y=-2x+a+3$

이 직선이 점 $(0, -3)$을 지나므로

$-3=0+a+3$

따라서 $a=-6$

답 ①

2 $f(x)=x^3-x^2+3x$라 하면

$f'(x)=3x^2-2x+3$

곡선 $y=x^3-x^2+3x$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y=4x-2$와 평행하므로 점 P의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=4$에서 $3t^2-2t+3=4$

$3t^2-2t-1=0$, $(3t+1)(t-1)=0$

$t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

이때 점 P는 제1사분면에 있는 점이므로 점 P의 x좌표는 1이고

$f(1)=1-1+3=3$

이므로 점 P의 좌표는 $(1, 3)$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(1, 3)$과 직선 $y=4x-2$, 즉 $4x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\times1-3-2|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$$

답 ⑤

3 실수 전체의 집합에서 미분가능한 다항함수 $f(x)$는 양의 실수 x에 대하여 닫힌구간 $[0, x]$에서 연속이고, 열린구간 $(0, x)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c) \quad \cdots\cdots ㉠$$

를 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(0, x)$에 적어도 하나 존재한다.

㉠에서 $f(x)-f(0)=xf'(c)$

이므로 조건 (가)에 의하여

$f(x)-f(0)=xf'(c)\ge 2px$에서

$f'(c)\ge 2p \quad \cdots\cdots ㉡$

조건 (나)에서 $x>0$에서 함수 $f'(x)$의 최솟값이 4이므로 $f'(q)=4$를 만족시키는 양의 실수 q가 반드시 존재한다.

이때 모든 양의 실수 x에 대하여 ㉡이 성립하려면 $x>0$에서 함수 $f'(x)$의 최솟값이 $2p$보다 크거나 같아야 하므로

$4\ge 2p$, 즉 $p\le 2$

이어야 한다.

따라서 실수 p의 최댓값은 2이다.

답 2

4 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x$에서

$f'(x)=-x^2+6x-5=-(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

즉, $x<1$ 또는 $x>5$일 때 $f'(x)<0$이고, $1<x<5$일 때 $f'(x)>0$이다.

열린구간 $(a-1, a+2)$에서 정의된 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 이 구간에서 함수 $f(x)$가 증가하거나, 이 구간에서 함수 $f(x)$가 감소해야 한다.

함수 $f(x)$가 열린구간 $(a-1, a+2)$에서 증가하면

$a-1\ge 1$이고 $a+2\le 5$

즉, $2\le a\le 3$

또 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a-1, a+2)$에서 감소하면

$a+2\le 1$ 또는 $a-1\ge 5$

즉, $a\le -1$ 또는 $a\ge 6$

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a의 값은

2, 3, 6, 7, 8, 9, 10

이므로 그 개수는 7이다.

답 7

5 $x_1<x_2$이면 $x_1-x_2<0$이므로 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))>0$

이려면

$f(x_1)-f(x_2)<0$, 즉 $f(x_1)<f(x_2)$

그러므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2-2ax+4a$

이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2-2ax+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-12a$ ······ ㉠

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이려면 $D\leq 0$이어야 하므로 ㉠에서

$a^2-12a\leq 0$, $a(a-12)\leq 0$

$0\leq a\leq 12$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은

$0, 1, 2, 3, \cdots, 12$

이므로 그 개수는 13이다.

답 ③

6 $g(x)=(x^2-x)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-1)f(x)+(x^2-x)f'(x)$

조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극값 12를 가지므로

$g(3)=12$, $g'(3)=0$이다.

$g(3)=12$에서

$g(3)=(3^2-3)f(3)=12$

$f(3)=2$ ······ ㉠

$g'(3)=0$과 ㉠에서

$g'(3)=5f(3)+6f'(3)=5\times 2+6f'(3)=0$

$f'(3)=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$ ······ ㉡

함수 $f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)으로 놓으면 $f'(x)=a$이다. ㉠, ㉡에서

$f(3)=3a+b=2$, $f'(3)=a=-\frac{5}{3}$

즉, $b=2-3a=7$이므로

$f(x)=-\frac{5}{3}x+7$

$g(x)=x(x-1)\left(-\frac{5}{3}x+7\right)$

따라서

$g(-3)=(-3)\times(-3-1)\times\left\{-\frac{5}{3}\times(-3)+7\right\}=144$

답 ②

Level 1 **기초 연습** 본문 54~55쪽

1 ④ **2** ① **3** ③ **4** ③ **5** ② **6** ② **7** ⑤ **8** 8

1 $f(x)=x^3+ax^2+1$이라 하면

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$3=-1+a+1$, $a=3$

$f(x)=x^3+3x^2+1$이므로

$f'(x)=3x^2+6x$

$f'(-1)=-3$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 3)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

즉, 두 점 $(0, 3)$, $(1, b)$를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{b-3}{1-0}=\frac{1}{3}$에서 $b=\frac{10}{3}$

따라서

$a+b=3+\frac{10}{3}=\frac{19}{3}$

답 ④

2 $g(x)=ax^3+2x$라 하면 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, 4)$를 지나므로

$4=a+2$에서 $a=2$

$g(x)=2x^3+2x$이므로

$g'(x)=6x^2+2$

$g'(1)=8$ ······ ㉠

$h(x)=(2x^3-x)f(x)$로 놓으면 $h(1)=f(1)$이고

$h'(x)=(6x^2-1)f(x)+(2x^3-x)f'(x)$

$h'(1)=5f(1)+f'(1)$ ······ ㉡

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선과 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 서로 같으므로 두 점 $(1, 4)$, $(1, f(1))$은 서로 같다. 즉,

$f(1)=4$ ······ ㉢

이때 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 $x=1$에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$g'(1)=h'(1)$

㉠, ㉡을 대입하면

$8=5f(1)+f'(1)$, $f'(1)=8-5f(1)$

따라서 ㉢에 의하여

$f'(1)=8-5\times 4=-12$

답 ①

3 $f(x)=-x^4+\frac{4}{3}x^3+x$로 놓으면

$f'(x)=-4x^3+4x^2+1$

곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=x-1$에 평행한 직선은 기울기가 1이므로

$f'(x)=1$에서 $-4x^3+4x^2+1=1$

정리하면 $x^2(x-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=1$

이때 $f(0)=0$, $f(1)=-1+\frac{4}{3}+1=\frac{4}{3}$이므로 곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=x-1$에 평행한 직선의 접점의 좌표는 $(0,\ 0)$ 또는 $\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$이다.

곡선 $y=-x^4+\frac{4}{3}x^3+x$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-0=1\times(x-0)$, 즉 $y=x$ …… ㉠

곡선 $y=-x^4+\frac{4}{3}x^3+x$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{4}{3}=1\times(x-1)$, 즉 $y=x+\frac{1}{3}$ …… ㉡

곡선 $y=-x^4+\frac{4}{3}x^3+x$에 접하고 직선 $y=x-1$에 평행한 직선은 ㉠, ㉡의 2개이므로 $a=2$이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=-15x$에 평행한 직선은 기울기가 -15이므로

$f'(x)=-15$에서 $-4x^3+4x^2+1=-15$

정리하면 $(x-2)(x^2+x+2)=0$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 방정식 $f'(x)=-15$의 실근은 $x=2$뿐이다.

이때 $f(2)=-16+\frac{32}{3}+2=-\frac{10}{3}$이므로 곡선 $y=f(x)$의 접선 중 직선 $y=-15x$에 평행한 직선의 접점의 좌표는 $\left(2,\ -\frac{10}{3}\right)$이다.

곡선 $y=-x^4+\frac{4}{3}x^3+x$ 위의 점 $\left(2,\ -\frac{10}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{10}{3}\right)=-15(x-2)$, 즉 $y=-15x+\frac{80}{3}$

곡선 $y=-x^4+\frac{4}{3}x^3+x$에 접하고 직선 $y=-15x$에 평행한 직선은 1개이므로 $b=1$이다.

따라서 $a+b=2+1=3$

답 ③

4 $g(x)=x^3+ax^2+(2-a^2)x$라 하자.

모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 한 점에서만 만나려면 함수 $g(x)$는 일대일대응이어야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$ 또는 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge 0$이어야 한다.

$g(x)=x^3+ax^2+(2-a^2)x$에서

$g'(x)=3x^2+2ax+2-a^2$

이차방정식 $g'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(2-a^2)=4a^2-6$ …… ㉠

이때 조건을 만족시키려면 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge 0$이어야 하므로 ㉠에서

$D\le 0$, 즉 $4a^2-6\le 0$

$a^2\le\frac{3}{2}$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}\le a\le\frac{\sqrt{6}}{2}$ …… ㉡

따라서 ㉡을 만족시키는 정수 a의 값은 -1, 0, 1이므로 그 개수는 3이다.

답 ③

5 $f(x)=\begin{cases} x^3+(x-a) & (x<a) \\ x^3-(x-a) & (x\ge a)\end{cases}$에서

$x<a$일 때 $f'(x)=3x^2+1$이고,

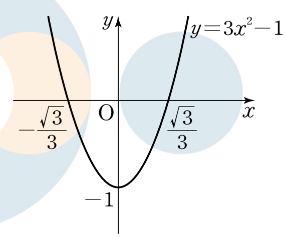
$x>a$일 때 $f'(x)=3x^2-1$이다.

(i) $x<a$일 때

$x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ a)$에서 증가한다.

(ii) $x>a$일 때

$f'(x)=3x^2-1=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$



이때 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f'(x)\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$a\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$

(i), (ii)에서 a의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ②

6 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3-4x^2-8x=4x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-\frac{32}{3}$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$f(-1)=0$이면 $a=\frac{5}{3}$

$f(0)=0$이면 $a=0$

$f(2)=0$이면 $a=\frac{32}{3}$

따라서 함수 $f(x)$가 0을 극값으로 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{5}{3}+0+\frac{32}{3}=\frac{37}{3}$

답 ②

7 $f(x)=x^3+x^2-x+a$에서

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+1$	↘	$a-\frac{5}{27}$	↗

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이고, $x=\frac{1}{3}$에서 극소이므로 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(-1,\ a+1)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{3},\ a-\frac{5}{27}\right)$

선분 PQ를 $3:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로 내분하는 점의 y좌표는 0이다.

즉, $\dfrac{3\times\left(a-\frac{5}{27}\right)+1\times(a+1)}{3+1}=\dfrac{4a+\frac{4}{9}}{4}=0$

따라서 $a=-\frac{1}{9}$

답 ⑤

8 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$ …… ㉠

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-2x+a)=a-2$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^3+3x^2+2)=6$,

$f(1)=a-2$

이므로 ㉠에서 $a-2=6$, 즉 $a=8$

즉, $f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+2 & (x<1)\\ -2x+8 & (x\ge1)\end{cases}$

$g(x)=x^3+3x^2+2$라 하면

$g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$x<1$일 때 $f'(x)=g'(x)$이고

$x>1$일 때 $f'(x)=-2$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	↗	6	↘	2	↗	6	↘

함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=1$에서 극댓값 6을 갖고, $x=0$에서 극솟값 2를 갖는다.

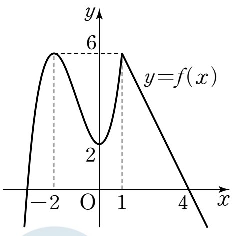
따라서 함수 $f(x)$의 모든 극값을 원소로 갖는 집합의 모든 원소의 합은

$6+2=8$

답 8

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



Level **2** **기본 연습** 본문 56~57쪽

1 ① **2** ① **3** 31 **4** ① **5** 7 **6** 48 **7** ①

1 $f(x)=ax^3+bx+3$으로 놓으면 $f'(x)=3ax^2+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$을 지나므로 $f(1)=6$에서

$a+b+3=6$, 즉 $a+b=3$ …… ㉠

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기가

$\frac{2-6}{0-1}=4$이므로

$f'(1)=3a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x+3$

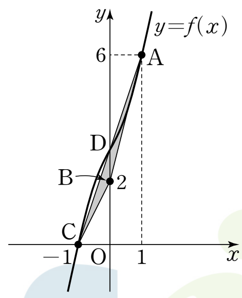
$f(x)=0$에서 $x^3+5x+6=0$

$(x+1)(x^2-x+6)=0$ …… ㉢

이때 모든 실수 x에 대하여

$x^2-x+6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$

즉, 방정식 ㉢의 실근은
$x=-1$뿐이므로 곡선
$y=f(x)$와 x축이 만나는 점 C
의 좌표는 $(-1, 0)$이다.
직선 AC의 방정식이
$y=3x+3$이므로 직선 AC가 y축과 만나는 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $(0, 3)$이고 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ADB와 삼각형 CBD의 넓이의 합과 같다.



