수능특강

수학영역
미적분

정답과 풀이

01 수열의 극한

유제 본문 5~9쪽

1 ① **2** ③ **3** ② **4** ② **5** ④ **6** ④

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+1}{3}=7$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{4a_n+1}{3}\right)-\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\frac{3}{4}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+1}{3}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\times\left(7-\frac{1}{3}\right)=5$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+5n}{na_n(a_n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}+5}{a_n(a_n-1)}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{n}+\lim_{n\to\infty}5}{\lim_{n\to\infty}a_n\times(\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1)}$$
$$=\frac{0+5}{5\times(5-1)}=\frac{1}{4}$$

답 ①

2 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=1$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-b_n)^2+2a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)+2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=1\times1+2\times\frac{3}{2}=4$$

따라서

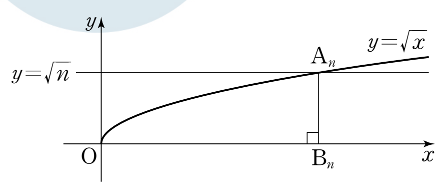
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n-1}+\frac{a_n}{b_n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n(a_n-1)+b_n(b_n+1)}{(a_n-1)(b_n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^2+b_n{}^2-(a_n-b_n)}{a_nb_n+a_n-b_n-1}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}a_nb_n+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)-\lim_{n\to\infty}1}$$
$$=\frac{4-1}{\frac{3}{2}+1-1}=2$$

답 ③

3 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)}{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)(\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n})}{(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+1}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+2n}}{3(\sqrt{n^2+1}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$
$$=\frac{1+1}{3\times(1+1)}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ②

4 $\sqrt{x}=\sqrt{n}$에서 $x=n$이므로
$\mathrm{A}_n(n,\ \sqrt{n})$이고
$\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{n^2+n}$
점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발이 B_n이므로
$\mathrm{B}_n(n,\ 0)$이고
$\overline{\mathrm{OB}_n}=n$



따라서

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}_n}-\overline{\mathrm{OB}_n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

5 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{2^{-n-1}+4^{-n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+16\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{\dfrac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+16\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}+16\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$=\frac{1+4\times0}{\frac{1}{2}+16\times0}$

$=2$

답 ④

6 수열 $\left\{\left(\frac{x^2-5x-1}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-5x-1}{5}\le1$이어야 한다.

$-1<\frac{x^2-5x-1}{5}$에서

$x^2-5x-1>-5$

$x^2-5x+4>0$

$(x-1)(x-4)>0$

$x<1$ 또는 $x>4$ …… ㉠

$\frac{x^2-5x-1}{5}\le1$에서

$x^2-5x-1\le5$

$x^2-5x-6\le0$

$(x+1)(x-6)\le0$

$-1\le x\le6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$-1\le x<1$ 또는 $4<x\le6$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{x^2-5x-1}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 값은 -1, 0, 5, 6이므로 그 개수는 4이다.

답 ④

Level 1 **기초 연습** 본문 10쪽

1 ① **2** ④ **3** ② **4** ③

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n}{n^2+1}\times\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1}$

$=3\times\frac{1+0}{1}$

$=3$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(a_n+n)(a_n-n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{a_n}{n}+1\right)\left(\frac{a_n}{n}-1\right)}$

$=\frac{1}{(3+1)(3-1)}$

$=\frac{1}{8}$

답 ①

2 $P(x)=x^2+2x-n$이라 하면 나머지정리에 의하여

$\alpha_n=P(n)$, $\beta_n=P(-n)$이다.

$P(n)=n^2+2n-n=n^2+n$,

$P(-n)=n^2-2n-n=n^2-3n$

즉, $\sqrt{\alpha_n}=\sqrt{n^2+n}$, $\sqrt{\beta_n}=\sqrt{n^2-3n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\alpha_n}-\sqrt{\beta_n})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-3n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}$

$=\frac{4}{1+1}$

$=2$

답 ④

3 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1}{2n+1}<a_n<\frac{1}{2n-1}$을 만족시키므로

$\frac{1}{2(2n-1)+1}<a_{2n-1}<\frac{1}{2(2n-1)-1}$에서

$\frac{1}{4n-1}<a_{2n-1}<\frac{1}{4n-3}$

모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n}{4n-1}<na_{2n-1}<\frac{n}{4n-3}$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{1}{n}}=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{3}{n}}=\frac{1}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}na_{2n-1}=\frac{1}{4}$$

답 ②

4 $a_n=3\times4^{n-1}$, $S_n=\frac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1$이므로

$$a_{2n}=3\times4^{2n-1}$$
$$=\frac{3}{4}\times16^n$$

$$S_n^{\,2}=(4^n-1)^2=(4^n)^2-2\times4^n+1$$
$$=16^n-2\times4^n+1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{S_n^{\,2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}\times16^n}{16^n-2\times4^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}}{1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{16}\right)^n}$$
$$=\frac{3}{4}$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 11쪽

1 2　**2** ①　**3** ④　**4** ⑤

1 $\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-1$에서

$n=1$일 때,

$$a_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=2^1-1=1$$

$n\geq2$일 때,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=2^n-1-(2^{n-1}-1)$$
$$=2^n-2^{n-1}$$
$$=2^{n-1}$$

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{b_n}=a_2$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{b_n}=2$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n^{\,2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^{2n-2}}$$
$$=4\times\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{4^n}$$
$$=4\times\frac{1}{2}=2$$

답 2

2 조건 (가)의 부등식의 각 변에 n을 곱하면

$$a_n^{\,2}-1<6na_n-9n^2$$
$$a_n^{\,2}-6na_n+9n^2-1<0$$
$$a_n^{\,2}-6na_n+(3n-1)(3n+1)<0$$
$$\{a_n-(3n-1)\}\{a_n-(3n+1)\}<0$$
$$3n-1<a_n<3n+1$$

각 변을 n으로 나누면

$$3-\frac{1}{n}<\frac{a_n}{n}<3+\frac{1}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3$, $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=3$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$$

한편, 조건 (나)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{n^2+na_n}-n}=\frac{1}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{\sqrt{n^2+na_n}-n}\times\frac{\sqrt{n^2+na_n}-n}{a_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{n^2+na_n}-n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{a_n}{n}}-1}{\frac{a_n}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{n^2+na_n}-n}\times\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{a_n}{n}}-1\right)}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{1+3}-1}{3}$$
$$=\frac{1}{6}$$

답 ①

3 $f'(x)=3x^2+6x+2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ f(n))$에서의 접선의 방정식은

$y-(n^3+3n^2+2n)=(3n^2+6n+2)(x-n)$

즉, $y=(3n^2+6n+2)x-2n^3-3n^2$

$y=0$일 때, $0=(3n^2+6n+2)x-2n^3-3n^2$에서

$x=\dfrac{2n^3+3n^2}{3n^2+6n+2}$이므로

$a_n=\dfrac{2n^3+3n^2}{3n^2+6n+2}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3+3n^2}{3n^2+6n+2}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2}{3n^3+6n^2+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}$$

답 ④

4 (i) $x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-2}{3x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2\left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1}}{3x+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1}}=\frac{1}{3x}$$

(ii) $-1<x<1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-2}{3x^{2n}+1}=\frac{-2}{1}=-2$$

(iii) $x=1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-2}{3x^{2n}+1}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

(iv) $x=-1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-2}{3x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$$

(i)~(iv)에서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3x} & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ -2 & (-1<x<1)\\ -\dfrac{1}{4} & (x=1)\\ -\dfrac{3}{4} & (x=-1)\end{cases}$$

(a) $a<-1$ 또는 $a>1$이면

$-\frac{1}{3}<\frac{1}{3a}<0$ 또는 $0<\frac{1}{3a}<\frac{1}{3}$이므로

$f(a)+(f\circ f)(a)=\frac{1}{3a}+f\left(\frac{1}{3a}\right)=\frac{1}{3a}-2$

$\frac{1}{3a}-2=-\frac{9}{4}$에서 $a=-\frac{4}{3}$

이는 조건을 만족시킨다.

(b) $-1<a<1$이면

$f(a)+(f\circ f)(a)=-2+f(-2)$
$=-2-\frac{1}{6}=-\frac{13}{6}$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(c) $a=1$이면

$f(a)+(f\circ f)(a)=-\frac{1}{4}+f\left(-\frac{1}{4}\right)$
$=-\frac{1}{4}-2=-\frac{9}{4}$

이므로 조건을 만족시킨다.

(d) $a=-1$이면

$f(a)+(f\circ f)(a)=-\frac{3}{4}+f\left(-\frac{3}{4}\right)$
$=-\frac{3}{4}-2=-\frac{11}{4}$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(a)~(d)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-\frac{4}{3}+1=-\frac{1}{3}$

답 ⑤

Level 3 **실력 완성** 본문 12쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ④

1 곡선 $y=f(x)$가 $x=\alpha_n$일 때 x축과 만나므로 $f(\alpha_n)=0$

$f(\alpha_n)=\alpha_n^3+an\alpha_n^2-bn\alpha_n=0$

$\alpha_n(\alpha_n^2+an\alpha_n-bn)=0$

$\alpha_n=0$ 또는 $\alpha_n=\dfrac{-an\pm\sqrt{(an)^2+4bn}}{2}$

이때 $\alpha_n>0$이므로

$\alpha_n=\dfrac{-an+\sqrt{(an)^2+4bn}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-an+\sqrt{(an)^2+4bn}}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(an)^2+4bn}-an\}\{\sqrt{(an)^2+4bn}+an\}}{2\{\sqrt{(an)^2+4bn}+an\}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4bn}{2(\sqrt{a^2n^2+4bn}+an)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b}{\sqrt{a^2+\frac{4b}{n}}+a}$$
$$=\frac{2b}{a+a}=\frac{b}{a}$$

$\lim_{n\to\infty} a_n=24$이므로 $\frac{b}{a}=24$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)=x^3+anx^2-bnx$에서

$f'(x)=3x^2+2anx-bn$

함수 $f(x)$가 $x=\beta_n$에서 극소이므로 $f'(\beta_n)=0$

$f'(\beta_n)=3\beta_n^{\ 2}+2an\beta_n-bn=0$

$\beta_n=\frac{-an\pm\sqrt{(an)^2+3bn}}{3}$

이때 $\beta_n>0$이므로

$\beta_n=\frac{-an+\sqrt{(an)^2+3bn}}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	β_n	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-an+\sqrt{(an)^2+3bn}}{3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{(an)^2+3bn}-an\}\{\sqrt{(an)^2+3bn}+an\}}{3\{\sqrt{(an)^2+3bn}+an\}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3bn}{3(\sqrt{a^2n^2+3bn}+an)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{a^2+\frac{3b}{n}}+a}$$
$$=\frac{b}{a+a}=\frac{b}{2a}$$

㉠에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\times24=12$$

답 ⑤

2 $f(x)=x^2-4nx+4n^2$이라 하자.

