수능특강

수학영역

수학 I

정답과 풀이

01 지수와 로그

유제 본문 5~13쪽

1 ①	**2** ③	**3** 125	**4** ④	**5** ①	**6** ②
7 ⑤	**8** ③	**9** ③	**10** ①		

1 $\sqrt[5]{(-3.2)\times 10^6}$

$=-\sqrt[5]{3.2\times 10^6}$

$=-\sqrt[5]{32\times 10^5}$

$=-\sqrt[5]{2^5\times 10^5}$

$=-\sqrt[5]{20^5}$

$=-20$

답 ①

2 $(\sqrt[3]{12})^3=12$이므로

$\left(a+\dfrac{b}{10}\right)^3\le 12<\left(a+\dfrac{b+1}{10}\right)^3$

이때 $2^3=8,\ 3^3=27$이므로

$a=2$

또한

$2.2^3=10.648,\ 2.3^3=12.167$

이므로

$b=2$

따라서 $a+b=4$

답 ③

3 $\dfrac{(5\times 5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}{5^{\sqrt{2}-1}}=\dfrac{5^{\sqrt{2}}\times 5^2}{5^{\sqrt{2}-1}}$

$=\dfrac{5^{\sqrt{2}+2}}{5^{\sqrt{2}-1}}$

$=5^{(\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2}-1)}$

$=5^3=125$

답 125

4 $f(x)=(x+3)^{-\frac{2}{3}}$에서

$f(0)=3^{-\frac{2}{3}},\ f(6)=(6+3)^{-\frac{2}{3}}=9^{-\frac{2}{3}}$

이므로

$f(0)\times f(6)=3^{-\frac{2}{3}}\times 9^{-\frac{2}{3}}$

$=(3\times 9)^{-\frac{2}{3}}$

$=27^{-\frac{2}{3}}$

$=(3^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=3^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

답 ④

5 $2^a=6$에서 $a=\log_2 6$이므로

$a-2b$

$=\log_2 6-2\log_2 2\sqrt{6}$

$=\log_2 6-\log_2 (2\sqrt{6})^2$

$=\log_2 6-\log_2 24$

$=\log_2 \dfrac{6}{24}$

$=\log_2 \dfrac{1}{4}$

$=\log_2 2^{-2}$

$=-2\log_2 2=-2$

답 ①

6 $2\log_3 \sqrt[4]{10}+\log_3 \sqrt{6}-\dfrac{1}{2}\log_3 5$

$=\log_3 (\sqrt[4]{10})^2+\log_3 \sqrt{6}-\log_3 5^{\frac{1}{2}}$

$=\log_3 \sqrt{10}+\log_3 \sqrt{6}-\log_3 \sqrt{5}$

$=\log_3 (\sqrt{10}\times\sqrt{6}\div\sqrt{5})$

$=\log_3 \left(\sqrt{10}\times\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$=\log_3 2\sqrt{3}$

$=\log_3 2+\log_3 \sqrt{3}$

$=\log_3 2+\dfrac{1}{2}\log_3 3$

$=\log_3 2+\dfrac{1}{2}$

답 ②

7 $\log_4 3\times\log_5 16\times\log_{27} 125$

$=\log_{2^2} 3\times\log_5 2^4\times\log_{3^3} 5^3$

$=\dfrac{1}{2}\log_2 3\times 4\log_5 2\times\log_3 5$

$=\dfrac{1}{2}\log_2 3\times\dfrac{4}{\log_2 5}\times\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$

$=2$

답 ⑤

8 $(\log_2 42-\log_2 14)\left(\log_3 \dfrac{4}{5}+2\log_9 10\right)$

$=\log_2 \dfrac{42}{14}\times\left(\log_3 \dfrac{4}{5}+2\log_{3^2} 10\right)$

$=\log_2 3\times\left(\log_3 \dfrac{4}{5}+\log_3 10\right)$

$=\log_2 3\times\log_3\left(\frac{4}{5}\times10\right)$

$=\log_2 3\times\log_3 8$

$=\log_2 3\times\log_3 2^3$

$=\log_2 3\times3\log_3 2$

$=3\times\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=3$

답 ③

9 $\log\sqrt[3]{24}$

$=\log\sqrt[3]{2^3\times3}$

$=\log(2^3\times3)^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\log(2^3\times3)$

$=\frac{1}{3}(\log 2^3+\log 3)$

$=\frac{1}{3}(3\log 2+\log 3)$

$=\frac{1}{3}(3\times0.30+0.48)$

$=0.46$

답 ③

10 $\log_3\frac{16}{27}=\log_3 16-\log_3 27$

$=\log_3 2^4-\log_3 3^3$

$=4\log_3 2-3$

$=4\times\frac{\log 2}{\log 3}-3$

$=\frac{4a}{b}-3$

$=\frac{4a-3b}{b}$

답 ①

Level 1 **기초 연습** 본문 14~15쪽

1 ⑤	**2** ⑤	**3** ②	**4** ⑤	**5** 100	**6** 5
7 ⑤	**8** ⑤	**9** ①	**10** ③		

1 $\sqrt[8]{81}\times\sqrt[6]{8}$

$=\sqrt[8]{3^4}\times\sqrt[6]{2^3}$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=\sqrt{6}$

답 ⑤

2 $(a+b)^{-1}=2$에서 $\frac{1}{a+b}=2$

$a+b=\frac{1}{2}$ ······ ㉠

$(ab)^{-1}=18$에서 $\frac{1}{ab}=18$

$ab=\frac{1}{18}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{18}$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$

$=\frac{5}{36}$

답 ⑤

3 $\sqrt[3]{4}\times32^{-\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{2^2}\times(2^5)^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\times2^{-\frac{5}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)}$

$=2^{-1}$

$=\frac{1}{2}$

답 ②

4 $3^x=100$에서

$3=100^{\frac{1}{x}}=(10^2)^{\frac{1}{x}}=10^{\frac{2}{x}}$

즉, $10^{\frac{1}{x}}=\sqrt{3}$

$4^y=100$에서

$4=100^{\frac{1}{y}}=(10^2)^{\frac{1}{y}}=10^{\frac{2}{y}}$

즉, $10^{\frac{1}{y}}=2$이므로

$10^{\frac{1}{2y}}=\left(10^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

따라서 $10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

답 ⑤

5 $\left(\sqrt[3]{n^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$

$=\left(n^{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}\right)^{\sqrt{2}+1}$

$=n^{\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{3}}$

$=n^{\frac{1}{3}}$

따라서 이 값이 자연수가 되기 위해서는 n이 어떤 자연수의 세제곱인 수가 되어야 하므로

100 이하의 자연수 n의 값은 1, 8, 27, 64이다.
따라서 모든 n의 값의 합은
$1+8+27+64=100$

답 100

6 $\log_{x^2}(-x^2+x+20)$의 밑의 조건에 의하여
$x^2>0,\ x^2\neq1$ $\cdots\cdots$ ㉠
진수의 조건에 의하여
$-x^2+x+20>0,\ x^2-x-20<0$
$(x-5)(x+4)<0$
$-4<x<5$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 만족시키는 정수 x는
$-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4$
이고, 그 개수는 5이다.

답 5

7 $\log_2 \sqrt[3]{2}+\log_2 \dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$
$=\log_2 \sqrt[3]{2}+\log_2 \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$
$=\log_2 2^{\frac{1}{3}}+\log_2 \dfrac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$
$=\log_2 2^{\frac{1}{3}}+\log_2 2^{-\frac{3}{4}}$
$=\dfrac{1}{3}\log_2 2-\dfrac{3}{4}\log_2 2$
$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{5}{12}$

답 ⑤

8 $\log_3 2\times\left(\dfrac{1}{\log_9 2}+\dfrac{1}{\log_{27} 2}\right)$
$=\log_3 2\times(\log_2 9+\log_2 27)$
$=\log_3 2\times(\log_2 3^2+\log_2 3^3)$
$=\log_3 2\times(2\log_2 3+3\log_2 3)$
$=\log_3 2\times5\log_2 3$
$=5\log_3 2\times\dfrac{1}{\log_3 2}$
$=5$

답 ⑤

9 $b=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 10}=\log_{10} 3=\log 3$
$\log_{30} 600=\dfrac{\log 600}{\log 30}$
$=\dfrac{\log(2\times3\times10^2)}{\log(3\times10)}$
$=\dfrac{\log 2+\log 3+2}{\log 3+1}$
$=\dfrac{a+b+2}{b+1}$

답 ①

10 $\log\left(\dfrac{1}{25}\right)^{40}=\log(5^{-2})^{40}$
$=\log 5^{-80}$
$=-80\log 5$
$=-80\log\dfrac{10}{2}$
$=-80(\log 10-\log 2)$
$=-80(1-\log 2)$
$=-80(1-0.3010)$
$=-55.92$
따라서 $-56<-55.92<-55$이므로 정수 m의 값은 -56이다.

답 ③

Level **2** **기본 연습** 본문 16~17쪽

1 ④ **2** ④ **3** ⑤ **4** ① **5** ② **6** ①
7 ④ **8** ⑤

1 $f_n(-3)$의 값은 n이 짝수일 때 0, n이 홀수일 때 1이고, $f_{n+1}(2)$의 값은 n이 짝수일 때 1, n이 홀수일 때 2이다.
따라서 $f_n(-3)+f_{n+1}(2)=3$을 만족시키는 경우는 $1+2=3$에서 n이 홀수일 때이므로 2 이상 10 이하의 홀수 n의 값은 3, 5, 7, 9이다.
따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은
$3+5+7+9=24$

답 ④

2 $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3$
$=a+3a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{3}}+a^{-1}$
$=(a+a^{-1})+3\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)$
$=52+3\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)$
이때 $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=x$라 하면
$x^3=52+3x,\ x^3-3x-52=0$
$(x-4)(x^2+4x+13)=0$

그런데 $x^2+4x+13=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로

$x=a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=4$

답 ④

3 이차방정식 $x^2-ax+2^{\frac{5}{3}}=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{2}$, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{2}+b=a$ …… ㉠

$\sqrt[3]{2}\times b=2^{\frac{5}{3}}$ …… ㉡

㉡에서 $b=\dfrac{2^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{4}{3}}$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=\sqrt[3]{2}+2^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{4}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}}+2\times 2^{\frac{1}{3}}=3\times 2^{\frac{1}{3}}$

따라서

$a+b=3\times 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{4}{3}}$

$=3\times 2^{\frac{1}{3}}+2\times 2^{\frac{1}{3}}$

$=5\times 2^{\frac{1}{3}}$

답 ⑤

4 $f(f(m^2))=f\left(m^{\frac{2}{n}}\right)$

$=\left(m^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}$

$=m^{\frac{2}{n^2}}$

이때 $m^{\frac{2}{n^2}}$이 자연수가 되기 위해서는

(i) $n=2k$ (k는 자연수)일 때

$m^{\frac{2}{n^2}}=m^{\frac{1}{2k^2}}=$(자연수)

이고 $m+n$의 값이 최소가 되기 위해서는

$k=1$, $m=2^2$, 즉 $m=4$, $n=2$일 때이므로

$m+n\ge 6$

(ii) $n=2k+1$ (k는 자연수)일 때

$m^{\frac{2}{n^2}}=m^{\frac{2}{(2k+1)^2}}=$(자연수)

이고 $m+n$의 값이 최소가 되기 위해서는

$k=1$, $m=2^9$, 즉 $m=512$, $n=3$일 때이므로

$m+n\ge 515$

(i), (ii)에 의하여 $m+n$의 최솟값은 6이다.

답 ①

5 $4^{\log_2 x}=x^{\log_2 4}=x^{2\log_2 2}=x^2$

$\log_8\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\log_{2^3}2^{-x}=-\dfrac{x}{3}\log_2 2=-\dfrac{x}{3}$

$2^{\log_2 y-\log_2 3}=2^{\log_2\frac{y}{3}}=\dfrac{y}{3}$

이므로 주어진 등식은

$x^2-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=0$, $y=-3x^2+x$

따라서

$y=-3x^2+x=-3\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{12}$

이므로 $x=\dfrac{1}{6}$일 때 y의 최댓값은 $\dfrac{1}{12}$이다.

즉, $\alpha=\dfrac{1}{6}$, $\beta=\dfrac{1}{12}$이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$

답 ②

6 $\log_2 a+\log_4 b=\log_2 a+\log_{2^2} b$

$=\log_2 a+\dfrac{1}{2}\log_2 b$

$=\log_2 a+\log_2 b^{\frac{1}{2}}$

$=\log_2 a+\log_2\sqrt{b}$

$=\log_2 a\sqrt{b}$

이때 $\log_2 a\sqrt{b}=m$ (m은 자연수)라 하면

$a\sqrt{b}=2^m$

그런데 a, b는 10 이하의 서로 다른 두 자연수이므로

(i) $b=1$일 때

$a=2$, $a=2^2=4$, $a=2^3=8$

(ii) $b=4$일 때

$a=1$, $a=2$, $a=2^3=8$

서로 다른 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍은

(2, 1), (4, 1), (8, 1), (1, 4), (2, 4), (8, 4)

이므로 그 개수는 6이다.

답 ①

7 $\log_{50}5=\dfrac{1}{\log_5 50}$이므로

$(\log_5 10)^2-\dfrac{\log_5 2}{\log_{50}5}$

$=(\log_5 10)^2-\log_5 2\times\log_5 50$

$=\{\log_5(2\times 5)\}^2-\log_5 2\times\log_5(2\times 5^2)$

$=(\log_5 2+1)^2-\log_5 2\times(\log_5 2+\log_5 5^2)$

$=(\log_5 2+1)^2-\log_5 2\times(\log_5 2+2)$

$=(\log_5 2)^2+2\log_5 2+1-(\log_5 2)^2-2\log_5 2$

$=1$

답 ④

8 두 점 $A(\log 8,\ \log 2)$, $B\left(\log 4,\ \log \frac{1}{4}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log \frac{1}{4}-\log 2}{\log 4-\log 8}(x-\log 8)+\log 2$$

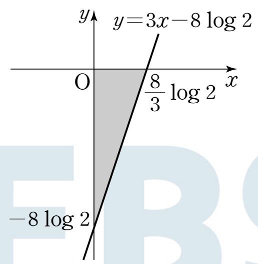
$$=\frac{\log \frac{1}{8}}{\log \frac{1}{2}}(x-3\log 2)+\log 2$$

$$=\frac{3\log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{2}}(x-3\log 2)+\log 2$$

$$=3(x-3\log 2)+\log 2$$

$$=3x-8\log 2$$

직선 $y=3x-8\log 2$의 x절편은 $\frac{8}{3}\log 2$, y절편은 $-8\log 2$이므로 직선 $y=3x-8\log 2$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\log 2\times 8\log 2=\frac{32}{3}(\log 2)^2$$

답 ⑤

Level 3 **실력 완성** 본문 18쪽

1 ⑤ **2** ③ **3** ③

1 조건 (가)에서

$3^a=m$ (m은 자연수)라 하면 $m^{\frac{1}{a}}=3$

$27^b=m$이므로 $m^{\frac{1}{b}}=27$

따라서

$m^{\frac{1}{a}}\times m^{\frac{1}{b}}=81$, $m^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=81$

조건 (나)에서

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=n$ (n은 자연수)라 하면

$m^n=81$

즉, $m=81^{\frac{1}{n}}=(3^4)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{4}{n}}$

그런데 m이 자연수이므로

$n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$

(i) $n=1$일 때 $m=81$이므로

$3^a=81$, $27^b=81$

이때 $(3^3)^b=3^4$, $(3^b)^3=3^4$

$3^b=3^{\frac{4}{3}}$

따라서 $3^a\times 3^b=81\times 3^{\frac{4}{3}}=243\sqrt[3]{3}$

(ii) $n=2$일 때 $m=9$이므로

$3^a=9$, $27^b=9$

이때 $(3^3)^b=3^2$, $(3^b)^3=3^2$

$3^b=\sqrt[3]{3^2}$

따라서 $3^a\times 3^b=9\sqrt[3]{3^2}$

(iii) $n=4$일 때 $m=3$이므로

$3^a=3$, $27^b=3$

이때 $(3^3)^b=3$, $(3^b)^3=3$

$3^b=\sqrt[3]{3}$

따라서 $3^a\times 3^b=3\sqrt[3]{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $p=243\sqrt[3]{3}$, $q=3\sqrt[3]{3}$이므로

$p-q=240\sqrt[3]{3}$

답 ⑤

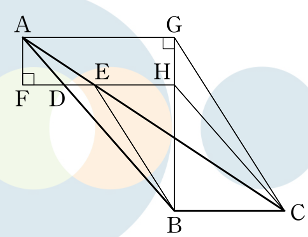
2 점 A에서 직선 DE에 내린 수선의 발을 F라 하면

$\overline{DE}=\log_3 6$이고 삼각형 ADE의 넓이가 $\frac{1}{2}\log_3 2$이므로

$$\frac{1}{2}\times\log_3 6\times\overline{AF}=\frac{1}{2}\log_3 2$$

$$\overline{AF}=\frac{\log_3 2}{\log_3 6}=\log_6 2$$

또한 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선이 만나는 점을 G, 직선 DE와 직선 BG가 만나는 점을 H라 하자.



이때 두 삼각형 ABC, GBC는 서로 넓이가 같고, 두 삼각형 EBC, HBC도 서로 넓이가 같다. 따라서 삼각형 ABE의 넓이는 삼각형 GHC의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{GH}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{BC}$$

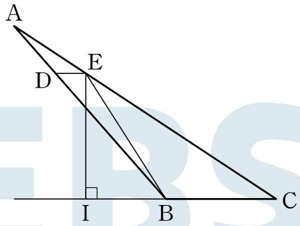
$$=\frac{1}{2}\times\log_6 2\times\log_{\sqrt{6}} 8$$

$=\frac{1}{2}\times\log_6 2\times 2\log_6 2^3$

$=3(\log_6 2)^2$

답 ③

다른 풀이 1



삼각형 BED의 넓이를 S, 점 E에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{EI}=\frac{1}{2}\times\log_3 6\times\overline{EI}$

같은 방법으로 삼각형 BCE의 넓이를 S'이라 하면

$S'=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EI}$

$=\frac{1}{2}\times\log_{\sqrt{6}} 8\times\overline{EI}$

$=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 8\times\frac{S}{\frac{1}{2}\log_3 6}$

$=6S\times\frac{\log_6 2}{\log_3 6}$

따라서

$S+S'=S+6S\times\frac{\log_6 2}{\log_3 6}$

$=S\left(1+\frac{6\log_6 2}{\log_3 6}\right)$

또한 두 삼각형 ADE, ABC는 닮은 삼각형이고 넓이의 비는

$(\log_3 6)^2 : (\log_{\sqrt{6}} 8)^2=(\log_3 6)^2 : (6\log_6 2)^2$

이므로

$(\log_3 6)^2 : (6\log_6 2)^2$

$=\frac{1}{2}\log_3 2 : \left\{\frac{1}{2}\log_3 2+S\left(1+\frac{6\log_6 2}{\log_3 6}\right)\right\}$

즉,

$\frac{1}{2}(6\log_6 2)^2\times\log_3 2$

$=\frac{1}{2}(\log_3 6)^2\times\log_3 2+S\{(\log_3 6)^2+6\log_3 6\times\log_6 2\}$

이므로

$S=\frac{\frac{1}{2}\times\log_3 2\{(6\log_6 2)^2-(\log_3 6)^2\}}{(\log_3 6)^2+6\log_3 6\times\log_6 2}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_3 2}{\log_3 6}(6\log_6 2-\log_3 6)$

$=\frac{1}{2}\log_6 2(6\log_6 2-\log_3 6)$

$=3(\log_6 2)^2-\frac{1}{2}\log_6 2\times\log_3 6$

$=3(\log_6 2)^2-\frac{1}{2}\log_3 2$

따라서 삼각형 ABE의 넓이는

$\frac{1}{2}\log_3 2+\left\{3(\log_6 2)^2-\frac{1}{2}\log_3 2\right\}=3(\log_6 2)^2$

다른 풀이 2

두 삼각형 ADE와 ABC는 닮은 도형이므로

$\overline{AD} : \overline{AB}=\overline{DE} : \overline{BC}$ …… ㉠

점 E에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

(삼각형 ADE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{EH}$,

(삼각형 ABE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{EH}$

이므로

(삼각형 ADE의 넓이) : (삼각형 ABE의 넓이)

$=\overline{AD} : \overline{AB}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

(삼각형 ADE의 넓이) : (삼각형 ABE의 넓이)

$=\overline{DE} : \overline{BC}$

$\frac{1}{2}\log_3 2$: (삼각형 ABE의 넓이)$=\log_3 6 : \log_{\sqrt{6}} 8$

따라서

(삼각형 ABE의 넓이)$=\frac{1}{\log_3 6}\times\left(\frac{1}{2}\log_3 2\times\log_{\sqrt{6}} 8\right)$

$=\log_6 3\times\frac{1}{2}\log_3 2\times 6\log_6 2$

$=3(\log_6 2)^2$

3 ㄱ. $m=2$일 때

$\log_2 x$가 자연수가 되기 위해서는 $0<x\le 100$이므로

$x=2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6$

따라서 $A_2=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\}$이므로

$n(A_2)=6$ (참)

ㄴ. [반례] $A_4=\{4,\ 4^2,\ 4^3\}$, $A_8=\{8,\ 8^2\}$에 대하여

$\frac{8}{4}=2$는 자연수이지만 $\frac{n(A_4)}{n(A_8)}=\frac{3}{2}$은 자연수가 아니다.