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1=1$

답 ①

2 자연수 b에 대하여 $f(0)=b>0$이므로 조건 (가)와 (나)에서
$f(1)f(2)<0,\ f(2)f(3)<0$ …… ㉠
이때 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 사잇값 정리에 의하여
$f(d_1)=0\ (1<d_1<2),\ f(d_2)=0\ (2<d_2<3)$
인 두 실수 d_1, d_2가 존재한다.
이때 $f(d_1)=f(d_2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c_1)=0$인 c_1이 열린구간 (d_1, d_2)에 적어도 하나 존재한다.
즉, c_1은 방정식 $f'(x)=0$의 실근이고
$1<d_1<c_1<d_2<3$ …… ㉡
이때 $f(x)=x^3-ax^2+b$에서
$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}a$
이때 c_1은 방정식 $f'(x)=0$의 양의 실근이므로
$c_1=\frac{2}{3}a$
㉡에서 $1<\frac{2}{3}a<3$
$\frac{3}{2}<a<\frac{9}{2}$
이때 a는 자연수이므로
$a=2$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$
(i) $a=2$일 때
$f(x)=x^3-2x^2+b$이므로 ㉠에서
$f(1)f(2)=(1-2+b)(8-8+b)<0$
$b(b-1)<0$
$0<b<1$ …… ㉢
이때 ㉢을 만족시키는 자연수 b는 없다.
(ii) $a=3$일 때
$f(x)=x^3-3x^2+b$이므로 ㉠에서
$f(1)f(2)=(1-3+b)(8-12+b)<0$
$(b-2)(b-4)<0$
$2<b<4$ …… ㉣
$f(2)f(3)=(8-12+b)(27-27+b)<0$
$b(b-4)<0$
$0<b<4$ …… ㉤
이때 b는 자연수이므로 ㉣, ㉤에서 $b=3$
(iii) $a=4$일 때
$f(x)=x^3-4x^2+b$이므로 ㉠에서
$f(2)f(3)=(8-16+b)(27-36+b)<0$
$(b-8)(b-9)<0$
$8<b<9$ …… ㉥
이때 ㉥을 만족시키는 자연수 b는 없다.
(i), (ii), (iii)에서 $a=3$, $b=3$이므로
$f(x)=x^3-3x^2+3$
따라서 $f(1)=1-3+3=1$

답 ①

3 $f(x)=2x^3+kx^2+1$로 놓으면
$f'(x)=6x^2+2kx$
점 $(-2, 1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $(t, 2t^3+kt^2+1)$이라 하면 이 접선의 방정식은
$y-(2t^3+kt^2+1)=(6t^2+2kt)(x-t)$ …… ㉠
직선 ㉠이 점 $(-2, 1)$을 지나므로
$1-(2t^3+kt^2+1)=(6t^2+2kt)(-2-t)$
$4t^3+(k+12)t^2+4kt=0$
$t\{4t^2+(k+12)t+4k\}=0$ …… ㉡
이때 점 $(-2, 1)$에서 이 곡선에 그은 접선의 개수가 1이려면 t에 대한 삼차방정식 ㉡의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다.
t에 대한 이차방정식 $4t^2+(k+12)t+4k=0$이 중근 0을 가지면
$k+12=0,\ 4k=0$ …… ㉢
이어야 한다. 이때 ㉢을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.
즉, t에 대한 이차방정식 $4t^2+(k+12)t+4k=0$이 허근을 가져야 하므로 그 판별식을 D라 하면
$D=(k+12)^2-64k<0$
$k^2-40k+144<0$
$(k-4)(k-36)<0$
$4<k<36$ …… ㉣
따라서 ㉣을 만족시키는 정수 k의 값은 5, 6, 7, ⋯, 35이므로 그 개수는 31이다.

답 31

4 $x_1<x_2$일 때 조건을 만족시키는 실수 p의 집합을 A_1이라 하고, $x_1=x_2$일 때 조건을 만족시키는 실수 p의 집합을 A_2 라 하면

$A=A_1\cup A_2$ …… ㉠

함수 $f(x)=2x^3+ax$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $-1\le x_1<x_2\le 2$일 때, 닫힌구간 $[x_1,\ x_2]$에서 연속이고 열린구간 $(x_1,\ x_2)$에서 미분가능하다.

이때 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$

를 만족시키고 $x_1<c<x_2$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=6x^2+a$

이므로 $-1\le x_1<x_2\le 2$일 때 집합 A_1의 원소 p는

$p=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{2(x_2-x_1)}=\dfrac{f'(c)}{2}=3c^2+\dfrac{a}{2}$

$-1\le x_1<x_2\le 2$인 모든 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 닫힌구간 $[x_1,\ x_2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 각각의 실수 c의 집합은 집합 $\{x\mid -1<x<2\}$에 포함되고,

$-1<x<2$일 때 $\dfrac{a}{2}\le 3x^2+\dfrac{a}{2}<12+\dfrac{a}{2}$이므로

$A_1\subset\left\{x\,\middle|\,\dfrac{a}{2}\le x<12+\dfrac{a}{2}\right\}$ …… ㉡

또 $x_1=x_2$일 때 $p=3{x_1}^2+\dfrac{a}{2}$이고 $-1\le x_1\le 2$에서

$\dfrac{a}{2}\le 3{x_1}^2+\dfrac{a}{2}\le 12+\dfrac{a}{2}$

이므로

$A_2=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{a}{2}\le x\le 12+\dfrac{a}{2}\right\}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$A=A_1\cup A_2=A_2$

$=\left\{p\,\middle|\,\dfrac{a}{2}\le p\le 12+\dfrac{a}{2}\right\}$ …… ㉣

이때 정수 a의 값에 따라 집합 A의 원소 중 자연수인 것의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $a=-m$ (m은 자연수)일 때

㉣에서 $-\dfrac{m}{2}\le p\le 12-\dfrac{m}{2}$이므로 집합 A의 원소 중 자연수인 것의 개수가 10이려면

$10\le 12-\dfrac{m}{2}<11,\ 2<m\le 4$

이때 m은 자연수이므로

$m=3$ 또는 $m=4$

즉, $a=-3$ 또는 $a=-4$

(ii) $a=n$ (n은 음이 아닌 정수)일 때

㉣에서 $\dfrac{n}{2}\le p\le 12+\dfrac{n}{2}$이므로 집합 A의 원소 중 자연수인 것의 개수는 12 또는 13이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii)에서 구하는 정수 a의 값은 $-4,\ -3$이므로 그 합은 -7이다.

답 ①

참고

㉣에서 정수 a의 값에 따라 집합 A의 원소 중 자연수인 것의 개수 N의 값을 구하면 다음과 같다.

(a) $a=-2k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$-k+\dfrac{1}{2}\le p\le 12-k+\dfrac{1}{2}$

k가 0 또는 11 이하의 자연수이면

$N=12-k$

k가 12 이상의 자연수이면

$N=0$

(b) $a=-2k$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$-k\le p\le 12-k$

k가 0 또는 11 이하의 자연수이면

$N=12-k$

k가 12 이상의 자연수이면

$N=0$

(c) $a=2k$ (k는 자연수)일 때

$k\le p\le 12+k$이므로

$N=(12+k)-(k-1)=13$

(d) $a=2k+1$ (k는 자연수)일 때

$k+\dfrac{1}{2}\le p\le 12+k+\dfrac{1}{2}$이므로

$N=(12+k)-k=12$

실제로 $a=-3$일 때,

$f(x)=2x^3-3x,\ f'(x)=6x^2-3$

이때 집합 A의 원소 p의 범위는

$-\dfrac{3}{2}\le p\le\dfrac{21}{2}$

따라서 집합 A의 원소 중 자연수인 것은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$이므로 그 개수는 10이다.

또 $a=-4$일 때,

$f(x)=2x^3-4x,\ f'(x)=6x^2-4$

이때 집합 A의 원소 p의 범위는

$-2\le p\le 10$

따라서 집합 A의 원소 중 자연수인 것은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$이므로 그 개수는 10이다.

5 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x_1<x_2$인 모든 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)<0$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$

즉, 삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모

든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b$ …… ㉠

이때 $D\leq 0$이어야 하므로 ㉠에서

$a^2-3b\leq 0$ …… ㉡

$f(-1)=-\frac{10}{3}$에서

$-1+a-b+1=-\frac{10}{3}$

$b=a+\frac{10}{3}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$a^2-3\left(a+\frac{10}{3}\right)\leq 0$, $a^2-3a-10\leq 0$

$(a+2)(a-5)\leq 0$, $-2\leq a\leq 5$

이때 $a=b-\frac{10}{3}$이므로

$-2\leq b-\frac{10}{3}\leq 5$, $\frac{4}{3}\leq b\leq \frac{25}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 b의 값은

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 개수는 7이다.

답 7

6 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이고, 조건 (가)에서 이차함수 $f(x)$가 극솟값 -8을 가지므로

$f(x)=2(x-a)^2-8$ (a는 상수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)g(x)}{|x+1|^3}=\alpha$ (α는 상수)

로 놓으면

$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)}{|x+1|^3}=\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)}{(x+1)^3}$

에서

$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)}{(x+1)^3}=\alpha$ …… ㉡

㉡에서 $x\to -1+$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=0$

이때 $f(x)$, $g(x)$는 모두 다항함수이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)=0$

즉, 오차 다항식 $f(x)g(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다. 따라서 사차 다항식 $P(x)$에 대하여 $f(x)g(x)=(x+1)P(x)$로 놓을 수 있고 이것을 ㉡에 대입하여 이 과정을 반복하면 오차 다항식 $f(x)g(x)$는 $(x+1)^3$을 인수로 가짐을 알 수 있다. 그러므로 이차식 $Q(x)$에 대하여

$f(x)g(x)=(x+1)^3Q(x)$

로 놓을 수 있다.

이때

$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)}{|x+1|^3}=\lim_{x\to -1+}\frac{(x+1)^3Q(x)}{(x+1)^3}=Q(-1)$,

$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)g(x)}{|x+1|^3}=\lim_{x\to -1-}\frac{(x+1)^3Q(x)}{-(x+1)^3}=-Q(-1)$

에서 $Q(-1)\neq 0$이면

$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)}{|x+1|^3}\neq\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)g(x)}{|x+1|^3}$

가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $Q(-1)=0$이고 오차 다항식 $f(x)g(x)$는 $(x+1)^4$ 또는 $(x+1)^5$을 인수로 갖는다.

이때 이차함수 $f(x)$는 $(x+1)^2$을 인수로 가질 수 없으므로 오차 다항식 $f(x)g(x)$는 $(x+1)^4$을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $g(x)$가 $(x+1)^3$을 인수로 갖는다. 즉,

$g(x)=2(x+1)^3$ …… ㉢

이고, 이차함수 $f(x)$가 $x+1$을 인수로 가져야 한다.

즉, $f(-1)=0$이므로 ㉠에서

$2(-1-a)^2-8=0$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$a=-3$ 또는 $a=1$

㉠에서 $f(x)=2(x+3)^2-8$ 또는 $f(x)=2(x-1)^2-8$

(i) $f(x)=2(x+3)^2-8$일 때

$f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면

$h(x)=2(x+1)^3+2(x+3)^2-8$
$=2x^3+8x^2+18x+12$

이므로

$h'(x)=6x^2+16x+18$

이차방정식 $h'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=64-108=-44<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)>0$이다.

즉, 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극댓값을 갖지 않는다.

(ii) $f(x)=2(x-1)^2-8$일 때

$f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면

$h(x)=2(x+1)^3+2(x-1)^2-8$
$=2x^3+8x^2+2x-4$

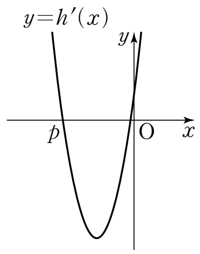
이므로

$h'(x)=6x^2+16x+2$

이차방정식 $h'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=64-12=52>0$

이므로 이차방정식 $h'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



위의 그림과 같이 $h'(p)=0$이고, $x=p$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 실수 p가 존재하므로 함수 $h(x)$는 극댓값을 갖는다.

따라서 $f(x)=2(x-1)^2-8$이므로

$f(2)=2\times(2-1)^2-8=-6$

이고, ㉢에서 $g(2)=2\times(2+1)^3=54$이므로

$f(2)+g(2)=-6+54=48$

답 48

7 $\lim\limits_{x\to 1+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} g(x)+1$ …… ㉠

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$g(1)=\lim\limits_{x\to 1-} g(x)=1$

이므로 ㉠에서

$\lim\limits_{x\to 1+} g(x)=1+1=2$

그러므로

$\lim\limits_{x\to 1+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(x-1)^2}{f(x)-1}=2$ …… ㉡

㉡에서 $x\to 1+$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 1+}(f(x)-1)=f(1)-1=0$

이때 삼차식 $f(x)-1$은 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)-1=(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 이차식)

으로 놓을 수 있고, ㉡에서

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)Q(x)}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x-1}{Q(x)}=2$ …… ㉢

㉢에서 $x\to 1+$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 1+} Q(x)=Q(1)=0$

이때 이차식 $Q(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, $x-1$을 인수로 가지므로

$Q(x)=(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다. 이때

$$\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2}{f(x)-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-a)}=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x-a}=\frac{1}{1-a}=2$$

에서 $a=\dfrac{1}{2}$이므로

$f(x)=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+1=(x^2-2x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+1$

$f'(x)=(2x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+(x^2-2x+1)$
$\quad=(3x-2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{55}{54}$	↘	1	↗

이때 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$\dfrac{55}{54}-1=\dfrac{1}{54}$

답 ①

Level 3 **실력 완성** 본문 58쪽

1 ② **2** ③ **3** ⑤

1 $\overline{AB}=\sqrt{(0+1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y-0=\dfrac{-1-0}{0-(-1)}(x+1)$, $y=-(x+1)$

$x+y+1=0$ …… ㉠

점 $P(t,\ f(t))$와 직선 ㉠ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|t+f(t)+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|f(t)+t+1|}{\sqrt{2}}$

세 선분 AB, AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이 $g(t)$는

$g(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{|f(t)+t+1|}{\sqrt{2}}$
$\quad=\dfrac{|f(t)+t+1|}{2}$ …… ㉡

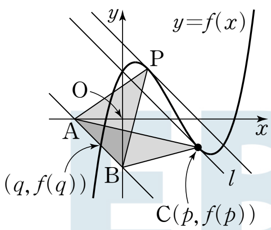
$g(t)=0$에서 $f(t)+t+1=0$

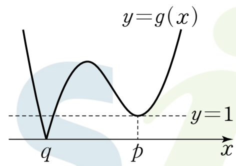
$f(t)=-t-1$ …… ㉢

조건 (가)에 의하여 t에 대한 방정식 ㉢의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x-1$이 만나는 점의 개수는 1이다.