$f'(x)=2x-4n$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(n,\ n^2)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-n^2=-2n(x-n)$

즉, $y=-2nx+3n^2$

$y=0$일 때, $0=-2nx+3n^2$에서 $x=\frac{3}{2}n$이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}n,\ 0\right)$

$x=0$일 때, $y=3n^2$이므로 점 B의 좌표는 $(0,\ 3n^2)$

점 C의 좌표는 $(a_n,\ 0)$이고 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\left|\frac{3}{2}n-a_n\right|=\sqrt{a_n^{\ 2}+(-3n^2)^2}$

양변을 제곱하면

$\left(\frac{3}{2}n-a_n\right)^2=a_n^{\ 2}+9n^4$

$\frac{9}{4}n^2-3n\times a_n=9n^4$

$a_n=-3n^3+\frac{3}{4}n$

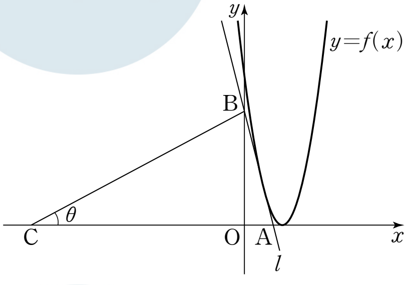
$\angle BCA=\theta$라 할 때, 원점 O에 대하여

$\sin\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{BC}}$

$\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 $\sin\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{AC}}$

이때 $a_n=-3n^3+\frac{3}{4}n=-3n\left(n^2-\frac{1}{4}\right)<0$이므로

$\overline{AC}=\frac{3}{2}n-\left(-3n^3+\frac{3}{4}n\right)=3n^3+\frac{3}{4}n$



$$\sin\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{AC}}=\frac{3n^2}{3n^3+\frac{3}{4}n}=\frac{4n}{4n^2+1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 R_n이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2R_n$

$\overline{AB}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}n\right)^2+(3n^2)^2}=3n\sqrt{n^2+\frac{1}{4}}$이므로

$$R_n=\frac{\overline{AB}}{2\sin\theta}=\frac{3n\sqrt{n^2+\frac{1}{4}}}{2\times\frac{4n}{4n^2+1}}=\frac{3(4n^2+1)\sqrt{n^2+\frac{1}{4}}}{8}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3(4n^2+1)\sqrt{n^2+\frac{1}{4}}}{8}}{-3n^3+\frac{3}{4}n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+1)\sqrt{n^2+\frac{1}{4}}}{8\left(-n^3+\frac{1}{4}n\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{8\left(-1+\frac{1}{4n^2}\right)}$$
$$=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n}+(a+1)^{n+1}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+(a+1)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)^{n}+(a+1)\times(a+1)^{n}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)\times\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)^{n}+(a+1)^{n}}$

이때

$\displaystyle\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)-(a+1)=a^2-\frac{a}{2}-\frac{15}{16}$

$\displaystyle=\frac{1}{16}(16a^2-8a-15)$

$\displaystyle=\frac{1}{16}(4a+3)(4a-5)$

(i) $a<-\frac{3}{4}$ 또는 $a>\frac{5}{4}$일 때

$\displaystyle a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}>0,\ a+1<a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}$

이고

$\displaystyle\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)+(a+1)=\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0$

에서

$\displaystyle-\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)<a+1$

즉, $\displaystyle-1<\frac{a+1}{a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}}<1$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n}+(a+1)^{n+1}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+(a+1)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)^{n}+(a+1)\times(a+1)^{n}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)\times\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)^{n}+(a+1)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(a+1)\times\left(\frac{a+1}{a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}}\right)^{n}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{a+1}{a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}}\right)^{n}}$

$\displaystyle=\frac{1}{a+\frac{1}{4}}=\frac{4}{4a+1}$

$\displaystyle\frac{4}{4a+1}=\frac{13}{10}$이면 $a=\frac{27}{52}$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

$\displaystyle\frac{4}{4a+1}=-\frac{13}{10}$이면 $a=-\frac{53}{52}$이고

이는 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=-\frac{3}{4}$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n}+(a+1)^{n+1}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+(a+1)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}$

$\displaystyle=\frac{1+\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{5}{2}$

그러므로 $a=-\frac{3}{4}$은 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$일 때

$\displaystyle0\le a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}<a+1$

$\displaystyle0\le\frac{a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}}{a+1}<1$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n}+(a+1)^{n+1}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+(a+1)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)^{n}+(a+1)\times(a+1)^{n}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)\times\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}\right)^{n}+(a+1)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}}{a+1}\right)^{n}+(a+1)}{\left(a+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{16}}{a+1}\right)^{n}+1}$

$=a+1$

$a+1=\frac{13}{10}$이면 $a=\frac{3}{10}$이고 이는 조건을 만족시킨다.

$a+1=-\frac{13}{10}$이면 $a=-\frac{23}{10}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a=\frac{5}{4}$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n}+(a+1)^{n+1}}{\left(a+\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+(a+1)^{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{9}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{9}{4}\right)^{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^n+\frac{9}{4}\times\left(\frac{9}{4}\right)^n}{\frac{3}{2}\times\left(\frac{9}{4}\right)^n+\left(\frac{9}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{1+\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}+1}=\frac{13}{10}$$

그러므로 $a=\frac{5}{4}$는 조건을 만족시킨다.

(i)~(iv)에서 $a=-\frac{53}{52}$ 또는 $a=\frac{3}{10}$ 또는 $a=\frac{5}{4}$이므로

그 합은

$$-\frac{53}{52}+\frac{3}{10}+\frac{5}{4}=\frac{-265+78+325}{260}=\frac{69}{130}$$

답 ④

02 급수

유제 본문 15~19쪽

1 ② **2** ③ **3** ④ **4** ③ **5** ② **6** ①

1 첫째항과 공차가 모두 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=4+(n-1)\times4=4n$

이때 $a_{n+1}=4(n+1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4(k+1)}-\sqrt{4k}}{\sqrt{4k\times4(k+1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{4\sqrt{k(k+1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times(1-0)=\frac{1}{2}$$

답 ②

2 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times(2n-1)\times(2n+1)\times\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{(2n-1)(2n+1)}{4}$$

이때

$$\frac{1}{2S_n}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2S_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-0=1$

답 ③

3 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{3(2a_n+5b_n)-5(a_n+3b_n)\}$

$=3\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+5b_n)-5\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3b_n)$

$=3\times3-5\times1$

$=4$

답 ④

4 첫째항이 3이고 공차가 8인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times8\}}{2}$

$=n(4n-1)$

$=4n^2-n$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n^2}-\frac{pn+3}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^2}-\frac{pn+3}{n+1}\right)=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-n}{n^2}-\frac{pn+3}{n+1}\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2}=4$, $\lim_{n\to\infty}\frac{pn+3}{n+1}=p$이므로

$4-p=0$, $p=4$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n^2}-\frac{pn+3}{n+1}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-n}{n^2}-\frac{4n+3}{n+1}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4-\frac{1}{n}-\left(4-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{n+1}\right)$

$=-1$

이므로 $q=-1$

따라서 $p+q=4+(-1)=3$

답 ③

5 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{-n}-1)-(2^{-n+1}-1)$

$=2^{-n}-2^{-n+1}$

$=-2^{-n}$

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=-2^{-n}$이므로

$a_{2n}=-2^{-2n}$

$a_na_{2n}=-2^{-n}\times(-2^{-2n})=2^{-3n}=\left(\frac{1}{8}\right)^n$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$

답 ②

6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3^{n-1}}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\times\left(\frac{4}{5}\right)^n-\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$

$=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$=4\times\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}-\frac{1}{3}\times\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$

$=4\times4-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}$

$=16-\frac{1}{2}$

$=\frac{31}{2}$

답 ①

Level 1 **기초 연습** 본문 20쪽

1 ③ **2** ① **3** ② **4** ④

1 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times2\}}{2}$$
$$=n(n+2)$$

이때

$$\frac{2}{S_n}=\frac{2}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{S_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

2 $6n$ 이하의 자연수 중 2의 배수의 개수는 $3n$, 3의 배수의 개수는 $2n$, 6의 배수의 개수는 n이므로 6과 서로소인 수의 개수는 $6n-3n-2n+n=2n$이다.

$a_n=2n$, $a_{n+1}=2n+2$이므로

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

답 ①

3 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x+1}{7}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\dfrac{2x+1}{7}<1$이어야 한다.

$-7<2x+1<7$

$-8<2x<6$

$-4<x<3$ …… ㉠

또한 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-13}{12}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\dfrac{x^2-13}{12}<1$이어야 한다.