(거짓)

ㄷ. $\log_m x$가 자연수가 되기 위해서는

$x=m,\ m^2,\ m^3,\ \cdots$

따라서 $0<x\le 100$이고 $n(A_m)=2$이기 위해서는

$m^2\le 100<m^3$이어야 하므로

$m=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

$m=5$일 때 $A_5=\{5,\ 5^2\}$

$m=6$일 때 $A_6=\{6,\ 6^2\}$

$m=7$일 때 $A_7=\{7,\ 7^2\}$
$m=8$일 때 $A_8=\{8,\ 8^2\}$
$m=9$일 때 $A_9=\{9,\ 9^2\}$
$m=10$일 때 $A_{10}=\{10,\ 10^2\}$
즉, 조건을 만족시키는 모든 m의 값의 합은
$5+6+7+8+9+10=45$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

02 지수함수와 로그함수

유제 본문 21~29쪽

1 ②	**2** ③	**3** ⑤	**4** ④	**5** ④	**6** ②
7 ②	**8** ④	**9** ③	**10** 2		

1 두 지수함수 $y=a^x$, $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프와 직선 $x=2$가 만나는 두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}(2,\ a^2)$, $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{a^2}\right)$

이때 $a>1$이므로 $0<\frac{1}{a}<a$

즉, $\frac{1}{a^2}<a^2$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=a^2-\frac{1}{a^2}=\frac{15}{4}$

$4a^4-15a^2-4=0$, $(4a^2+1)(a^2-4)=0$
그런데 $a>1$이므로 $a^2-4=0$에서
$a=2$

답 ②

2 지수함수 $y=\left(\frac{4-a}{2}\right)^x$의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하므로

$0<\frac{4-a}{2}<1$, $0<4-a<2$

$2<a<4$ ······ ㉠
두 지수함수 $y=(8a)^x$, $y=(a^2+15)^x$의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하고 $x>0$일 때
$(8a)^x>(a^2+15)^x$
이므로
$8a>a^2+15$, $a^2-8a+15<0$
$(a-3)(a-5)<0$
$3<a<5$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $3<a<4$

답 ③

3 $f(x)=3^{-x}+2=\left(\frac{1}{3}\right)^x+2$이므로 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이다.
따라서 $x=-2$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 M을 가지므로
$M=f(-2)=3^2+2=11$

$x=3$에서 함수 $f(x)$는 최솟값 m을 가지므로

$m=f(3)=3^{-3}+2=\frac{1}{27}+2=\frac{55}{27}$

따라서 $\frac{m}{M}=\frac{\frac{55}{27}}{11}=\frac{5}{27}$

답 ⑤

4 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y-b=2^{x-a}$

즉, $f(x)=2^{x-a}+b$

이때 밑이 2이고 $2>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖고, $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(-1)=2^{-1-a}+b=2$에서

$2^{-a}=2(2-b)$ …… ㉠

$f(2)=2^{2-a}+b=4$에서

$2^{-a}=\frac{1}{4}(4-b)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2(2-b)=\frac{1}{4}(4-b)$이므로

$b=\frac{12}{7}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2^{-a}=\frac{4}{7}$

따라서 $f(0)=2^{-a}+b=\frac{4}{7}+\frac{12}{7}=\frac{16}{7}$

답 ④

5 함수 $f(x)=\log_a x$의 역함수가 $g(x)=b^x$이므로 $a=b$이다.

또한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, -1)$을 지나므로

$f(3)=\log_a 3=-1$

$a^{-1}=3$에서 $a=\frac{1}{3}$

즉, $b=\frac{1}{3}$이므로 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(-2, c)$를 지나므로

$g(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=c$

$c=(3^{-1})^{-2}=3^2=9$

따라서 $a+b+c=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+9=\frac{29}{3}$

답 ④

6 $|\log_a a^2|=|2\log_a a|=2$

$\left|\log_a \frac{1}{a^2}\right|=|\log_a a^{-2}|=|-2\log_a a|=2$

사각형 ABDC는 넓이가 4인 직사각형이고 $\overline{AB}=\overline{CD}=2$이므로

$\overline{BD}=2$

즉, $a^2-\frac{1}{a^2}=2$에서 $a^4-2a^2-1=0$이므로

$a^2=1+\sqrt{2}$

답 ②

7 함수 $f(x)=3^{x-2}+a$의 그래프의 점근선은 직선 $y=a$이므로

$a=-1$

이때 $y=3^{x-2}-1$에서 $y+1=3^{x-2}$이므로

$x-2=\log_3(y+1)$

$x=\log_3(y+1)+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_3(x+1)+2$

즉, $g(x)=\log_3(x+1)+2$에서

$b=1$

따라서 $ab=-1$

답 ②

8 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은

$-y=\log_2 x$, $y=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$

이 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$이므로

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$

$0\le x\le 1$에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 갖는다.

즉, $f(0)=\log_{\frac{1}{2}}(-a)=3$에서

$-a=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서 $a=-\frac{1}{8}$

답 ④

9 $9^{x^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$에서 $(3^2)^{x^2}=(3^{-1})^{x-1}$

$3^{2x^2}=3^{-x+1}$

$2x^2=-x+1$

$2x^2+x-1=0$

$(2x-1)(x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

즉, $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$

답 ③

10 $\log_4(x-1)+\log_4(x+2)=1$에서 진수의 조건에 의하여

$x-1>0$, $x+2>0$이므로

$x>1$ …… ㉠

$\log_4(x-1)(x+2)=1$에서

$(x-1)(x+2)=4$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3$ 또는 $x=2$

㉠에 의하여

$x=2$

답 2

Level **1** **기초 연습** 본문 30~31쪽

1 ③ **2** ④ **3** ② **4** ⑤ **5** ⑤ **6** ④
7 ② **8** 27

1 $f(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축과 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에서 만나고 직선 $x=2$와 점 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$에서 만난다.

따라서 선분 AB의 길이는

$\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{4}-1\right)^2}=\sqrt{4+\frac{9}{16}}$

$=\frac{\sqrt{73}}{4}$

답 ③

2 지수함수 $f(x)=(-a^2+6a-4)^x$이 $x>0$에서 $f(x)>1$이므로 밑 $-a^2+6a-4$가 $-a^2+6a-4>1$이어야 한다.

즉, $a^2-6a+5<0$에서

$(a-1)(a-5)<0$

$1<a<5$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$2+3+4=9$

답 ④

3 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2^x}{3^{-x}}$

$=\frac{2^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\left(\frac{2}{\frac{1}{3}}\right)^x$

$=6^x$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최솟값을 갖고, $x=1$에서 최댓값을 갖는다.

$M=h(1)=6^1=6$,

$m=h(-2)=6^{-2}=\frac{1}{36}$

이므로

$M\times m=6\times\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$

답 ②

4 함수 $f(x)=2^{x-3}+2$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 직선 $y=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=m$이 만나지 않도록 하는 정수 m의 최댓값은 2이다.

즉, $k=2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 함수의 그래프를 나타내는 식은

$y-(-4)=2^{(x-2)-3}+2$

$y=2^{x-5}-2$

즉, $g(x)=2^{x-5}-2$이므로

$g(k)=g(2)=2^{-3}-2$

$=\frac{1}{8}-2=-\frac{15}{8}$

답 ⑤

5 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $x=2$가 만나는 점 A의 y좌표는

$\log_2 2=1$이므로

$\mathrm{A}(2,\ 1)$

곡선 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$와 직선 $x=9$가 만나는 점 B의 y좌표는

$\log_{\frac{1}{3}} 9=\log_{3^{-1}} 3^2=-2$이므로

$\mathrm{B}(9,\ -2)$

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+9}{2},\ \frac{1+(-2)}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{11}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

이므로 $a=\frac{11}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=\frac{11}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=5$

답 ⑤

6 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(4,\ 3)$을 지나므로
$g(4)=3$
즉, $f(3)=4$이므로
$f(3)=2^{3+a}+3=4,\ 2^{3+a}=1$
$3+a=0$에서 $a=-3$
$y=2^{x-3}+3$에서 $y-3=2^{x-3}$이므로
$x-3=\log_2(y-3)$
$x=\log_2(y-3)+3$
이때 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x-3)+3$이므로
$g(x)=\log_2(x-3)+3$
즉, 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 직선 $x=3$이므로 $b=3$
따라서 $ab=-9$

답 ④

7 함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{3}}(x+5)$에서 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값, $x=4$에서 최솟값을 갖는다. 따라서
$M=f(-2)=2\log_{\frac{1}{3}}3=2\log_{3^{-1}}3=-2,$
$m=f(4)=2\log_{\frac{1}{3}}9=2\log_{3^{-1}}3^2=-4$
이므로
$M-m=-2-(-4)=2$

답 ②

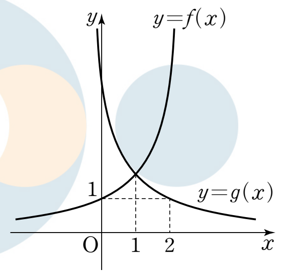
8 $8\times 2^{\log_9 x}=2^3\times 2^{\log_9 x}=2^{3+\log_9 x},$
$x^{\log_9 8}=8^{\log_9 x}=(2^3)^{\log_9 x}=2^{3\log_9 x}$
이므로
$2^{3+\log_9 x}=2^{3\log_9 x}$
즉, $3+\log_9 x=3\log_9 x$에서 $\log_9 x=\frac{3}{2}$이므로
$x=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{2\times\frac{3}{2}}=3^3=27$

답 27

Level **2** **기본 연습** 본문 32~33쪽

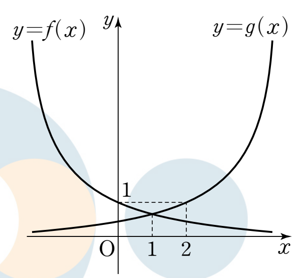
1 ⑤ **2** ④ **3** ③ **4** 3 **5** ③ **6** ⑤
7 7 **8** ③

1 ㄱ. 함수 $f(x)=a^x$의 그래프의 점근선은 x축이다.
함수 $g(x)=a^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=a^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고 함수 $y=a^{-x}$의 그래프의 점근선은 x축이므로 함수 $g(x)=a^{2-x}$의 그래프의 점근선도 x축이다.
따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 서로 일치한다. (참)
ㄴ. $a>1$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

$0<a<1$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

따라서 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이면 $0<a<1$이다. (참)
ㄷ. ㄴ에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. 이때 양수 k에 대하여 두 직선 $x=k+1$, $x=1-k$도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2 점 A의 좌표를 $A(a,\ 2^{a-2})$이라 하면 $B(a,\ 2^a)$이고 점 C의 좌표를 $C(b,\ 2^{b-2})$이라 하면 $D(b,\ 2^b)$이다.
이때 두 점 B, C의 y좌표가 서로 일치하므로
$2^a=2^{b-2}$
즉, $a=b-2$에서 $b=a+2$
또한 사각형 ACDB의 넓이가 $\frac{15}{2}$이므로
$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BC}$
$=\frac{1}{2}\times\{(2^a-2^{a-2})+(2^b-2^{b-2})\}\times(b-a)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\times2^a+\frac{3}{4}\times2^b\right)\times2$

$=\frac{3}{4}(2^a+2^{a+2})$

$=\frac{3}{4}\times5\times2^a$

$=\frac{15}{4}\times2^a=\frac{15}{2}$

에서 $2^a=2$

즉, $a=1$에서 $b=3$이므로 $\mathrm{A}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{D}(3, 8)$

따라서 직선 AD의 기울기는

$\frac{8-\frac{1}{2}}{3-1}=\frac{15}{4}$

답 ④

3 $4^x-2(a-2)\times2^x+a^2-4a=0$에서

$(2^x)^2-2(a-2)\times2^x+a(a-4)=0$

$(2^x-a)\{2^x-(a-4)\}=0$

$2^x=a$ 또는 $2^x=a-4$

이때 $a-4<a$이고 주어진 방정식이 한 개의 실근만을 가져야 하므로

$a-4\le0$이고 $a>0$

즉, $0<a\le4$이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

답 ③

4 점 A의 좌표를 $(m, 2m)$ $(m>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}$이므로 두 점 A, B는 원점 O에 대하여 대칭이다.

이때

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{m^2+(2m)^2}=\sqrt{5}m=\sqrt{5}$

에서 $m=1$이므로

$\mathrm{A}(1, 2)$, $\mathrm{B}(-1, -2)$

또한 두 점 A, B는 곡선 $y=\log_a(x+b)$ 위의 점이므로

$\log_a(1+b)=2$에서

$1+b=a^2$ …… ㉠

$\log_a(-1+b)=-2$에서

$-1+b=a^{-2}$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $2=a^2-a^{-2}$이므로 양변에 a^2을 곱하여 정리하면

$a^4-2a^2-1=0$

$a^2=1+\sqrt{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{2}$

따라서 $a^2b=(1+\sqrt{2})\times\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

즉, $p=2$, $q=1$이므로

$p+q=3$

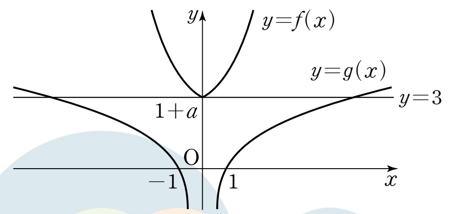
답 3

5 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}+a & (x<0)\\ 2^x+a & (x\ge0)\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}\log_2(-x) & (x<0)\\ \log_2 x & (x>0)\end{cases}$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 $p+q=3$이기 위해서는 두 함수 $f(x)=2^{|x|}+a$, $g(x)=\log_2|x|$의 그래프와 직선 $y=3$이 그림과 같아야 한다.



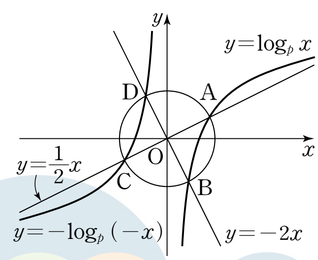
즉, $f(0)=1+a=3$이므로

$a=2$

따라서 $g(a^2)=g(4)=\log_2|4|=2$

답 ③

6



두 곡선 $y=\log_p x$, $y=-\log_p(-x)$는 원점에 대하여 서로 대칭이고 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-2x$는 각각 원점에 대하여 대칭이므로 네 점 A, B, C, D를 지나는 원의 중심은 원점 O이다.

또한 점 A의 좌표를 $\left(a, \frac{a}{2}\right)$ $(a>0)$, 점 B의 좌표를 $(b, -2b)$ $(b>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로

$\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2+(-2b)^2}$

$\frac{5}{4}a^2=5b^2$, $b=\frac{1}{2}a$

따라서 $B\left(\frac{1}{2}a,\ -a\right)$이고 두 점 $A\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$, $B\left(\frac{1}{2}a,\ -a\right)$는 곡선 $y=\log_p x$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}a=\log_p a$ …… ㉠

$-a=\log_p \frac{1}{2}a$ …… ㉡

㉠에서 $a=2\log_p a=\log_p a^2$이고

㉡에서 $a=-\log_p \frac{1}{2}a=\log_p \frac{2}{a}$이므로

$\log_p a^2=\log_p \frac{2}{a}$

$a^2=\frac{2}{a}$, $a^3=2$

$a=2^{\frac{1}{3}}$

이때

$r=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a=\frac{\sqrt{5}}{2}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{2}}$이므로

$r^6=\left(2^{-\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^{-4}\times 5^3=\frac{125}{16}$

답 ⑤

7 $\log 1.28=\log \frac{128}{100}$

$=\log \frac{2^7}{10^2}$

$=\log 2^7-\log 10^2$

$=7\log 2-2$

$=7\times 0.3-2$

$=0.1$

이고 부등식 $n^{10}<1.28^n$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 n^{10}<\log_2 1.28^n$

$10\log_2 n<n\times\log_2 1.28$

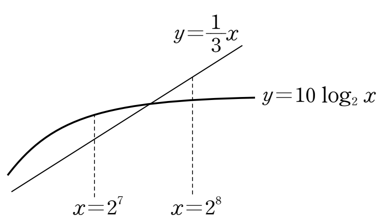
$=n\times\frac{\log 1.28}{\log 2}$

$=n\times\frac{0.1}{0.3}$

$=\frac{1}{3}n$ …… ㉠

그림과 같이 곡선 $y=10\log_2 x$와 직선 $y=\frac{1}{3}x$에서

$2^7=128$, $2^8=256$이므로



$10\log_2 2^7>\frac{2^7}{3}$, $10\log_2 2^8<\frac{2^8}{3}$

즉, ㉠을 만족시키는 2 이상의 자연수 n의 최솟값 k의 값은 2^7과 2^8 사이에 존재한다.

따라서 부등식 $2^m<k<2^{m+1}$을 만족시키는 자연수 m의 값은 7이다.

답 7

8 A국가의 GDP를 $4x\,(x>0)$이라 하면 B국가의 GDP는 x이므로 올해부터 n년 후의 두 국가 A, B의 GDP는 각각

$4x\left(1-\frac{4}{100}\right)^n$, $x\left(1+\frac{8}{100}\right)^n$이다.

$4x\left(1-\frac{4}{100}\right)^n<x\left(1+\frac{8}{100}\right)^n$에서

$4\left(\frac{96}{100}\right)^n<\left(\frac{108}{100}\right)^n$

$4\times 96^n<108^n$

$4\times(3\times 32)^n<(4\times 27)^n$

$2^2\times(3\times 2^5)^n<(2^2\times 3^3)^n$

$2^{5n+2}\times 3^n<2^{2n}\times 3^{3n}$

$2^{3n+2}<3^{2n}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 2^{3n+2}<\log 3^{2n}$

$(3n+2)\log 2<2n\log 3$

$(2\log 3-3\log 2)n>2\log 2$

$(2\times 0.4771-3\times 0.3010)n>2\times 0.3010$

$0.0512n>0.6020$

$n>\frac{0.6020}{0.0512}=11.757\cdots$

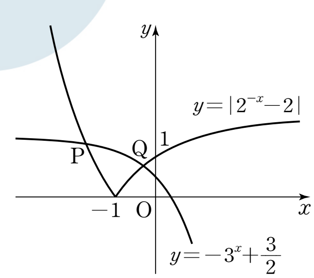
따라서 B국가의 GDP가 A국가의 GDP보다 처음으로 많아지는 것은 올해부터 12년 후이다.

답 ③

Level 3 **실력 완성** 본문 34쪽

1 ⑤ **2** ① **3** ②

1



ㄱ. $|2^{-(-1)}-2|=|2-2|=0$이므로 곡선 $y=|2^{-x}-2|$는 점 $(-1, 0)$을 지난다.

또한 $x=-2$일 때

$|2^{-(-2)}-2|=|4-2|=2$

$-3^{-2}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{9}+\frac{3}{2}=\frac{25}{18}$

이므로 $x=-2$에서

$|2^{-x}-2|>-3^{x}+\frac{3}{2}$

따라서 $x_1>-2$이다. (참)

ㄴ. $|2^{0}-2|=|1-2|=1$이므로 곡선 $y=|2^{-x}-2|$는 점 $(0, 1)$을 지난다.

따라서 $y_2<1$이다. (참)

ㄷ. $y=-3^{x}+\frac{3}{2}$에서 $x=-1$일 때

$y=-3^{-1}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7}{6}$

이므로 점 $\left(-1, \frac{7}{6}\right)$은 곡선 $y=-3^{x}+\frac{3}{2}$ 위의 점이다.

이 점을 R, 원점을 O라 하고 세 직선 OP, OR, OQ의 기울기를 각각 m_1, m_2, m_3이라 하면

$m_1>m_2>m_3$

이때 $m_1=\frac{y_1}{x_1}$, $m_2=-\frac{7}{6}$, $m_3=\frac{y_2}{x_2}$

이므로

$\frac{y_1}{x_1}>-\frac{7}{6}>\frac{y_2}{x_2}$

$\frac{y_1}{x_1}>-\frac{7}{6}$에서 $6y_1<-7x_1$

$7x_1+6y_1<0$ …… ㉠

$-\frac{7}{6}>\frac{y_2}{x_2}$에서 $-7x_2<6y_2$

$7x_2+6y_2>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$7x_1+6y_1<7x_2+6y_2$

이므로

$7(x_1-x_2)<6(y_2-y_1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2 $a^{x}=t\ (t>0)$이라 하면

$f(x)=|a^{2x}-8a^{x}+7|=|t^2-8t+7|$

이때 $g(t)=t^2-8t+7$이라 하면

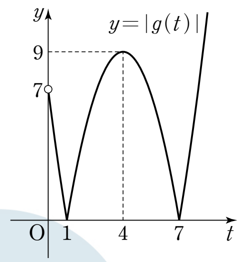
$g(t)=t^2-8t+7=(t-4)^2-9$

$g(t)=t^2-8t+7=0$에서

$(t-1)(t-7)=0$

$t=1$ 또는 $t=7$

따라서 함수 $y=|g(t)|$의 그래프는 그림과 같다.