조건 (나)에서 양수 p에 대하여 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=1$

과 점 $(p,\ g(p))$에서 접하므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-x-1$과 x좌표가 음수 q인 점에서만 만나고, 기울기가 -1이고 점 $C(p,\ f(p))$를 지나는 직선 l과 점 C에서 접한다.





직선 l이 y축과 만나는 점을 $D(0,\ k)$ $(k>-1)$이라 하면 직선 $y=-x-1$과 직선 l이 평행하므로 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ABD의 넓이는 같다.

$g(p)=1$에서 점 P가 점 C이면 세 선분 AB, AC, BC로 둘러싸인 도형, 즉 삼각형 ABC의 넓이가 1이고, 삼각형 ABD의 넓이도 1이다.

이때 $\overline{DB}=k-(-1)=k+1$이므로

$\frac{1}{2}\times 1\times(k+1)=1$에서 $k=1$

직선 l의 방정식이 $y=-x+1$이므로 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x+1$과 점 $C(p,\ -p+1)$에서 접한다.

$f(x)-(-x+1)=(x-p)^2(x-a)$ (a는 상수)

로 놓으면 $f(0)=1$이므로

$1-1=-p^2a$, 즉 $p^2a=0$

$p>0$에서 $a=0$이므로

$$f(x)=x(x-p)^2-x+1 \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$
$$=x^3-2px^2+(p^2-1)x+1$$

$f'(x)=3x^2-4px+p^2-1$

직선 l과 직선 $y=-x+\frac{3}{2}$의 기울기가 모두 -1이므로

$f'(x)=-1$에서

$3x^2-4px+p^2-1=-1$

$3x^2-4px+p^2=0$, $(x-p)(3x-p)=0$

$x=p$ 또는 $x=\frac{p}{3}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l과의 접점의 x좌표가 p이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+\frac{3}{2}$과의 접점의 x좌표는 $\frac{p}{3}$이다.

즉, 점 $\left(\frac{p}{3},\ f\left(\frac{p}{3}\right)\right)$가 직선 $y=-x+\frac{3}{2}$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{p}{3}\right)=-\frac{p}{3}+\frac{3}{2}$

㉣에서

$\frac{p}{3}\times\left(\frac{p}{3}-p\right)^2-\frac{p}{3}+1=-\frac{p}{3}+\frac{3}{2}$

$p^3=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$

이때 p는 실수이므로 $p=\frac{3}{2}$이고

$f(x)=x\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-x+1$

따라서 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로 ㉡에서

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\left|f\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}+1\right|}{2}=\frac{2}{2}=1$$

답 ②

2 $f(x)=x^3+2x^2+6x$에서

$f'(x)=3x^2+4x+6$

$f(t)-f(0)=t^3+2t^2+6t=t(t^2+2t+6)$

이고 $t>0$이므로 $f(t)-f(0)=tf'(c)$에서

$t^2+2t+6=3c^2+4c+6$

$3c^2+4c-(t^2+2t)=0$

$$c=\frac{-2\pm\sqrt{4+3(t^2+2t)}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{3t^2+6t+4}}{3}$$

$p=\frac{\sqrt{3t^2+6t+4}-2}{3}$로 놓으면

$(3t^2+6t+4)-2^2=3t^2+6t>0$에서

$$p=\frac{\sqrt{3t^2+6t+4}-2}{3}>0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$(3t+2)^2-(3t^2+6t+4)=6t^2+6t>0$에서

$$t-p=\frac{3t+2-\sqrt{3t^2+6t+4}}{3}>0 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $0<p<t$이므로 함수 $h(t)$의 정의에 의하여

$$h(t)=p=\frac{\sqrt{3t^2+6t+4}-2}{3}$$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{h(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{3t^2+6t+4}-2}{3t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t+2}{\sqrt{3t^2+6t+4}+2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2}$$

답 ③

참고

삼차함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ t]$에서 연속이고, 열린구간 $(0,\ t)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(c)$

즉, $f(t)-f(0)=tf'(c)$

를 만족시키는 c가 열린구간 $(0,\ t)$에 적어도 하나 존재한다.

c에 대한 이차방정식

$3c^2+4c-(t^2+2t)=0$

의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면

$$\alpha=\frac{-2-\sqrt{3t^2+6t+4}}{3},\ \beta=\frac{-2+\sqrt{3t^2+6t+4}}{3}$$

이때 부등식 $0<c<t$를 만족시키는 것은 β뿐이다.

하지만

$$h(t)=\alpha=\frac{-2-\sqrt{3t^2+6t+4}}{3}$$

로 잘못 정하면

$$\lim_{t\to0+}\frac{h(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{-2-\sqrt{3t^2+6t+4}}{3t}=-\infty$$

가 되어 극한값이 존재하지 않는다.

3 조건 (가)의 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=4$에서

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이므로

$\lim_{x\to0}(f(x)-3)=f(0)-3=0$에서

$f(0)=3$ …… ㉠

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=4$$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고

$f'(0)=4$ …… ㉡

조건 (가)의 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^6+1}=0$에서 다항함수 $g(x)$의 차수는 5 이하이다.

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$x|x+1|f(x)=g'(x)$

이므로 양변에 $x=0$, $x=-1$을 각각 대입하면

$g'(0)=0$, $g'(-1)=0$

이고, $x\neq0$, $x\neq-1$일 때

$f(x)=\frac{g'(x)}{x|x+1|}$ …… ㉢

이때 $g'(x)$는 사차 이하의 다항식이므로 이차 이하의 다항식 $h(x)$에 대하여

$g'(x)=x(x+1)h(x)$ …… ㉣

로 놓으면 ㉢에서

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{g'(x)}{x|x+1|}=\lim_{x\to-1+}\frac{x(x+1)h(x)}{x(x+1)}=h(-1)$$

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{g'(x)}{x|x+1|}=\lim_{x\to-1-}\frac{x(x+1)h(x)}{-x(x+1)}=-h(-1)$$

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서도 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$

즉, $f(-1)=h(-1)=-h(-1)$에서

$f(-1)=h(-1)=0$

이때 $h(x)$는 이차 이하의 다항식이므로

$h(x)=(x+1)(ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓으면 ㉣에서

$g'(x)=x(x+1)^2(ax+b)$ (a, b는 상수)

㉢에서 $x>-1$이고 $x\neq0$일 때,

$$f(x)=\frac{x(x+1)^2(ax+b)}{x(x+1)}=(x+1)(ax+b)\ \cdots\cdots ㉤$$

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x+1)(ax+b)=b$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 ㉠에서 $f(0)=3$이므로

$b=3$

또 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 ㉤에서

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)(ax+3)-3}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+(a+3)x}{x}=\lim_{x\to0}\{ax+(a+3)\}=a+3$$

㉡에서 $f'(0)=4$이므로

$a+3=4$

즉, $a=1$이므로

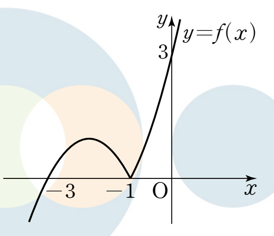
$g'(x)=x(x+1)^2(x+3)$

한편, $x\neq0$, $x\neq-1$일 때

$$f(x)=\frac{g'(x)}{x|x+1|}=\frac{x(x+1)^2(x+3)}{x|x+1|}$$

이고, $f(0)=3$, $f(-1)=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1)(x+3) & (x<-1)\\ (x+1)(x+3) & (x\geq-1)\end{cases}$$



함수 $y=f(x)$의 그래프가 위 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 1을 갖고, $x=-1$에서 극솟값 0을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$1+0=1$

답 ⑤

05 도함수의 활용(2)

유제 본문 61~67쪽

1 48 **2** ① **3** 32 **4** ③ **5** ④ **6** ⑤
7 12

1 $g(x)=f(x)+f(x-a)$
$=(2x^2+ax)+\{2(x-a)^2+a(x-a)\}$
$=4x^2-2ax+a^2$ …… ㉠
$g'(x)=8x-2a$
이차함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로
$g'(1)=8-2a=0$에서
$a=4$
㉠에서 $g(x)=4x^2-8x+16$이므로 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	48	↘	12	↗	16

따라서 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 48이다.

답 48

2 (i) $x<-1$일 때
$f(x)=x^3+3(x+1)+3$
$=x^3+3x+6$
$f'(x)=3x^2+3$이므로
$x<-1$일 때 $f'(x)>0$
(ii) $x>-1$일 때
$f(x)=x^3-3(x+1)+3$
$=x^3-3x$
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로
$x>-1$일 때 $f'(x)=0$에서 $x=1$
(i), (ii)에 의하여 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-8	↗	2	↘	-2	↗	2

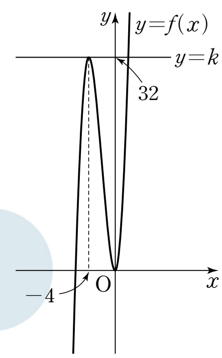
닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 2이고, 최솟값은 -8이다.
따라서 $M=2$, $m=-8$이므로
$M+m=2+(-8)=-6$

답 ①

3 $x^3+6x^2-k=0$에서
$x^3+6x^2=k$
$f(x)=x^3+6x^2$이라 하면
$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-4$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

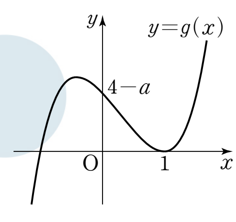
x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.
따라서 주어진 방정식이 서로 다른 실근으로 양수 한 개와 음수 한 개만을 가지려면
$k=32$



답 32

4 $f(x)=x^3+2x^2+ax+4$에서
$f'(x)=3x^2+4x+a$이므로
$g(x)=f(x)-f'(x)$라 하면
$g(x)=x^3-x^2+(a-4)x+4-a$ …… ㉠
$g'(x)=3x^2-2x+(a-4)$
그런데 ㉠에서 $g(1)=0$이고, $x\geq0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.
즉, $g'(1)=3-2+a-4=0$
따라서 $a=3$



답 ③

참고
$a=3$일 때 $g'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 감소하고 구간 $[1,\ \infty)$에서 증가한다. 이때 $g(1)=0$이므로 $x\geq0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq0$이다.

5 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+(k-3)^3x+12$라 하면

$f'(x)=x^3+(k-3)^3$

$\quad=(x+k-3)\{x^2-(k-3)x+(k-3)^2\}$

이때 모든 실수 x에 대하여

$x^2-(k-3)x+(k-3)^2$

$=\left(x-\frac{k-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(k-3)^2\geq 0$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-k+3$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k+3$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-k+3$에서 최솟값을 갖는다.

그러므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$f(-k+3)>0$

이어야 한다. 즉,

$\frac{1}{4}(-k+3)^4+(k-3)^3(-k+3)+12>0$

$\frac{1}{4}(k-3)^4-(k-3)^4+12>0$

$\frac{3}{4}(k-3)^4<12$, $(k-3)^4<16$

$(k-3)^2<4$, $-2<k-3<2$

따라서 $1<k<5$이므로 주어진 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은

$2+3+4=9$

답 ④

6 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2kt+4$

시각 $t=2$에서의 점 P의 속도가 6이므로

$3\times 2^2-2k\times 2+4=6$에서 $k=\frac{5}{2}$

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$a=\frac{dv}{dt}=6t-2k=6t-2\times\frac{5}{2}=6t-5$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\times 2-5=7$

답 ⑤

7 두 점 P, Q가 만나는 시각에서 두 점 P, Q의 위치가 서로 같으므로

$t^3-4t^2=t^2-4t$

$t^3-5t^2+4t=0$

$t(t-1)(t-4)=0$

$t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=4$

그러므로 출발한 후 두 번째로 만나는 시각은 $t=4$이다.

이때 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

$\frac{dx_1}{dt}=3t^2-8t$,

$\frac{dx_2}{dt}=2t-4$

이므로 시각 $t=4$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$p=3\times 4^2-8\times 4=16$,

$q=2\times 4-4=4$

따라서

$p-q=16-4=12$

답 12

Level **1** **기초 연습** 본문 68~69쪽

1 ① **2** ① **3** ② **4** ④ **5** ③ **6** ②
7 ④ **8** ②

1 $f(x)=2x^3+9x^2-24x-7$에서

$f'(x)=6x^2+18x-24=6(x+4)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	61	↘	-20	↗	-3

즉, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 61을 갖고, $x=1$에서 최솟값 -20을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$61+(-20)=41$

답 ①

2 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$에서

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$1<x<3$일 때 $f'(x)=0$에서 $x=2$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-13$	$\searrow$	$a-20$	$\nearrow$	$a-9$

즉, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $a-20$을 가지므로

$a-20=-10$, $a=10$

따라서 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(3)=a-9=10-9=1$

답 ①

3 $f(x)=x^3-12x+16$이라 하면

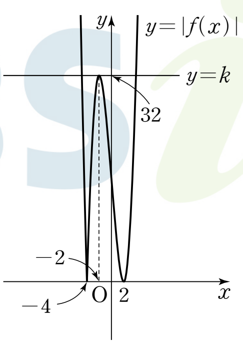
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$

한편, $f(x)=(x+4)(x-2)^2$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



이때 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 $k=32$

답 ②

4 $f(x)=x^4-4x^3+10x^2-12x+k$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+20x-12$

$\quad=4(x-1)(x^2-2x+3)$

모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-5$	$\nearrow$

이때 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나야 한다. 즉, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$k-5\le0$

따라서 $k\le5$이므로 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 ④

5 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	k	$\searrow$	$k-27$	$\nearrow$

즉, $x\ge0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $k-27$을 갖는다.