$-12<x^2-13<12$

$1<x^2<25$

$-5<x<-1$ 또는 $1<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$-4<x<-1$ 또는 $1<x<3$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 값은 -3, -2, 2이고 그 합은

$-3+(-2)+2=-3$

답 ②

4 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{(S_n+2)-2\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(S_n+2)-\lim_{n\to\infty}2=1-2=-1$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=-1$

즉, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-1$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$a_1=0$ 또는 $-1<r<1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-1$이므로

$\dfrac{a_1}{1-r}=-1$, $a_1\neq0$

$a_1=r-1$ …… ㉠

$a_3=a_1\times r^2$이고 $a_3=-\dfrac{3}{8}$이므로

$a_1\times r^2=-\dfrac{3}{8}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(r-1)\times r^2=-\dfrac{3}{8}$

$8r^3-8r^2+3=0$

$(2r+1)(4r^2-6r+3)=0$

이때 $4r^2-6r+3=0$은 실근을 갖지 않으므로

$r=-\dfrac{1}{2}$

㉠에 의하여 $a_1=-\frac{3}{2}$

따라서

$$S_3=\frac{-\frac{3}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{9}{8}$$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 21쪽

1 ⑤ **2** 2 **3** ①

1 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 a와 r은 모두 자연수이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$\frac{a_n}{4^n}=\frac{ar^{n-1}}{4^n}=\frac{a}{4}\left(\frac{r}{4}\right)^{n-1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{4}\left(\frac{r}{4}\right)^{n-1}\right\}=0$에서

$0<\frac{r}{4}<1$이므로

$r=1$ 또는 $r=2$ 또는 $r=3$이고,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a}{4}\left(\frac{r}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{\frac{a}{4}}{1-\frac{r}{4}}=\frac{a}{4-r}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{3}{2}$에서 $\frac{a}{4-r}=\frac{3}{2}$

$a=\frac{3}{2}(4-r)=6-\frac{3}{2}r$

이때 a가 자연수이려면 r은 짝수이어야 하므로

$r=2$

$a=6-\frac{3}{2}\times2=3$

따라서 $a_4=ar^3=3\times2^3=24$

답 ⑤

2 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n+1}=\frac{1}{3}a_{2n-1}$이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3a_1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=6$이므로 $a_1=4$

$a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n-1}a_k$에서

$$\begin{aligned}a_{2n+2}&=\sum_{k=1}^{2n+1}a_k\\&=\sum_{k=1}^{2n-1}a_k+a_{2n}+a_{2n+1}\\&=a_{2n}+a_{2n}+a_{2n+1}\\&=2a_{2n}+a_{2n+1}\end{aligned}$$

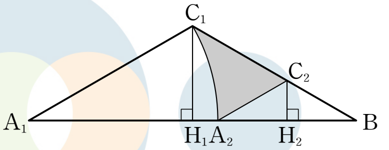
$a_{2n+2}-2a_{2n}=a_{2n+1}$

이때 수열 $\{a_{2n+1}\}$은 첫째항이 $a_3=\frac{1}{3}\times a_1=\frac{4}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n+2}-2a_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$$

답 2

3



점 C_1에서 선분 A_1B에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$\overline{A_1H_1}=\overline{A_1C_1}\times\cos\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{A_1B}=2\times\overline{A_1H_1}=2\sqrt{3}$

$\overline{C_1H_1}=\overline{A_1H_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=1$

$\overline{A_2B}=\overline{A_1B}-\overline{A_1A_2}=2\sqrt{3}-2$

점 C_2에서 선분 A_2B에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$\overline{A_2H_2}=\frac{1}{2}\times\overline{A_2B}=\sqrt{3}-1$

$$\begin{aligned}\overline{C_2H_2}&=\overline{A_2H_2}\times\tan\frac{\pi}{6}\\&=(\sqrt{3}-1)\times\frac{1}{\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

S_1은 삼각형 A_1BC_1의 넓이에서 삼각형 A_2BC_2의 넓이와 부채꼴 $A_1C_1A_2$의 넓이를 뺀 값이므로

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1-\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-2)\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{6}\\&=\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\\&=2-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

모든 자연수 n에 대하여 $\angle \mathrm{C}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}=\angle \mathrm{C}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}=\frac{\pi}{6}$이고 $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{BC}_1$은 공통이므로 두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{BC}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{BC}_{n+1}$은 서로 닮음이다. 이때 닮음비는 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}}:\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}}$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}}:\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}}:\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}}$

이다.

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}}=2\sqrt{3}-2$이므로 두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{BC}_n$과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{BC}_{n+1}$의 닮음비는

$2\sqrt{3}:(2\sqrt{3}-2)$, 즉 $1:\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

이다.

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{BC}_n$과 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{BC}_{n+1}$의 넓이의 비는

$1^2:\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $2-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}$이고

공비가 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$인 등비급수의 합이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$=\frac{6-\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(6-\sqrt{3}-\pi)(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{11\sqrt{3}-(1+2\sqrt{3})\pi}{11}$$

답 ①

Level 3 **실력 완성** 본문 22쪽

1 9 **2** ⑤ **3** ④

1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$, $a_{n+1}=a+nd$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\{a+(k-1)d\}(a+kd)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{d}\left\{\frac{1}{a+(k-1)d}-\frac{1}{a+kd}\right\}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}\right)+\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+2d}\right)+\left(\frac{1}{a+2d}-\frac{1}{a+3d}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{a+(n-1)d}-\frac{1}{a+nd}\right\}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nd}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\times\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{ad}=-\frac{1}{18}$$

$ad=-18$ …… ㉠

공차 d가 양수이므로 $a<0$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니고 $a<0$, $d>0$이므로

$a_m=a+(m-1)d<0$, $a_{m+1}=a+md>0$

인 자연수 m이 존재하고, 자연수 m에 대하여 $a_ma_{m+1}<0$이고 m이 아닌 모든 자연수 k에 대하여 $a_ka_{k+1}>0$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n||a_{n+1}|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|a_k||a_{k+1}|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}-\frac{2}{a_ma_{m+1}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}-\frac{2}{\{a+(m-1)d\}(a+md)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=-\frac{1}{18}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n||a_{n+1}|}=\frac{35}{18}$를 대입하면

$$\frac{35}{18}=-\frac{1}{18}-\frac{2}{\{a+(m-1)d\}(a+md)}$$

$\{a+(m-1)d\}(a+md)=-1$

이때 $a+(m-1)d$와 $a+md$는 모두 정수이고

$a+(m-1)d<0$, $a+md>0$

이므로

$a+(m-1)d=-1$, $a+md=1$

두 식을 연립하면 $d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면 $a=-9$

따라서

$a_{10}=-9+(10-1)\times 2=9$

답 9

2 자연수 n에 대하여 점 A_{2n-1}의 x좌표를 a_n이라 하자. 점 A_{2n-1}은 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $\mathrm{A}_{2n-1}(a_n, 2a_n)$이고, 점 A_{2n-1}을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 A_{2n}의 좌표는 $(2a_n, a_n)$이다.

이때 점 A_{2n}을 지나고 x축에 평행한 직선은 $y=a_n$이고, 이 직선과 직선 $y=2x$가 만나는 점 A_{2n+1}의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}a_n,\ a_n\right)$이다.

$A_1(2,\ 4)$이고 두 점 $A_{2n-1}(a_n,\ 2a_n)$, $A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}a_n,\ a_n\right)$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

두 점 $A_{2n-1}(a_n,\ 2a_n)$, $A_{2n}(2a_n,\ a_n)$ 사이의 거리는

$$\overline{A_{2n-1}A_{2n}}=\sqrt{(2a_n-a_n)^2+(a_n-2a_n)^2}$$
$$=\sqrt{2}a_n$$
$$=2\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$은 첫째항이 $\overline{A_1A_2}=2\sqrt{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_{2n-1}A_{2n}}=\frac{2\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$$

답 ⑤

3 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2 $(r_1r_2\neq 0)$이라 하면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로

$-1<r_1<1$, $-1<r_2<1$, $-1<r_1r_2<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r_1},\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-r_2}$$

수열 $\{|a_{2n-1}|\}$은 첫째항이 $|a_1|$, 공비가 $r_1^{\,2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{3}a_{2n-1}\right|=\frac{1}{3}\times\frac{|a_1|}{1-r_1^{\,2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{3}a_{2n-1}\right|$에서

$$\frac{a_1}{1-r_1}=\frac{1}{3}\times\frac{|a_1|}{1-r_1^{\,2}}$$

(i) $a_1>0$일 때

$1-r_1=3(1-r_1^{\,2})$

$1=3(1+r_1)$

$r_1=-\frac{2}{3}$

(ii) $a_1<0$일 때

$1-r_1=-3(1-r_1^{\,2})$

$1=-3(1+r_1)$

$r_1=-\frac{4}{3}$

이는 $-1<r_1<1$에 모순이다.

(i), (ii)에서 $a_1>0$이고 $r_1=-\frac{2}{3}$

수열 $\{|a_nb_n|\}$은 첫째항이 $|a_1b_1|$, 공비가 $|r_1r_2|$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|=\frac{|a_1b_1|}{1-|r_1r_2|}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)$에서

$$\frac{|a_1b_1|}{1-|r_1r_2|}=\frac{a_1}{1-r_1}\times\frac{b_1}{1-r_2}$$
$$=\frac{a_1b_1}{(1-r_1)(1-r_2)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|>0$에서 $\frac{a_1b_1}{(1-r_1)(1-r_2)}>0$

$1-r_1>0$, $1-r_2>0$이므로 $a_1b_1>0$

$$\frac{|a_1b_1|}{1-|r_1r_2|}=\frac{a_1b_1}{1-|r_1r_2|}$$
$$=\frac{a_1b_1}{(1-r_1)(1-r_2)}$$

$a_1b_1>0$이므로

$1-|r_1r_2|=(1-r_1)(1-r_2)$

(iii) $r_1r_2>0$일 때

$1-r_1r_2=(1-r_1)(1-r_2)$

$r_1+r_2=2r_1r_2$

$r_1+r_2>0$이 되어 $r_1>0$, $r_2>0$이고 이는 $r_1=-\frac{2}{3}$에 모순이다.