또한 $1\le x\le 2$일 때 $a>1$이므로

$a\le t\le a^2$

이때 $f(x)\ge 5$에서

$|g(t)|\ge 5$

이므로

$t^2-8t+7=5$, 즉 $t^2-8t+2=0$에서

$t=4+\sqrt{14}\ (t>1)$

즉, $a\ge 4+\sqrt{14}$ …… ㉠

$-t^2+8t-7=5$, 즉 $t^2-8t+12=0$에서

$(t-2)(t-6)=0$

$t=2$, $t=6$

즉, $2\le a$, $a^2\le 6$에서 $2\le a\le\sqrt{6}$ …… ㉡

따라서 ㉠ 또는 ㉡을 만족시키는 자연수 a의 값은

2, 8, 9, 10, 11, …

이므로

$a_1+a_3+a_5=2+9+11=22$

답 ①

3 두 곡선 $y=\log_3(x-n)$, $y=\log_9 x$가 만나는 점의 x좌표는

$\log_3(x-n)=\log_9 x$에서

$2\log_3(x-n)=\log_3 x$

$\log_3(x-n)^2=\log_3 x$

$(x-n)^2=x$에서

$x^2-2nx+n^2=x$

$x^2-(2n+1)x+n^2=0$

$x=\frac{2n+1\pm\sqrt{4n+1}}{2}$

이때 진수의 조건에 의하여 $x>n$이므로

$x=\frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{2}$

그런데 m, n은 자연수이므로

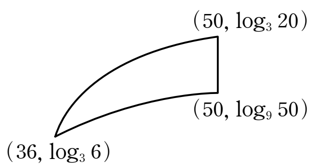
$4n+1=(2l+1)^2$ (l은 자연수)

이어야 한다.

즉, $m=\frac{2n+1+\sqrt{(2l+1)^2}}{2}=n+l+1$

(i) $l=1$일 때 $n=2$이므로 $m=4$
즉, $3<t<4$이므로 자연수 t는 존재하지 않는다.
(ii) $l=2$일 때 $n=6$이므로 $m=9$
즉, $7<t<9$이므로 자연수 t의 개수는 1이다.
(iii) $l=3$일 때 $n=12$이므로 $m=16$
즉, $13<t<16$이므로 자연수 t의 개수는 2이다.
(iv) $l=4$일 때 $n=20$이므로 $m=25$
즉, $21<t<25$이므로 자연수 t의 개수는 3이다.
(v) $l=5$일 때 $n=30$이므로 $m=36$
즉, $31<t<36$이므로 자연수 t의 개수는 4이다.
(vi) $l\geq 6$일 때 자연수 t의 개수는 5 이상이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $n=30$, $m=36$이므로 $36\leq x\leq 50$에서 두 곡선 $y=\log_3(x-30)$, $y=\log_9 x$와 직선 $x=50$으로 둘러싸인 도형은 그림과 같다.



그런데
$1<\log_3 6<2$, $1<\log_9 50<2$, $2<\log_3 20<3$
이므로
$\log_3(x-30)=2$에서
$x-30=3^2$
$x=39$
따라서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은
$(39, 2)$, $(40, 2)$, $\cdots$, $(50, 2)$
이므로 그 개수는
$50-39+1=12$

답 ②

다른 풀이

m, n이 모두 자연수이고 $n+1<t<m$을 만족시키는 자연수 t가 4개 존재하므로
$m=n+6$
이때 $(x-n)^2=x$에서 $(m-n)^2=m$이므로
$m=6^2=36$
따라서 $n=30$

03 삼각함수

유제 본문 37~45쪽

1 ④	**2** 4	**3** ②	**4** ⑤	**5** 5	**6** 5
7 ①	**8** ③	**9** ②	**10** ④		

1 $\angle BAC=\frac{\pi}{5}$이므로
원주각과 중심각의 관계에 의하여
$$\angle BOC=2\times\angle BAC=2\times\frac{\pi}{5}=\frac{2}{5}\pi$$
따라서 점 A를 포함하지 않는 호 BC의 길이는
$2\times\frac{2}{5}\pi=\frac{4}{5}\pi$

답 ④

2 $\overline{OP}=\frac{2}{3}\overline{OA}=\frac{2}{3}r$
$\angle AOB=\theta$라 하면 호 AB, 호 PQ와 두 선분 AP, BQ로 둘러싸인 부분의 둘레의 길이는
$2\times\left(r-\frac{2}{3}r\right)+\frac{2}{3}r\theta+r\theta=\frac{2}{3}r+\frac{5}{3}r\theta$
$\frac{2}{3}r+\frac{5}{3}r\theta=\frac{23}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠
호 AB, 호 PQ와 두 선분 AP, BQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 OAB의 넓이에서 부채꼴 OPQ의 넓이를 뺀 값이므로
$\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}r\right)^2\theta=\frac{5}{18}r^2\theta$
$\frac{5}{18}r^2\theta=\frac{10}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠$\times\frac{r}{6}-$㉡을 하면
$\frac{r^2}{9}=\frac{23}{18}r-\frac{10}{3}$, $2r^2-23r+60=0$
$(2r-15)(r-4)=0$
$r=\frac{15}{2}$ 또는 $r=4$
따라서 r의 최솟값은 4이다.

답 4

3 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}>0$, $\tan\theta<0$에서

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta<0$

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서

$$\tan\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$$
$$=\dfrac{\dfrac{1}{3}}{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}-\dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$$
$$=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

답 ②

4 $6\sin\theta+2\cos\theta-3\tan\theta=1$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$6\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-3\sin\theta=\cos\theta$

$3\sin\theta(2\cos\theta-1)+\cos\theta(2\cos\theta-1)=0$

$(3\sin\theta+\cos\theta)(2\cos\theta-1)=0$

$3\sin\theta+\cos\theta=0$ 또는 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$3\sin\theta+\cos\theta=0$

양변을 $\cos\theta$로 나누면

$3\tan\theta+1=0$

따라서 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$

답 ⑤

5 함수 $y=a\cos bx$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수가 $y=f(x)$이므로

$f(x)=a\cos bx+2$ (단, $a>0$, $b>0$)

함수 $y=f(x)$의 최솟값은 $-a+2$이므로

$-a+2=-1$에서

$a=3$

함수 $y=f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=\pi$에서

$b=2$

따라서 $a+b=3+2=5$

답 5

6 $a>0$이므로 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\dfrac{\pi}{a}$이고

그래프의 점근선은 $x=\dfrac{\pi}{a}\times n+\dfrac{\pi}{2a}$ (n은 정수)이다.

직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$가 함수 $y=\tan ax$의 그래프의 점근선이므로

$\dfrac{\pi}{a}\times n+\dfrac{\pi}{2a}=\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{2n+1}{2a}=\dfrac{1}{4}$

$4n+2=a$

a가 20 이하의 자연수이므로 $4n+2$도 20 이하의 자연수이다.

$4n+2$가 20 이하의 자연수가 되도록 하는 정수 n의 값은

0, 1, 2, 3, 4

이므로 자연수 a의 개수는 5이다.

답 5

7 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

$-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$에서

$\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$

$\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi+\theta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$-\sin\theta<0$이므로 $\sin\theta>0$

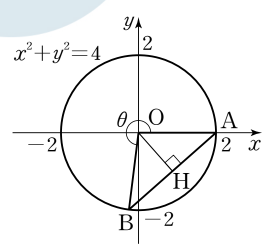
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\dfrac{1}{25}}$$
$$=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서

$$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}{-\dfrac{1}{5}}$$
$$=-2\sqrt{6}$$

답 ①

8



삼각형 AOB에서 $\angle \mathrm{O}=2\pi-\theta$
원점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle \mathrm{AOH}=\dfrac{2\pi-\theta}{2}=\pi-\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{\mathrm{AO}}=2$, $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\cos\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)=-\cos\dfrac{\theta}{2}$이므로

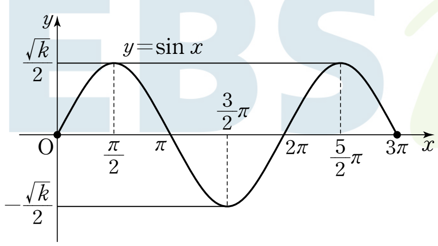
$\cos\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

답 ③

9 $4\sin^2 x-k=0$에서

$\sin^2 x=\dfrac{k}{4}$

$\sin x=-\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ 또는 $\sin x=\dfrac{\sqrt{k}}{2}$



방정식 $4\sin^2 x-k=0$의 실근의 개수가 3이므로

$\dfrac{\sqrt{k}}{2}=1$

$k=4$

$0\le x\le 3\pi$에서

방정식 $\sin x=-1$의 실근은 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

방정식 $\sin x=1$의 실근은 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}\pi$

따라서 방정식 $4\sin^2 x-k=0$의 세 실근의 합은

$\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5}{2}\pi=\dfrac{9}{2}\pi$

답 ②

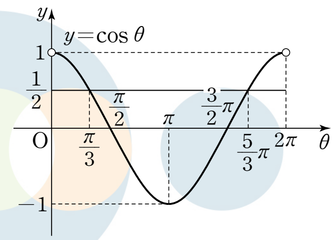
10 모든 실수 x에 대하여 $x^2+(2\sqrt{2}\cos\theta)x-\cos\theta+1\ge 0$이 성립하므로
이차방정식 $x^2+(2\sqrt{2}\cos\theta)x-\cos\theta+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(\sqrt{2}\cos\theta)^2-(-\cos\theta+1)\le 0$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1\le 0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\le 0$

$-1\le\cos\theta\le\dfrac{1}{2}$



부등식 $-1\le\cos\theta\le\dfrac{1}{2}$의 해는

$\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{5}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4}{3}\pi$

답 ④

Level **1** **기초 연습** 본문 46~47쪽

1 ① **2** ② **3** ④ **4** ③ **5** ① **6** ③
7 ① **8** ④

1 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r, $\angle \mathrm{AOB}=\theta$라 하면
부채꼴의 둘레의 길이는 $a=2r+r\theta$
부채꼴의 호의 길이는 $b=r\theta$
$a=3b$이므로
$2r+r\theta=3r\theta$
$2r=2r\theta$
$r>0$이므로 $\theta=1$

답 ①

2 $\sin\dfrac{3}{4}\pi=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\dfrac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\dfrac{7}{3}\pi=\tan\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\cos\dfrac{11}{6}\pi=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서

$\sin\frac{3}{4}\pi\times\cos\frac{5}{4}\pi+\tan\frac{7}{3}\pi\times\cos\frac{11}{6}\pi$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

답 ②

3 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\sin^2\theta=\frac{1}{3}$에서

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

따라서

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ④

4 함수 $y=m\sin\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{\pi}=2$

$0\le x\le 2$에서 함수 $y=m\sin\pi x$의 그래프와 직선

$y=\frac{m}{2}$이 만나는 점의 개수가 2이므로

$0\le x\le 2n$에서 함수 $y=m\sin\pi x$의 그래프와 직선

$y=\frac{m}{2}$이 만나는 점의 개수는 $2n$이다.

$2n=24$에서

$n=12$

$0\le x\le 24$에서 함수 $y=m\sin\pi x$의 그래프와 직선

$y=-6$이 만나는 점의 개수가 12이므로

$-m=-6$에서

$m=6$

따라서 $m+n=6+12=18$

답 ③

5 $a>0$, $b>0$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이고 최댓값은 $2a$이다.

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{a}{2}}=\frac{4\pi}{a}$이고 최댓값은 $1+b$이다.

주기가 같은 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최댓값이 같으므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{4\pi}{a}$ …… ㉠

$2a=1+b$ …… ㉡

㉠에서 $a=2b$

이 식을 ㉡에 대입하면

$4b=1+b$

$3b=1$

$b=\frac{1}{3}$

$a=2b=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 $a+b=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

답 ①

6 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

이므로

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\times\sin(\pi+\theta)=(-\cos\theta)\times(-\sin\theta)$

$=\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{1}{4}$

$\sin\theta<0$이므로 $\cos\theta<0$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\sin\theta+\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3-3\times\frac{1}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$=-\frac{3\sqrt{6}}{8}$

답 ③

7 $\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta\tan\theta}$

$=\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$=\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{9}{5}$에서

$\sin^2\theta=\frac{5}{9}$

$$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}}=\frac{5}{4}$$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\tan\theta<0$이므로

$$\tan\theta=-\sqrt{\frac{5}{4}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

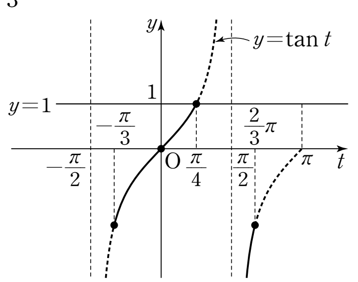
답 ①

8 $0\le x\le\pi$이므로 $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2}{3}\pi$

$x-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{2}{3}\pi$이고

$\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$에서 $\tan t\le 1$

$-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{2}{3}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프는 그림과 같다.



$\tan t\le 1$을 만족시키는 모든 t의 값의 범위는

$-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<t\le\frac{2}{3}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2}{3}\pi$이므로

$0\le x\le\frac{7}{12}\pi$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x\le\pi$

따라서 $\alpha=\frac{7}{12}\pi$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$, $\gamma=\pi$이므로

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{7}{12}\pi+\frac{5}{6}\pi+\pi$$

$$=\frac{29}{12}\pi$$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 48~49쪽

1 ② **2** ② **3** ② **4** ③ **5** ④ **6** ②
7 ④ **8** ④

1 삼각형 APQ는 $\overline{AP}=\overline{AQ}$인 이등변삼각형이므로

$$\angle PAQ=\pi-2\angle AQP$$

$$=\pi-2\times\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 APB에서

$$\overline{AP}=\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

선분 AB의 중점을 O라 하고 삼각형 AOP의 넓이를 S_1, 부채꼴 OBP의 넓이를 S_2, 부채꼴 AQP의 넓이를 S_3이라 하면 선분 BQ와 두 호 PB, PQ로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S_1+S_2-S_3$이다.

$$\angle POB=2\angle PAQ$$

$$=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

$$\angle AOP=\pi-\angle POB$$

$$=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{PO}\times\sin(\angle AOP)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{OB}^2\times(\angle POB)$$

$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$$

$$S_3=\frac{1}{2}\times\overline{AP}^2\times(\angle PAQ)$$

$$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}=\pi$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$S_1+S_2-S_3=\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi-\pi$$

$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

답 ②

2 점 I가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\angle IAB=\angle CAI=\alpha$, $\angle IBC=\angle ABI=\beta$,

$\angle ICA=\angle BCI=\gamma$라 하자.

삼각형 ABC에서

$2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$에서

$\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma$ ...... ㉠

삼각형 ABI에서

$\angle \mathrm{BIA}=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$

$=\frac{\pi}{2}+\gamma$

$\cos(\angle \mathrm{BIA})=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)$

$=-\sin\gamma=-\frac{2}{3}$

이므로

$\sin\gamma=\frac{2}{3}$

$0<\gamma<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

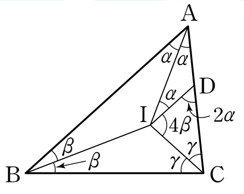
$=\frac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 AID는 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{ID}}$인 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{AID}=\angle \mathrm{DAI}=\alpha$

$\angle \mathrm{CDI}=2\alpha$

한편, $\angle \mathrm{DIC}=2\angle \mathrm{ABC}=2\times 2\beta=4\beta$



삼각형 CDI에서

$\angle \mathrm{CDI}+\angle \mathrm{DIC}+\angle \mathrm{ICD}=\pi$

$2\alpha+4\beta+\gamma=\pi$

㉠을 위 식에 대입하면

$2\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma\right)+4\beta+\gamma=\pi$

$2\beta=\gamma$

따라서 $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\cos 2\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 ②

3 $\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=(-\sin x)^2=\sin^2 x$,

$\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos^3 x$,

$\cos(\pi-x)=-\cos x$이므로

$$f(x)=\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2\sin^2 x}{\cos(\pi-x)+2}$$

$$=\sin^2 x-\frac{\cos^3 x+2\sin^2 x}{-\cos x+2}$$

$$=\sin^2 x-\frac{\cos^3 x+2(1-\cos^2 x)}{-\cos x+2}$$

$$=\sin^2 x-\frac{\cos^3 x+2-2\cos^2 x}{-\cos x+2}$$

$$=\sin^2 x+\frac{\cos^2 x(\cos x-2)+2}{\cos x-2}$$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x+\frac{2}{\cos x-2}$$

$$=1+\frac{2}{\cos x-2}$$

$0\le x\le\pi$에서

$-1\le\cos x\le 1$이므로

$-3\le\cos x-2\le -1$

$-2\le\frac{2}{\cos x-2}\le -\frac{2}{3}$이므로

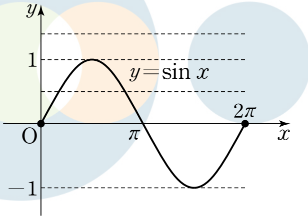
$M=1+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, $m=1+(-2)=-1$

따라서 $M+m=\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{2}{3}$

답 ②

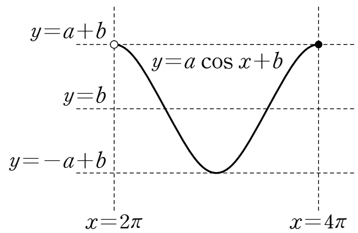
4 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $p(t)$라 하면

$$p(t)=\begin{cases}3 & (t=0)\\ 2 & (-1<t<0 \text{ 또는 } 0<t<1)\\ 1 & (t=-1 \text{ 또는 } t=1)\\ 0 & (t<-1 \text{ 또는 } t>1)\end{cases}$$



$2\pi<x\le 4\pi$에서 함수 $y=a\cos x+b$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $q(t)$라 하면

$$q(t)=\begin{cases}2 & (-a+b<t<a+b)\\ 1 & (t=-a+b \text{ 또는 } t=a+b)\\ 0 & (t<-a+b \text{ 또는 } t>a+b)\end{cases}$$



모든 실수 t에 대하여 $p(t)+q(t)\neq 3$이고 $p(0)=3$이므로
$-a+b\leq 0$, $a+b\geq 0$

(ⅰ) $a+b>1$인 경우
$p(1)+q(1)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $0<a+b<1$인 경우
$p(a+b)+q(a+b)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $-a+b<-1$인 경우
$p(-1)+q(-1)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $-1<-a+b<0$인 경우
$p(-a+b)+q(-a+b)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $a+b=0$ 또는 $a+b=1$이고 $-a+b=-1$ 또는 $-a+b=0$

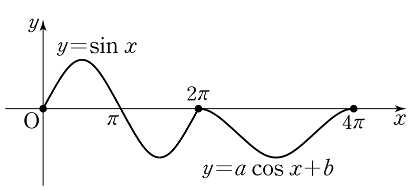
즉, $a+b=0$, $-a+b=-1$에서
$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$
$a+b=0$, $-a+b=0$에서
$a=0$, $b=0$
$a+b=1$, $-a+b=-1$에서
$a=1$, $b=0$
$a+b=1$, $-a+b=0$에서
$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $a>0$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)는
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
이고, 그 개수는 3이다.

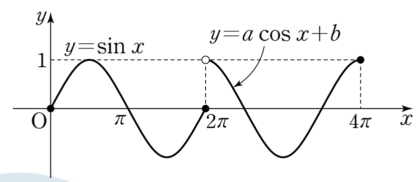
답 ③

참고

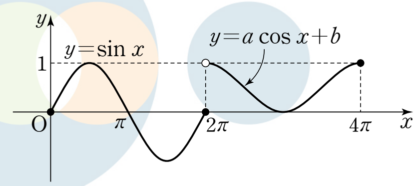
① $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프



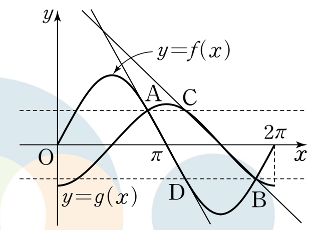
② $a=1$, $b=0$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프



③ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프



5 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점이 A, B이므로 점 A의 x좌표를 α라 하면 $\mathrm{A}(\alpha, \sin\alpha)$이고,
$\sin\alpha=-k\cos\alpha$,
$-\sin\alpha=-k(-\cos\alpha)$,
$\sin(\pi+\alpha)=-k\cos(\pi+\alpha)$
이고 $0<\pi+\alpha<2\pi$이므로
$\mathrm{B}(\pi+\alpha, -\sin\alpha)$
점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점 C의 x좌표는 $2\pi-\alpha$이므로
$\mathrm{C}(2\pi-\alpha, \sin\alpha)$
점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 D의 x좌표는 $2\pi-\alpha$이므로
$\mathrm{D}(2\pi-\alpha, -\sin\alpha)$
직선 AD의 방정식은
$$y-\sin\alpha=\frac{-\sin\alpha-\sin\alpha}{(2\pi-\alpha)-\alpha}(x-\alpha)$$
즉, $y=-\frac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}(x-\alpha)+\sin\alpha$ ······ ㉠
직선 BC의 방정식은
$$y-(-\sin\alpha)=\frac{\sin\alpha-(-\sin\alpha)}{(2\pi-\alpha)-(\pi+\alpha)}\{x-(\pi+\alpha)\}$$
즉, $y=\frac{2\sin\alpha}{\pi-2\alpha}(x-\pi-\alpha)-\sin\alpha$ ······ ㉡

두 직선 AD, BC가 만나는 점의 y좌표가 점 A의 y좌표의 3배이므로 ㉠에서

$3\sin\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}(x-\alpha)+\sin\alpha$

$2(\pi-\alpha)=-(x-\alpha)$

$x=3\alpha-2\pi$ …… ㉢

㉡에서 $3\sin\alpha=\frac{2\sin\alpha}{\pi-2\alpha}(x-\pi-\alpha)-\sin\alpha$이므로

$4(\pi-2\alpha)=2(x-\pi-\alpha)$

$x=3\pi-3\alpha$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$3\alpha-2\pi=3\pi-3\alpha$

$\alpha=\frac{5}{6}\pi$

$f(\alpha)=g(\alpha)$에서 $\sin\frac{5}{6}\pi=-k\cos\frac{5}{6}\pi$

$\frac{1}{2}=-k\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ④

6 $\sin^2(3\pi-x)=\sin^2(\pi-x)$

$=\sin^2 x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

$\sin^2(3\pi-x)+a\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+3a=0$에서

$\sin^2 x-a\sin x+3a=0$

$\sin x=t$라 하면 $t^2-at+3a=0$

$0\le x\le\pi$에서 $0\le t\le 1$이다.