이때 $x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$k-27\ge0$

이어야 하므로

$k\ge27$

따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 27이다.

답 ③

6 부등식 $f(x)\le g(x)$에서

$2x^3+x^2-5x\le4x^2+7x+k$

$2x^3-3x^2-12x-k\le0$

$h(x)=2x^3-3x^2-12x-k$라 하면

$h'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-4-k$	$\nearrow$	$7-k$	$\searrow$	$-20-k$

즉, $-2\le x\le2$일 때 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $7-k$를 갖는다.

이때 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $h(x)\le0$이 성립하려면

$7-k\le0$

이어야 하므로

$k\ge7$

따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 7이다.

답 ②

7 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t+5$

$3t^2-6t+5=2$에서

$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$

$t=1$

즉, 점 P의 속도가 2인 순간은 $t=1$일 때이므로 이 시각에서의 점 P의 위치는

$1-3+5+1=4$

답 ④

8 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=3t^2+2t-12$

$v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=t^2+t-2$

$v_1=v_2$에서

$3t^2+2t-12=t^2+t-2$

$2t^2+t-10=0$, $(2t+5)(t-2)=0$

$t\ge 0$이므로 $t=2$

$t=2$일 때 두 점 P, Q의 위치 x_1, x_2는

$x_1=8+4-24+15=3$

$x_2=\dfrac{8}{3}+2-4+\dfrac{1}{3}=1$

따라서 이때 선분 PQ의 중점의 위치는

$\dfrac{3+1}{2}=2$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 70~71쪽

1 ③ **2** ② **3** ③ **4** 52 **5** ① **6** 6 **7** ②

1 $f(x)=2x^3+3ax^2-12a^2x$에서

$f'(x)=6x^2+6ax-12a^2=6(x+2a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$-2a<0<a$이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0<a\le 1$일 때

닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(a)$이므로

$f(a)=2a^3+3a^3-12a^3=-7a^3=-13$, $a^3=\dfrac{13}{7}$

$a^3=\dfrac{13}{7}>1$이므로 $0<a\le 1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>1$일 때

닫힌구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이므로

$f(1)=2+3a-12a^2=-13$

$12a^2-3a-15=0$, $4a^2-a-5=0$

$(a+1)(4a-5)=0$

$a>1$이므로 $a=\dfrac{5}{4}$

따라서 $a=\dfrac{5}{4}$

답 ③

2 $f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2a}{3}$

(i) $a>0$일 때

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{2a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

충분히 작은 양수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-t)$와 $f(t)$ 중 작지 않은 값이므로 최댓값이 0으로 일정하다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=0$일 때

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	b	↗

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$0<t\le 3$인 모든 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t)$이므로 최댓값이 0으로 일정하다는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$일 때

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로

나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

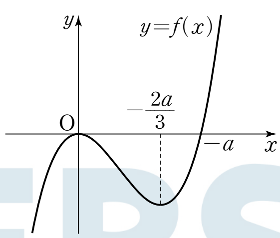
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고, $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<f(0)$이다. 그러므로 $f(t)\le f(0)$을 만족시키는 양수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$이다. 따라서 주어진 조건을 만족시키려면 $0<t\le 3$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\le f(0)$이고 $f(0)=0$이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서 $a<0$이고 $f(0)=0$이다.

$f(0)=b$에서 $b=0$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+b=x^3+ax^2=x^2(x+a)$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$x\le -a$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$이고

$x>-a$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$0<t\le 3$인 모든 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0이려면

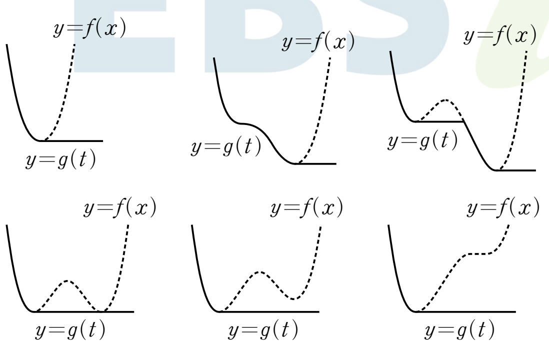
$3\le -a$, 즉 $a\le -3$

이어야 한다.

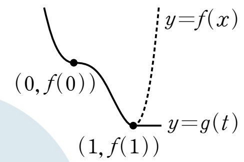
따라서 $f(2)=8+4a\le 8+4\times(-3)=-4$이므로 $f(2)$의 최댓값은 -4이다.

답 ②

3 함수 $y=f(x)$의 그래프의 형태에 따라 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이 중에서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(t)=0$이 되는 모든 실수 t의 값이 $t=0$ 또는 $t\ge 1$인 그래프는 다음과 같다.



직선 $y=f(0)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 α라 하면 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^3(x-\alpha)+f(0)$

$\quad =x^4-\alpha x^3+f(0)$

으로 놓을 수 있다.

$f'(x)=4x^3-3\alpha x^2$에서 $f'(1)=0$이므로

$f'(1)=4-3\alpha=0,\ \alpha=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+f(0)$이므로

$f(2)-f(0)=16-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$

답 ③

4 $f(x)+|f(x)+1|\ge 6x+k$에서

$f(x)+|f(x)+1|-6x\ge k$

$g(x)=f(x)+|f(x)+1|-6x$라 하면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)+|f(x)+1|\ge 6x+k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\ge k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값과 같다.

$f(x)+1=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}$

$\quad =\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$

이므로

(i) $x\le -1$일 때

$f(x)+1\le 0$이므로

$g(x)=f(x)+|f(x)+1|-6x$

$\quad =f(x)-f(x)-1-6x$

$\quad =-6x-1$

(ii) $x>-1$일 때

$f(x)+1\ge 0$이므로

$g(x)=f(x)+|f(x)+1|-6x$

$\quad =f(x)+f(x)+1-6x$

$\quad =\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x+\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases} -6x-1 & (x\le -1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-2x^2-6x+\dfrac{5}{3} & (x>-1) \end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} -6 & (x<-1) \\ 2x^2-4x-6 & (x>-1) \end{cases}$$

$x>-1$일 때,

$g'(x)=2(x-3)(x+1)=0$에서 $x=3$

실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	5	$\searrow$	$-\dfrac{49}{3}$	$\nearrow$

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge g(3)=-\dfrac{49}{3}$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\ge k$가 성립하려면 $k\le -\dfrac{49}{3}$이어야 한다.

따라서 실수 k의 최댓값은 $-\dfrac{49}{3}$이므로 $p=3$, $q=49$이고

$p+q=3+49=52$

답 52

5 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=g(0)$

이때

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} (-x^3+ax^2-6x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=f(0)$,

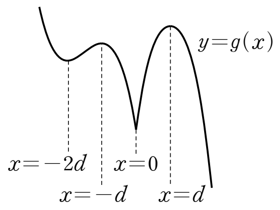
$g(0)=0$

이므로 $f(0)=0$

$x<0$에서 함수 $g(x)$가 삼차함수이므로 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수는 2 이하이고 $x>0$에서 함수 $g(x)$가 이차함수이므로 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수는 1 이하이다. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수가 4이므로 $x=0$에서 극값을 갖고 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3=0<\alpha_4$이다. 네 수 α_1, α_2, 0, α_4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 양수 d라 하면

$\alpha_1=-2d$, $\alpha_2=-d$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=d$이다.

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\infty$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, -2d]$에서 감소, 닫힌구간 $[-2d, -d]$에서 증가, 닫힌구간 $[-d, 0]$에서 감소, 닫힌구간 $[0, d]$에서 증가, 구간 $[d, \infty)$에서 감소한다.



$x<0$에서 $g'(x)=-3x^2+2ax-6$

$g'(x)=0$에서 $-3x^2+2ax-6=0$, $3x^2-2ax+6=0$

이차방정식 $3x^2-2ax+6=0$의 두 근이 $-2d$, $-d$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$-2d+(-d)=\dfrac{2a}{3}$, $-2d\times(-d)=2$

$2d^2=2$, $d^2=1$에서 $d>0$이므로 $d=1$

$-2d+(-d)=\dfrac{2a}{3}$에서

$a=\dfrac{3}{2}\times(-3d)=\dfrac{3}{2}\times(-3\times1)=-\dfrac{9}{2}$

$\alpha_4=1$에서 $f'(1)=0$이다. $f'(1)=0$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$이므로 $f(2)=f(0)=0$이다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 $f(x)=bx(x-2)$ (b는 $b<0$인 상수)로 놓을 수 있다.

닫힌구간 $[\alpha_1, \alpha_4]$, 즉 $[-2, 1]$에 대하여

$-2\le x\le 0$에서 $g(x)\le g(-1)$이고

$0\le x\le 1$에서 $g(x)\le g(1)$이므로

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.

$g(-1)=1-\dfrac{9}{2}+6=\dfrac{5}{2}$, $g(1)=f(1)=-b$이고

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값이 3이므로

$-b=3$, $b=-3$

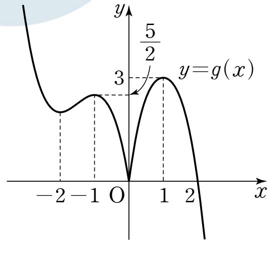
따라서 $g(x)=\begin{cases} -x^3-\dfrac{9}{2}x^2-6x & (x\le 0) \\ -3x(x-2) & (x>0) \end{cases}$이므로

$$g(-3)\times g(3)=\left(27-\frac{81}{2}+18\right)\times(-3\times3\times1)$$
$$=-\frac{81}{2}$$

답 ①

참고

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



6 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도 v는

$v=\dfrac{dx}{dt}=2t^3-3kt^2+27$

$\lim_{t\to 0+} v(t)=27$이므로 $t>0$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으려면 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $v\geq 0$이어야 한다.

$\dfrac{dv}{dt}=6t^2-6kt=6t(t-k)$

$\dfrac{dv}{dt}=0$에서 $t=0$ 또는 $t=k$

$0<t\leq k$에서 v는 감소하고, $t\geq k$에서 v는 증가하므로

$t=k$에서 v는 최소이다.

즉, $t=k$에서의 점 P의 속도가 0 이상이어야 하므로

$2k^3-3k^3+27\geq 0$, $k^3-27\leq 0$

$(k-3)(k^2+3k+9)\leq 0$ ...... ㉠

이때 $k^2+3k+9=\left(k+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0$이므로

㉠에서 $k\leq 3$

따라서 자연수 k의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

답 6

7 $g(t)=x_1-x_2=t^3-2t^2+(a+1)t-\dfrac{27}{4}$이라 하면

시각 t $(t\geq 0)$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리 $f(t)$는

$f(t)=|g(t)|$이다.

함수 $g(t)$는 구간 $[0, \infty)$에서 연속이고 $g(0)=-\dfrac{27}{4}<0$,

$\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$이므로 $g(c)=0$인 양수 c가 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(t)=|g(t)|\geq|g(c)|=0$이므로 함수 $f(t)$의 최솟값은 0이다.

$t\geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)\geq f(3)$이므로 함수 $f(t)$의 최솟값은 $f(3)$이다.

그러므로 $f(3)=0$이다.

$$\begin{aligned}f(3)&=|g(3)|\\&=\left|27-18+3(a+1)-\frac{27}{4}\right|\\&=\left|3a+\frac{21}{4}\right|=0\end{aligned}$$

에서 $a=-\dfrac{7}{4}$

두 점 P, Q의 속도는 각각

$\dfrac{dx_1}{dt}=3t^2-2t+a=3t^2-2t-\dfrac{7}{4}$,

$\dfrac{dx_2}{dt}=2t-1$

이고 시각 $t=k$에서의 두 점 P, Q의 속도가 서로 같으므로

$3k^2-2k-\dfrac{7}{4}=2k-1$

$3k^2-4k-\dfrac{3}{4}=0$

$12k^2-16k-3=0$

$(2k-3)(6k+1)=0$

따라서 $k>0$이므로 $k=\dfrac{3}{2}$

답 ②

Level **3** **실력 완성** 본문 72쪽

1 ③ **2** ① **3** ⑤

1 $x\neq 2$일 때, 방정식 $f(x)=2x^3-4x^2$에서

$\dfrac{2x(8-x)}{(x-2)^2}=2x^3-4x^2$

$x(8-x)=x^2(x-2)^3$

$x\{x(x-2)^3+x-8\}=0$ ...... ㉠

$g(x)=x(x-2)^3+x-8=x^4-6x^3+12x^2-7x-8$

로 놓으면

$g'(x)=4x^3-18x^2+24x-7$

$g'(x)=h(x)$로 놓으면

$h'(x)=12x^2-36x+24=12(x-1)(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

이때 삼차함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이고

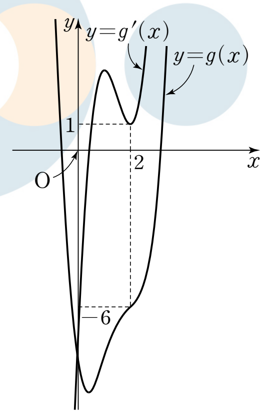
$h(2)=32-72+48-7=1$

이므로 함수 $y=h(x)$, 즉 $y=g'(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서만 만난다.

이때

$g(2)=2\times(2-2)^3+2-8=-6$

이므로 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근 중 0이 아닌 것은 2개뿐이고 모두 2가 아니다. 그러므로 방정식 ㉠의 0이 아닌 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



즉, x에 대한 방정식 $f(x)=2x^3-4x^2$의 0이 아닌 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 나머지 실근은 $x=2$이어야 한다.
이때 $2\times2^3-4\times2^2=0$이므로
$f(2)=p=0$
이다.