(iv) $r_1r_2<0$일 때

$1+r_1r_2=(1-r_1)(1-r_2)$

$r_1+r_2=0$

$r_2=-r_1$

$r_1=-\frac{2}{3}$이므로 $r_2=\frac{2}{3}$

(iii), (iv)에서 $r_2=\frac{2}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|=k\times\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$에서

$$\frac{|a_1b_1|}{1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}=k\times\frac{a_1b_1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}}$$

$a_1b_1>0$이므로

$$\frac{1}{\frac{5}{9}}=k\times\frac{1}{\frac{13}{9}}$$

따라서 $k=\frac{13}{5}$

답 ④

03 여러 가지 함수의 미분

유제 본문 25~33쪽

1 ③	**2** ②	**3** ②	**4** ④	**5** ⑤	**6** ④
7 ⑤	**8** ④	**9** ③	**10** ⑤		

1 $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^{-x}}{e^x-e^{-2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4^x-2^{-x}}{x}}{\frac{e^x-e^{-2x}}{x}}$

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(4^x-1)-(2^{-x}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2^{-x}-1}{-x}$$
$$=\ln 4+\ln 2=3\ln 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)-(e^{-2x}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times 2\right)$$
$$=1+2=3$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^{-x}}{e^x-e^{-2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4^x-2^{-x}}{x}}{\frac{e^x-e^{-2x}}{x}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^{-x}}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-2x}}{x}}$$
$$=\frac{3\ln 2}{3}$$
$$=\ln 2$$

답 ③

다른 풀이

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^{-x}}{e^x-e^{-2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(2^{3x}-1)}{2^x(e^{3x}-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}}{2^x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{3x}-1}{3x}}{\frac{e^{3x}-1}{3x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}}{2^x}\times\frac{\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}}$$
$$=\frac{1}{1}\times\frac{\ln 2}{1}=\ln 2$$

2 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sqrt{x+a}+b}$이 0이 아닌 값으로 수렴하고

$\lim_{x\to 0}(e^{ax}-1)=e^0-1=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+a}+b)=0$

이때 함수 $y=\sqrt{x+a}+b$는 $\{x|x\ge -a\}$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+a}+b)=\sqrt{a}+b=0$에서

$b=-\sqrt{a}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sqrt{x+a}+b}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x}$$
$$=a\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})$$
$$=a\times 1\times 2\sqrt{a}$$
$$=2a^{\frac{3}{2}}=16$$

$a^{\frac{3}{2}}=8=2^3$에서 $a=(2^3)^{\frac{2}{3}}=4$,

$b=-\sqrt{a}=-2$이므로

$a+b=4+(-2)=2$

답 ②

3 $f(x)=2^x+4^x$에서

$f'(x)=2^x\ln 2+4^x\ln 4$

$\quad=2^x\ln 2+2^{2x+1}\ln 2$

$\quad=(2^x+2^{2x+1})\ln 2$

$f'(a)=(2^a+2^{2a+1})\ln 2=36\ln 2$에서

$2^a+2^{2a+1}=36$

$2^a=t\ (t>0)$이라 하면

$t+2t^2=36$

$(2t+9)(t-4)=0$

$t>0$이므로 $t=4$

따라서 $2^a=4=2^2$이므로 $a=2$

답 ②

4 $\overline{\mathrm{AH}}=t-1$, $\overline{\mathrm{BH}}=f(t)=k\ln t$이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times(t-1)\times k\ln t$

$\quad=\frac{k}{2}(t-1)\ln t$

$$\lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{(t-1)^2}=\lim_{t\to 1+}\frac{\frac{k}{2}(t-1)\ln t}{(t-1)^2}$$
$$=\frac{k}{2}\lim_{t\to 1+}\frac{\ln t}{t-1}$$

$g(t)=\ln t$라 하면 $g(1)=0$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{g(t)-g(1)}{t-1}=g'(1)$$

$g'(t)=\frac{1}{t}$이므로 $g'(1)=1$

따라서

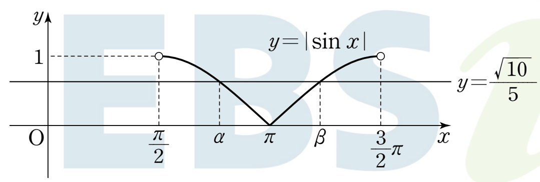
$$\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{(t-1)^2}=\frac{k}{2}\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}=\frac{k}{2}\times1=\frac{k}{2}=2$$

이므로 $k=4$

답 ④

5 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$일 때, 방정식 $|\sin x|=\frac{\sqrt{10}}{5}$의 해는 곡선 $y=|\sin x|\left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{10}}{5}$의 교점의 x좌표와 같다.

이때 $|\sin\alpha|=|\sin\beta|=\frac{\sqrt{10}}{5}$이고 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{3}{2}\pi$이므로 곡선 $y=|\sin x|\left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi\right)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{10}}{5}$은 그림과 같다.



$\sin\alpha>0$, $\sin\beta<0$이므로

$$\sin\alpha=|\sin\alpha|=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\sin\beta=-|\sin\beta|=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$\cos^2x=1-\sin^2x$이고 $\cos\alpha<0$, $\cos\beta<0$이므로

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}$$
$$=-\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$$

따라서

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$
$$=\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)-\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{10}}{5}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{6}}{5}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

답 ⑤

6 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2\times5$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sin A}=\frac{8}{\sin C}=10$$

$$\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{5},\ \sin C=\frac{4}{5}$$

$0<A<\frac{\pi}{2}$, $0<C<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos A>0$, $\cos C>0$

$$\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2}=\frac{1}{5},$$

$$\cos C=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

따라서

$$\cos(A-C)=\cos A\cos C+\sin A\sin C$$
$$=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\frac{4}{5}$$
$$=\frac{3+8\sqrt{6}}{25}$$

답 ④

7 $$\lim_{x\to0}\frac{\cos^3x-2\cos^2x+1}{(x\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos^2x-\cos x-1)}{(x\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\times\frac{\cos^2x-\cos x-1}{\cos^2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\times\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-\cos x-1}{\cos^2x}$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x^2(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x^2(\cos x+1)}$$
$$=-\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{\cos x+1}\right\}$$
$$=-\left(1^2\times\frac{1}{1+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

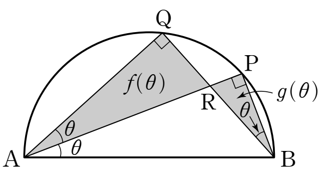
$$\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-\cos x-1}{\cos^2x}=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\cos^2x}\right)$$
$$=1-\frac{1}{1}-\frac{1}{1^2}=-1$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-2\cos^2 x+1}{(x\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos x-1}{\cos^2 x}$$
$$=-\frac{1}{2}\times(-1)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

8



$\angle\mathrm{RAQ}=\theta$이고 $\angle\mathrm{AQB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos 2\theta=2\cos 2\theta$

$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{AQ}}\times\tan\theta=2\cos 2\theta\tan\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{RQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(2\cos 2\theta)\times(2\cos 2\theta\tan\theta)$$
$$=2\cos^2 2\theta\tan\theta$$

$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\theta=2\sin\theta$

$\angle\mathrm{ARQ}=\angle\mathrm{BRP}$이므로

$\angle\mathrm{RBP}=\angle\mathrm{RAQ}=\theta$

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{BP}}\times\tan\theta=2\sin\theta\tan\theta$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{PR}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta)\times(2\sin\theta\tan\theta)$$
$$=2\sin^2\theta\tan\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)\times g(\theta)}{\theta^4}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\cos^2 2\theta\tan\theta\times 2\sin^2\theta\tan\theta}{\theta^4}$$
$$=4\lim_{\theta\to 0+}\cos^2 2\theta\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}$$
$$=4\times 1^2\times 1^2\times 1^2$$
$$=4$$

답 ④

9 함수 $f(x)=x\sin x$와 양수 a에 대하여 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{a\sin a}{a}=\sin a$$

$f'(x)=\sin x+x\cos x$이므로 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$f'(a)=\sin a+a\cos a$

즉, $\sin a=\sin a+a\cos a$이므로

$a\cos a=0$

$a>0$이므로 $\cos a=0$

$f(a)=a\sin a$이고 $f(a)<0$이려면 $\sin a<0$이어야 한다.

따라서 $\cos a=0$, $\sin a<0$을 만족시키는 양수 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}\pi$이다.

답 ③

10 $f(x)=x+a\sin x$에서

$f'(x)=1+a\cos x$

점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+a\cos\frac{\pi}{2}=1$

점 $(\pi, f(\pi))$에서의 접선의 기울기는

$f'(\pi)=1+a\cos\pi=1-a$

두 접선이 서로 수직이므로

$1\times(1-a)=-1$, $a=2$

따라서 $f(x)=x+2\sin x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+1=\frac{\pi+6}{6}$$

답 ⑤

Level 1 **기초 연습** 본문 34~35쪽

1 ② **2** ② **3** ⑤ **4** ④ **5** ④ **6** ④
7 ③ **8** ②

1 $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(x^2+x+1)+\log_2(1-x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1-x^3)}{x^3}$$

이때 $-x^3=t$라 하면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1-x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{\log_2(1-x^3)}{-x^3}\right\}$$
$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\log_2(1+t)}{t}$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}=-\log_2 e$$
$$=\log_2 \frac{1}{e}$$

따라서 $k=\frac{1}{e}$

답 ②

2 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax+b}-e}{\ln(bx+1)}$가 수렴하고

$\lim_{x\to 0}\ln(bx+1)=\ln 1=0$이므로 $\lim_{x\to 0}(e^{ax+b}-e)=0$이다.

이때 함수 $y=e^{ax+b}-e$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}(e^{ax+b}-e)=e^b-e=0$에서 $b=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax+b}-e}{\ln(bx+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax+1}-e}{\ln(x+1)}$$
$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{ax}-1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$
$$=e\times\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a\right)}{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}}$$
$$=e\times\frac{1\times a}{1}$$
$$=ae=2$$

따라서 $a=\frac{2}{e}$, $b=1$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{e}{2}$

답 ②

3 $f(x)=2^{x+2}+x^3$이라 하면 $f(-1)=1$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{2^{x+2}+x^3-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$

$f(x)=2^{x+2}+x^3=4\times 2^x+x^3$에서

$$f'(x)=4\times 2^x\times\ln 2+3x^2$$
$$=2^{x+2}\ln 2+3x^2$$

따라서

$$\lim_{x\to -1}\frac{2^{x+2}+x^3-1}{x+1}=f'(-1)=2\ln 2+3$$

답 ⑤

4 $f(a)=0$이므로

$2\ln a+k=0$

$a=e^{-\frac{k}{2}}$ ...... ㉠

$f'(x)=\frac{2}{x}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=\frac{2}{a}$

$f'(a)=4$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $e^{-\frac{k}{2}}=\frac{1}{2}$

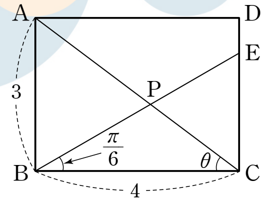
$-\frac{k}{2}=\ln\frac{1}{2}$

$k=2\ln 2$

따라서 $a\times k=\frac{1}{2}\times 2\ln 2=\ln 2$

답 ④

5



$\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서

$$\sin(\angle\mathrm{EPC})=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}$$
$$=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$

답 ④

6 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-2e^{2x}+e^{4x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 ax}{(1-e^{2x})^2\times(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin^2 ax}{(ax)^2}\times\frac{(2x)^2}{(1-e^{2x})^2}\times\frac{(ax)^2}{(2x)^2}\times\frac{1}{1+\cos ax}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1-e^{2x}}{2x}\right)^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{a^2}{4}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos ax}$$
$$=1^2\times\frac{1}{(-1)^2}\times\frac{a^2}{4}\times\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{a^2}{8}=1$$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$

답 ④

7 $f(x)=a\sin x+(a-2)\cos x$에서

$f'(x)=a\cos x-(a-2)\sin x$

$(f(x))^2+(f'(x))^2$

$=\{a\sin x+(a-2)\cos x\}^2+\{a\cos x-(a-2)\sin x\}^2$

$=a^2\sin^2 x+2a(a-2)\sin x\cos x+(a-2)^2\cos^2 x$

$\quad+a^2\cos^2 x-2a(a-2)\cos x\sin x+(a-2)^2\sin^2 x$

$=a^2+(a-2)^2$

$=2a^2-4a+4$

$=2(a-1)^2+2$

이므로 $(f(x))^2+(f'(x))^2$은 $a=1$일 때, 최소가 된다.