이때 $0\le t<1$인 실수 t가 방정식 $t^2-at+3a=0$의 근이면 $\sin x=t$를 만족시키는 실수 x의 값의 개수는 2가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

즉, 방정식 $t^2-at+3a=0$이 오직 하나의 실근을 가지므로 $t=1$이 이 방정식의 근이다.

$t=1$을 $t^2-at+3a=0$에 대입하면

$1-a+3a=0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$

답 ②

참고

$a=-\frac{1}{2}$을 방정식 $\sin^2 x-a\sin x+3a=0$에 대입하면

$\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{3}{2}=0$

$\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)(\sin x-1)=0$

$0\le x\le\pi$에서 $0\le\sin x\le 1$이므로 $\sin x=1$이고

$x=\frac{\pi}{2}$이다.

7 $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}-2x\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$에서

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

한편, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 방정식 $\sin x=k$의 서로 다른 실근의 개수는 2 이하이고, 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우 두 실근을 α, β라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$이다. …… ㉠

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{3}{2}\pi$이므로

㉠에서 방정식 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$의 해는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) $x+\frac{\pi}{4}=2x-\frac{\pi}{6}$인 경우

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{12}\pi$

(ii) $\frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}=\frac{\pi}{2}$인 경우

$\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$, $3x=\frac{11}{12}\pi$

$x=\frac{11}{36}\pi$

(i), (ii)에서 $x=\frac{5}{12}\pi$, $x=\frac{11}{36}\pi$이고 이 값은 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$를 만족시킨다.

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{5}{12}\pi+\frac{11}{36}\pi=\frac{26}{36}\pi=\frac{13}{18}\pi$

답 ④

8 $(3-2\sqrt{3}\cos x)\sin x\le(\sqrt{3}-2\cos x)\cos x$에서

$2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x+3\sin x-2\sqrt{3}\sin x\cos x\le 0$

$(\cos x-\sqrt{3}\sin x)(2\cos x-\sqrt{3})\le 0$

$2(\cos x-\sqrt{3}\sin x)\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\le 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos x\le\sqrt{3}\sin x$ 또는

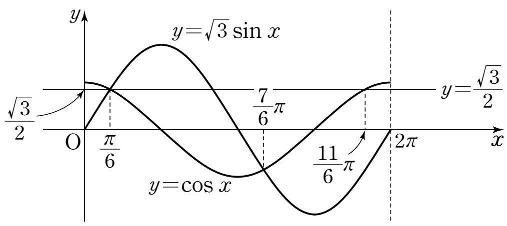
$\sqrt{3}\sin x\le\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$이고

$\cos x=\sqrt{3}\sin x$, 즉 $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$에서

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

이므로 두 함수 $y=\cos x$, $y=\sqrt{3}\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 그림과 같다.



(ⅰ) $\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos x\le\sqrt{3}\sin x$인 경우

$\cos x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi\le x\le 2\pi$ …… ㉠

$\cos x\le\sqrt{3}\sin x$에서

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7}{6}\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=\frac{\pi}{6}$

(ⅱ) $\sqrt{3}\sin x\le\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$인 경우

$\sqrt{3}\sin x\le\cos x$에서

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x\le 2\pi$ …… ㉢

$\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$에서

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{11}{6}\pi$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 부등식을 만족시키는 모든 x의 값 또는 범위는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$

따라서 $M=\frac{11}{6}\pi$, $m=\frac{\pi}{6}$이므로

$M-m=\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$

답 ④

Level 3 **실력 완성** 본문 50쪽

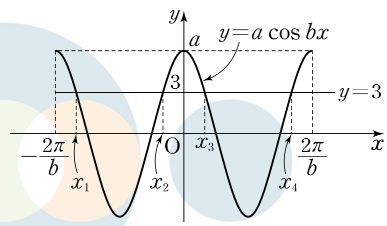
1 ⑤ **2** ③ **3** ④

1 $b>0$이므로 함수 $f(x)=a\sin\left(k\times\frac{\pi}{2}+bx\right)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$

방정식 $f(x)=3$의 서로 다른 네 실근이 x_1, x_2, x_3, x_4이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$이 만나는 네 점의 x좌표가 x_1, x_2, x_3, x_4이다.

(ⅰ) $k=1$이면

$f(x)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}+bx\right)=a\cos bx$



$x_3=\alpha$라 하면

$x_1=-\frac{2\pi}{b}+\alpha$, $x_2=-\alpha$, $x_4=\frac{2\pi}{b}-\alpha$

$x_4-x_1=5(x_3-x_2)=5\pi$에서

$x_4-x_1=\left(\frac{2\pi}{b}-\alpha\right)-\left(-\frac{2\pi}{b}+\alpha\right)=\frac{4\pi}{b}-2\alpha=5\pi$ …… ㉠

$x_3-x_2=\alpha-(-\alpha)=2\alpha=\pi$

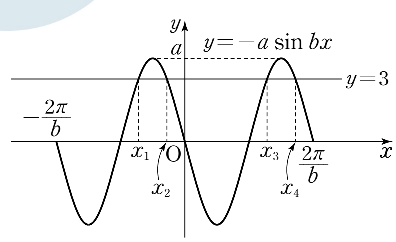
$\alpha=\frac{\pi}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{4\pi}{b}-2\times\frac{\pi}{2}=5\pi$

$b=\frac{2}{3}$

(ⅱ) $k=2$이면

$f(x)=a\sin(\pi+bx)=-a\sin bx$



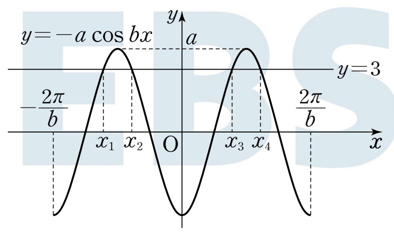
$x_4-x_1<\frac{3}{b}\pi$이고

$x_3-x_2>\frac{\pi}{b}$, 즉 $5(x_3-x_2)>\frac{5}{b}\pi$이므로

$x_4-x_1=5(x_3-x_2)$를 만족시키지 않는다.

(iii) $k=3$이면

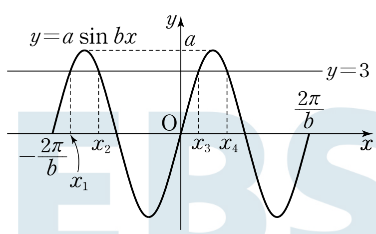
$f(x)=a\sin\left(\frac{3}{2}\pi+bx\right)=-a\cos bx$



(ii)와 마찬가지로 $x_4-x_1=5(x_3-x_2)$를 만족시키지 않는다.

(iv) $k=4$이면

$f(x)=a\sin(2\pi+bx)=a\sin bx$



(ii)와 마찬가지로 $x_4-x_1=5(x_3-x_2)$를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여

$f(x)=a\cos\frac{2}{3}x$

$f(a)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}=3$에서

$a=6$

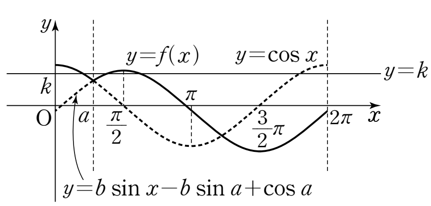
따라서

$a\times b=6\times\frac{2}{3}=4$

답 ⑤

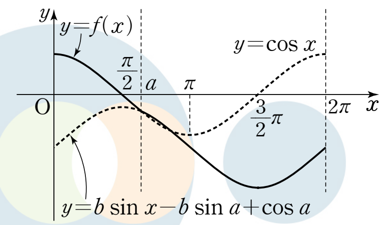
2 a의 값에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보자.

(i) $0<a<\frac{\pi}{2}$인 경우



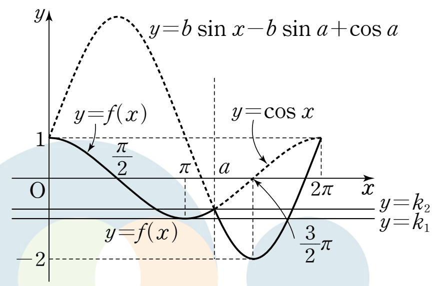
1과 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 중 크지 않은 값을 c라 할 때, $f(a)<k<c$인 모든 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{\pi}{2}\le a\le\pi$인 경우



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 없으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\pi<a<\frac{3}{2}\pi$인 경우



조건 (나)에서 방정식 $f(x)=l$이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 실수 l의 값이 -2뿐이므로

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-2$, $f(2\pi)=1$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=b\sin\frac{3}{2}\pi-b\sin a+\cos a$

$\quad=-b-b\sin a+\cos a=-2$ …… ㉠

$f(2\pi)=b\sin 2\pi-b\sin a+\cos a$

$\quad=-b\sin a+\cos a=1$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$b=3$

$b=3$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$-3\sin a=1-\cos a$

양변을 제곱하면

$9\sin^2 a=(1-\cos a)^2$

$9(1-\cos^2 a)=(1-\cos a)^2$

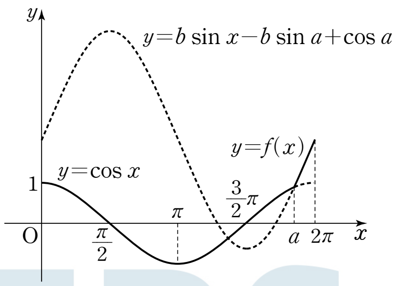
$9(1-\cos a)(1+\cos a)=(1-\cos a)^2$

$\cos a<0$이므로 $1-\cos a\neq 0$

$9(1+\cos a)=1-\cos a$

$\cos a=-\frac{4}{5}$

(iv) $\frac{3}{2}\pi\le a<2\pi$인 경우



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 없으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$\pi<a<\frac{3}{2}\pi$, $b=3$, $\cos a=-\frac{4}{5}$

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 k_1, k_2 $(k_1<k_2)$이므로

$k_1=\cos\pi=-1$, $k_2=\cos a$

방정식 $f(x)=k_2$의 세 실근을 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\beta=a$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$에서 $\alpha=2\pi-\beta=2\pi-a$

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서 $\gamma=3\pi-\beta=3\pi-a$

그러므로

$$\begin{aligned}b\cos\theta&=b\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\&=b\cos\{(2\pi-a)+a+(3\pi-a)\}\\&=-b\cos a\\&=-3\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=-2$의 실근의 개수가 1이고 $0\le x\le a$에서 함수 $y=\cos x$의 최솟값은 -1 이상이므로 $a<x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$, 즉 $y=b\sin x-b\sin a+\cos a$의 최솟값이 -2이다. …… ㉠

$a>\frac{3}{2}\pi$인 경우 $a<x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값이 양수이므로 $a\le\frac{3}{2}\pi$이고, 이때 $a<x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 최소이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-2$이므로

$b\sin\frac{3}{2}\pi-b\sin a+\cos a=-2$

$-b-b\sin a+\cos a=-2$ …… ㉢

$a\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값을 M이라 하고 M의 값에 따라 경우를 나누어 보자.

(ⅰ) $M>1$인 경우

$0\le x<a$에서 $f(x)\le 1$이므로 $a\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$는 최댓값 M을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=M$의 실근의 개수가 1이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $M=1$인 경우

$a\le\frac{\pi}{2}$이면 $a\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최대이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

이때 $f(a)<k<1$인 모든 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $a>\frac{\pi}{2}$이다.

이때 $a\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값이 1이므로 함수 $y=f(x)$는 $x=2\pi$에서 최대이고 $f(2\pi)=1$

$-b\sin a+\cos a=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $b=3$, $\cos a=-\frac{4}{5}$

(ⅲ) $M<1$인 경우

방정식 $f(x)=1$의 실근이 $x=0$뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $b=3$, $\cos a=-\frac{4}{5}$

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 k_1, k_2 $(k_1<k_2)$이므로

$k_1=\cos\pi=-1$, $k_2=\cos a$

방정식 $f(x)=k_2$의 세 실근을 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\beta=a$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$에서 $\alpha=2\pi-\beta=2\pi-a$

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서 $\gamma=3\pi-\beta=3\pi-a$

그러므로

$$\begin{aligned}b\cos\theta&=b\cos(\alpha+\beta+\gamma)\\&=b\cos\{(2\pi-a)+a+(3\pi-a)\}\\&=-b\cos a\\&=-3\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

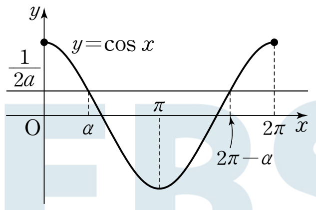
3 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\cos x=\frac{1}{2a}$의 실근이 α이므로

$\cos\alpha=\frac{1}{2a}$

$f(x)$

$=a\sin^2 x+\left|\cos x-\frac{1}{2a}\right|$

$$=\begin{cases} a\sin^2 x+\cos x-\dfrac{1}{2a} \\ \qquad\qquad (0\le x<\alpha \text{ 또는 } 2\pi-\alpha<x\le 2\pi) \\ a\sin^2 x-\cos x+\dfrac{1}{2a} \ (\alpha\le x\le 2\pi-\alpha) \end{cases}$$



$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 $\cos x=t$라 하면

$0\le x\le\alpha$ 또는 $2\pi-\alpha\le x\le 2\pi$일 때 $\frac{1}{2a}\le t\le 1$이고

$a\sin^2 x+\cos x-\frac{1}{2a}=-at^2+t+a-\frac{1}{2a}$ ······ ㉠

또 $\alpha\le x\le 2\pi-\alpha$일 때 $-1\le t\le\frac{1}{2a}$이고

$a\sin^2 x-\cos x+\frac{1}{2a}=-at^2-t+a+\frac{1}{2a}$ ······ ㉡

x의 값에 따라 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 구해 보자.

(i) $0\le x\le\alpha$의 경우

$g(t)=-at^2+t+a-\frac{1}{2a}$이라 하면

㉠에서 $\frac{1}{2a}\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값이 각각 M_1, m_1이다.

$$g(t)=-at^2+t+a-\frac{1}{2a}$$
$$=-a\left(t-\frac{1}{2a}\right)^2+a-\frac{1}{4a}$$

이므로

$$M_1=g\left(\frac{1}{2a}\right)=a-\frac{1}{4a}$$

$$m_1=g(1)=1-\frac{1}{2a}$$

$$M_1-m_1=\left(a-\frac{1}{4a}\right)-\left(1-\frac{1}{2a}\right)$$
$$=a-1+\frac{1}{4a}$$

(ii) $\alpha\le x\le 2\pi-\alpha$의 경우

$h(t)=-at^2-t+a+\frac{1}{2a}$이라 하면

㉡에서 $-1\le t\le\frac{1}{2a}$에서 함수 $h(t)$의 최댓값과 최솟값이 각각 M_2, m_2이다.

$$h(t)=-at^2-t+a+\frac{1}{2a}$$
$$=-a\left(t+\frac{1}{2a}\right)^2+a+\frac{3}{4a}$$

$a>\frac{1}{2}$에서 $-1<-\frac{1}{2a}<0<\frac{1}{2a}$이므로

$$M_2=h\left(-\frac{1}{2a}\right)=a+\frac{3}{4a}$$

m_2의 값은 $h(-1)$, $h\left(\frac{1}{2a}\right)$ 중 크지 않은 값이다.

(i), (ii)에 의하여

$M_1-m_1=M_2-m_2$에서

$$m_2=M_2-(M_1-m_1)$$
$$=a+\frac{3}{4a}-\left(a-1+\frac{1}{4a}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2a}$$

$h(-1)=1+\frac{1}{2a}$, $h\left(\frac{1}{2a}\right)=a-\frac{1}{4a}$이고

$m_2=h(-1)$이므로 $h(-1)\le h\left(\frac{1}{2a}\right)$이어야 한다.

$a>\frac{1}{2}$이므로 $1+\frac{1}{2a}\le a-\frac{1}{4a}$

$a-1-\frac{3}{4a}\ge 0$, $4a^2-4a-3\ge 0$

$(2a-3)(2a+1)\ge 0$

$a\ge\frac{3}{2}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ④

04 사인법칙과 코사인법칙

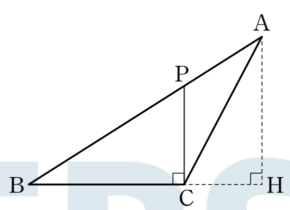
유제 본문 53~59쪽

1 ④ **2** ③ **3** ⑤ **4** 6 **5** 2 **6** ⑤
7 2 **8** ③

1 $\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$
이므로
$\sin A=2\sin B$ …… ㉠
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$$
$\overline{BC}=3$과 ㉠을 대입하면
$$\frac{3}{2\sin B}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$$
따라서 $\overline{AC}=\frac{3}{2}$

답 ④

2 삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)}=\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$$
$$\frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$
점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

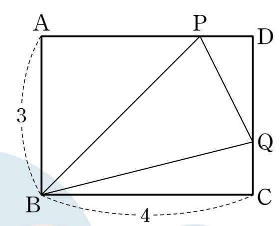


$$\cos(\angle ACH)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\angle PCA\right)$$
$$=\sin(\angle PCA)$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$
직각삼각형 ACH에서
$\cos(\angle ACH)=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$이므로
$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$\overline{CH}=k$, $\overline{AC}=\sqrt{5}k$ $(k>0)$이라 하자.

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}$$
$$=\sqrt{5k^2-k^2}=2k$$
두 삼각형 ABH, PBC는 서로 닮음이고 닮음비는
$\overline{AB}:\overline{PB}=(\overline{AP}+\overline{PB}):\overline{PB}=3:2$
이므로
$$\overline{CP}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{4}{3}k$$
$$\overline{BC}=\frac{2}{3}\overline{BH}=\frac{2}{3}(\overline{BC}+\overline{CH})=\frac{2}{3}(\overline{BC}+k)$$
$\overline{BC}=2k$
$\overline{BC}+\overline{CP}=5$에서
$$2k+\frac{4}{3}k=5$$
$$\frac{10}{3}k=5$$
$$k=\frac{3}{2}$$
따라서
$$\overline{AC}=\sqrt{5}k=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$
$$\overline{CP}=\frac{4}{3}k=2$$
이므로 ㉠에서
$$\frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$$

답 ③

3



점 P가 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점이므로
$$\overline{AP}=\frac{3}{4}\overline{AD}=3$$
$$\overline{DP}=\frac{1}{4}\overline{AD}=1$$
점 Q가 선분 CD를 1 : 2로 내분하는 점이므로
$$\overline{CQ}=\frac{1}{3}\overline{CD}=1$$
$$\overline{DQ}=\frac{2}{3}\overline{CD}=2$$
$$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AP}^2}$$
$$=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$$

$\overline{BQ}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CQ}^2}$
$=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$
$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{DP}^2+\overline{DQ}^2}$
$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$
삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle PBQ)=\frac{\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2-\overline{PQ}^2}{2\times\overline{BP}\times\overline{BQ}}=\frac{18+17-5}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{17}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

답 ⑤

4 점 P는 선분 AB가 지름인 원 위의 점이므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\angle BAP=\theta$라 하면 삼각형 PAQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2}{2\times\overline{AP}\times\overline{AQ}}=\frac{(2\sqrt{7})^2+5^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{7}\times5}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

직각삼각형 ABP에서

$\cos\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{7}}{\overline{AB}}$

$\frac{2\sqrt{7}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로 $\overline{AB}=8$

따라서

$$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{7})^2}=6$$

답 6

5 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$(8\sin A\sin B-3\sin^2 C)^2$
$+(\sin B\sin C-3\sin^2 A)^2=0$에서

$\left(\frac{8ab}{4R^2}-\frac{3c^2}{4R^2}\right)^2+\left(\frac{bc}{4R^2}-\frac{3a^2}{4R^2}\right)^2=0$

$8ab=3c^2$, $bc=3a^2$

$b=\frac{3c^2}{8a}$을 $bc=3a^2$에 대입하면

$\frac{3c^2}{8a}\times c=3a^2$

$c^3=8a^3$

$c=2a$

$c=2a$를 $bc=3a^2$에 대입하면

$b\times2a=3a^2$

$b=\frac{3}{2}a$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2-(2a)^2}{2\times a\times\frac{3}{2}a}=-\frac{1}{4}$$

$0<C<\pi$이므로 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 $R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{\sqrt{15}}{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}=2$

답 2

6 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙, 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$,

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이고

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+C\right)=\cos C$, $\cos(\pi+A)=-\cos A$이므로

$2\sin A\sin\left(\frac{\pi}{2}+C\right)-\sin C\cos(\pi+A)=2\sin B$에서

$2\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B$

$2\times\frac{a}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{c}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=2\times\frac{b}{2R}$

$2(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)=4b^2$

$a^2=b^2+c^2$ …… ㉠

즉, 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.