따라서 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x(8-x)}{(x-2)^2} & (x\neq2) \\ 0 & (x=2) \end{cases}$ 이므로

$$f(p+1)=f(1)$$
$$=\frac{2\times1\times(8-1)}{(1-2)^2}$$
$$=14$$

답 ③

2 조건 (가)에서 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이고, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로
$f(x)=x^2(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)
로 놓으면

$$f'(x)=2x(x^2+ax+b)+x^2(2x+a)$$
$$=x(4x^2+3ax+2b)$$

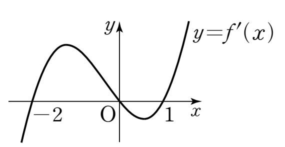
$f'(-2)=0$에서
$-2(16-6a+2b)=0$, $b=3a-8$
이므로

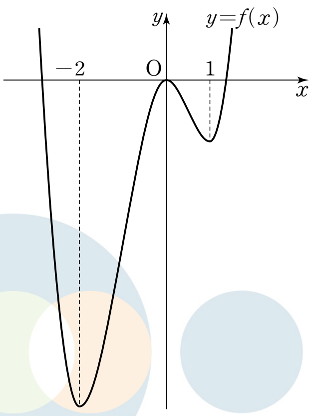
$$f(x)=x^2(x^2+ax+3a-8) \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$f'(x)=x(4x^2+3ax+6a-16)$$
$$=x(x+2)(4x+3a-8)$$
$$=4x(x+2)\left(x+\frac{3a-8}{4}\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{8-3a}{4}$
어떤 자연수 p에 대하여 $f'(p)=0$이므로
$p=\dfrac{8-3a}{4}$
이다.

(i) $p=1$일 때
$\dfrac{8-3a}{4}=1$에서 $a=\dfrac{4}{3}$
이므로 ㉠, ㉡에서

$$f(x)=x^2\left(x^2+\frac{4}{3}x-4\right) \quad \cdots\cdots ㉢$$
$$f'(x)=4x(x+2)(x-1)$$





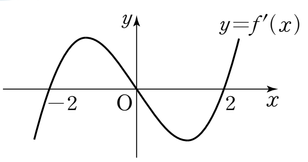
함수 $f(x)$는 $x\geq1$에서 증가하므로
닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)$이고,
닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)$이다.
그러므로 $M(1)=f(3)$, $m(2)=f(2)$이고, ㉢에서

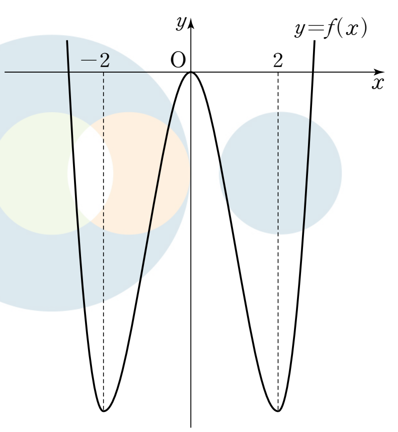
$$M(1)+m(2)=f(3)+f(2)$$
$$=9\times(9+4-4)+4\times\left(4+\frac{8}{3}-4\right)$$
$$=\frac{275}{3}>0$$

즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii) $p=2$일 때
$\dfrac{8-3a}{4}=2$에서 $a=0$
이므로 ㉠, ㉡에서

$$f(x)=x^2(x^2-8) \quad \cdots\cdots ㉣$$
$$f'(x)=4x(x+2)(x-2)$$





함수 $f(x)$는 $0\leq x\leq2$에서 감소하고,
$x\geq2$에서 증가한다.

㉣에서

$f(1)=1\times(1-8)=-7$, $f(3)=9\times(9-8)=9$, 즉

$f(1)<f(3)$이므로

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)$이고,

닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)$이다.

그러므로 $M(1)=f(3)$, $m(2)=f(2)$이고, ㉣에서

$f(2)=4\times(4-8)=-16$

이므로

$$\begin{aligned}M(1)+m(2)&=f(3)+f(2)\\&=9+(-16)\\&=-7<0\end{aligned}$$

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

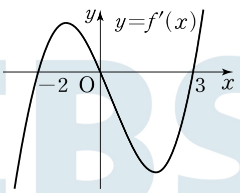
(iii) $p=3$일 때

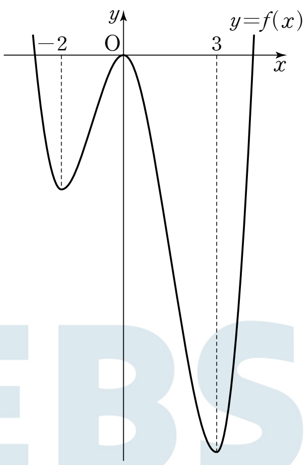
$\frac{8-3a}{4}=3$에서 $a=-\frac{4}{3}$

이므로 ㉠, ㉡에서

$f(x)=x^2\left(x^2-\frac{4}{3}x-12\right)$

$f'(x)=4x(x+2)(x-3)$





함수 $f(x)$는 $0\le x\le 3$에서 감소하고,

$x\ge 3$에서 증가하므로

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이고,

닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다.

그러므로 $M(1)=f(1)$, $m(2)=f(3)$이고

$f(1)<0$, $f(3)<0$이므로

$M(1)+m(2)=f(1)+f(3)<0$

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $p\ge 4$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프를 살펴보면 닫힌구간 $[0, p]$에서 $f(x)\le 0$임을 알 수 있다.

즉, 닫힌구간 $[1, 3]$, 닫힌구간 $[2, 4]$에서 $f(x)\le 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서 구하는 자연수 p의 값은 1이고

$f(x)=x^2\left(x^2+\frac{4}{3}x-4\right)$

따라서

$$\begin{aligned}f(p)&=f(1)\\&=1\times\left(1+\frac{4}{3}-4\right)=-\frac{5}{3}\end{aligned}$$

답 ①

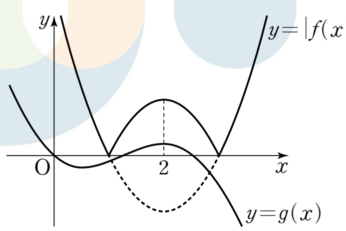
3 $f(0)=4+a$, $f(2)=a$이고,

조건 (가)에서 $f(0)f(2)<0$이므로

$a(4+a)<0$에서

$-4<a<0$ …… ㉠

삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 -1이므로 조건 (가)와 조건 (나)를 모두 만족시키는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x)=-x^3+bx^2+cx$에서

$g'(x)=-3x^2+2bx+c$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이므로

$g'(2)=-12+4b+c=0$

즉, $c=12-4b$이므로

$$\begin{aligned}g'(x)&=-3x^2+2bx+12-4b\\&=-(x-2)(3x-2b+6)\end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{2b-6}{3}$

함수 $y=g(x)$의 그래프에서

$0<\frac{2b-6}{3}<2$, 즉 $3<b<6$

이때 b는 정수이므로 $b=4$ 또는 $b=5$이다.

(i) $b=4$일 때

$c=12-16=-4$에서

$$\begin{aligned}g(x)&=-x^3+4x^2-4x\\&=-x(x-2)^2\end{aligned}$$

이때 $x>0$에서

$|f(x)| \geq 0,\ g(x) \leq 0$

이므로 부등식 $|f(x)| \geq g(x)$가 성립한다.

$|f(2)|=|a|=-a$이고, $g(2)=0$이므로

$g(2)-|f(2)|=0-(-a)=a$

(ii) $b=5$일 때

$c=12-20=-8$에서

$$g(x)=-x^3+5x^2-8x$$
$$=-x\left\{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}$$

이때 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

이므로 $x>0$에서

$|f(x)| \geq 0,\ g(x)<0$

즉, 부등식 $|f(x)| \geq g(x)$가 성립한다.

$|f(2)|=|a|=-a$이고,

$g(2)=-8+20-16=-4$

이므로

$g(2)-|f(2)|=-4-(-a)=a-4$

㉠과 (i), (ii)에서 a는 정수이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(-3,\ 4,\ -4),\ (-2,\ 4,\ -4),\ (-1,\ 4,\ -4)$

$(-3,\ 5,\ -8),\ (-2,\ 5,\ -8),\ (-1,\ 5,\ -8)$

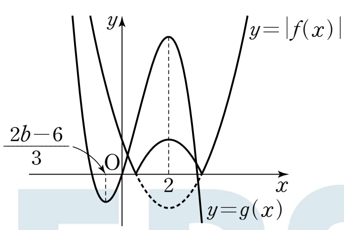
이다.

따라서 $g(2)-|f(2)|$의 최솟값은 $a=-3$일 때

$a-4=-3-4=-7$이다.

답 ⑤

참고



위의 그림과 같이 $\frac{2b-6}{3} \leq 0$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

06 부정적분과 정적분

유제

본문 75~81쪽

1 ① **2** ② **3** 8 **4** ⑤ **5** ④ **6** ④ **7** ②

1 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$이므로 주어진 조건에 의하여

$f'(x)=3x^2-2x+1$

그러므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2-2x+1)dx$$
$$=x^3-x^2+x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$f(1)=2$

즉, $1+C=2$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+1$이므로

$f(0)=1$

답 ①

2 $f'(x)=6x^2-4x^3$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(6x^2-4x^3)dx$$
$$=2x^3-x^4+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

즉, $f(x)=2x^3-x^4+1$

한편, $f'(x)=2x^2(3-2x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\times\frac{27}{8}-\frac{81}{16}+1=\frac{43}{16}$

답 ②

3 $\int_0^x tf(t)dt=x^4+ax^2+\int_0^x f(t)dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=4x^3+2ax+f(x)$

$(x-1)f(x)=4x^3+2ax$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=4+2a$, $a=-2$

즉,

$(x-1)f(x)=4x^3-4x$

$\qquad=4x(x+1)(x-1)$

이고 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=4x(x+1)$

따라서

$f(a)=f(-2)=4\times(-2)\times(-1)=8$

답 8

4 $xf(x)-\int_2^x f(t)dt=4x^3-ax^2-4a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)-0=32-4a-4a$이고,

$f(2)=0$이므로 $0=32-8a$

$a=4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=12x^2-2ax$

이므로

$xf'(x)=12x^2-8x$

$f'(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=12x-8$

즉,

$f(x)=\int f'(x)dx$

$\quad=\int(12x-8)dx$

$\quad=6x^2-8x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(2)=0$이므로

$24-16+C=0$

즉, $C=-8$이므로

$f(x)=6x^2-8x-8$

따라서 $f(1)=6-8-8=-10$

답 ⑤

5 $0\le x\le 2$에서 $x^2-2x\le 0$,

$2\le x\le 3$에서 $x^2-2x\ge 0$

이므로

$\int_0^3|x^2-2x|dx+\int_0^2(x^2-2x)dx$

$=\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx+\int_0^2(x^2-2x)dx$

$=-\int_0^2(x^2-2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx+\int_0^2(x^2-2x)dx$

$=\int_2^3(x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$

$=0-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$

답 ④

6 $f'(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x^2-2x & (x>0) \end{cases}$

에서

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+C_1 & (x<0) \\ f(0) & (x=0) \\ \frac{1}{3}x^3-x^2+C_2 & (x>0) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(3)=1$이므로 $C_2=1$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$

즉, $C_1=C_2=f(0)=1$

따라서

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+1 & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3-x^2+1 & (x\ge 0) \end{cases}$

이므로

$\int_{-1}^1 f(x)dx$

$=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)dx+\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+1\right)dx$

$=\left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12}$

답 ④

7 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(tf(t)-4)dt=2f(2)-4$

이고, $f(x)=x^3-2x+5$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-2x}\int_2^x(tf(t)-4)dt$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{x}\times\frac{1}{x-2}\int_2^x(tf(t)-4)dt\right\}$

$=\frac{1}{2}(2f(2)-4)$

$=f(2)-2$

$=9-2=7$

답 ②

Level 1 **기초 연습** 본문 82~83쪽

1 ④	**2** ③	**3** ⑤	**4** ③	**5** ②	**6** ②
7 ①	**8** ②				

1 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

이때 $f'(1)=f'(4)=0$이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-4)=3x^2-15x+12$

그러므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x^2-15x+12)dx$$
$$=x^3-\frac{15}{2}x^2+12x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

한편, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{13}{2}$이므로

$f(1)=\frac{11}{2}+C=\frac{13}{2}$

에서 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{15}{2}x^2+12x+1$이므로 구하는 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(4)=64-120+48+1=-7$

답 ④

2 $$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int(4x^3+ax^2+5)dx$$
$$=x^4+\frac{a}{3}x^3+5x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $F(1)+F(-1)=6$이므로

$\left(1+\frac{a}{3}+5+C\right)+\left(1-\frac{a}{3}-5+C\right)=6$

$2(1+C)=6$

$C=2$

또 $F(2)-F(-2)=4$이므로

$\left(16+\frac{8}{3}a+10+C\right)-\left(16-\frac{8}{3}a-10+C\right)=4$

$2\left(\frac{8}{3}a+10\right)=4$

$a=-3$

따라서 $F(x)=x^4-x^3+5x+2$이므로

$F(a)=F(-3)=81+27-15+2=95$

답 ③

3 $\int_{-1}^{x}f(t)dt=3x^3+ax^2+5$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-3+a+5$

$a=-2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2+2ax=9x^2-4x$

따라서

$f(a)=f(-2)=44$

답 ⑤

4 $$F(5)-F(2)=\Big[F(x)\Big]_2^5$$
$$=\int_2^5 f(x)dx$$
$$=\int_2^5(3x^2+kx-2)dx$$
$$=\left[x^3+\frac{k}{2}x^2-2x\right]_2^5$$
$$=\left(125+\frac{25}{2}k-10\right)-(8+2k-4)$$
$$=\frac{21}{2}k+111=174$$

따라서 $k=6$

답 ③

5 $$\int_1^2 f(x)dx-\int_a^2 f(x)dx$$
$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^a f(x)dx$$
$$=\int_1^a f(x)dx$$
$$=\int_1^a(3x^2-6x)dx$$
$$=\Big[x^3-3x^2\Big]_1^a$$

$=a^3-3a^2+2$

$=(a-1)(a^2-2a-2)=0$

에서 $a\neq1$이므로

$a^2-2a-2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

a에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+2=3>0$

이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은

$-\frac{-2}{1}=2$

이다.