답 ③

8 $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\alpha<0$

$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$에서 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$f(x)=a\sin x+b\cos x$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$이므로

$f(\alpha)=a\sin\alpha+b\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}a-\frac{2\sqrt{5}}{5}b$

$f'(\alpha)=a\cos\alpha-b\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}a+\frac{\sqrt{5}}{5}b$

$f(\alpha)=f'(\alpha)$에서

$-\frac{\sqrt{5}}{5}a-\frac{2\sqrt{5}}{5}b=-\frac{2\sqrt{5}}{5}a+\frac{\sqrt{5}}{5}b$

$a=3b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(\alpha)=\sqrt{5}$에서

$-\frac{\sqrt{5}}{5}a-\frac{2\sqrt{5}}{5}b=\sqrt{5}$

$a+2b=-5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-1$

따라서 $f'(x)=-3\cos x+\sin x$이므로

$f'\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-3\cos\frac{5}{4}\pi+\sin\frac{5}{4}\pi$

$\qquad=-3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$

답 ②

Level **2** **기본 연습** 본문 36~37쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** ② **4** ⑤ **5** ② **6** ③ **7** ③ **8** ②

1 곡선 $y=f(x)$, 즉 함수 $y=\ln(x+1)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은

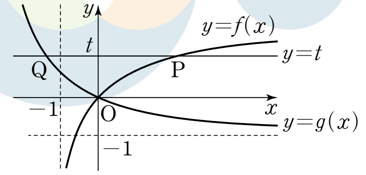
$x=\ln(y+1)$, 즉 $y=e^x-1$

함수 $y=e^x-1$의 그래프를 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=e^{-x}-1$이므로

$g(x)=e^{-x}-1$

직선 $y=t$가 곡선 $y=\ln(x+1)$과 만나는 점 P의 좌표는 $(e^t-1,\ t)$이고,

직선 $y=t$가 곡선 $y=e^{-x}-1$과 만나는 점 Q의 좌표는 $(-\ln(t+1),\ t)$이다.



$\overline{PQ}=e^t-1-\{-\ln(t+1)\}=e^t-1+\ln(t+1)$

따라서

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1+\ln(t+1)}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t}+\lim_{t\to0+}\frac{\ln(t+1)}{t}$

$=1+1=2$

답 ④

2 $x\neq\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=\frac{e^{ax+b}-1}{2x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이므로 $\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$의 값이 존재하고

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{e^{ax+b}-1}{2x-1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $x\to\frac{1}{2}$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(e^{ax+b}-1)=0$

함수 $y=e^{ax+b}-1$이 연속함수이므로

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(e^{ax+b}-1)=e^{\frac{a}{2}+b}-1=0$에서

$\frac{a}{2}+b=0,\ b=-\frac{a}{2}$

㉠에 $b=-\frac{a}{2}$를 대입하면

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{e^{ax-\frac{a}{2}}-1}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left\{\frac{e^{a\left(x-\frac{1}{2}\right)}-1}{a\left(x-\frac{1}{2}\right)}\times\frac{a}{2}\right\}$

$x-\frac{1}{2}=t$라 하면 $x \to \frac{1}{2}$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left\{\frac{e^{a\left(x-\frac{1}{2}\right)}-1}{a\left(x-\frac{1}{2}\right)}\times\frac{a}{2}\right\}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{at}-1}{at}\times\frac{a}{2}\right)$$

$$=1\times\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

즉, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2}=2$이므로

$a=4$, $b=-\frac{a}{2}=-2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{4x-2}-1}{2x-1} & \left(x\neq\frac{1}{2}\right)\\ 2 & \left(x=\frac{1}{2}\right)\end{cases}$이므로

$f(1)=e^2-1$

답 ⑤

3 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\ln\frac{1}{2}$

$$=-\ln 2<0$$

이므로

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}\neq\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=|a+b|=0$이어야 한다.

즉, $b=-a$

$f(x)=|ae^x-a|=\begin{cases}-ae^x+a & (x<0)\\ ae^x-a & (x\geq 0)\end{cases}$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{ae^h-a}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{-ae^h+a}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{a(e^h-1)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{-a(e^h-1)}{h}$

$=a\times 1\times(-a)\times 1$

$=-a^2$

$-a^2=\ln\frac{1}{2}$이므로 $a^2=\ln 2$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{\ln 2}$

$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{\ln 2}(e^x-1) & (x<0)\\ \sqrt{\ln 2}(e^x-1) & (x\geq 0)\end{cases}$

$f'(ab)=f'(-a^2)=f'\left(\ln\frac{1}{2}\right)$

$x<0$일 때, $f(x)=-\sqrt{\ln 2}(e^x-1)$이므로

$f'(x)=-\sqrt{\ln 2}e^x$

따라서

$f'(ab)=f'\left(\ln\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\ln 2}e^{\ln\frac{1}{2}}$

$=-\sqrt{\ln 2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{\ln 2}$

답 ②

4 점 $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$을 지나는 직선의 기울기를 k라 하면 직선의 방정식은

$y-(-3)=k\left(x-\frac{3}{2}\right)$, 즉 $y=k\left(x-\frac{3}{2}\right)-3$

직선 $y=k\left(x-\frac{3}{2}\right)-3$이 곡선 $y=x^2-2x$에 접하므로

$x^2-2x=k\left(x-\frac{3}{2}\right)-3$에서

$x^2-(k+2)x+\frac{3}{2}k+3=0$ ...... ㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$D=\{-(k+2)\}^2-4\left(\frac{3}{2}k+3\right)=0$

$k^2-2k-8=0$

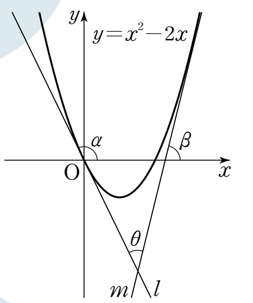
$(k+2)(k-4)=0$

$k=-2$ 또는 $k=4$

즉, 두 접선 l, m의 방정식은 각각

$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)-3$, $y=4\left(x-\frac{3}{2}\right)-3$

으로 놓을 수 있다.



두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α $(0<\alpha<\pi)$, β $(0<\beta<\pi)$라 하면

$\tan\alpha=-2$, $\tan\beta=4$

따라서

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{-2-4}{1+(-2)\times 4}\right|=\frac{6}{7}$

답 ⑤

다른 풀이

곡선 $y=x^2-2x$에서 $y'=2x-2$

곡선 $y=x^2-2x$ 위의 점 (t, t^2-2t)에서의 접선의 방정식은

$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$

이 접선이 점 $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$을 지나므로

$-3-(t^2-2t)=(2t-2)\left(\frac{3}{2}-t\right)$

$t^2-3t=0$

$t(t-3)=0$

$t=0$ 또는 $t=3$

두 접선 l, m의 방정식은 각각 $y=-2x$, $y=4x-9$로 놓을 수 있다.

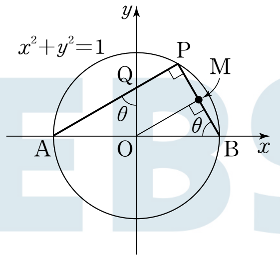
두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α $(0<\alpha<\pi)$, β $(0<\beta<\pi)$라 하면

$\tan\alpha=-2$, $\tan\beta=4$

따라서

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$$
$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{-2-4}{1+(-2)\times 4}\right|=\frac{6}{7}$$

5



$\angle\text{BPA}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\text{QAO}=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\angle\text{OQA}=\theta$

삼각형 QAO에서 $\tan\theta=\frac{\overline{\text{OA}}}{\overline{\text{OQ}}}=\frac{1}{\overline{\text{OQ}}}$이므로

$\overline{\text{OQ}}=\frac{1}{\tan\theta}$

두 점 O, M이 각각 두 선분 AB, BP의 중점이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{\text{OM}}\,/\!/\,\overline{\text{AP}}$, $\angle\text{BMO}=\frac{\pi}{2}$이고 삼각형 OBM에서

$\overline{\text{BM}}=\overline{\text{OB}}\times\cos\theta=\cos\theta$

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\overline{\text{OQ}}-\overline{\text{BM}}}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^3}$에서

$\theta-\frac{\pi}{2}=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\overline{\text{OQ}}-\overline{\text{BM}}}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^3}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1}{\tan\theta}-\cos\theta}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^3}$$
$$=\lim_{t\to 0-}\frac{\frac{1}{\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t^3}$$
$$=\lim_{t\to 0-}\frac{-\tan t+\sin t}{t^3}$$
$$=\lim_{t\to 0-}\frac{\sin t\cos t-\sin t}{t^3\cos t}$$
$$=\lim_{t\to 0-}\frac{\sin t(\cos t-1)}{t^3\cos t}$$
$$=\lim_{t\to 0-}\frac{\sin t(\cos^2 t-1)}{t^3\cos t(\cos t+1)}$$
$$=\lim_{t\to 0-}\frac{-\sin^3 t}{t^3\cos t(\cos t+1)}$$
$$=-\lim_{t\to 0-}\left\{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3\times\frac{1}{\cos t}\times\frac{1}{\cos t+1}\right\}$$
$$=-1^3\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1+1}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