$2\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $2b=a$

$a=2b$를 ㉠에 대입하면

$4b^2=b^2+c^2$

$c^2=3b^2$

$c=\sqrt{3}b$

따라서 $\cos B=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}b}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

7 $\sin(\angle\text{ABP}) : \sin(\angle\text{PBC}) = 2 : 3$에서

$\sin(\angle\text{PBC}) = \dfrac{3}{2}\sin(\angle\text{ABP})$ …… ㉠

삼각형 ABP의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{BP}}\times\sin(\angle\text{ABP})$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{\text{BP}}\times\sin(\angle\text{ABP})=1$

$\overline{\text{BP}}\sin(\angle\text{ABP})=\dfrac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 PBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BP}}\times\overline{\text{BC}}\times\sin(\angle\text{PBC})$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BP}}\times4\times\dfrac{3}{2}\sin(\angle\text{ABP})$

$=3\overline{\text{BP}}\sin(\angle\text{ABP})=2$

답 2

8 점 E는 선분 AD를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{\text{AE}}=4$

$\angle\text{BAE}=\theta$라 하면 삼각형 ABE의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{AE}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin\theta=4\sqrt{3}$

에서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\theta<\pi$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

$\angle\text{ABC}=\pi-\theta$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{AC}}^2=\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{BC}}^2-2\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{BC}}\times\cos(\pi-\theta)$

$=4^2+6^2+2\times4\times6\times\cos\theta$

$=52+48\cos\theta$

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$이면 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$이므로 $\overline{\text{AC}}^2=76$

$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$이면 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$이므로 $\overline{\text{AC}}^2=28$

따라서 선분 AC의 길이의 최댓값은

$\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

답 ③

Level 1 **기초 연습** 본문 60~62쪽

1 ①	**2** ④	**3** ②	**4** ①	**5** ③	**6** ①
7 ⑤	**8** ②	**9** ①	**10** ②	**11** ⑤	**12** ④

1 $\overline{\text{BC}} : \overline{\text{CA}} = 3 : 4$에서

$\overline{\text{BC}}=3k$, $\overline{\text{CA}}=4k\ (k>0)$이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{BC}}}{\sin A}=\dfrac{\overline{\text{CA}}}{\sin B}$

따라서

$\sin B=\dfrac{\overline{\text{CA}}}{\overline{\text{BC}}}\times\sin A$

$=\dfrac{4k}{3k}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

답 ①

2 $\angle\text{B}=180^\circ-\angle\text{A}-\angle\text{C}$

$=105^\circ-\angle\text{C}$

$\angle\text{B}-\angle\text{C}=(105^\circ-\angle\text{C})-\angle\text{C}$

$=105^\circ-2\angle\text{C}$

$=15^\circ$

$2\angle\text{C}=90^\circ$

$\angle\text{C}=45^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{AB}}}{\sin C}=8$

따라서 $\overline{\text{AB}}=8\sin45^\circ=4\sqrt{2}$

답 ④

3 $\overline{\text{CA}}=a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{BC}}^2=\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{CA}}^2-2\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{CA}}\times\cos A$

이므로

$(\sqrt{17})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

$a>0$이므로

$a=2$

즉, $\overline{\text{CA}}=2$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{CA}}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}$

$=2\sqrt{2}$

답 ②

4 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 AOH와 ABP는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{AO} : \overline{AB}=4 : 8=1 : 2$

$\overline{OH}=3$이고 $\overline{OH} : \overline{BP}=1 : 2$이므로

$\overline{BP}=2\overline{OH}=2\times3=6$

$\overline{OB}=\overline{OP}=4$이므로

삼각형 POB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle POB)=\frac{\overline{OB}^2+\overline{OP}^2-\overline{BP}^2}{2\times\overline{OB}\times\overline{OP}}=\frac{4^2+4^2-6^2}{2\times4\times4}=-\frac{1}{8}$$

답 ①

5 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$\sin^2(A+B)=\sin^2(\pi-C)=\sin^2 C$이므로

$$\sin^2(A+B)+\cos^2 A=\sin^2 C+1-\sin^2 A=\sin^2 B+1$$

에서 $\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B$

$\frac{c^2}{4R^2}=\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}$

$c^2=a^2+b^2$

삼각형 ABC는 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{BC}=k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{AC}=2k$이고

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{4k^2+k^2}=\sqrt{5}k$$

따라서 $\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ③

6 두 삼각형 APD, QPC는 모두 직각삼각형이고 $\angle APD=\angle QPC$이므로 두 삼각형 APD, QPC는 닮음이다.

$S_1 : S_2=4 : 1$이므로 두 삼각형 APD, QPC의 닮음비는 $2 : 1$이다.

$\overline{DP} : \overline{CP}=2 : 1$에서

$\overline{DP}=\frac{2}{3}\overline{CD}=\frac{2}{3}\times3=2$

$\overline{CP}=\frac{1}{3}\overline{CD}=\frac{1}{3}\times3=1$

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DP}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

삼각형 ACP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ACP)}=\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$$

이므로

$$\sin(\angle CAP)=\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}}\times\sin(\angle ACP)=\frac{1}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{26}}{26}$$

따라서 $\sin^2(\angle CAP)=\frac{1}{26}$

답 ①

7 $\angle ABC=\theta$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{(\sqrt{6})^2+1^2-3^2}{2\times\sqrt{6}\times1}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

점 D는 선분 BC를 $5 : 4$로 외분하는 점이므로

$\overline{BD}=5$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos\theta=(\sqrt{6})^2+5^2-2\times\sqrt{6}\times5\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=6+25+10=41$$

따라서 $\overline{AD}=\sqrt{41}$

답 ⑤

8 점 D가 삼각형 ABC의 외접원 위의 점이므로

$$\cos(\angle ADC)=\cos(\pi-\angle ABC)=-\cos(\angle ABC)=\frac{1}{4}$$

$$\sin(\angle ADC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ADC)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\overline{AD}=\overline{CD}=a$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle ADC)$$

$(2\sqrt{3})^2=a^2+a^2-2\times a\times a\times\frac{1}{4}$

$12=\frac{3}{2}a^2$

$a^2=8$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$

$=\frac{1}{2}\times a\times a\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\sqrt{15}$

답 ②

9 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{DA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{DA}\times\cos A$

$=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}$

$=13$

이므로 $\overline{BD}=\sqrt{13}$

$\overline{BC}=\overline{BD}=\sqrt{13}$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BDA)}=\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle DAB)}$

$\sin(\angle BDA)=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}\times\sin(\angle DAB)$

$=\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

$\cos(\angle BDA)=\sqrt{1-\sin^2(\angle BDA)}$

$=\frac{5}{2\sqrt{13}}$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여 삼각형 BCD의 외접원의 지름의 길이는

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}$

$=\frac{\sqrt{13}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle BDA\right)}$

$=\frac{\sqrt{13}}{\cos(\angle BDA)}$

$=\frac{\sqrt{13}}{\frac{5}{2\sqrt{13}}}$

$=\frac{26}{5}$

답 ①

10 $\sin(\angle CAB):\sin(\angle BCA)=3:5$이므로

$\sin(\angle BCA)=\frac{5}{3}\sin(\angle CAB)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CAB)}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BCA)}$

$\overline{AB}=\frac{\sin(\angle BCA)}{\sin(\angle CAB)}\times\overline{BC}$

$=\frac{5}{3}\times6=10$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=100+36-2\times10\times6\times\frac{3}{4}$

$=46$

따라서 $\overline{CA}=\sqrt{46}$

답 ②

11 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BD}=\overline{BM}=\overline{AM}$

$=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}$

$=\sqrt{5}$

점 M이 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{CM}=\overline{BM}=\sqrt{5}$

$\angle CMA=\theta$라 하면 삼각형 AMC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{AM}^2+\overline{CM}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{CM}}$

$=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\frac{3}{5}$

점 B에서 선분 DM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle BMH=\theta$

$\overline{DM}=2\times\overline{MH}=2\times\overline{BM}\cos\theta$

$=2\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}$

$=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ADM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AM}^2+\overline{DM}^2-2\times\overline{AM}\times\overline{DM}\times\cos(\pi-\theta)$

$=(\sqrt{5})^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2+2\times\sqrt{5}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}$

$=\frac{97}{5}$

답 ⑤

12 $\cos B=-\sin A$ …… ㉠

$0<A<\pi$에서 $\sin A>0$

㉠에서 $\cos B<0$

반지름의 길이가 3인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin B}=6$ …… ㉡

㉡에서 $\sin B=\dfrac{\overline{CA}}{6}=\dfrac{5}{6}$

$\cos B<0$이므로

$\cos B=-\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

㉠에서

$\sin A=-\cos B=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

따라서 ㉡에서

$\overline{BC}=6\sin A=6\times\dfrac{\sqrt{11}}{6}=\sqrt{11}$

답 ④

Level **2** **기본 연습** 본문 63~65쪽

1 ⑤	**2** ②	**3** ③	**4** ②	**5** ④	**6** ①
7 ③	**8** ④	**9** ③	**10** ⑤	**11** ①	

1 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$이므로

직각삼각형 PAB에서

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AP}^2}$

$=\sqrt{25-9}=4$

$\angle BPQ=\theta$라 하면 삼각형 PBQ의 외접원의 지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BQ}}{\sin\theta}=5$

$\overline{BQ}=5\sin\theta$

삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BQ}^2=\overline{PQ}^2+\overline{PB}^2-2\times\overline{PQ}\times\overline{PB}\times\cos\theta$

$25\sin^2\theta=9+16-2\times3\times4\times\cos\theta$

$25(1-\cos^2\theta)=25-24\cos\theta$

$\cos\theta(25\cos\theta-24)=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{24}{25}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{24}{25}\right)^2}$

$=\dfrac{7}{25}$

따라서 삼각형 PBQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PB}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{7}{25}=\dfrac{42}{25}$

답 ⑤

2 점 D는 선분 BC의 수직이등분선 위의 점이므로

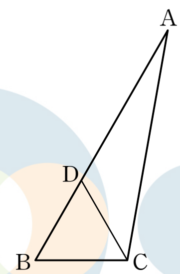
$\overline{BD}=\overline{CD}$

점 C는 선분 BD의 수직이등분선 위의 점이므로

$\overline{BC}=\overline{DC}$

삼각형 BCD는 정삼각형이고

$\overline{CD}=a$라 하면 $\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=a$



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}$

$\dfrac{a}{\dfrac{\sqrt{21}}{14}}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}$

$\overline{AC}=\dfrac{a}{\dfrac{\sqrt{21}}{14}}\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{14a}{\sqrt{21}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}a$

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$

$=(a+2)+a$

$=2a+2$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos 60^\circ$

$(\sqrt{7}a)^2=(2a+2)^2+a^2-2\times(2a+2)\times a\times\dfrac{1}{2}$

$4a^2-6a-4=0$

$2(2a+1)(a-2)=0$

$a>0$이므로

$a=2$

따라서 $\overline{AB}=2a+2=2\times2+2=6$

답 ②

3 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle CDB)$

$=\left(\frac{7}{2}\right)^2+(\sqrt{15})^2-2\times\frac{7}{2}\times\sqrt{15}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{35}\right)$

$=\frac{121}{4}$

$\overline{BC}=\frac{11}{2}$

점 D를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하면 사각형 ABED는 평행사변형이므로

$\overline{BE}=\overline{DA}=2$

$\overline{AB}=x$라 하면 $\overline{DE}=\overline{AB}=x$

$\angle BED=\theta$라 하면 $\angle DEC=\pi-\theta$

삼각형 BED에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{DE}^2+\overline{BE}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{DE}\times\overline{BE}}$

$=\frac{x^2+2^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2\times x\times2}$

$=\frac{x^2-\frac{33}{4}}{4x}$

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\theta)=\frac{\overline{DE}^2+\overline{CE}^2-\overline{CD}^2}{2\times\overline{DE}\times\overline{CE}}$

$=\frac{x^2+\left(\frac{11}{2}-2\right)^2-(\sqrt{15})^2}{2\times x\times\left(\frac{11}{2}-2\right)}$

$=\frac{x^2-\frac{11}{4}}{7x}$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$\frac{x^2-\frac{11}{4}}{7x}=-\frac{x^2-\frac{33}{4}}{4x}$, $x^2=\frac{25}{4}$

$x=\frac{5}{2}$

따라서 $\overline{AB}=\frac{5}{2}$

답 ③

4 삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle DAB=\alpha$라 하면 $\angle BDA=\alpha$

$\sin(\angle ADC)=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

이므로 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}$

$\overline{AC}=\overline{CD}\times\frac{\sin(\angle ADC)}{\sin(\angle CAD)}$

$=1\times\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{4}\sin\alpha}=4$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$

$\overline{AB}=\overline{AC}\times\frac{\sin C}{\sin B}$

$=4\times\frac{\frac{5}{4}\sin B}{\sin B}=5$

점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AD}=2\times\overline{AH}=2\times\overline{AB}\cos\alpha$

$=10\cos\alpha$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle ADC)$

이므로

$4^2=(10\cos\alpha)^2+1^2+2\times10\cos\alpha\times1\times\cos\alpha$

$120\cos^2\alpha=15$, $\cos^2\alpha=\frac{1}{8}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이므로

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=2R$

$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin\alpha}=\frac{5}{2\times\frac{\sqrt{14}}{4}}=\frac{5\sqrt{14}}{7}$

따라서 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\frac{50}{7}\pi$

답 ②

5 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

조건 (가)에서

$3\sin A=2\sin B$이므로

$\frac{3a}{2R}=\frac{2b}{2R}$

$b=\frac{3}{2}a$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$3\sin C\cos B=\sin B\cos C$이므로

$3\times\frac{c}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$3(a^2+c^2-b^2)=a^2+b^2-c^2$

$4c^2=4b^2-2a^2$

㉠에서 $b^2=\frac{9}{4}a^2$이므로

$4c^2=9a^2-2a^2=7a^2$

$c=\frac{\sqrt{7}}{2}a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{a^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}a\right)^2}{2\times a\times\frac{3}{2}a}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ④

6 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\theta$라 하면

$\angle ADE=\theta$

$\angle ABC=\frac{1}{2}\times(\pi-\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이므로

$\cos(2\angle ABC)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\sqrt{7}\sin(\angle ADE)+\cos(2\angle ABC)=1$에서

$\sqrt{7}\sin\theta-\cos\theta=1$

$\cos\theta=\sqrt{7}\sin\theta-1$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$에서

$\sqrt{7}\sin\theta-1=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$7\sin^2\theta-2\sqrt{7}\sin\theta+1=1-\sin^2\theta$

$2\sin\theta(4\sin\theta-\sqrt{7})=0$

$\sin\theta=0$ 또는 $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$

점 D는 선분 AB의 중점이므로

$\overline{AD}=3$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2&=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta\\&=9+36-2\times3\times6\times\frac{3}{4}\\&=18\end{aligned}$$

$\overline{CD}=3\sqrt{2}$

선분 AD의 중점을 M이라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{AE}}=\frac{3}{2\overline{AE}}$

$\frac{3}{2\overline{AE}}=\frac{3}{4}$이므로 $\overline{AE}=2$이고

$\overline{DE}=\overline{AE}=2$

$$\begin{aligned}\overline{CE}&=\overline{AC}-\overline{AE}\\&=6-2=4\end{aligned}$$

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle AED)}$

$$\begin{aligned}\sin(\angle AED)&=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}\times\sin\theta\\&=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}\\&=\frac{3\sqrt{7}}{8}\end{aligned}$$

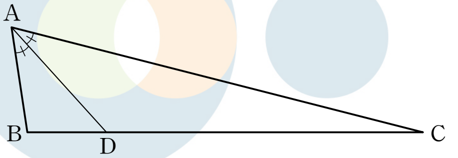
$$\begin{aligned}\sin(\angle DEC)&=\sin(\pi-\angle AED)\\&=\sin(\angle AED)\\&=\frac{3\sqrt{7}}{8}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 DCE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 DCE의 지름의 길이는 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}2R&=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle DEC)}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{8\sqrt{14}}{7}\end{aligned}$$

답 ①

7



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2&=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos(\angle BAD)\\&=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{5}{6}=5\end{aligned}$$

이므로 $\overline{BD}=\sqrt{5}$

두 삼각형 ABD, ADC의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle DAB)$

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin(\angle CAD)$

$S_1 : S_2=\overline{BD} : \overline{CD}$이고

$\angle DAB=\angle CAD$이므로

$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{AC}=a$라 하면

$\overline{CD}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}a}{3}$ …… ㉠

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos(\angle DAC)$

$=4^2+a^2-2\times4\times a\times\frac{5}{6}$

$=a^2-\frac{20}{3}a+16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{5}{9}a^2=a^2-\frac{20}{3}a+16$

$a^2-15a+36=0$

$(a-3)(a-12)=0$

$a=3$ 또는 $a=12$

$a=3$이면 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고 선분 AD는 $\angle BAC$의 이등분선이므로 삼각형 ABD는

$\angle ADB=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이지만

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a=12$

$\overline{CD}=\frac{\sqrt{5}}{3}\times12=4\sqrt{5}$

따라서 $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=\sqrt{5}+4\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

답 ③

8 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CBD)}=2\times3$

$\sin(\angle CBD)=\frac{\overline{CD}}{2\times3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

삼각형 ABC가 예각삼각형이므로

$\angle CBD=\frac{\pi}{6}$

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하자.

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{BD}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{BC}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$9=32+b^2-2\times4\sqrt{2}\times b\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b^2-4\sqrt{6}b+23=0$

실수 b는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 한 근이다.

…… ㉠

$\angle ABD=\angle CBD$이므로 원주각의 성질에 의하여

$\overline{AD}=\overline{CD}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$9=32+a^2-2\times4\sqrt{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a^2-4\sqrt{6}a+23=0$

실수 a는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 한 근이다.

…… ㉡

㉠, ㉡에서 두 실수 a, b는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 근이다.

$a<b$이므로 두 실수 a, b는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 서로 다른 두 실근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=4\sqrt{6}$

따라서 $\overline{AB}+\overline{BC}=4\sqrt{6}$

답 ④

9 $\angle AOB=\alpha$라 하면 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos\alpha$

$36=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha$

$\cos\alpha=1-\frac{18}{R^2}$ …… ㉠

삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=2R$

$\sin\alpha=\frac{3}{R}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{3}{R}\right)^2+\left(1-\frac{18}{R^2}\right)^2$

$=\frac{18^2}{R^4}-\frac{27}{R^2}+1=1$

$27R^2=18^2$

$R=2\sqrt{3}$

$\cos\alpha=1-\frac{18}{(2\sqrt{3})^2}=-\frac{1}{2}$이므로

$\alpha=\frac{2}{3}\pi$

삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OBA=\frac{\pi}{6}$

$\angle BDO=\beta$라 하면

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{39}}{13}$

삼각형 OBD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{OB}}{\sin\beta}$

$\overline{OD}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\beta}\times\overline{OB}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{39}}{13}}\times2\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\overline{BD}=x$라 하면 삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OB}^2=\overline{OD}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{OD}\times\overline{BD}\times\cos\beta$

$12=\frac{13}{4}+x^2-2\times\frac{\sqrt{13}}{2}\times x\times\frac{\sqrt{13}}{13}$

$4x^2-4x-35=0$

$(2x-7)(2x+5)=0$

$x=\frac{7}{2}$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$

$x>0$이므로 $x=\frac{7}{2}$

따라서 삼각형 OBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{BD}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$

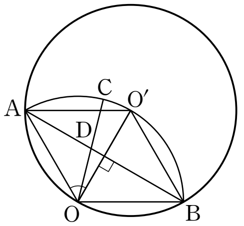
$=\frac{7\sqrt{3}}{4}$

답 ③

다른 풀이

삼각형 AOB의 외접원의 중심을 O′이라 하자. 점 O′은 선분 AB의 수직이등분선 위에 있고 $\overline{OO'}=R$이므로 점 O′은 부채꼴 OAB의 호 AB를 이등분하는 점이다.

$\overline{AO'}=\overline{BO'}=\overline{OO'}=R$이므로 두 삼각형 AOO′, BO′O는 한 변의 길이가 R인 정삼각형이다.