따라서 조건을 만족시키는 1이 아닌 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.

답 ②

참고

a에 대한 이차방정식 $a^2-2a-2=0$은 서로 다른 두 실근 $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$을 갖는다.

6 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로

$-2\leq x\leq-1$에서 $x^2-2x-3\geq0$,

$-1\leq x\leq2$에서 $x^2-2x-3\leq0$

이다. 따라서

$\int_{-2}^{2}|x^2-2x-3|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)dx+\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$

$=\frac{7}{3}+9=\frac{34}{3}$

답 ②

7 $\int_{0}^{3}(5x^4+2x^3-3x^2+4x)dx-\int_{0}^{-3}(5t^4+2t^3-3t^2+4t)dt$

$=\int_{0}^{3}(5x^4+2x^3-3x^2+4x)dx$

$\qquad+\int_{-3}^{0}(5x^4+2x^3-3x^2+4x)dx$

$=\int_{-3}^{3}(5x^4+2x^3-3x^2+4x)dx$

$=2\int_{0}^{3}(5x^4-3x^2)dx$

$=2\left[x^5-x^3\right]_{0}^{3}$

$=2\times(243-27)=432$

답 ①

8 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-x}^{x}f(t)dt=0$

을 만족시키므로 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$F(x)-F(-x)=0$, 즉 $F(x)=F(-x)$

이다.

이때 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 부정적분인 $F(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 사차함수이므로

$F(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=x^3+2ax$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}f(t)dt=f(1)=1+2a=4$

에서 $a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+3x$이므로

$\int_{-2}^{2}xf(x)dx=\int_{-2}^{2}(x^4+3x^2)dx$

$\qquad=2\int_{0}^{2}(x^4+3x^2)dx$

$\qquad=2\left[\frac{1}{5}x^5+x^3\right]_{0}^{2}$

$\qquad=2\times\left(\frac{32}{5}+8\right)=\frac{144}{5}$

답 ②

Level **2** **기본 연습** 본문 84~85쪽

1 ① **2** ① **3** ③ **4** ② **5** ③ **6** ③
7 ④ **8** ①

1 $(xf(x))'=f(x)+xf'(x)=5x^4+6x-1$

이므로

$xf(x)=\int(5x^4+6x-1)dx$

$\qquad=x^5+3x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

양변에 $x=0$을 대입하면 $C=0$이므로

$xf(x)=x^5+3x^2-x=x(x^4+3x-1)$

$f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=x^4+3x-1$

따라서

$f(2)=16+6-1=21$

답 ①

2 $F(x)=(f(x))^2-36x^4+26x^3+7x^2-5x$
에서 함수 $F(x)$의 차수를 n이라 하자.
$n\le2$이면 함수 $f(x)$의 차수가 1 이하이므로 우변의 차수가 4가 되어 등식이 성립하지 않는다.
$n\ge4$이면 $f(x)$의 차수는 $n-1$이고 $n-1\ge3$이므로 등식이 성립하려면
$n=2(n-1)$
이어야 한다. 이때 $n=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $n=3$이므로
$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a>0$)
으로 놓을 수 있다.
이때
$f(x)=F'(x)=3ax^2+2bx+c$
이므로 주어진 등식에 대입하면
ax^3+bx^2+cx+d
$=(3ax^2+2bx+c)^2-36x^4+26x^3+7x^2-5x$
양변의 동류항의 계수를 비교하면
$0=9a^2-36$에서 $a>0$이므로 $a=2$
$a=12ab+26$에서 $24b=-24$이므로 $b=-1$
$b=4b^2+6ac+7$에서 $12c=-12$이므로 $c=-1$
$d=c^2$이므로 $d=1$
따라서 $F(x)=2x^3-x^2-x+1$이므로
$F(2)=16-4-2+1=11$

답 ①

3 $\int_1^2 f(t)dt=k$라 하면 주어진 식은
$\int_1^x f(t)dt=3x^3+ax^2+kx$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=3+a+k$ …… ㉡
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$k=24+4a+2k$, 즉 $0=24+4a+k$ …… ㉢
㉡, ㉢에서 $a=-7$, $k=4$이므로
$\int_1^x f(t)dt=3x^3-7x^2+4x$
이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=9x^2-14x+4$
따라서
$a+f(3)=-7+43=36$

답 ③

4 $g(x)=\int_1^x (f(x)-f(t))(f(t))^2dt$
$=f(x)\int_1^x (f(t))^2dt-\int_1^x (f(t))^3dt$
이므로
$g'(x)=f'(x)\int_1^x (f(t))^2dt+f(x)(f(x))^2-(f(x))^3$
$=f'(x)\int_1^x (f(t))^2dt$
$g'(x)=0$에서
$f'(x)=0$ 또는 $\int_1^x (f(t))^2dt=0$
이때
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
이므로
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
한편, $h(x)=\int_1^x (f(t))^2dt$라 하면
$h'(x)=(f(x))^2\ge0$이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
이때 $h(1)=0$이므로
$x<1$일 때 $h(x)<0$, $x>1$일 때 $h(x)>0$
이고, $g'(x)=f'(x)h(x)$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	−	0	+	+	+
$g'(x)$	−	0	−	0	+
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

즉, 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 $a=3$이다.
따라서
$f(a)=f(3)=2$

답 ②

5 $\int_{-2}^0 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{-2}^0=f(0)-f(-2)=0$
이므로
$f(0)=f(-2)$
또
$\int_0^3 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^3=f(3)-f(0)=0$
이므로
$f(3)=f(0)$
이때 $f(0)=1$이므로
$f(0)=f(-2)=f(3)=1$
$g(x)=f(x)-1$이라 하면
$g(0)=g(-2)=g(3)=0$
이고, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$g(x)=x(x+2)(x-3)$

따라서 $f(x)=x(x+2)(x-3)+1$이므로

$f(4)=4\times6\times1+1=25$

답 ③

6 $\int_0^3 f(x)dx=54+\int_0^{-3} f(x)dx$

에서

$\int_0^3 f(x)dx-\int_0^{-3} f(x)dx=54$

$\int_0^3 f(x)dx+\int_{-3}^{0} f(x)dx=54$

즉, $\int_{-3}^3 f(x)dx=54$

$f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

이라 하면

$\int_{-3}^3 (ax^2+bx+c)dx$

$=\int_{-3}^3 bx\,dx+\int_{-3}^3 (ax^2+c)dx$

$=0+2\int_0^3 (ax^2+c)dx$

$=2\left[\frac{a}{3}x^3+cx\right]_0^3$

$=2(9a+3c)=54$

이므로

$3a+c=9$ …… ㉠

한편,

$f(1)+f(-1)=(a+b+c)+(a-b+c)$

$=2(a+c)=2$

이므로

$a+c=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=4$, $c=-3$

따라서 $f(x)=4x^2+bx-3$이므로

$f(2)+f(-2)=(16+2b-3)+(16-2b-3)$

$=2\times(16-3)=26$

답 ③

7 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}=-2$

이므로

$f(x)=x^3-2x+k$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때

$\int_{-2}^2 (x+1)f(x)dx$

$=\int_{-2}^2 (x+1)(x^3-2x+k)dx$

$=\int_{-2}^2 \{x^4+x^3-2x^2+(k-2)x+k\}dx$

$=2\int_0^2 (x^4-2x^2+k)dx$

$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+kx\right]_0^2$

$=\frac{32}{15}+4k=4$

이므로

$k=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$

따라서 $f(x)=x^3-2x+\frac{7}{15}$이므로

$f(0)=\frac{7}{15}$

답 ④

8 연속함수 $f(t)$에 대하여

$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt=f(3)$

이므로

$\lim_{x\to3}\frac{1}{x^2-9}\int_3^x (4x-t)(t^2+at)dt$

$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{4x}{x+3}\times\frac{1}{x-3}\int_3^x (t^2+at)dt-\frac{1}{x+3}\times\frac{1}{x-3}\int_3^x (t^3+at^2)dt\right\}$

$=\lim_{x\to3}\frac{4x}{x+3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x (t^2+at)dt-\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x (t^3+at^2)dt$

$=2(9+3a)-\frac{1}{6}(27+9a)$

$=\frac{9}{2}a+\frac{27}{2}=18$

따라서 $a=1$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 86쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** 164

1 조건 (가)에 의하여

$f(x)=ax^2(x-2)$ 또는 $f(x)=ax(x-2)^2$ (a는 양수)

로 놓을 수 있다.

이때 $f(x)=ax^2(x-2)$이면

$0\le x\le 2$에서 $f(x)\le 0$이므로 $\int_0^2 f(x)dx<0$이다.

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

한편, $f(x)=ax(x-2)^2$이면

$0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로 $\int_0^2 f(x)dx>0$이다.

즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

그러므로 $f(x)=ax(x-2)^2$이다. 이때 $g'(x)=f(x)$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

이때 함수 $g(x)$의 극솟값은 $g(0)$이므로

$$\begin{aligned} g(0)&=\int_1^0 f(t)dt\\ &=\int_1^0 a(t^3-4t^2+4t)dt\\ &=a\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{4}{3}t^3+2t^2\right]_1^0\\ &=a\left\{0-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+2\right)\right\}\\ &=-\frac{11}{12}a=-11 \end{aligned}$$

즉, $a=12$이므로

$f(x)=12x(x-2)^2=12x^3-48x^2+48x$

따라서

$$\begin{aligned} g(2)&=\int_1^2 f(t)dt\\ &=\int_1^2 (12t^3-48t^2+48t)dt\\ &=\left[3t^4-16t^3+24t^2\right]_1^2\\ &=(48-128+96)-(3-16+24)\\ &=5 \end{aligned}$$

답 ⑤

참고

상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$에 대하여

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자.

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\le 0$이면 $h'(x)=f(x)\le 0$이므로 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 감소한다. 이때 $h(0)=0$이므로 $h(2)<0$이다.

즉, $\int_0^2 f(x)dx<0$이다.

마찬가지 방법으로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\ge 0$이면 $\int_0^2 f(x)dx>0$이다.

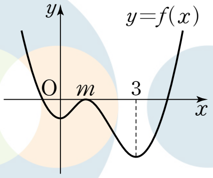
2 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극값을 갖고 조건 (다)에서 $f(0)\ne 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가져야 한다.

또

$\int_3^x f'(t)dt=f(x)-f(3)$

이므로 방정식 $\int_3^x f'(t)dt=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(3)$의 교점의 개수와 같다. 이때 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(3)$의 교점의 개수가 1이 되려면 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값을 가져야 하고, 이 극솟값이 다른 극솟값보다 작아야 한다.

즉, $f(3)<f(0)$이고, $m<n$이라 하면 $n=3$이고 함수 $f(x)$는 $x=m$에서 극댓값 0을 가져야 한다.



한편, $0<m<3$이고, 조건 (나)에 의하여 m은 정수이므로 $m=1$ 또는 $m=2$

(i) $m=1$일 때, 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=4x(x-1)(x-3)\\ &=4x^3-16x^2+12x \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f(3)-f(0)&=\int_0^3 f'(x)dx\\ &=\int_0^3 (4x^3-16x^2+12x)dx\\ &=\left[x^4-\frac{16}{3}x^3+6x^2\right]_0^3\\ &=-9<0 \end{aligned}$$

에서 $f(3)<f(0)$

이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m=2$일 때, 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$, $x=3$에서 극값을 가지므로

$$\begin{aligned} f'(x)&=4x(x-2)(x-3)\\ &=4x^3-20x^2+24x \end{aligned}$$

이때

$$f(3)-f(0)=\int_0^3 f'(x)dx$$
$$=\int_0^3 (4x^3-20x^2+24x)dx$$
$$=\left[x^4-\frac{20}{3}x^3+12x^2\right]_0^3$$
$$=9>0$$

에서 $f(3)>f(0)$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f'(x)=4x^3-16x^2+12x$이고 $f(1)=0$이다.

$f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+6x^2+C$ (C는 적분상수)

라 하면

$f(1)=1-\frac{16}{3}+6+C=0$에서 $C=-\frac{5}{3}$

이므로

$f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+6x^2-\frac{5}{3}$

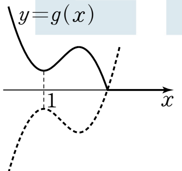
따라서

$f(-1)=1+\frac{16}{3}+6-\frac{5}{3}=\frac{32}{3}$

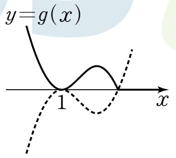
답 ④

3 조건 (가)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 5가지 중 하나이다.