답 ②

6 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\text{AC}}^2=\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{BC}}^2-2\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{BC}}\times\cos\theta$$
$$=2-2\cos\theta$$

$\overline{\text{AC}}=\sqrt{2-2\cos\theta}$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

$$\angle\text{CAB}=\angle\text{BCA}$$
$$=\frac{1}{2}(\pi-\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$
$$\angle\text{DAB}=\angle\text{CAB}+\angle\text{CAD}$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\angle\text{BDA}=\pi-(\angle\text{ABD}+\angle\text{DAB})$$
$$=\pi-\left\{\theta+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2}$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{AD}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\text{AB}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2}\right)}$$
$$\frac{\overline{\text{AD}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}$$
$$\overline{\text{AD}}=\frac{\sin\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}}$$

이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2-2\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}}\times\sin\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{1-\cos\theta}\times\sin^2\theta}{\theta^3\cos\frac{3\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right.$$

$$\left.\times\lim_{\theta\to0+}\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{1}\times1^2\times\sqrt{1^2\times\frac{1}{1+1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ③

다른 풀이

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 BH는 ∠ABC의 이등분선이고 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

이때

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{\theta}{2}\times\frac{\sin\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}}\times\sin\theta$$

$$=\sin\frac{\theta}{2}\times\sin^2\theta\times\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\cos\frac{3\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1^2\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

7 조건 (가)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

이때 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)=0$$

$g(0)=a+f(0)$에서 $f(0)=-a$이므로 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=px^2+qx-a$ (p, q는 상수, $p\neq0$)

이라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a\cos x+px^2+qx-a}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a(\cos x-1)}{x^2}+p+\frac{q}{x}\right\}$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x^2(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x^2(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x+1}$$

$$=-1^2\times\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

이므로 극한 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}$가 수렴하려면 $q=0$이어야 한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a(\cos x-1)}{x^2}+p+\frac{q}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a(\cos x-1)}{x^2}+p$$

$$=-\frac{a}{2}+p$$

조건 (가)에 의하여 $-\frac{a}{2}+p=2$

즉, $a-2p=-4$ …… ㉠

또 $f(x)=px^2-a$이므로

$g(x)=a\cos x+f(x)=a\cos x+px^2-a$

$g'(x)=-a\sin x+2px$

조건 (나)에 의하여

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a+p\pi=-2+3\pi$$

즉, $a-p\pi=2-3\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $p=3$

$f(x)=3x^2-2$이므로

$a+f(1)=2+1=3$

답 ③

8 삼차함수 $f(x)$와 함수 $y=x\cos x$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=\pi$에서 연속이고 미분가능해야 한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0+} g(x)=g(0)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=f(0),$$

$$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} x\cos x=0,$$

$$g(0)=0$$

이므로 $f(0)=0$

즉, 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)

이라 하자.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x},$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x\cos x}{x}=1$$

이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to0-}\frac{ax^3+bx^2+cx}{x}\\&=\lim_{x\to0-}(ax^2+bx+c)\\&=c=1\end{aligned}$$

즉, $f(x)=ax^3+bx^2+x$

함수 $g(x)$가 $x=\pi$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to\pi-} g(x)=\lim_{x\to\pi+} g(x)=g(\pi)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to\pi-} g(x)=\lim_{x\to\pi-} x\cos x=-\pi,$$

$$\lim_{x\to\pi+} g(x)=\lim_{x\to\pi+} f(x)=f(\pi),$$

$$g(\pi)=-\pi$$

이므로 $f(\pi)=-\pi$

$f(\pi)=a\pi^3+b\pi^2+\pi=-\pi$

$a\pi^2+b\pi+2=0$

$b=-a\pi-\dfrac{2}{\pi}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x=\pi$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi+}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi-}\frac{x\cos x+\pi}{x-\pi}$$

에서 $x-\pi=t$라 하면

$x\to\pi-$일 때 $t\to0-$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi-}\frac{x\cos x+\pi}{x-\pi}\\&=\lim_{t\to0-}\frac{(\pi+t)\cos(\pi+t)+\pi}{t}\\&=\lim_{t\to0-}\frac{-t\cos t-\pi\cos t+\pi}{t}\\&=\lim_{t\to0-}\left(-\cos t+\pi\times\frac{1-\cos t}{t}\right)\\&=\lim_{t\to0-}\left\{-\cos t+\frac{\pi(1-\cos^2 t)}{t(1+\cos t)}\right\}\\&=\lim_{t\to0-}(-\cos t)+\pi\lim_{t\to0-}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to0-}\frac{\sin t}{1+\cos t}\\&=-1+\pi\times1\times\frac{0}{2}=-1\end{aligned}$$

즉, $\displaystyle\lim_{x\to\pi-}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=-1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi+}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}&=\lim_{x\to\pi+}\frac{f(x)+\pi}{x-\pi}\\&=\lim_{x\to\pi+}\frac{ax^3+bx^2+x+\pi}{x-\pi}\\&=\lim_{x\to\pi+}\frac{ax^3-\left(a\pi+\frac{2}{\pi}\right)x^2+x+\pi}{x-\pi}\\&=\lim_{x\to\pi+}\frac{(x-\pi)\left(ax^2-\frac{2}{\pi}x-1\right)}{x-\pi}\\&=\lim_{x\to\pi+}\left(ax^2-\frac{2}{\pi}x-1\right)\\&=a\pi^2-3=-1\end{aligned}$$

에서 $a=\dfrac{2}{\pi^2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $b=-\dfrac{4}{\pi}$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{\pi^2}x^3-\dfrac{4}{\pi}x^2+x$이므로

$$\begin{aligned}f(2\pi)&=\frac{2}{\pi^2}\times(2\pi)^3-\frac{4}{\pi}\times(2\pi)^2+2\pi\\&=16\pi-16\pi+2\pi=2\pi\end{aligned}$$

답 ②

Level 3 실력 완성 본문 38쪽

1 ③ **2** ③ **3** ④

1 조건 (가)에서 $e^x=t$라 하면 $x \to 0$일 때 $t \to 1$이고

$\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(e^x)-a}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(e^x)-f(1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1}\times\frac{e^x-1}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$$
$$=f'(1)\times1$$
$$=f'(1)$$

이므로 $f'(1)=1$

$f(x)=a^x+\log_b x$에서

$f'(x)=a^x\ln a+\frac{1}{x\ln b}$이므로

$a\ln a+\frac{1}{\ln b}=1$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(1, f(1))$, $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기는 각각 $f'(1)$, $f'(2)$이므로 조건 (나)에서

$\tan\theta=\left|\frac{f'(1)-f'(2)}{1+f'(1)f'(2)}\right|$

$f'(1)=1$에서 $\left|\frac{1-f'(2)}{1+f'(2)}\right|=\frac{1}{3}$이므로

$f'(2)=\frac{1}{2}$ 또는 $f'(2)=2$

$f'(1)>f'(2)$이므로 $f'(2)=\frac{1}{2}$에서

$a^2\ln a+\frac{1}{2\ln b}=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠에서 $\frac{1}{\ln b}=1-a\ln a$이므로

이것을 ㉡에 대입하면

$a^2\ln a+\frac{1}{2}(1-a\ln a)=\frac{1}{2}$

$a\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a=0$

a가 1이 아닌 양수이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서

$f(1)=a^1+\log_b 1=a=\frac{1}{2}$

답 ③

2 $(x-1)^2f(x)=x^2\ln(x^2-2x+2)+a\sin\frac{\pi x}{2}+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=0+a+b$, $b=-a$

$x\neq1$일 때,

$f(x)=\frac{x^2\ln(x^2-2x+2)+a\sin\frac{\pi x}{2}-a}{(x-1)^2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2\ln(x^2-2x+2)+a\sin\frac{\pi x}{2}-a}{(x-1)^2}$에서

$x-1=t$라 하면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)^2\ln(t^2+1)+a\sin\frac{\pi(t+1)}{2}-a}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{(t+1)^2\times\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}-a\times\frac{1-\cos\frac{\pi t}{2}}{t^2}\right\}$$

이때

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\frac{\pi t}{2}}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos^2\frac{\pi t}{2}}{t^2\left(1+\cos\frac{\pi t}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2\frac{\pi t}{2}}{t^2\left(1+\cos\frac{\pi t}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}\right)^2\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi t}{2}}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{\pi^2}{4}\times\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{\pi^2}{8}$$

이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=1^2\times1-a\times\frac{\pi^2}{8}=1-\frac{\pi^2a}{8}$

이고 $f(1)=1-\frac{\pi^2a}{8}$이다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0+0+b=b$

$b=-a$이므로 $f(0)=-a$

조건 (나)의 $f(1)=\frac{\pi^2}{2}f(0)$에서

$1-\frac{\pi^2a}{8}=\frac{\pi^2}{2}\times(-a)$, $a=-\frac{8}{3\pi^2}$

따라서 $f(0)=\frac{8}{3\pi^2}$

답 ③

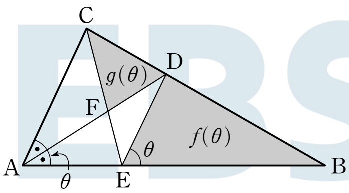
3 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$2 : 1 = \overline{BD} : \overline{CD}$

두 직선 AC, ED가 서로 평행하므로 두 삼각형 ABC, EBD는 닮음비가 $3 : 2$인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{EB} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $\overline{ED} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$



$\angle DEB = \angle CAB = \theta$이므로

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{EB} \times \overline{ED} \times \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times \sin\theta = \frac{4}{9}\sin\theta$$

$\overline{AE} = \frac{2}{3}$이므로 삼각형 AEC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AE} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} \times \sin\theta = \frac{1}{3}\sin\theta$$

각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{CF}$

$2 : 3 = \overline{EF} : \overline{CF}$ ...... ㉠

삼각형 AFC의 넓이는

$$\frac{1}{3}\sin\theta \times \frac{3}{3+2} = \frac{1}{5}\sin\theta$$

두 삼각형 AFC, DFE는 닮음비가 $3 : 2$인 닮은 도형이므로

$$(\text{삼각형 DFE의 넓이}) = (\text{삼각형 AFC의 넓이}) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1}{5}\sin\theta \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}\sin\theta$$

㉠에서

$$g(\theta) = \frac{4}{45}\sin\theta \times \frac{3}{2} = \frac{2}{15}\sin\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{4}{9}\sin\theta - \frac{2}{15}\sin\theta}{\theta}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{14}{45}\sin\theta}{\theta} = \frac{14}{45}$$

답 ④

다른 풀이

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin\theta = \sin\theta$$

삼각형 ABC에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

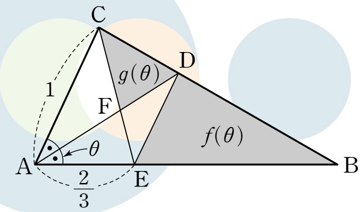
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$2 : 1 = \overline{BD} : \overline{CD}$

두 직선 AC, ED가 서로 평행하므로 두 삼각형 ABC, EBD는 닮음비가 $3 : 2$인 닮은 도형이다. 즉, 넓이의 비는 $3^2 : 2^2$이다.