$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AO}\times\sin(\angle AOO')$에서

$\angle AOO'=\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times6=R\times\sin\frac{\pi}{3}$

$R=3\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\angle BDO=\beta$라 하면

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{39}}{13}$

삼각형 OBD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OD}}{\sin(\angle OBA)}=\frac{\overline{OB}}{\sin\beta}$

$\overline{OD}=\frac{\sin(\angle OBA)}{\sin\beta}\times\overline{OB}$

$=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\beta}\times\overline{OB}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{39}}{13}}\times2\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\overline{BD}=x$라 하면 삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OB}^2=\overline{OD}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{OD}\times\overline{BD}\times\cos\beta$

$12=\frac{13}{4}+x^2-2\times\frac{\sqrt{13}}{2}\times x\times\frac{\sqrt{13}}{13}$

$4x^2-4x-35=0$

$(2x-7)(2x+5)=0$

$x=\frac{7}{2}$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$

$x>0$이므로 $x=\frac{7}{2}$

따라서 삼각형 OBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{BD}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{7\sqrt{3}}{4}$

10 점 D는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\frac{2}{3}\overline{BC}=\frac{2}{3}\times12=8$

$\overline{CD}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{1}{3}\times12=4$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{ED}:\overline{EB}$에서

$\overline{AB}:\overline{ED}=\overline{AC}:\overline{EB}$이고

$\angle BAE=\angle BED$이므로

두 삼각형 ABC, EDB는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{BC}:\overline{DB}=12:8=3:2$

$\overline{BE}=a$, $\angle DBE=\theta$라 하면

$\overline{AC}=\frac{3}{2}a$

$\angle BCA=\angle DBE=\theta$

삼각형 EBC는 $\overline{BE}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{CE}=\overline{BE}=a$

$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=\frac{3}{2}a-a=\frac{a}{2}$

$\overline{AE}:\overline{EC}=\frac{a}{2}:a=1:2$이고

삼각형 ABE의 넓이가 $9\sqrt{5}$이므로

삼각형 EBC의 넓이가 $18\sqrt{5}$

점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 EBC의 넓이가 $18\sqrt{5}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\times12\times\overline{EH}=18\sqrt{5}$$

$\overline{EH}=3\sqrt{5}$

$a=\overline{CE}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{EH}^2}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{5})^2}=9$

$\overline{AC}=\frac{3}{2}a=\frac{27}{2}$

$\cos\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{EC}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\cos\theta$$
$$=\left(\frac{27}{2}\right)^2+4^2-2\times\frac{27}{2}\times4\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{505}{4}$$

따라서 $\overline{AD}=\frac{\sqrt{505}}{2}$

답 ⑤

11 두 점 M, N이 각각 선분 AB, AC의 중점이므로

$\overline{BC}=2\overline{MN}$이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{MN}$

$\overline{MD}=2\overline{MN}$이므로

$\overline{MD}=\overline{BC}$, $\overline{MD}\,/\!/\,\overline{BC}$

즉, 사각형 BCDM은 평행사변형이므로

$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DC}$에서 $\angle BAC=\angle DCA$이고

원주각의 성질에 의하여

$\overline{BC}=\overline{AD}=5$

$\overline{MD}=\overline{BC}=5$이므로 삼각형 AMD는 $\overline{AD}=\overline{MD}$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 H,

$\angle AMD=\angle ABC=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{MD}}=\frac{\frac{1}{4}\overline{AB}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$$
$$=40+25-2\times2\sqrt{10}\times5\times\frac{\sqrt{10}}{10}$$
$$=45$$

$\overline{AC}=3\sqrt{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$$

따라서 $R=\frac{\overline{AC}}{2\sin\theta}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 66쪽

1 ③ **2** ② **3** 20

1 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이 P이므로

$\overline{AP}=\sqrt{10}$에서 $\overline{CP}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

두 직선 AQ와 BC가 서로 평행하므로

$\angle PAQ=\angle PCB$, $\angle PQA=\angle PBC$

두 삼각형 APQ, CPB는 서로 닮음이고

$\overline{QP}:\overline{BP}=\overline{AP}:\overline{CP}=2:1$ …… ㉠

점 D가 선분 PQ의 중점이므로

$\overline{PD}=\overline{QD}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{BP}=\overline{PD}$

원주각의 성질에서

$\angle ADB=\angle ACB$, $\angle CAD=\angle CBD$

이므로 두 삼각형 APD, BPC는 서로 닮음이고

$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{DP}:\overline{CP}$

$\overline{BP}=\overline{PD}=a$ $(a>0)$이라 하면

$\sqrt{10}:a=a:\frac{\sqrt{10}}{2}$

$a^2=\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=5$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=x$라 하면 삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BP}^2=\overline{BC}^2+\overline{CP}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CP}\times\cos(\angle ACB)$

이므로

$5=x^2+\frac{5}{2}-2\times x\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$2x^2-4\sqrt{2}x-5=0$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$x>0$이므로 $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\overline{AB}=y$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos(\angle ACB)$

이므로

$y^2=\frac{25}{2}+\frac{45}{2}-2\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=5$

$y>0$이므로 $y=\sqrt{5}$

$\sin(\angle ACB)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ACB)}$

$=\sqrt{1-\frac{4}{5}}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC의 외접원이 원 O이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=2R$

따라서 $R=\frac{\overline{AB}}{2\sin(\angle ACB)}=\frac{\sqrt{5}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{2}$

답 ③

2 $\overline{BC}=a$라 하면 $\overline{AC}=2a$이므로

$\overline{AM}=\overline{CM}=a$

$\angle BCA=\alpha$, $\angle ABM=\beta$라 하면

$\sin\alpha : \sin\beta=6 : 5\sqrt{2}$에서

$\sin\beta=\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\alpha$

$\angle AMB=\gamma$라 하면

$\angle BMC=\pi-\gamma$

삼각형 BCM에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BM}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-\gamma)}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\gamma}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ …… ㉠

삼각형 ABM에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AM}}{\sin\beta}=\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$

$\frac{a}{\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{5\sqrt{2}\times\overline{AB}}{6a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}\times\overline{AB}}{6a}$

$\overline{AB}=\frac{3a^2}{5}$이므로

$\overline{AB}^2=\frac{9a^4}{25}$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\gamma=\frac{\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{BM}}$

$=\frac{a^2+2-\frac{9}{25}a^4}{2\times a\times\sqrt{2}}$

$=\frac{-\frac{9}{25}a^4+a^2+2}{2a\sqrt{2}}$

삼각형 BCM에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\gamma)=\frac{\overline{BM}^2+\overline{CM}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{BM}\times\overline{CM}}$

$=\frac{2+a^2-a^2}{2\times\sqrt{2}\times a}$

$=\frac{2}{2a\sqrt{2}}$

$\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$이므로

$\frac{2}{2a\sqrt{2}}=-\frac{-\frac{9}{25}a^4+a^2+2}{2a\sqrt{2}}$

$9a^4-25a^2-100=0$

$(9a^2+20)(a^2-5)=0$

$a>0$이므로 $a^2=5$이고 $a=\sqrt{5}$

$\cos(\pi-\gamma)=\frac{2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin(\pi-\gamma)=\sqrt{1-\cos^2(\pi-\gamma)}$

$=\frac{3}{\sqrt{10}}$

삼각형 BCM의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BM}\times\overline{CM}\times\sin(\pi-\gamma)$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}$

삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 BCM의 넓이의 2배이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$2\times\frac{3}{2}=3$

답 ②

3 삼각형 AOQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{OAQ})=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos(\angle\mathrm{AQO})=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos(\angle\mathrm{QOA})=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

조건 (가)에서

$2\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2ab}{c^2}$

양변에 $2abc^2$을 곱하면

$(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)=4a^2b^2$

$c^4-(a^2-b^2)^2+c^2(a^2+b^2)-c^4=4a^2b^2$

$(a^2+b^2)^2-c^2(a^2+b^2)=0$

$(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a^2+b^2>0$이므로

$c^2=a^2+b^2$

삼각형 AOQ는 $\angle\mathrm{AOQ}=90°$인 직각삼각형이므로

$\cos(\angle\mathrm{AQO})=\frac{b}{c}$

$\sin(\angle\mathrm{OAQ})=\frac{b}{c}$

조건 (나)에서

$\cos(\angle\mathrm{OPA})=\sin(\angle\mathrm{OAQ})=\frac{b}{c}$

$=\cos(\angle\mathrm{AQO})$

이므로 $\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{AQO}$ …… ㉠

삼각형 APO의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 AOQ의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin(\angle\mathrm{OPA})}=2R_1$

$\frac{a}{\sin(\angle\mathrm{AQO})}=2R_2$

이므로 ㉠에서

$R_1=R_2$

직선 OQ는 두 점 A, O를 지나는 직선 $y=x$에 수직이므로 직선 OQ의 방정식은

$y=-x$

점 Q는 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=-x$가 만나는 점이므로 $x^2-2x=-x$에서

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x>0$이므로 $x=1$

점 Q의 좌표는 $(1, -1)$, 삼각형 AOQ의 외심의 좌표는

$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$이고

$R_2=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

두 삼각형 APO, AOQ는 외접원의 반지름의 길이가 같으므로 두 삼각형 APO, AOQ의 외접원은 직선 AO에 대하여 대칭이다.

삼각형 AOQ의 외심 $(2, 1)$을 직선 AO, 즉 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 삼각형 APO의 외심이므로 삼각형 APO의 외심의 좌표는 $(1, 2)$

$R_1=R_2=\sqrt{5}$에서 점 P는 곡선 $y=x^2-2x$와 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$가 만나는 점이므로

$(x-1)^2+(x^2-2x-2)^2=5$

$x^2-2x+1+(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+4=5$

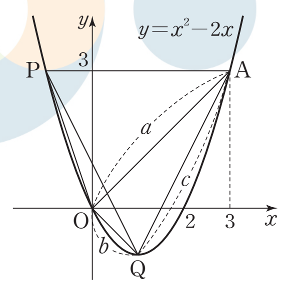
$(x^2-2x)(x^2-2x-3)=0$

$x(x-2)(x-3)(x+1)=0$

점 P의 x좌표는 음수이므로

$\mathrm{P}(-1, 3)$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=\{1-(-1)\}^2+(-1-3)^2=20$



답 20

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 69~77쪽

1 ①	**2** ③	**3** ③	**4** 9	**5** ②	**6** ①
7 ②	**8** ⑤	**9** ②	**10** ④		

1 $a_2-a_4=6$, $a_2+a_4=10$에서

$a_2=8$, $a_4=2$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=a_2+2d$이므로

$2=8+2d$

$d=-3$

따라서

$a_1=a_2-d=8-(-3)=11$

답 ①

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=a_2+2d$이므로

$a_2-a_4=6$에서

$a_2-(a_2+2d)=-2d=6$

$d=-3$

$a_2+a_4=10$에서

$a_2+a_4=2a_3$이므로

$a_3=5$

따라서

$a_1=a_3-2d=5-2\times(-3)=11$

2 모든 자연수 n에 대하여

$|a_n|=|b_{2n+1}|$ ...... ㉠

㉠에 의하여 $|a_3|=|b_7|$

$a_3=b_7$ 또는 $a_3=-b_7$

만약 $a_3=b_7$이면 $a_3-b_7=8$을 만족시킬 수 없으므로

$a_3=-b_7$

즉, $a_3-(-a_3)=8$

$a_3=4$, $b_7=-4$ ...... ㉡

㉠에 의하여 $|a_4|=|b_9|$이고, 조건 (나)에서 $a_5=b_{11}$이므로

$a_4=\dfrac{a_3+a_5}{2}=\dfrac{a_5+4}{2}$,

$b_9=\dfrac{b_7+b_{11}}{2}=\dfrac{-4+a_5}{2}=\dfrac{a_5-4}{2}$

즉, $\left|\dfrac{a_5+4}{2}\right|=\left|\dfrac{a_5-4}{2}\right|$

이때 $\dfrac{a_5+4}{2}=\dfrac{a_5-4}{2}$를 만족시키는 a_5의 값은 존재하지 않으므로

$\dfrac{a_5+4}{2}=-\dfrac{a_5-4}{2}$

$a_5=0$, $b_{11}=0$ ...... ㉢

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

㉡에서 $a+2d=4$,

㉢에서 $a+4d=0$

이므로

$a=8$, $d=-2$

$a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2n+10$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 d'이라 하면

$b_n=b+(n-1)d'$

㉡에서 $b+6d'=-4$

㉢에서 $b+10d'=0$

이므로

$b=-10$, $d'=1$

$b_n=-10+(n-1)\times1$

$\quad=n-11$

따라서 $a_2=6$, $b_8=-3$이므로

$a_2+b_8=3$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 d'이라 하면

$a_n=a+(n-1)d$, $b_n=b+(n-1)d'$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|=|b_{2n+1}|$에서

'모든 자연수 n에 대하여 $a_n=b_{2n+1}$이다.'

와

'모든 자연수 n에 대하여 $a_n=-b_{2n+1}$이다.'

중 하나만 성립한다.

만약 $a_n=b_{2n+1}$이면 $a_3=b_7$이므로 $a_3-b_7=8$을 만족시킬 수 없다.

$a_n=-b_{2n+1}$ ...... ㉠

㉠에 의하여 $b_7=-a_3$이고, 조건 (나)에서 $a_3-b_7=8$이므로

$2a_3=8$

$a+2d=4$ ...... ㉡

㉠에 의하여 $b_{11}=-a_5$이고, 조건 (나)에서 $a_5=b_{11}$이므로

$2a_5=0$

$a+4d=0$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=8$, $d=-2$

$a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2n+10$

$b_{2n+1}=-a_n=2n-10$

이때 $b_n=b+(n-1)d'$에서 $b_{2n+1}=b+2nd'$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$b+2nd'=2n-10$

$d'=1$, $b=-10$

$b_n=n-11$

따라서 $a_2=6$, $b_8=-3$이므로

$a_2+b_8=3$

3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_5-a_4=3$에서 $d=3$이므로

$a_3=10$에서

$a+2\times3=10$

$a=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\dfrac{6\times(2\times4+5\times3)}{2}=69$

답 ③

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 d'이라 하면

$a_n=a+(n-1)d$, $b_n=b+(n-1)d'$ …… ㉠

이므로 a_n, b_n은 각각 n에 대한 일차식이다.

$a_nb_n=4n^2+36n+45$에서

$4n^2+36n+45=(2n+3)(2n+15)$ …… ㉡

㉠에서 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a, b, d, d'은 모두 자연수이다.

즉, ㉡에서

$a_n=2n+3$, $b_n=2n+15$ 또는 $a_n=2n+15$, $b_n=2n+3$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le S_n$이고, $2n+3<2n+15$이므로 $S_k=b_k$를 만족시키는 자연수 k가 존재하는 경우는

$a_n=2n+3$, $b_n=2n+15$

$S_n=\dfrac{n\{5+(2n+3)\}}{2}=n^2+4n$

이므로 $S_k=b_k$에서

$k^2+4k=2k+15$

$k^2+2k-15=0$

$(k+5)(k-3)=0$

이때 k는 자연수이므로

$k=3$

따라서 $a_k=a_3=2\times3+3=9$

답 9

5 $a_5=S_5-S_4$

$=\dfrac{6\times5}{5+4}-\dfrac{6\times4}{4+4}$

$=\dfrac{10}{3}-3=\dfrac{1}{3}$

답 ②

6 $S_n=n^2-n+26$에서

$a_1=S_1=26$

$n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-n+26)-\{(n-1)^2-(n-1)+26\}$

$=2n-2$

세 수 a_1, a_x, a_y가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_x=a_1+a_y$

$2(2x-2)=26+(2y-2)$

$y=2x-14$

이때 $x<y$이므로

$x<2x-14$

$x>14$

$x+y=3x-14$이므로 $x+y$는 x의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $x+y$는 $x=15$, $y=16$일 때 최소이므로 $x+y$의 최솟값은

$15+16=31$

답 ①

7 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

만약 $a=0$ 또는 $r=0$이면 $a_2=0$, $a_5=0$이므로 $a_5=3a_2+5$를 만족시킬 수 없다.

즉, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 0이 아니다.

$a_6=2a_5$에서

$\dfrac{a_6}{a_5}=r=2$

$a_n=a\times2^{n-1}$이므로 $a_5=3a_2+5$에서

$16a=3\times2a+5$

$10a=5$

$a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\times2^{n-1}=2^{n-2}$이므로

$a_3=2$

답 ②

8 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 정수 r이므로

$a_n=r\times r^{n-1}=r^n$

$a_k=2^{12}$에서

$r^k=2^{12}$ ...... ㉠

자연수 k의 값이 홀수이면 $r=2^{\frac{12}{k}}$이므로 ㉠을 만족시키는 r의 개수가 1이고, k의 값이 짝수이면 $r=\pm2^{\frac{12}{k}}$이므로 ㉠을 만족시키는 r의 개수가 2이다. r이 정수이므로 자연수 k로 가능한 값은 12의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 12로 홀수 2개, 짝수 4개이다.

따라서 조건을 만족시키는 r의 개수는

$2\times1+4\times2=10$

답 ⑤

참고

$k=1$일 때, $r=2^{12}$

$k=2$일 때, $r=\pm2^6$

$k=3$일 때, $r=2^4$

$k=4$일 때, $r=\pm2^3$

$k=6$일 때, $r=\pm2^2$

$k=12$일 때, $r=\pm2$

9 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$a_n=ar^{n-1}$, $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$2S_4=5(a_2+a_3)$에서

$2\times\frac{a(r^4-1)}{r-1}=5(ar+ar^2)$

$2a(r+1)(r^2+1)=5ar(1+r)$

$a(r+1)(2r^2-5r+2)=0$

$a(r+1)(2r-1)(r-2)=0$

만약 $a=0$이면 $S_5=0$, $a_6=0$이므로 $S_5=a_6-1$을 만족시킬 수 없다.

즉, $a\neq0$이고, $r>1$이므로

$r=2$

$S_5=a_6-1$에서

$\frac{a(2^5-1)}{2-1}=a\times2^5-1$

$31a=32a-1$

$a=1$

따라서 $S_6=\frac{2^6-1}{2-1}=63$

답 ②

10 $a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5\times a_6=64$에서

$\log_2(a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5\times a_6)=\log_2 64$

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\log_2 a_4+\log_2 a_5+\log_2 a_6$

$=\log_2 2^6=6$

이때 $b_n=\log_2 a_n$이므로

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=6$

등차수열 $\{b_n\}$의 공차가 2이므로

$\frac{6(2b_1+5\times2)}{2}=6$

$b_1=-4$

즉, $b_n=-4+2(n-1)=2n-6$

$b_n=\log_2 a_n$에서

$a_n=2^{b_n}=2^{2n-6}=4^{n-3}$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $4^{-2}=\frac{1}{16}$이고 공비가 4인 등비수열이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$\frac{\frac{1}{16}(4^5-1)}{4-1}=\frac{341}{16}$

답 ④

Level 1 **기초 연습** 본문 78~79쪽

1 ① **2** ② **3** ④ **4** ③ **5** ⑤ **6** ③
7 ① **8** ⑤

1 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)\times5$

$a_2+a_9=87$에서

$(a_1+5)+(a_1+8\times5)=87$

$2a_1=42$

따라서 $a_1=21$

답 ①

2 첫째항이 5이고, 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이

$\frac{n\{2\times5+(n-1)d\}}{2}$

이므로 첫째항부터 제6항까지의 합은

$\frac{6\times(10+5d)}{2}=60$

따라서 $d=2$

답 ②

3 $a_3+a_7=10$, $a_7-a_9=2$를 변끼리 빼면

$a_3+a_9=8$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 제3항부터 제9항까지의 합은

$$\frac{7\times(a_3+a_9)}{2}=\frac{7\times8}{2}$$
$$=28$$

답 ④

참고

(1) $a_3+a_7=10$, $a_7-a_9=2$를 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-n+10$

(2) $b_n=a_{n+2}$라 하면 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이고, $b_1=a_3$, $b_7=a_9$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 제3항부터 제9항까지의 합은 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합과 같다.

즉, $\frac{7(a_3+a_9)}{2}=\frac{7(b_1+b_7)}{2}$

다른 풀이

$a_3+a_7=10$, $a_7-a_9=2$를 변끼리 빼면

$a_3+a_9=8$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_3+a_9=(a+2d)+(a+8d)=2a+10d=8$

$a+5d=4$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 제3항부터 제9항까지의 합은

$$S_9-S_2=\frac{9(2a+8d)}{2}-\frac{2(2a+d)}{2}$$
$$=\frac{14a+70d}{2}$$
$$=\frac{14(a+5d)}{2}$$
$$=\frac{14\times4}{2}$$
$$=28$$

4 세 수 -1, x, 7이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$x=\frac{(-1)+7}{2}=3$$

세 수 x, 6, y가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$6^2=xy$

$y=12$

따라서 $x+y=3+12=15$

답 ③

5 $S_n=n^3+n$에서

$a_1=S_1=2$

$a_3=S_3-S_2=(27+3)-(8+2)=20$

따라서

$a_2+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$

$=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)-a_1-a_3$

$=S_8-a_1-a_3$

$=(512+8)-2-20$

$=498$

답 ⑤

6 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $a_1=r$이므로

$a_n=r\times r^{n-1}=r^n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_na_{n+1}>0$이므로

$r^n\times r^{n+1}=r^{2n+1}>0$

$2n+1$이 홀수이므로 $r>0$

$a_4=16$에서

$r^4=16$

$(r^2+4)(r+2)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

따라서 $a_1=2$

답 ③

7 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이고,

$a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_3=12$에서

$a+ar^2=12$ …… ㉠

$a_3+a_5=6$에서

$ar^2+ar^4=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$r^2=\frac{1}{2}$

이때 $r>0$이므로 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

㉠에서

$\frac{3}{2}a=12$

$a=8$

따라서 $a_n=8\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_6=8\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5=\sqrt{2}$

답 ①

8 모든 자연수 n에 대하여

$S_{n+1}-S_n=2^n$

이므로

$a_{n+1}=2^n$

수열 $\{a_n\}$의 제2항부터 제9항까지의 합은 수열 $\{a_{n+1}\}$의 제1항부터 제8항까지의 합과 같으므로 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이다.

따라서 구하는 합은

$\frac{2\times(2^8-1)}{2-1}=510$

답 ⑤

Level **2** **기본 연습** 본문 80~81쪽

1 ② **2** ① **3** ① **4** 4 **5** ② **6** ①
7 330 **8** 129

1 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d$, $b_n=b_1+(n-1)d'$ …… ㉠

$a_5-b_8=a_3-b_2$에서

$a_5-a_3=b_8-b_2$

$2d=6d'$

$d=3d'$ …… ㉡

$a_3-b_2=a_2$에서

$a_3-a_2=b_2$이므로

$d=b_1+d'$

㉡에 의하여

$b_1=d-d'=2d'$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$a_n=a_1+3(n-1)d'$, $b_n=2d'+(n-1)d'=(n+1)d'$

$a_k=b_k$인 자연수 k가 존재하므로

$a_1+(3k-3)d'=(k+1)d'$

$a_1=(-2k+4)d'$

이때 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

$a_1>0$, $d'>0$

즉, $-2k+4>0$에서 $k<2$이고 k는 자연수이므로 $k=1$

$a_1=b_1=2d'$

$a_n=2d'+3(n-1)d'=(3n-1)d'$, $b_n=(n+1)d'$이므로

$a_6-b_4=17d'-5d'=12d'$

d'은 자연수이므로 a_6-b_4는 $d'=1$일 때 최소이다.