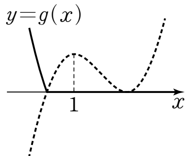
(i) $y=g(x)$



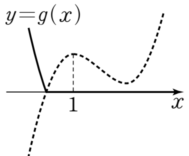
(ii) $y=g(x)$



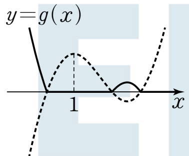
(iii) $y=g(x)$



(iv) $y=g(x)$



(v) $y=g(x)$



(i), (ii)의 경우 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α ($\alpha\neq1$)이라 하면 $1<x<\alpha$인 모든 x에 대하여 $g(x)>0$이므로 $\int_1^x g(t)dt>0$이다.

그러므로 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x g(t)dt>0$이고, $\int_1^1 g(t)dt=0$이다.

즉, $\int_1^x g(t)dt\leq0$을 만족시키는 실수 x의 최댓값이 1이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii), (iv)의 경우 $x\geq1$인 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x g(t)dt=0$이므로 $\int_1^x g(t)dt\leq0$을 만족시키는 실수 x의 최댓값이 존재하지 않아 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(v)의 경우 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 세 점의 x좌표를 α, β, γ ($\alpha<1<\beta<\gamma$)라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

이때 $\int_1^\beta g(t)dt=\int_1^\beta 0\,dt=0$이고 $x>\beta$일 때

$\int_1^x g(t)dt>0$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 $\beta=3$이어야 한다.

이때 $1<x<\gamma$이면

$\int_1^x g(t)dt<\int_1^\gamma g(t)dt$

이고 $x\geq\gamma$이면

$\int_1^x g(t)dt=\int_1^\gamma g(t)dt+\int_\gamma^x 0\,dt=\int_1^\gamma g(t)dt$

이므로 조건 (다)를 만족시키려면 $\gamma=4$이어야 한다.

즉, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$$f(x)=(x-\alpha)(x-3)(x-4)$$
$$=(x-\alpha)(x^2-7x+12)$$

이므로

$f'(x)=(x^2-7x+12)+(x-\alpha)(2x-7)$

조건 (가)에 의하여 $f'(1)=0$이므로

$6+(1-\alpha)\times(-5)=0$

$\alpha=-\frac{1}{5}$

따라서

$f(x)=\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-3)(x-4)$

이므로

$f(8)=\frac{41}{5}\times5\times4=164$

답 164

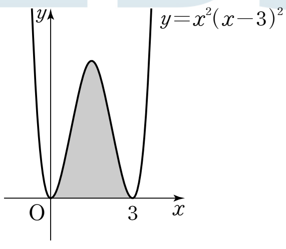
07 정적분의 활용

유제 본문 89~95쪽

1 ① **2** ② **3** ② **4** ④

1 $x^2(x-3)^2=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

곡선 $y=x^2(x-3)^2$은 그림과 같이 x축과 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서만 만나고, $0\le x\le 3$에서 $f(x)\ge 0$이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3 x^2(x-3)^2dx=\int_0^3(x^4-6x^3+9x^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+3x^3\right]_0^3$$
$$=\frac{243}{5}-\frac{243}{2}+81$$
$$=\frac{81}{10}$$

답 ①

2 $f(x)=g(x)$에서

$x^3+x^2-2x+10=3x^2+2x+k$

$x^3-2x^2-4x+10=k$

$h(x)=x^3-2x^2-4x+10$이라 하면

$h'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$h'(x)=0$에서

$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	$\frac{310}{27}$	↘	2	↗

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 k는 함수 $h(x)$의 극값이어야 한다.

이때 k는 정수이므로 $k=2$이고,

$g(x)=3x^2+2x+2$

한편, $f(x)=g(x)$에서

$x^3+x^2-2x+10=3x^2+2x+2$

$x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x+2)(x-2)^2=0$

$x=-2$ 또는 $x=2$

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x=-2$, $x=2$인 두 점에서만 만나고 $-2\le x\le 2$에서

$f(x)-g(x)=(x+2)(x-2)^2\ge 0$

이다. 따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}(f(x)-g(x))dx=\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)dx$$
$$=2\int_0^2(-2x^2+8)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

답 ②

3 $f(x)=x^3-3x^2+3x-6$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

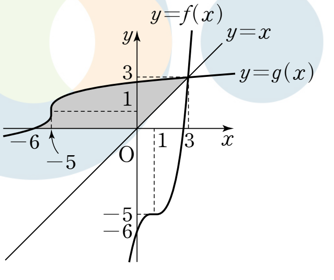
$x^3-3x^2+3x-6=x$에서

$x^3-3x^2+2x-6=0$

$(x-3)(x^2+2)=0$

$x=3$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 점 $(3,\ 3)$에서만 만나고, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분은 위 그림의 색칠한 부분이고, 이 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^3 (x-f(x))dx=\int_0^3 \{x-(x^3-3x^2+3x-6)\}dx$$
$$=\int_0^3 (-x^3+3x^2-2x+6)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2+6x\right]_0^3$$
$$=\frac{63}{4}$$

답 ②

4 $v(t)=0$에서

$2t^2-6t=2t(t-3)=0$

$t=0$ 또는 $t=3$

$0<t<3$에서 $v(t)<0$, $t>3$에서 $v(t)>0$이므로 시각 $t=3$에서 점 P가 움직이는 방향이 바뀐다.

따라서 구하는 거리는 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리이므로

$$\int_0^3 |v(t)|dt=\int_0^3 (-2t^2+6t)dt$$
$$=\left[-\frac{2}{3}t^3+3t^2\right]_0^3$$
$$=-18+27=9$$

답 ④

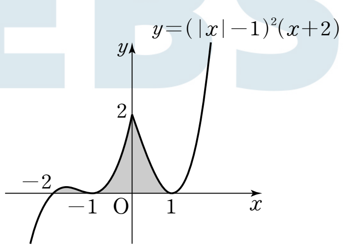
Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ①	**2** 27	**3** ④	**4** ⑤	**5** ④	**6** ②
7 ②	**8** ④				

1 $x\geq 0$일 때, $y=(x-1)^2(x+2)$이고

$x<0$일 때, $y=(x+1)^2(x+2)$이므로

함수 $y=(|x|-1)^2(x+2)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^0 (x+1)^2(x+2)dx+\int_0^1 (x-1)^2(x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^3+4x^2+5x+2)dx+\int_0^1 (x^3-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right]_{-2}^0+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1$$
$$=-\left(4-\frac{32}{3}+10-4\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$
$$=\frac{17}{12}$$

답 ①

2 $f(x)=3x^3-12x^2+12x$에서

$f'(x)=9x^2-24x+12$

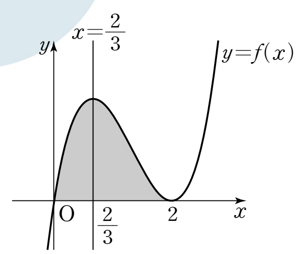
$\quad=3(3x-2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극대이므로 $k=\frac{2}{3}$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2=4,$$
$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=\int_0^{\frac{2}{3}} (3x^3-12x^2+12x)dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^{\frac{2}{3}}=\frac{44}{27}$$

에서

$$\int_{\frac{2}{3}}^2 f(x)dx=4-\frac{44}{27}=\frac{64}{27}$$

이고 $S_1\leq S_2$이므로

$S_1=\frac{44}{27}$, $S_2=\frac{64}{27}$

따라서

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{64}{27}}{\frac{44}{27}}=\frac{16}{11}$$

에서 $p=11$, $q=16$이므로

$p+q=11+16=27$

답 27

3 두 곡선 $y=x^3+2x^2-x$, $y=x^2+x$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+2x^2-x=x^2+x$

에서

$x^3+x^2-2x=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

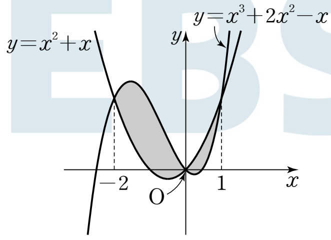
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

즉, 두 곡선 $y=x^3+2x^2-x$, $y=x^2+x$는 그림과 같이 x좌표가 각각 -2, 0, 1인 세 점에서만 만나고

$-2\le x\le 0$에서 $x^3+2x^2-x\ge x^2+x$,

$0\le x\le 1$에서 $x^3+2x^2-x\le x^2+x$

이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{(x^3+2x^2-x)-(x^2+x)\}dx$$

$$+\int_{0}^{1}\{(x^2+x)-(x^3+2x^2-x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

답 ④

4 $f(x)=x^3-3x$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2를 가지므로

$k=2$

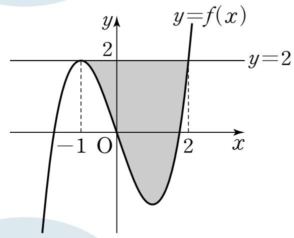
한편, $x^3-3x=2$에서

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$는 그림과 같이 x좌표가 각각 -1, 2인 두 점에서만 만나고, $-1\le x\le 2$에서 $x^3-3x\le 2$이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{2-(x^3-3x)\}dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

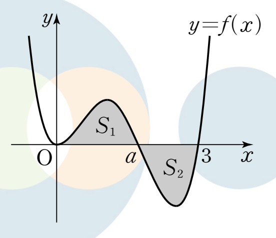
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=(-4+6+4)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right)$$

$$=\frac{27}{4}$$

답 ⑤

5 $f(x)=x^2(x-a)(x-3)$ $(0<a<3)$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ $(x\le a)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$ $(x\ge a)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$S_1=\int_{0}^{a}f(x)dx$$

$$S_2=\int_{a}^{3}(-f(x))dx=-\int_{a}^{3}f(x)dx$$

이때 $S_1=S_2$에서 $S_1-S_2=0$이므로

$$S_1-S_2=\int_0^a f(x)dx+\int_a^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 \{x^4-(a+3)x^3+3ax^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{a+3}{4}x^4+ax^3\right]_0^3$$
$$=\frac{27}{4}a-\frac{243}{20}=0$$

따라서

$$a=\frac{243}{20}\times\frac{4}{27}=\frac{9}{5}$$

답 ④

6 함수 $f(x)=\frac{1}{8}x^4$은 $x\geq0$에서 증가하므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점들의 집합은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점들의 집합과 같다.

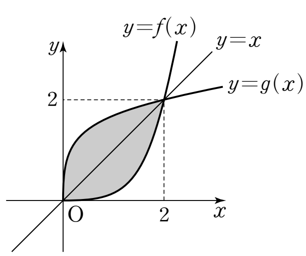
$\frac{1}{8}x^4=x$에서

$x^4-8x=0$

$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$에서만 만나고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^2 (x-f(x))dx=2\int_0^2\left(x-\frac{1}{8}x^4\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{40}x^5\right]_0^2$$
$$=2\times\left(2-\frac{4}{5}\right)=\frac{12}{5}$$

답 ②

7 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=t^3+kt-3$에서

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=3t^2+k$$

시각 $t=1$에서 점 P의 가속도는

$a(1)=3+k=5$

이므로 $k=2$

즉, $v(t)=t^3+2t-3$

따라서 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 (t^3+2t-3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4+t^2-3t\right]_0^2=4+4-6=2$$

답 ②

8 $v(t)=kt^2(t-1)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=1$

이고, $0<t<1$에서 $v(t)<0$, $t>1$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 시각 $t=1$에서 운동 방향을 바꾼다.

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리는

$$\int_0^1 |v(t)|dt=\int_0^1 \{-kt^2(t-1)\}dt$$
$$=k\int_0^1 (-t^3+t^2)dt$$
$$=k\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{k}{12}$$

이므로 $\frac{k}{12}=\frac{1}{3}$에서

$k=4$

즉, $v(t)=4t^3-4t^2$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=12t^2-8t$$

따라서 시각 $t=\frac{k}{2}=2$에서의 점 P의 가속도는

$a(2)=48-16=32$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ② **4** 90 **5** ④ **6** ③
7 ④

1 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 조건 (가)에 의하여

$f(x)=x(x-a)(x+2a)=x^3+ax^2-2a^2x$

이므로

$$\int_{-2a}^a f(x)dx=\int_{-2a}^a (x^3+ax^2-2a^2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3-a^2x^2\right]_{-2a}^a$$

$=\left(\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{3}a^4-a^4\right)-\left(4a^4-\frac{8}{3}a^4-4a^4\right)$

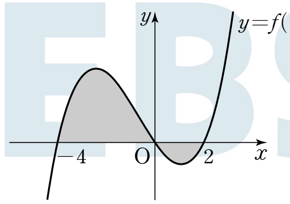
$=\frac{9}{4}a^4=36$

에서 $a^4=16$

$a>0$이므로 $a=2$

즉, $f(x)=x(x-2)(x+4)=x^3+2x^2-8x$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-4}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2}(-f(x))dx$

$=\int_{-4}^{0}(x^3+2x^2-8x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3-2x^2+8x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-4x^2\right]_{-4}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{2}$

$=-\left(64-\frac{128}{3}-64\right)+\left(-4-\frac{16}{3}+16\right)=\frac{148}{3}$

답 ③

참고

다음과 같이 넓이를 구할 수도 있다.

조건 (나)에서 $a=2$이므로 $\int_{-4}^{2} f(x)dx=36$이고,

$\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{2}(x^3+2x^2-8x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-4x^2\right]_{0}^{2}$

$=4+\frac{16}{3}-16=-\frac{20}{3}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-4}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=\int_{-4}^{2} f(x)dx-2\int_{0}^{2} f(x)dx$

$=36-2\times\left(-\frac{20}{3}\right)=\frac{148}{3}$

2 $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$

이고,

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6$

한편, 직선 $y=-x+a+f(a)$는 점 $(a,\ f(a))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 함수 $y=g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $f'(a)=-1$이어야 한다.