그러므로 $f(\theta) = \frac{2^2}{3^2} \times S = \frac{4}{9}\sin\theta$

이때 $\overline{EB} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $\overline{AE} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



삼각형 CEB에서 $\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 1$이므로 삼각형 CED의 넓이는

$$\frac{1}{2}f(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}\sin\theta = \frac{2}{9}\sin\theta$$

삼각형 AEC에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AE} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{CF}$

$2 : 3 = \overline{EF} : \overline{CF}$

삼각형 CFD의 넓이 $g(\theta)$는

$$g(\theta) = \frac{2}{9}\sin\theta \times \frac{3}{3+2} = \frac{2}{15}\sin\theta$$

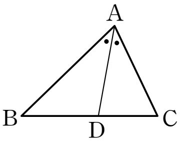
따라서

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{4}{9}\sin\theta - \frac{2}{15}\sin\theta}{\theta}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{14}{45}\sin\theta}{\theta} = \frac{14}{45}$$

참고 각의 이등분선의 성질

변 BC를 밑변으로 하는 삼각형 ABC의 높이를 h,

$\angle BAD = \angle CAD = \theta$라 하면



삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times h$$

삼각형 ADC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \sin\theta = \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times h$$

따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$가 성립한다.

04 여러 가지 미분법

유제 본문 41~49쪽

1 ⑤	**2** 4	**3** ④	**4** ③	**5** ①	**6** ③
7 ②	**8** ③	**9** ②	**10** ③		

1 $f(x)=6x-\dfrac{3}{x}$에서 $f'(x)=6+\dfrac{3}{x^2}$이므로

$f'(1)=6+3=9$

답 ⑤

2 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 점 $\left(\dfrac{\pi}{4}, a\right)$에서 만나므로

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=a$

$f(x)g(x)=2a\tan x$의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2a\tan\dfrac{\pi}{4}$

$a^2=2a$, $a(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

$f(x)g(x)=4\tan x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4\sec^2 x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\sec^2\dfrac{\pi}{4}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times 2+2\times g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4\times 2$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$

답 4

3 $f(x)=\sqrt{x^2+5}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\times(x^2+5)'$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\times 2x$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

따라서 $f'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+5}}=\dfrac{2}{3}$

답 ④

4 $f(\ln x)=4x^2+\dfrac{3}{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(\ln x)\times(\ln x)'=8x-\dfrac{3}{x^2}$

$f'(\ln x)\times\dfrac{1}{x}=8x-\dfrac{3}{x^2}$

$f'(\ln x)=8x^2-\dfrac{3}{x}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(0)=8-3=5$

답 ③

5 $x=-t^3+4t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=-3t^2+4$이고,

$y=\ln(t^2+1)$에서 $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{t^2+1}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t}{t^2+1}}{-3t^2+4}=\frac{2t}{(t^2+1)(-3t^2+4)}$$

(단, $-3t^2+4\neq 0$)

따라서 $t=2$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{4}{(4+1)(-12+4)}=-\frac{1}{10}$$

답 ①

6 $x=a$, $y=-a$일 때의 t의 값을 k라 하면

$k-\cos k=a$, $-k+\sin k=-a$에서

$(k-\cos k)+(-k+\sin k)=a+(-a)$

이므로 $\sin k-\cos k=0$

이때 $\cos k=0$이면 $\sin k-\cos k\neq 0$

즉, $\cos k\neq 0$이므로 $\sin k-\cos k=0$의 양변을 $\cos k$로 나누면

$\dfrac{\sin k}{\cos k}-1=0$, $\tan k=1$

$0<k<\pi$이므로 $k=\dfrac{\pi}{4}$

$x=t-\cos t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1+\sin t$이고,

$y=-t+\sin t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=-1+\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1+\cos t}{1+\sin t}$$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{-1+\cos\frac{\pi}{4}}{1+\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{(-2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=2\sqrt{2}-3$$

답 ③

7 $x^2y+\ln y=4$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2xy+x^2\times\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2+\frac{1}{y}}$$

따라서 곡선 $x^2y+\ln y=4$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2\times2\times1}{2^2+\frac{1}{1}}=-\frac{4}{5}$$

답 ②

8 점 $(1, a)$가 곡선 $2x+\sqrt{y}=\frac{y}{x}$ 위의 점이므로

$2+\sqrt{a}=a$

$(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}-2=0$, $(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)=0$

$\sqrt{a}\ge0$이므로 $\sqrt{a}=2$

즉, $a=4$

$2x+\sqrt{y}=\frac{y}{x}$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}\times x-y\times1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\times\frac{dy}{dx}=2+\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2+\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{y}}}\ (\text{단, } xy(2\sqrt{y}-x)\ne0)$$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 b이므로

$$b=\frac{2+4}{1-\frac{1}{4}}=8$$

따라서 $a+b=4+8=12$

답 ③

9 $f(x)=\frac{x}{1+e^x}$에서

$$f'(x)=\frac{1+e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$$g'(f(0))=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{2}{2^2}}=2$$

답 ②

10 $f(x)=\sqrt{x+2}+\frac{1}{x}=(x+2)^{\frac{1}{2}}+x^{-1}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}+2x^{-3}$$

$$=-\frac{1}{4(x+2)\sqrt{x+2}}+\frac{2}{x^3}$$

따라서

$$\lim_{x\to2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=f''(2)$$

$$=-\frac{1}{4(2+2)\sqrt{2+2}}+\frac{2}{2^3}$$

$$=-\frac{1}{32}+\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 50~51쪽

1 ④	**2** ③	**3** ②	**4** ⑤	**5** ②	**6** ③
7 ③	**8** ①				

1 $f(x)=4\sin\frac{x}{2}+3e^{2x}$에서

$$f'(x)=4\cos\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}+3e^{2x}\times2$$

$$=2\cos\frac{x}{2}+6e^{2x}$$

따라서 $f'(0)=2+6=8$

답 ④

2 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

$$=\frac{1-\ln 1}{1^2}=1$$

답 ③

3 $\ln f(x)=e^{x-1}-x^2$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\ln f(1)=e^0-1=0$

$f(1)=1$

$\ln f(x)=e^{x-1}-x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=e^{x-1}-2x$

$\dfrac{f'(1)}{f(1)}=e^0-2=1-2=-1$

따라서 $f'(1)=-1$

답 ②

4 $\lim_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}g(x)=0$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $g(0)=0$

$\lim_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=3$

$h(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

따라서

$h'(0)=f'(g(0))g'(0)$

$=f'(0)g'(0)=2\times3=6$

답 ⑤

5 $x=t+2\ln t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{2}{t}$이고,

$y=t^3-12t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-12$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2-12}{1+\frac{2}{t}}=\dfrac{3(t-2)(t+2)}{\frac{t+2}{t}}$

$=3t(t-2)=3(t-1)^2-3$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}$는 $t=1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

답 ②

6 $xy-2y^3=e^{x+y}$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$y+x\times\dfrac{dy}{dx}-6y^2\times\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}\times\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)$

$(e^{x+y}-x+6y^2)\times\dfrac{dy}{dx}=y-e^{x+y}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x+6y^2}$ (단, $e^{x+y}-x+6y^2\neq0$)

따라서 곡선 $xy-2y^3=e^{x+y}$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{-1-e^0}{e^0-1+6}=-\dfrac{1}{3}$

답 ③

7 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{2}+1=a$에서 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

$f(x)=2x+e^{2x-1}$에서

$f'(x)=2+2e^{2x-1}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=a$에서 $g(a)=\dfrac{1}{2}$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}=\dfrac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{2+2e^0}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

8 $f(x)=a\cos^2 x+b\ln(\cos x)$에서

$f'(x)=2a\cos x\times(-\sin x)+b\times\dfrac{-\sin x}{\cos x}$

$=-2a\sin x\cos x-b\tan x$

$f''(x)=-2a\cos^2 x+2a\sin^2 x-b\sec^2 x$

이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2a\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}-b\tan\dfrac{\pi}{4}$

$=-2a\times\dfrac{\sqrt2}{2}\times\dfrac{\sqrt2}{2}-b\times1$

$=-a-b=-3$ …… ㉠

$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2a\cos^2\dfrac{\pi}{3}+2a\sin^2\dfrac{\pi}{3}-b\sec^2\dfrac{\pi}{3}$

$=-2a\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2a\times\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)^2-b\times2^2$

$=a-4b=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-1$

따라서

$ab=4\times(-1)=-4$

답 ①

Level **2** **기본 연습** 본문 52~53쪽

1 ③	**2** ③	**3** ②	**4** ④	**5** ③	**6** ①
7 ⑤	**8** ③				

1 $g(x)=3x+\dfrac{f(2x-1)}{x}$에서

$g'(x)=3+\dfrac{f'(2x-1)\times2\times x-f(2x-1)\times1}{x^2}$

따라서

$g'(1)=3+\dfrac{f'(1)\times2-f(1)\times1}{1^2}$

$=3+2f'(1)-f(1)$

$g'(1)=2f'(1)$에서 $2f'(1)=3+2f'(1)-f(1)$이므로

$f(1)=3$

답 ③

2 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-a}{h}=b$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{h\to0}\left(f\left(\frac{1}{2}+h\right)-a\right)=0$

$0<x<1$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)-a=0$

$a=f\left(\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{1}{2}+\ln 1=2$

$$b=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$f(x)=4x+\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)$에서

$$f'(x)=4+\frac{\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi x}{2}}{\tan\frac{\pi x}{2}}$$

$$=4+\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}$$

이므로

$$b=4+\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=4+\frac{\pi}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=4+\pi$$

따라서

$a+b=2+(4+\pi)=\pi+6$

답 ③

3 $f(2)=e^{2+a}+8=9$에서 $e^{2+a}=1$이므로

$a=-2$

$f(x)=e^{x-2}+x^3$에서

$f'(x)=e^{x-2}+3x^2$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)\left(\frac{x}{3}\right)=x$가 성립하므로

$g\left(\frac{x}{3}\right)=f^{-1}(x)$이다.