따라서 a_6-b_4의 최솟값은 12이다.

답 ②

참고

$d'=1$일 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항은

$a_n=3n-1$, $b_n=n+1$이고 이는 주어진 조건을 만족시킨다.

2 $S_n=pn^2+qn+r$에서 $a_1=11$이므로

$p+q+r=11$ …… ㉠

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(pn^2+qn+r)-\{p(n-1)^2+q(n-1)+r\}$

$=2pn-p+q$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n+1}-a_{2n}=6$이므로

$a_{2n+1}-a_{2n}=\{2p(2n+1)-p+q\}-(2p\times 2n-p+q)$

$=2p=6$

에서 $p=3$

$n\geq 2$일 때 $a_n=6n-3+q$이고, $a_3=11$이므로

$a_3=18-3+q=11$

$q=-4$

㉠에 의하여 $r=12$

따라서 $S_n=3n^2-4n+12$이므로

$S_{10}=300-40+12=272$

답 ①

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d$

$|a_2|=|a_{10}|$에서

$a_2=a_1+d$, $a_{10}=a_1+9d$

이므로 $a_2=a_{10}$이면 $d=0$이 되어 $d>0$을 만족시킬 수 없다.

즉, $a_2=-a_{10}$

$a_2+a_{10}=2a_6=0$에서

$a_6=0$

방정식 $x^3+2x^2-3x=0$에서

$x(x+3)(x-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=1$

이때 $a_6=0$, $d>0$이므로 $a_5<0$에서

$a_5=-3$

$d=a_6-a_5=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_1-a_2)}{2}=5\times(-3)=-15$

답 ①

참고

조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=3n-18$

4 세 수 α, β, γ가 이 순서대로 공차가 2인 등차수열을 이루고, 세 수 $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$가 이 순서대로 공차가 2인 등차수열을 이루므로

$\beta-\alpha=\gamma-\beta=2$ …… ㉠

$f(\beta)-f(\alpha)=f(\gamma)-f(\beta)=2$

에서 세 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$, $\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$는 기울기가

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}=\dfrac{2}{2}=1$

인 직선 위의 점이다. 이 직선의 방정식을

$y=x+a$ (a는 $a>0$인 상수)

라 하면 세 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$, $\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$는 함수 $f(x)=x^3+kx^2$의 그래프와 직선 $y=x+a$의 교점이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-(x+a)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

이때 ㉠에 의하여 $\alpha=\beta-2$, $\gamma=\beta+2$이므로

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=\{x-(\beta-2)\}(x-\beta)\{x-(\beta+2)\}$

$=\{(x-\beta)-2\}\{(x-\beta)+2\}(x-\beta)$

$=(x-\beta)^3-4(x-\beta)$

$=x^3-3\beta x^2+(3\beta^2-4)x-\beta^3+4\beta$

즉, 모든 실수 x에 대하여

$x^3+kx^2-x-a=x^3-3\beta x^2+(3\beta^2-4)x-\beta^3+4\beta$

이므로

$-3\beta=k$ …… ㉡

$3\beta^2-4=-1$ …… ㉢

$\beta^3-4\beta=a$ …… ㉣

㉢에서 $\beta^2=1$이므로 ㉣에서

$-3\beta=a>0$, $\beta<0$

즉, $\beta=-1$

㉡에서 $k=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2$이고, $\gamma=\beta+2=1$이므로

$f(\gamma)=f(1)=1+3=4$

답 4

5 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$\log_3 a_5-\log_3 a_3=2$에서

$\log_3 \dfrac{a_5}{a_3}=2$, $\dfrac{a_5}{a_3}=3^2=9$

이때 $\dfrac{a_5}{a_3}=r^2$이므로

$r^2=9$ …… ㉠

a_2a_3은 음의 정수이므로

$a_2a_3=ar\times ar^2=9a^2r<0$

이때 $a^2>0$이므로 $r<0$

㉠에서 $r=-3$이므로

$a_n=a\times(-3)^{n-1}$

$a_3=9a$, $a_5=81a$이므로

$a_3=m$ (m은 자연수)라 하면 $a_5=9m$으로 자연수이다.

즉, $a=\dfrac{m}{9}$

$a_2a_3=(-3a)\times 9a=-27a^2$

$\quad=-27\times\left(\dfrac{m}{9}\right)^2=-\dfrac{m^2}{3}$

$-\dfrac{m^2}{3}$이 음의 정수가 되도록 하는 자연수 m은 3의 배수이므로 $m=3k$ (k는 자연수)라 할 수 있다.

즉, $a=\dfrac{3k}{9}=\dfrac{k}{3}$이므로

$a_n=\dfrac{k}{3}\times(-3)^{n-1}$

$a_4=\dfrac{k}{3}\times(-3)^3=-9k$이고, k는 자연수이므로

$a_4=-9k\le-9$

따라서 a_4의 최댓값은 -9이다.

답 ②

6 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)$에서

$2a(a+ar^2)=5ar(a+ar)$

$a^2(3r^2+5r-2)=0$

$a^2(3r-1)(r+2)=0$

$a=0$ 또는 $r=\dfrac{1}{3}$ 또는 $r=-2$ …… ㉠

조건 (나)에서

$a_p\times a_q=-18$

$a_p\times a_q=(a\times r^{p-1})\times(a\times r^{q-1})$

$\quad=a^2\times r^{p+q-2}=-18$

$a^2>0$, $r^{p+q-2}<0$에서

$r<0$이므로 ㉠에서

$r=-2$

$a^2\times(-2)^{p+q-2}=-18$에서

a^2이 자연수이고 $(-2)^{p+q-2}$은 -2의 거듭제곱이므로

$a^2=9$, $(-2)^{p+q-2}=-2$

$p+q=3$이고 $p<q$이므로

$p=1$, $q=2$

또 $a_6=a\times(-2)^5>0$에서 $a<0$이므로

$a=-3$

따라서 $a_n=-3\times(-2)^{n-1}$이므로

$a_p-a_q=a_1-a_2$

$=-3-\{-3\times(-2)\}$

$=-9$

답 ①

7 $S_n\ge S_{13}$에서

$n=14$일 때 $S_{14}\ge S_{13}$이므로

$S_{14}-S_{13}=a_{14}\ge 0$ ...... ㉠

$n=12$일 때 $S_{12}\ge S_{13}$이므로

$S_{13}-S_{12}=a_{13}\le 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a_{14}-a_{13}\ge 0$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 공차가 0 이상이고 $a_{13}\le 0$이므로

$n\le 13$일 때 $a_n\le 0$

$|S_6-S_3|=36$에서

$|a_6+a_5+a_4|=|3a_5|=36$

이때 $a_5\le 0$이므로

$a_5=-12$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

㉠에서 $a_{14}=a_5+9d=-12+9d\ge 0$

$d\ge\frac{4}{3}$

㉡에서 $a_{13}=a_5+8d=-12+8d\le 0$

$d\le\frac{3}{2}$

즉, $\frac{4}{3}\le d\le\frac{3}{2}$

$S_{33}=\frac{33(a_1+a_{33})}{2}$

$=\frac{33\times 2a_{17}}{2}$

$=33a_{17}$

이때 $a_{17}=a_5+12d=-12+12d$이고, $\frac{4}{3}\le d\le\frac{3}{2}$이므로

$4\le a_{17}\le 6$

이때 $S_{33}=33a_{17}$이므로

$33\times 4\le S_{33}\le 33\times 6$

$132\le S_{33}\le 198$

따라서 S_{33}의 최댓값과 최솟값이 각각 198, 132이므로 그 합은

$198+132=330$

답 330

8 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_1a_2<0$이므로 $a\times ar=a^2r<0$에서

$a\ne 0$, $r<0$

세 수 ar, a, ar^2이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{ar+ar^2}{2}$

$r^2+r-2=0$

$(r+2)(r-1)=0$

$r<0$이므로 $r=-2$

$S_n=\frac{a\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

$=\frac{a}{3}\{1-(-2)^n\}$

수열 $\{S_n-1\}$이 등비수열이므로

$S_n-1=-\frac{a}{3}\times(-2)^n+\frac{a}{3}-1$에서

$\frac{a}{3}-1=0$이므로

$a=3$

따라서 $S_n=1-(-2)^n$이므로

$S_7=1-(-2)^7$

$=1-(-128)$

$=129$

답 129

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_1a_2<0$이므로 $a\times ar=a^2r<0$에서

$a\ne 0$, $r<0$

세 수 ar, a, ar^2이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a=\frac{ar+ar^2}{2}$

$r^2+r-2=0$

$(r+2)(r-1)=0$

$r<0$이므로 $r=-2$

$S_n=\frac{a\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

$=\frac{a}{3}\{1-(-2)^n\}$

수열 $\{S_n-1\}$이 등비수열이므로 세 수 S_1-1, S_2-1, S_3-1이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

즉, $(S_2-1)^2=(S_1-1)(S_3-1)$이고, $S_1=a$, $S_2=-a$, $S_3=3a$이므로

$(-a-1)^2=(a-1)(3a-1)$

$a^2-3a=0$

$a(a-3)=0$

$a\ne 0$이므로 $a=3$

따라서 $S_n=1-(-2)^n$이므로

$S_7=1-(-2)^7=1-(-128)=129$

Level 3 실력 완성 본문 82쪽

1 ⑤ **2** 80 **3** ④

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 모든 항이 정수이므로 a_2, a_4는 모두 정수이고 d도 정수이다.
또 $a_2a_4=-48$, $a_4-a_2=2d$이므로 $|a_2|$, $|a_4|$는 모두 짝수이다.
즉, 순서쌍 $(|a_2|, |a_4|)$는
$(2, 24)$, $(4, 12)$, $(6, 8)$, $(8, 6)$, $(12, 4)$, $(24, 2)$
$a_2a_4=-48<0$이므로 $a_2>0$ 또는 $a_2<0$이다.
이때 $d=\dfrac{a_4-a_2}{2}$이므로

$a_1=a_2-d=\dfrac{3a_2-a_4}{2}$ …… ㉠

(i) $a_2>0$일 때
$a_4<0$이므로 ㉠에서
$a_1=\dfrac{3|a_2|+|a_4|}{2}>0$
즉, $|a_1|=\dfrac{3|a_2|+|a_4|}{2}$이므로 순서쌍 $(|a_2|, |a_4|)$ 각각에 대하여 $|a_1|$의 값은
$\dfrac{3\times2+24}{2}=15$, $\dfrac{3\times4+12}{2}=12$, $\dfrac{3\times6+8}{2}=13$,
$\dfrac{3\times8+6}{2}=15$, $\dfrac{3\times12+4}{2}=20$, $\dfrac{3\times24+2}{2}=37$

(ii) $a_2<0$일 때
$a_4>0$이므로 ㉠에서
$a_1=\dfrac{-3|a_2|-|a_4|}{2}<0$
즉, $|a_1|=\dfrac{3|a_2|+|a_4|}{2}$이므로 순서쌍 $(|a_2|, |a_4|)$ 각각에 대하여 $|a_1|$의 값은 (i)의 경우와 같다.

(i), (ii)에 의하여 $|a_1|$의 최댓값은 37, 최솟값은 12이다.
따라서 $|a_1|$의 최댓값과 최솟값의 합은
$37+12=49$

답 ⑤

2 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r'이라 하면 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 정수이므로 a, r, b, r'은 모두 정수이다.

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}$에서
$r=r'$ …… ㉠
$\dfrac{a_4}{a_2}-\dfrac{b_6}{b_5}<6$에서
$r^2-r'<6$이므로 ㉠에 의하여
$r^2-r-6<0$
$(r-3)(r+2)<0$
$-2<r<3$ …… ㉡
$a_n<b_n<a_{n+1}$에서
$ar^{n-1}<br^{n-1}<ar^n$ …… ㉢
모든 자연수 n에 대하여 $ar^{n-1}<ar^n$이므로
$r>1$
㉡에 의하여 $1<r<3$이고, r이 정수이므로
$r=2$
㉢에서 $a\times2^{n-1}<b\times2^{n-1}<a\times2^n$이므로
$a<b<2a$
$a<2a$에서 $a>0$이므로
$a^2<ab<2a^2$
이때 $a_1b_1=96$이므로
$a^2<96<2a^2$, $48<a^2<96$
이때 a는 $a>0$인 정수이고, b도 정수이므로 a는 96의 양의 약수이다.
즉, $a=8$, $b=12$, $r=r'=2$이므로
$a_n=8\times2^{n-1}=2^{n+2}$
$b_n=12\times2^{n-1}=3\times2^{n+1}$
따라서 $a_3+b_3=2^5+3\times2^4=32+48=80$

답 80

3 세 수 $-\dfrac{8}{3}$, 9, $\dfrac{81}{4}$이 모두 집합 A의 원소이므로

$a_x=-\dfrac{8}{3}$, $a_y=9$, $a_z=\dfrac{81}{4}$ …… ㉠

인 7 이하의 세 자연수 x, y, z가 존재한다.
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면
㉠에서
$\dfrac{a_y}{a_x}=-\dfrac{27}{8}=r^{y-x}$ …… ㉡
$\dfrac{a_z}{a_y}=\dfrac{9}{4}=r^{z-y}$ …… ㉢
$y-x$, $z-y$는 모두 정수이므로
$r<0$, $r\neq-1$
(i) $r<-1$일 때
$|a_x|<|a_y|<|a_z|$이므로
$1\le x<y<z\le7$
㉡, ㉢을 변끼리 나누면
$-\dfrac{3}{2}=r^{(y-x)-(z-y)}$ …… ㉣
㉡, ㉣에서
$\{r^{(y-x)-(z-y)}\}^3=r^{y-x}$
$2(y-x)=3(z-y)$

이때 ㉡에서 $y-x$는 5 이하의 홀수인 자연수이고, ㉢에서 $z-y$는 5 이하의 짝수인 자연수이므로

$y-x=3$, $z-y=2$

㉣에서 $r=-\frac{3}{2}$

$x=1$이면 $y=4$, $z=6$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은

$a_1=a_x=-\frac{8}{3}$이다.

즉, $S_5=\dfrac{-\frac{8}{3}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{55}{6}$

$x=2$이면 $y=5$, $z=7$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은

$a_1=a_x\times\frac{1}{r}=-\frac{8}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{9}$이다.

즉, $S_5=\dfrac{\frac{16}{9}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{55}{9}$

$x\geq 3$이면 $z>7$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $-1<r<0$일 때

등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 (i)에서의 a_7과 같고, 공비는 (i)에서의 공비의 역수인 $-\frac{2}{3}$이다.

(i)에서의 a_7의 값은

$-\frac{8}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^6$ 또는 $\frac{16}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^6$

첫째항이 $-\frac{8}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^6$이고 공비가 $-\frac{2}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$S_5=\dfrac{-\frac{8}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{165}{8}$

첫째항이 $\frac{16}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^6$이고 공비가 $-\frac{2}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$S_5=\dfrac{\frac{16}{9}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{55}{4}$

(i), (ii)에 의하여 S_5의 최댓값은 $\frac{55}{4}$이다.

답 ④

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 85~95쪽

1 93	**2** ⑤	**3** ⑤	**4** ①	**5** ①	**6** 4
7 ④	**8** ③	**9** ④	**10** 30	**11** ②	

1 $\sum_{k=1}^{15}(3a_k+4b_k)=3\sum_{k=1}^{15}a_k+4\sum_{k=1}^{15}b_k$

$=3\times 23+4\times 6$

$=69+24$

$=93$

답 93

2 자연수 m에 대하여

(i) $n+k=3m-1$일 때

$(n+k)^2=(3m-1)^2=3(3m^2-2m)+1$

이므로 $(n+k)^2$을 3으로 나눈 나머지는 1이다.

(ii) $n+k=3m$일 때

$(n+k)^2=(3m)^2=3(3m^2)$

이므로 $(n+k)^2$을 3으로 나눈 나머지는 0이다.

(iii) $n+k=3m+1$일 때

$(n+k)^2=(3m+1)^2=3(3m^2+2m)+1$

이므로 $(n+k)^2$을 3으로 나눈 나머지는 1이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $(n+k)^2$을 3으로 나눈 나머지가 1이 되도록 하는 $n+k$는 3의 배수가 아닌 자연수이다.

자연수 t에 대하여 조건을 만족시키는 5 이하의 자연수 k의 값이

$n=3t-2$일 때 1, 3, 4이므로 $a_n=8$이고,

$n=3t-1$일 때 2, 3, 5이므로 $a_n=10$이고,

$n=3t$일 때 1, 2, 4, 5이므로 $a_n=12$

따라서

$\sum_{n=1}^{20}a_n=6\times(8+10+12)+8+10=198$

답 ⑤

3 $\sum_{k=1}^{20}(2k-1)^2-\sum_{k=8}^{21}(2k-3)^2$

$=\sum_{k=1}^{20}(2k-1)^2-\sum_{k=7}^{20}(2k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{6}(2k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{6}(4k^2-4k+1)$

$=4\times\frac{6\times7\times13}{6}-4\times\frac{6\times7}{2}+6$

$=286$

답 ⑤

4 $\sum_{k=1}^{6}(a_{2k}-1)=13$에서

$\sum_{k=1}^{6}(a_{2k}-1)=\sum_{k=1}^{6}a_{2k}-6=13$

이므로

$\sum_{k=1}^{6}a_{2k}=19$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{7}(a_{2k-1}+k^2)=141$에서

$\sum_{k=1}^{7}(a_{2k-1}+k^2)=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{7}k^2$

$=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+\frac{7\times8\times15}{6}$

$=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+140$

$=141$

이므로

$\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\sum_{k=1}^{13}a_k=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{6}a_{2k}=1+19=20$

이때 $a_n+b_n=n$이므로

$\sum_{k=1}^{13}b_k=\sum_{k=1}^{13}(k-a_k)$

$=\frac{13\times14}{2}-\sum_{k=1}^{13}a_k$

$=91-20$

$=71$

답 ①

5 $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{26}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{26}\right)$

$=\frac{2}{13}$

답 ①

6 $2a_{n+1}=a_n(2-a_n)$에서

$\frac{1}{2a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(2-a_n)}$

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{-2}{a_n(a_n-2)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n-2}$

$\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$

이므로

$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{a_k-2}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_4}$

이때 $21a_1+a_4=0$에서 $a_4=-21a_1$이므로

$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{a_k-2}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{-21a_1}=\frac{22}{21a_1}$

따라서 $\frac{22}{21a_1}=\frac{11}{42}$이므로

$a_1=4$

답 4

참고

$2a_{n+1}=a_n(2-a_n)$ …… ㉠

(i) $a_1=2$이면 ㉠에 의하여 $a_4=0$이므로

$21a_1+a_4=0$을 만족시킬 수 없다.