$f'(a)=\frac{1}{3}a^2-\frac{10}{3}a+6=-1$에서

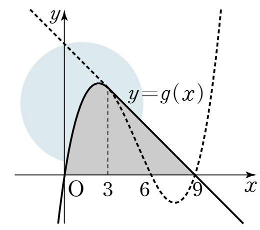
$a^2-10a+21=0,\ (a-3)(a-7)=0$

$0<a<6$이므로 $a=3$

이때 $f(3)=6$이므로

$x\geq 3$일 때, $g(x)=-x+9$

이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{0}^{9} g(x)dx$

$=\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x\right)dx+\int_{3}^{9}(-x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2\right]_{0}^{3}+\frac{1}{2}\times 6\times 6$

$=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$

답 ⑤

3 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 조건 (가)에 의하여

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다. 이때

$f'(x)=4x^3+2ax$

이고, 조건 (나)에 의하여 $f'(2)=0,\ f(2)=-25$이므로

$f'(2)=32+4a=0,\ a=-8$

$f(2)=16+4a+b=16-32+b=-25,\ b=-9$

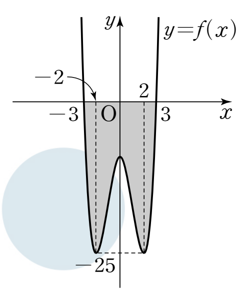
즉, $f(x)=x^4-8x^2-9$이고,

$f(x)=0$에서

$(x^2+1)(x+3)(x-3)=0$

$x=-3$ 또는 $x=3$

그러므로 곡선 $y=f(x)$는 x축과 그림과 같이 두 점 $(-3,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서만 만나고, $-3\leq x\leq 3$에서 $f(x)\leq 0$이다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-3}^{3}(-x^4+8x^2+9)dx=2\int_{0}^{3}(-x^4+8x^2+9)dx$

$=2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{8}{3}x^3+9x\right]_{0}^{3}$

$=2\times\frac{252}{5}=\frac{504}{5}$

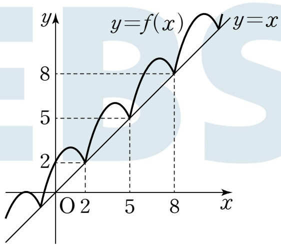
답 ②

4 $-x^2+8x-10=x$에서

$x^2-7x+10=0$, $(x-2)(x-5)=0$

$x=2$ 또는 $x=5$

즉, 곡선 $y=-x^2+8x-10$은 직선 $y=x$와 두 점 $(2, 2)$, $(5, 5)$에서만 만나고, 조건 (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)+3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{60}(f(x)-x)dx=20\int_2^5(f(x)-x)dx$$

$$=20\int_2^5(-x^2+7x-10)dx$$

$$=20\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-10x\right]_2^5$$

$$=20\times\frac{9}{2}=90$$

답 90

5 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$이므로

$f(x)=a(x-2)^2-2$ (a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $\int_2^{10}f(x)dx=\int_5^{10}f(x)dx$에서

$$\int_2^5 f(x)dx=\int_2^{10}f(x)dx-\int_5^{10}f(x)dx=0$$

이고,

$$\int_2^5\{a(x-2)^2-2\}dx=\int_2^5\{ax^2-4ax+(4a-2)\}dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(4a-2)x\right]_2^5$$

$$=9a-6$$

이므로 $9a-6=0$에서 $a=\frac{2}{3}$

즉, $f(x)=\frac{2}{3}(x-2)^2-2$

한편, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{2}{3}(x-2)^2-2=4$에서

$(x-2)^2=9$

$x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^5(4-f(x))dx$$

이고, 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^5(4-f(x))dx=\int_{-1}^5 4\,dx-\int_{-1}^5 f(x)dx$$

$$=4\times6-2\int_2^5 f(x)dx$$

$$=24-2\times0=24$$

답 ④

6 $f(x)=\frac{2}{9}x^3+3$에서

$f'(x)=\frac{2}{3}x^2\ge0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점들의 집합은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점들의 집합과 같다.

$\frac{2}{9}x^3+3=x$에서 $2x^3-9x+27=0$

$(x+3)(2x^2-6x+9)=0$

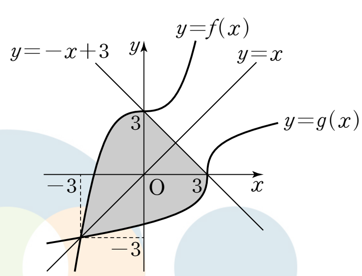
이때 모든 실수 x에 대하여

$2x^2-6x+9=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$

이고, x는 실수이므로

$x=-3$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(-3, -3)$에서만 만나고, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x+y=3$으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{-3}^0(f(x)-x)dx+\frac{1}{2}\times3\times3$$

$$=2\int_{-3}^0\left\{\left(\frac{2}{9}x^3+3\right)-x\right\}dx+\frac{9}{2}$$

$$=2\left[\frac{1}{18}x^4+3x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^0+\frac{9}{2}$$

$$=2\times9+\frac{9}{2}=\frac{45}{2}$$

답 ③

7 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

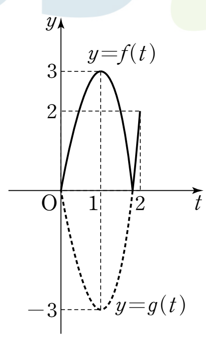
$$x_1(t)=x_1(0)+\int_0^t v_1(s)ds$$
$$=0+\int_0^t(-3s^2+2s)ds$$
$$=\left[-s^3+s^2\right]_0^t$$
$$=-t^3+t^2$$

$$x_2(t)=x_2(0)+\int_0^t v_2(s)ds$$
$$=0+\int_0^t(4s-5)ds$$
$$=\left[2s^2-5s\right]_0^t$$
$$=2t^2-5t$$

시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면
$f(t)=|x_2(t)-x_1(t)|=|t^3+t^2-5t|$
$g(t)=t^3+t^2-5t$라 하면
$g'(t)=3t^2+2t-5=(3t+5)(t-1)$
$t\geq 0$이므로 $g'(t)=0$에서 $t=1$
$0\leq t\leq 2$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	↘	-3	↗	2

그러므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0\leq t\leq 2$에서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 최댓값 3을 가지므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 3이다.

답 ④

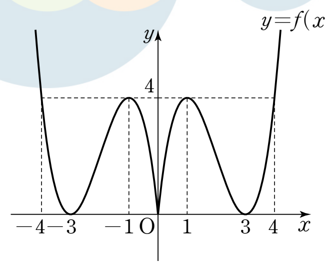
Level **3** **실력 완성** 본문 100쪽

1 ③ **2** ① **3** ③

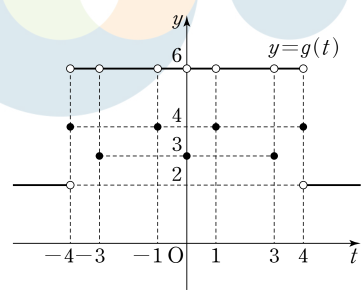
1 $h(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면
$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$x\geq 0$에서 $f(x)=h(x)$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗

$x\geq 0$일 때 $f(x)=4$, 즉 $x^3-6x^2+9x=4$에서
$(x-1)^2(x-4)=0$
이므로 $f(1)=f(4)=4$이다.
또 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(t)>4$이면 $g(t)=2$,
$f(t)=4$이면 $g(t)=4$,
$0<f(t)<4$이면 $g(t)=6$,
$f(t)=0$이면 $g(t)=3$
이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$\lim_{t\to a+} g(t)>g(a)$인 a의 값은
-4, -3, -1, 0, 1, 3이므로 $p=-4$
$\lim_{t\to a-} g(t)>g(a)$인 a의 값은
-3, -1, 0, 1, 3, 4이므로 $q=4$
따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=-4$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

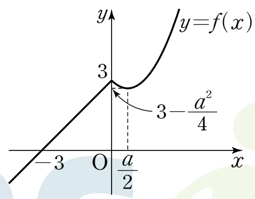
$$\int_{-4}^4 f(x)dx=2\int_0^4 f(x)dx$$
$$=2\int_0^4(x^3-6x^2+9x)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_0^4$$
$$=2\times(64-128+72)=16$$

답 ③

2 $h(x)=x^2-ax+3$이라 하면

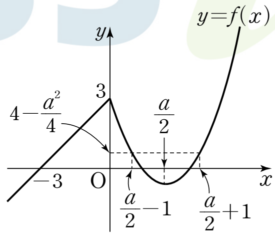
$h(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+3-\frac{a^2}{4}$

(ⅰ) $\frac{a}{2}\le 1$, 즉 $0<a\le 2$일 때



$3-\frac{a^2}{4}>0$이므로 $t\ge 0$일 때 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 0보다 크다. 즉, $t\ge 0$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 0이 될 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\frac{a}{2}>1$, 즉 $a>2$일 때



$f\left(\frac{a}{2}-1\right)=f\left(\frac{a}{2}+1\right)$

$=4-\frac{a^2}{4}$

이므로

$0\le t\le\frac{a}{2}-1$일 때 $g(t)\ge 4-\frac{a^2}{4}$

$t\ge\frac{a}{2}-1$일 때 $g(t)\ge 4-\frac{a^2}{4}$

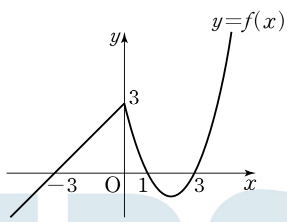
즉, $t\ge 0$에서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{a}{2}-1$일 때 최솟값 $4-\frac{a^2}{4}$을 갖는다.

주어진 조건에 의하여 $4-\frac{a^2}{4}=0$이고 $a>0$이므로

$a=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<0) \\ x^2-4x+3 & (x\ge 0)\end{cases}$이고,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



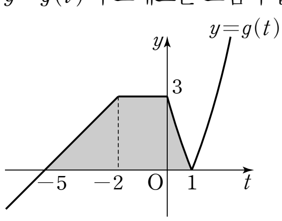
$t<-2$일 때, $g(t)=f(t+2)=t+5$

$-2\le t<0$일 때, $g(t)=3$

$0\le t<1$일 때, $g(t)=f(t)=t^2-4t+3$

$t\ge 1$일 때, $g(t)=f(t+2)=t^2-1$

그러므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 3+2\times 3+\int_0^1 (t^2-4t+3)dt$

$=\frac{21}{2}+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1$

$=\frac{21}{2}+\frac{4}{3}$

$=\frac{71}{6}$

답 ①

3 $f(x)=x^3-6x^2+8x$에서

$f'(x)=3x^2-12x+8$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+8t)=(3t^2-12t+8)(x-t)$

$y=(3t^2-12t+8)x-2t^3+6t^2$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는

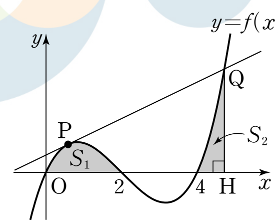
$x^3-6x^2+8x=(3t^2-12t+8)x-2t^3+6t^2$

에서

$(x-t)^2(x+2t-6)=0$

$x=t$ 또는 $x=6-2t$

그러므로 점 Q의 x좌표는 $6-2t$이다.



이때

$S_1=\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2$

$=4-16+16=4$,

$S_2=\int_4^{6-2t} f(x)dx$

$=\int_4^{6-2t} (x^3-6x^2+8x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_4^{6-2t}$

$=\frac{1}{4}(6-2t)^4-2(6-2t)^3+4(6-2t)^2$

$=4(t-3)^4+16(t-3)^3+16(t-3)^2$

이고 $S_1=S_2$이므로

$4=4(t-3)^4+16(t-3)^3+16(t-3)^2$

에서

$(t-3)^4+4(t-3)^3+4(t-3)^2-1=0$

$t-3=s$라 하면

$s^4+4s^3+4s^2-1=0$

$(s+1)^2(s^2+2s-1)=0$

$s=-1$ 또는 $s=-1\pm\sqrt{2}$

즉, $t=2$ 또는 $t=2\pm\sqrt{2}$

$0<t<1$이므로 $t=2-\sqrt{2}$

$f(x)=x^3-6x^2+8x=x(x-2)(x-4)$에서 점 P의 y좌표는

$$\begin{aligned} f(t)&=f(2-\sqrt{2}) \\ &=(2-\sqrt{2})\times(-\sqrt{2})\times(-2-\sqrt{2}) \\ &=2\sqrt{2} \end{aligned}$$

이고, 점 Q의 y좌표는

$$\begin{aligned} f(6-2t)&=f(2+2\sqrt{2}) \\ &=(2+2\sqrt{2})\times2\sqrt{2}\times(-2+2\sqrt{2}) \\ &=8\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 두 점 P, Q의 y좌표의 곱은

$2\sqrt{2}\times8\sqrt{2}=32$

답 ③

참고

$f(x)=x(x-2)(x-4)$에서

$g(x)=f(x+2)$라 하면

$g(x)=x(x+2)(x-2)$이고

$$\begin{aligned} g(-x)&=(-x)(-x+2)(-x-2) \\ &=-x(x+2)(x-2)=-g(x) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이다. 즉, $0\le x\le2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은 $2\le x\le4$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

즉, $S_1=\int_2^4(-f(x))dx$이고 $S_1=S_2$이므로

$$\int_2^4(-f(x))dx=\int_4^{6-2t}f(x)dx$$

에서

$$\int_2^4 f(x)dx+\int_4^{6-2t}f(x)dx=0$$

따라서 $\int_2^{6-2t}f(x)dx=0$임을 이용하여 계산해도 된다.