또 ㉠에서 $a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_n-1)^2+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$

이므로 $n\ge2$일 때 $a_n\ne2$

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ne2$

(ii) $a_{n+1}=0$이면 ㉠에서 (i)에 의하여

$a_n\ne2$이므로 $a_n=0$이고, $a_{n+2}=0$이 되어

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=0$

즉, $\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{a_k-2}=-\frac{3}{2}$이 되어 조건을 만족시킬 수 없다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\ne0$, $a_n\ne2$

7 $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

$a_3=a_2+2$에서

$3a_2=a_2+2$

$a_2=1$

따라서 $a_6=3^4\times a_2=81$

답 ④

8 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_n$에서

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=-a_1+a_{n+1}$

이므로

$-a_1+a_{n+1}=a_n$

$a_{n+1}=a_n+a_1$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 a_1인 등차수열이므로

$a_n=a_1+(n-1)a_1=a_1n$

$\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{2}{75}$에서

$\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{a_1k\times a_1(k+1)}$

$=\frac{1}{a_1^2}\sum_{k=1}^{24}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{a_1^2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)\right\}$

$=\frac{1}{a_1^2}\left(1-\frac{1}{25}\right)$

$=\frac{1}{a_1^2}\times\frac{24}{25}$

이므로

$\frac{1}{a_1^2}\times\frac{24}{25}=\frac{2}{75}$

$a_1^2=36$

$a_1>0$이므로 $a_1=6$

따라서 $a_n=6n$이므로

$a_8=48$

답 ③

9 $a_{n+1}a_n=n^2$에서 $a_{n+1}=\frac{n^2}{a_n}$이므로

$a_2=\frac{1^2}{a_1}=\frac{1}{3}$

$a_3=\frac{2^2}{a_2}=12$

따라서 $a_4=\frac{3^2}{a_3}=\frac{3}{4}$

답 ④

10 첫째항이 정수이고, $a_{n+1}=(a_n-5)^2$이므로

$n\geq2$일 때 a_n은 정수를 제곱한 수이다. …… ㉠

또 $a_{n+1}=(a_n-5)^2$에서

$a_n-5=\pm\sqrt{a_{n+1}}$

$a_n=5\pm\sqrt{a_{n+1}}$ …… ㉡

$a_k=16$ $(k\geq3)$이면 ㉡에 의하여

$a_{k-1}=5\pm\sqrt{16}$이므로

$a_{k-1}=9$ 또는 $a_{k-1}=1$

(i) $a_{k-1}=9$인 경우

㉡에 의하여 $a_{k-2}=5\pm\sqrt{9}$

$a_{k-2}=8$ 또는 $a_{k-2}=2$

㉠에 의하여 $k-2=1$이므로

$a_1=8$ 또는 $a_1=2$

(ii) $a_{k-1}=1$인 경우

㉡에 의하여 $a_{k-2}=5\pm\sqrt{1}$

$a_{k-2}=6$ 또는 $a_{k-2}=4$

$a_{k-2}=6$이면 ㉠에 의하여 $k-2=1$이므로

$a_1=6$

$a_{k-2}=4$이면

$k-2=1$일 때 $a_1=4$이고,

$k-2>1$일 때 ㉡에 의하여 $a_{k-3}=5\pm\sqrt{4}$

$a_{k-3}=7$ 또는 $a_{k-3}=3$

㉠에 의하여 $k-3=1$이므로

$a_1=7$ 또는 $a_1=3$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 a_1의 값은

2, 3, 4, 6, 7, 8

따라서 모든 a_1의 값의 합은

$2+3+4+6+7+8=30$

답 30

11 (i) $n=1$일 때, $a_1=1$, $a_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$에서

(좌변)$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{1}a_k=\boxed{\frac{1}{2}}$,

(우변)$=a_2-1=\boxed{\frac{1}{2}}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}a_k=a_{m+1}-1$

이다. $n=m+1$일 때,

$\frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{m+1}a_k$

$=\frac{1}{m+2}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\right)$

$=\dfrac{1}{m+2}\left\{(m+1)\times\dfrac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\right\}$

$=\dfrac{1}{m+2}\{(m+1)(a_{m+1}-1)+a_{m+1}\}$

$=\dfrac{1}{m+2}\{(\boxed{m+2})a_{m+1}-(m+1)\}$

$=\dfrac{1}{m+2}\left\{(m+2)\sum_{k=1}^{m+1}\dfrac{1}{k}-(m+1)\right\}$

$=\dfrac{1}{m+2}\left\{(\boxed{m+2})\left(\sum_{k=1}^{m+2}\dfrac{1}{k}-\boxed{\dfrac{1}{m+2}}\right)-(m+1)\right\}$

$=\dfrac{1}{m+2}\left\{(m+2)\sum_{k=1}^{m+2}\dfrac{1}{k}-1-(m+1)\right\}$

$=\dfrac{1}{m+2}\left\{(m+2)\sum_{k=1}^{m+2}\dfrac{1}{k}-(m+2)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{m+2}\dfrac{1}{k}-1$

$=a_{m+2}-1$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$, $f(m)=m+2$, $g(m)=\dfrac{1}{m+2}$이므로

$\dfrac{p\times f(5)}{g(6)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times(5+2)}{\dfrac{1}{6+2}}=28$

답 ②

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ②	**2** ②	**3** ③	**4** ②	**5** ①	**6** ④
7 ②	**8** ⑤				

1 $\sum_{k=1}^{8}(a_k+1)=45$에서

$\sum_{k=1}^{8}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{8}a_k+8$이므로

$\sum_{k=1}^{8}a_k+8=45$

$\sum_{k=1}^{8}a_k=37$

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=53$에서

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=\sum_{k=1}^{7}a_k+\dfrac{7\times 8}{2}=\sum_{k=1}^{7}a_k+28$이므로

$\sum_{k=1}^{7}a_k+28=53$

$\sum_{k=1}^{7}a_k=25$

따라서 $\sum_{k=1}^{8}a_k=37$, $\sum_{k=1}^{7}a_k=25$이므로

$a_8=\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k$

$=37-25=12$

답 ②

2 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n-3 & (n\text{이 홀수인 경우})\\ a_n+5 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$이고, $a_1=1$이므로

$a_2=2a_1-3=-1$

$a_3=a_2+5=4$

$a_4=2a_3-3=5$

따라서 $a_5=a_4+5=10$

답 ②

3 $\sum_{k=1}^{9}(a_k+3b_k)=25$에서

$\sum_{k=1}^{9}(a_k+3b_k)=\sum_{k=1}^{9}a_k+3\sum_{k=1}^{9}b_k=25$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{9}(2a_k-b_k)=8$에서

$\sum_{k=1}^{9}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{9}a_k-\sum_{k=1}^{9}b_k=8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sum_{k=1}^{9}a_k=7$, $\sum_{k=1}^{9}b_k=6$

따라서

$\sum_{k=1}^{9}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=1}^{9}b_k$

$=7+6=13$

답 ③

4 $\sum_{k=1}^{5}(k+a)^4-\sum_{k=1}^{5}\{k(k+2a)\}^2=250a^2$에서

$\sum_{k=1}^{5}(k+a)^4-\sum_{k=1}^{5}\{k(k+2a)\}^2$

$=\sum_{k=1}^{5}\{(k+a)^2+k(k+2a)\}\{(k+a)^2-k(k+2a)\}$

$=\sum_{k=1}^{5}(2k^2+4ak+a^2)\times a^2$

$=a^2\left(2\times\dfrac{5\times6\times11}{6}+4a\times\dfrac{5\times6}{2}+5a^2\right)$

$=a^2(5a^2+60a+110)$

이므로

$a^2(5a^2+60a+110)=250a^2$

$a^2(a^2+12a-28)=0$

$a^2(a+14)(a-2)=0$

$a=-14$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 양수 a의 값은 2이다.

답 ②

5 $a_{n+1}=a_n+5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다.
이때 $a_1=2$이므로
$a_n=2+(n-1)\times5=5n-3$
따라서 $a_7=5\times7-3=32$

답 ①

다른 풀이

$a_{n+1}=a_n+5$이므로
$a_2=a_1+5=7$
$a_3=a_2+5=12$
$a_4=a_3+5=17$
$a_5=a_4+5=22$
$a_6=a_5+5=27$
$a_7=a_6+5=32$

6 $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{1}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})$
$+\cdots+(\sqrt{79}-\sqrt{81})\}$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}(\sqrt{1}-\sqrt{81})$

$=4$

답 ④

7 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
$a_2=3$, $a_3=6$에서
$\dfrac{a_3}{a_2}=2$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 2이다.
따라서 $a_6=2^3\times a_3=48$

답 ②

다른 풀이

$a_{n+2}=\dfrac{{a_{n+1}}^2}{a_n}$이므로

$a_4=\dfrac{{a_3}^2}{a_2}=\dfrac{6^2}{3}=12$

$a_5=\dfrac{{a_4}^2}{a_3}=\dfrac{12^2}{6}=24$

$a_6=\dfrac{{a_5}^2}{a_4}=\dfrac{24^2}{12}=48$

8 이차방정식 $x^2-3x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2=7$
$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1$
따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k-\alpha^2)(k-\beta^2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{6}\{k^2-(\alpha^2+\beta^2)k+\alpha^2\beta^2\}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{6}(k^2-7k+1)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{6}k^2-7\sum_{k=1}^{6}k+\sum_{k=1}^{6}1$

$\displaystyle=\frac{6\times7\times13}{6}-7\times\frac{6\times7}{2}+6$

$=-50$

답 ⑤

Level **2** **기본 연습** 본문 98~99쪽

1 ② **2** ③ **3** 27 **4** ⑤ **5** ① **6** ⑤
7 ④

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(a_k+1)(b_k-2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{7}(a_kb_k-2a_k+b_k-2)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{7}a_kb_k-\sum_{k=1}^{7}2a_k+\sum_{k=1}^{7}b_k-\sum_{k=1}^{7}2$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{7}k^2-2\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=1}^{7}b_k-\sum_{k=1}^{7}2$

$\displaystyle=\frac{7\times8\times15}{6}-2\times54+5-2\times7$

$=140-108+5-14$

$=23$

답 ②

참고

다음 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 주어진 조건을 만족시키는 한 예이다.
$n\le7$일 때,

n	a_n	b_n	a_nb_n
1	-1	-1	1
2	2	2	4
3	-9	-1	9

4	-4	-4	16
5	5	5	25
6	12	3	36
7	49	1	49

$n\geq 8$일 때,

$a_n=b_n=n$

2 $\left|\dfrac{1}{(2k-7)(2k-11)}\right|$에서

$\dfrac{1}{(2k-7)(2k-11)}<0$일 때

$(2k-7)(2k-11)<0$

$\dfrac{7}{2}<k<\dfrac{11}{2}$이므로 자연수 k의 값이

$k=4$ 또는 $k=5$이면

$\left|\dfrac{1}{(2k-7)(2k-11)}\right|=-\dfrac{1}{(2k-7)(2k-11)}$

$k\neq 4$이고, $k\neq 5$이면

$\left|\dfrac{1}{(2k-7)(2k-11)}\right|=\dfrac{1}{(2k-7)(2k-11)}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{8}\left|\frac{1}{(2k-7)(2k-11)}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(2k-7)(2k-11)}-2\times\left\{\frac{1}{(2\times4-7)(2\times4-11)}+\frac{1}{(2\times5-7)(2\times5-11)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k-11}-\frac{1}{2k-7}\right)+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{-9}-\frac{1}{-5}\right)+\left(\frac{1}{-7}-\frac{1}{-3}\right)+\left(\frac{1}{-5}-\frac{1}{-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\right\}+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{9}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{76}{63}$$

답 ③

3 $\sum_{k=1}^{6}(ka_k+1)=79$에서

$$\sum_{k=1}^{6}(ka_k+1)=\sum_{k=1}^{6}ka_k+\sum_{k=1}^{6}1=\sum_{k=1}^{6}ka_k+6=79$$

이므로

$\sum_{k=1}^{6}ka_k=73$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{5}(ka_{k+1}-1)=41$에서

$$\sum_{k=1}^{5}(ka_{k+1}-1)=\sum_{k=1}^{5}ka_{k+1}-\sum_{k=1}^{5}1$$

$$=\sum_{k=2}^{6}(k-1)a_k-5$$

$$=\sum_{k=2}^{6}ka_k-\sum_{k=2}^{6}a_k-5=41$$

이므로

$\sum_{k=2}^{6}ka_k=\sum_{k=2}^{6}a_k+46$

㉠에서 $a_1+\sum_{k=2}^{6}ka_k=73$이므로

$a_1+\left(\sum_{k=2}^{6}a_k+46\right)=73$

따라서 $\sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{6}a_k=73-46=27$

답 27

4 조건 (가)에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=a_1+(n-1)\times2=2n+a_1-2$

$\sum_{k=1}^{5}a_ka_{k+1}=215$에서

$$\sum_{k=1}^{5}a_ka_{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}(2k+a_1-2)(2k+a_1)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\{4k^2+(4a_1-4)k+a_1(a_1-2)\}$$

$$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}+(4a_1-4)\times\frac{5\times6}{2}+5a_1(a_1-2)$$

$$=5a_1{}^2+50a_1+160$$

이므로

$5a_1{}^2+50a_1+160=215$

$a_1{}^2+10a_1-11=0$

$(a_1-1)(a_1+11)=0$

$a_1=1$ 또는 $a_1=-11$

$a_1=1$일 때 $a_n=2n-1$

$a_1=-11$일 때 $a_n=2n-13$

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k-\sum_{k=1}^{m}a_k=a_{m+1}<0$

인 자연수 m이 존재해야 하는데 $a_n=2n-1$은 모든 자연수 n에 대하여 양수이므로

$a_n=2n-13$

따라서 $a_9=18-13=5$

답 ⑤

5 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5+a_9=50$에서 $a_5+a_9=2a_7$이므로

$a_7=25$

$a_1+6d=25$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{2}{3}$에서

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{6}\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}})(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}})}$$

$$=\sum_{k=1}^{6}\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{a_k-a_{k+1}}$$

$$=-\frac{1}{d}\{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})+\cdots+(\sqrt{a_6}-\sqrt{a_7})\}$$

$$=-\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_7}}{d}$$

$$=\frac{5-\sqrt{a_1}}{d}$$

이므로

$$\frac{5-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{2}{3}$$

㉠에서 $d=\frac{25-a_1}{6}$이므로

$$\frac{5-\sqrt{a_1}}{\frac{25-a_1}{6}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{5-\sqrt{a_1}}{(5-\sqrt{a_1})(5+\sqrt{a_1})}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{5+\sqrt{a_1}}=\frac{1}{9}$$

$\sqrt{a_1}=4$

$a_1=16$

따라서 $d=\frac{25-16}{6}=\frac{3}{2}$이므로

$a_{11}=16+10\times\frac{3}{2}=31$

답 ①

참고

모든 항이 양수이므로 $d\geq0$이다. 이때 $d=0$이면 $a_n=a_1$이고, ㉠에서 $a_1=25$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{2\sqrt{a_1}}=\frac{6}{2\times5}=\frac{3}{5}$$

으로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d\neq0$이므로 $d>0$이다.

즉, 모든 자연수 k에 대하여

$\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}\neq0$

6 $k\leq\log_2 n<k+1$을 만족시키는 정수 k의 값이 a_n이므로

$2^k\leq n<2^{k+1}$일 때 $a_n=k$ …… ㉠

자연수 $t\,(t\geq6)$에 대하여 $a_{t-5}=a_{t+5}=p$ (p는 음이 아닌 정수)라 하면 ㉠에 의하여

$2^p\leq t-5<2^{p+1}$, $2^p\leq t+5<2^{p+1}$

이므로

$2^p+5\leq t<2^{p+1}-5$ …… ㉡

이때 2^p+5, $2^{p+1}-5$는 모두 정수이므로 자연수 t가 존재하려면

$(2^{p+1}-5)-(2^p+5)\geq1$

$2^p\geq11$이므로 $p=4$일 때 t의 최솟값이 m이다.

㉡에서 $p=4$일 때

$2^4+5\leq t<2^5-5$이므로

$m=2^4+5=21$

㉠에서 $a_n=k$를 만족시키는 n의 개수는

$2^{k+1}-2^k=2^k$이므로

$$\sum_{n=1}^{m}a_n=\sum_{n=1}^{21}a_n$$

$$=0\times2^0+1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+4\times(21-15)$$

$$=58$$

답 ⑤

7 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=\boxed{7!}$이고,

(우변)$=\frac{8}{7}\times7!-6!=\boxed{7!}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m+7}{7}a_m-6!$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$

$$=\frac{m+7}{7}a_m-6!+a_{m+1}$$

$$=\frac{m+7}{7}\times\frac{(m+6)!}{m!}-6!+\boxed{\frac{(m+7)!}{(m+1)!}}$$

$$=\frac{(m+7)!}{m!}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{m+1}\right)-6!$$

$$=\frac{(m+7)!}{m!}\times\boxed{\frac{m+8}{7(m+1)}}-6!$$

$$=\frac{m+8}{7}\times\frac{(m+7)!}{(m+1)!}-6!$$

$$=\frac{m+8}{7}a_{m+1}-6!$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $p=7!$, $f(m)=\dfrac{(m+7)!}{(m+1)!}$, $g(m)=\dfrac{m+8}{7(m+1)}$

이므로

$$\frac{f(2)}{p\times g(6)}=\frac{\dfrac{9!}{3!}}{7!\times\dfrac{14}{7\times7}}=42$$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 100쪽

1 ① **2** ⑤ **3** ①

1 조건 (가)에 의하여

$\sum_{k=1}^{7}a_k>\sum_{k=1}^{8}a_k$, $\sum_{k=1}^{8}a_k<\sum_{k=1}^{9}a_k$

이므로

$\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k=a_8<0$, $\sum_{k=1}^{9}a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=a_9>0$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 모든 항이 정수이므로 a, d는 모두 정수이다.

$a_n=a+(n-1)d$

$a_8=a+7d<0$, $a_9=a+8d>0$

$a<-7d$, $a>-8d$이므로

$-8d<a<-7d$ …… ㉠

a가 존재하려면 $-8d<-7d$이어야 하므로

$d>0$

㉠에 의하여 자연수 k가

$k\le8$일 때, $a_k+|a_k|=a_k-a_k=0$

$k\ge9$일 때, $a_k+|a_k|=a_k+a_k=2a_k$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{11}(a_k+|a_k|)&=\sum_{k=9}^{11}2a_k\\&=2(a_9+a_{10}+a_{11})\\&=2\times3a_{10}\\&=6a+54d\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{14}a_k=\dfrac{14(2a+13d)}{2}=7(2a+13d)$

이때 ㉠에 의하여 $-16d<2a<-14d$이고, $d>0$이므로

$2a+13d<-d<0$에서

$\sum_{k=1}^{14}a_k<0$

즉, $\sum_{k=1}^{11}(a_k+|a_k|)=\left|\sum_{k=1}^{14}a_k\right|$에서

$6a+54d=-7(2a+13d)$

$a=-\dfrac{29}{4}d$

이때 a와 d는 정수이고, $d>0$이므로 $d=4m$ (m은 자연수)라 할 수 있다.

$a=-29m$이고, $m\ge1$이므로 $a=-29m\le-29$

따라서 a_1의 최댓값은 -29이다.

답 ①

2 $S_n\times\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=S_n+2$에서

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)\\&=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\\&=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\\&=1-\frac{1}{S_{n+1}}\end{aligned}$$

이므로

$S_n\times\left(1-\dfrac{1}{S_{n+1}}\right)=S_n+2$

$-\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=2$

$S_{n+1}=-\dfrac{1}{2}S_n$

$S_1=a_1=1$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $S_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n\ge2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\&=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

즉, $a_{2n+1}=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2n}=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

이므로 수열 $\{a_{2n+1}\}$은 첫째항이 $\dfrac{3}{4}$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{5} a_{2k-1}$

$= 1 + \sum_{k=1}^{4} a_{2k+1}$

$= 1 + \sum_{k=1}^{4} \left\{ \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right\}$

$= 1 + \frac{\frac{3}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4\right\}}{1 - \frac{1}{4}}$

$= \frac{511}{256}$

답 ⑤

3 $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$

(i) $a_1 \le a_2$일 때

$a_3 = a_1 + 1$

ⓘ $a_2 \le a_3$일 때

$a_4 = a_2 + 1$

이때 $a_3 = a_1 + 1$, $a_1 \le a_2$에서 $a_3 \le a_4$이므로

$a_5 = a_3 + 1 = a_1 + 2$이고,

$a_4 = a_2 + 1$, $a_2 \le a_3$에서 $a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = a_4 + 1 = a_2 + 2$

마찬가지 방법으로

$a_7 = a_5 + 1 = a_1 + 3$, $a_8 = a_6 + 1 = a_2 + 3$

$a_9 = a_7 + 1 = a_1 + 4$, $a_{10} = a_8 + 1 = a_2 + 4$

이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5a_1 + 5a_2 + 20 = 50$

$a_1 + a_2 = 6$

이때 $a_1 \le a_2 \le a_1 + 1$이므로

$a_1 \le 6 - a_1 \le a_1 + 1$

$\frac{5}{2} \le a_1 \le 3$

자연수 a_1의 값이 3이므로 a_2의 값은

$a_2 = 6 - a_1 = 3$

그러므로 $a_1 \le a_2 \le a_3$일 때 조건을 만족시키는 두 자연수 a_1, a_2의 순서쌍 (a_1, a_2)는

$(3, 3)$

으로 1개이다.

ⓘⓘ $a_2 > a_3$일 때

$a_4 = a_3 = a_1 + 1$

$a_5 = a_3 + 1 = a_1 + 2$, $a_6 = a_4 + 1 = a_1 + 2$

$a_7 = a_5 + 1 = a_1 + 3$, $a_8 = a_6 + 1 = a_1 + 3$

$a_9 = a_7 + 1 = a_1 + 4$, $a_{10} = a_8 + 1 = a_1 + 4$

이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 9a_1 + a_2 + 20 = 50$

$9a_1 + a_2 = 30$

이때 $a_2 > a_1 + 1$이므로

$30 - 9a_1 > a_1 + 1$

$a_1 < \frac{29}{10}$

자연수 a_1의 값이 1, 2이므로 a_2의 값은 각각

$a_2 = 30 - 9 = 21$, $a_2 = 30 - 18 = 12$

그러므로 $a_1 \le a_2$, $a_2 > a_3$일 때 조건을 만족시키는 두 자연수 a_1, a_2의 순서쌍 (a_1, a_2)는

$(1, 21)$, $(2, 12)$

로 2개이다.

(ii) $a_1 > a_2$일 때

$a_3 = a_2$이므로

$a_4 = a_2 + 1$

$a_5 = a_3 + 1 = a_2 + 1$, $a_6 = a_4 + 1 = a_2 + 2$

$a_7 = a_5 + 1 = a_2 + 2$, $a_8 = a_6 + 1 = a_2 + 3$

$a_9 = a_7 + 1 = a_2 + 3$, $a_{10} = a_8 + 1 = a_2 + 4$

이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + 9a_2 + 16 = 50$

$a_1 + 9a_2 = 34$

이때 $a_1 > a_2$이므로

$34 - 9a_2 > a_2$

$a_2 < \frac{17}{5}$

자연수 a_2의 값이 1, 2, 3이므로 a_1의 값은 각각

$a_1 = 34 - 9 = 25$, $a_1 = 34 - 18 = 16$, $a_1 = 34 - 27 = 7$

이므로 $a_1 > a_2$일 때 조건을 만족시키는 두 자연수 a_1, a_2의 순서쌍 (a_1, a_2)는

$(25, 1)$, $(16, 2)$, $(7, 3)$

으로 3개이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 두 자연수 a_1, a_2의 모든 순서쌍 (a_1, a_2)의 개수는

$1 + 2 + 3 = 6$

답 ①