$(f\circ g)\left(\frac{x}{3}\right)=x$에서 $f\left(g\left(\frac{x}{3}\right)\right)=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'\left(g\left(\frac{x}{3}\right)\right)g'\left(\frac{x}{3}\right)\times\frac{1}{3}=1$

$$g'\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{3}{f'\left(g\left(\frac{x}{3}\right)\right)}$$

이때 $g\left(\frac{x}{3}\right)=f^{-1}(x)$이므로

$$g'\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{3}{f'(f^{-1}(x))}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

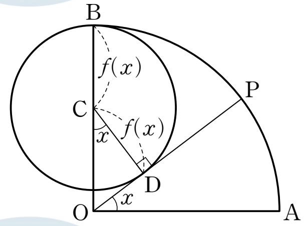
$f^{-1}(9)=2$이므로 ㉠의 양변에 $x=9$를 대입하면

$$g'(3)=\frac{3}{f'(f^{-1}(9))}=\frac{3}{f'(2)}$$

$$=\frac{3}{e^0+3\times2^2}=\frac{3}{13}$$

답 ②

4 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고, 원과 선분 OP의 접점을 D라 하자.



$\angle\mathrm{ODC}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{DCO}=x$, 즉 $\overline{\mathrm{CO}}=\frac{\overline{\mathrm{DC}}}{\cos x}$

$\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{BC}}+\frac{\overline{\mathrm{DC}}}{\cos x}$이므로 $f(x)+\frac{f(x)}{\cos x}=1$

$f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}$이므로

$$f'(x)=\frac{-\sin x\times(1+\cos x)-\cos x\times(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=-\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

답 ④

5 $x=\frac{1}{3}t+e^t$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}+e^t$이고,

$y=-\frac{1}{3}t-e^{-t}$에서 $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{3}+e^{-t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{3}+e^{-t}}{\frac{1}{3}+e^t}$$

접선의 기울기가 2인 t의 값을 k라 하면

$$\frac{-\frac{1}{3}+e^{-k}}{\frac{1}{3}+e^{k}}=2$$

$$-\frac{1}{3}+e^{-k}=\frac{2}{3}+2e^{k}$$

$2e^{k}+1-e^{-k}=0$, $2e^{2k}+e^{k}-1=0$

$(2e^{k}-1)(e^{k}+1)=0$

$e^{k}>0$이므로 $e^{k}=\frac{1}{2}$

$k=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$이므로

$a=-\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$, $b=\frac{\ln 2}{3}-2$

따라서

$$a+b=\left(-\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\ln 2}{3}-2\right)=-\frac{3}{2}$$

답 ③

6 $\tan(x+y)=1+\sin x\cos y$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\sec^2(x+y)\times\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$
$$=0+\cos x\cos y-\sin x\sin y\times\frac{dy}{dx}$$

$$\{\sec^2(x+y)+\sin x\sin y\}\times\frac{dy}{dx}$$
$$=\cos x\cos y-\sec^2(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\cos y-\sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y)+\sin x\sin y}$$

(단, $\sec^2(x+y)+\sin x\sin y\neq 0$)

따라서 점 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\cos 0\cos\frac{\pi}{4}-\sec^2\left(0+\frac{\pi}{4}\right)}{\sec^2\left(0+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 0\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-2}{2+0}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}-1$$

답 ①

7 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$f(2)=2$, $f'(2)=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(2)=2$

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(2)}=2$$

$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$에서

$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$이므로

$$h'(2)=\frac{g'(2)f(2)-g(2)f'(2)}{(f(2))^2}$$

$$=\frac{2\times 2-2\times\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

8 두 점 P, Q의 x좌표는

$(\ln x)^2-2\ln x+1=t$에서

$(\ln x-1)^2=t$

$\ln x-1=-\sqrt{t}$ 또는 $\ln x-1=\sqrt{t}$

$\ln x=1-\sqrt{t}$ 또는 $\ln x=1+\sqrt{t}$

$x=e^{1-\sqrt{t}}$ 또는 $x=e^{1+\sqrt{t}}$

삼각형 OPQ의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times(e^{1+\sqrt{t}}-e^{1-\sqrt{t}})$$

이므로

$$f'(t)=\frac{1}{2}\times(e^{1+\sqrt{t}}-e^{1-\sqrt{t}})$$
$$+\frac{1}{2}\times t\times\frac{1}{2\sqrt{t}}\times(e^{1+\sqrt{t}}+e^{1-\sqrt{t}})$$

따라서

$$f'(1)=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{4}(e^2+1)=\frac{3e^2-1}{4}$$

답 ③

Level 3 실력 완성		본문 54쪽
1 3	**2** ④	**3** 9

1 $g(x)=\cos(\pi f(x))$에서

$g'(x)=-\pi f'(x)\sin(\pi f(x))$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $\sin(\pi f(x))=0$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고 $f'(0)=-2<0$이므로 $f'(\alpha)=0$인 양수 α가 단 하나 존재한다.

$\sin(\pi f(x))=0$에서

$f(x)=m$ (단, m은 정수) …… ㉠

그런데 $g(a_3)=\cos(\pi f(a_3))=0$에서

$f(a_3)=\dfrac{2k-1}{2}$ (k는 정수)이므로 $\sin(\pi f(a_3))\neq 0$

$g'(a_3)=0$에서 $f'(a_3)=0$

즉, $a_3=\alpha$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$f'(0)<0$이므로 ㉠에서

$f(a_2)=f(a_4)=k$, $f(a_1)=f(a_5)=k+1$

$$\begin{aligned}g(a_1)+g(a_2)&=\cos(\pi f(a_1))+\cos(\pi f(a_2))\\&=\cos(k\pi+\pi)+\cos k\pi\\&=-\cos k\pi+\cos k\pi=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(a_4)+g(a_5)&=\cos(\pi f(a_4))+\cos(\pi f(a_5))\\&=\cos(\pi f(a_2))+\cos(\pi f(a_1))\\&=g(a_2)+g(a_1)=0\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}(f(a_n)+g(a_n))&=\sum_{n=1}^{5}f(a_n)+\sum_{n=1}^{5}g(a_n)\\&=\left\{\frac{2k-1}{2}+2k+2(k+1)\right\}+0\\&=5k+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$k=0$, 즉 $f(\alpha)=-\dfrac{1}{2}$

$f(a_1)=f(0)=k+1=1$이므로

$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ (p, q는 상수)

라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f'(0)=-2$이므로 $q=-2$

㉡에서 $f'(\alpha)=0$, $f(\alpha)=-\dfrac{1}{2}$이므로

$3\alpha^2+2p\alpha-2=0$, $\alpha^3+p\alpha^2-2\alpha+1=-\dfrac{1}{2}$

$3\alpha^2+2p\alpha-2=0$에서

$p=\dfrac{2-3\alpha^2}{2\alpha}$이므로

$\alpha^3+p\alpha^2-2\alpha+1=-\dfrac{1}{2}$에

$p=\dfrac{2-3\alpha^2}{2\alpha}$을 대입하면

$\alpha^3+\left(\dfrac{2-3\alpha^2}{2\alpha}\right)\alpha^2-2\alpha+1=-\dfrac{1}{2}$

$\alpha^3+2\alpha-3=0$, $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+3)=0$

$\alpha^2+\alpha+3>0$이므로

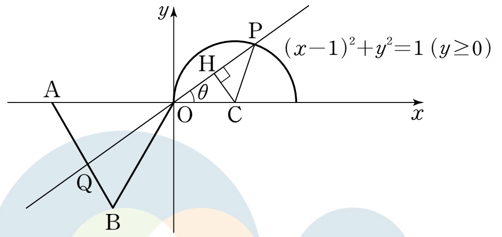
$\alpha=1$, $p=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$이므로

$f(2)=8-2-4+1=3$

답 3

2 점 (1, 0)을 C라 하고, 점 C에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 OP의 중점이다.



$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OC}}\cos\theta=\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=2\overline{\mathrm{OH}}=2\cos\theta$

$\angle\mathrm{QOA}=\angle\mathrm{POC}=\theta$이고 $\angle\mathrm{OAQ}=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\angle\mathrm{AQO}=\dfrac{2}{3}\pi-\theta$

삼각형 OAQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin(\angle\mathrm{OAQ})}=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle\mathrm{AQO})}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OQ}}&=\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta-\cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta}\\&=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}\end{aligned}$$

$$f(\theta)=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}=2\cos\theta+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=-2\sin\theta+\frac{-2\sqrt{3}(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2}\\&=-2\sin\theta+\frac{6\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta}{(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2}\end{aligned}$$

$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$이고, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$에서 $\cos\alpha>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=-2\sin\alpha+\frac{6\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha}{(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)^2}\\&=-2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{6\times\frac{2\sqrt{7}}{7}-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{21}}{7}}{\left(\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}\\&=-\frac{4\sqrt{7}}{7}+\frac{\frac{6\sqrt{7}}{7}}{\left(\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)^2}=-\frac{58\sqrt{7}}{175}\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

직선 OP의 방정식은

$y=(\tan\theta)x$

직선 AB의 방정식은

$y=-\sqrt{3}(x+2)$, 즉 $y=-\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$

두 직선 OP, AB의 교점 Q의 x좌표는

$(\tan\theta)x=-\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$에서

$(\tan\theta+\sqrt{3})x=-2\sqrt{3}$

$x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan\theta}$

이고 $y=-\dfrac{2\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{3}+\tan\theta}$

즉, 두 직선의 교점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan\theta},\ -\dfrac{2\sqrt{3}\tan\theta}{\sqrt{3}+\tan\theta}\right)$

한편,

$\overline{\mathrm{OP}}=2\cos\theta$,

$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tan\theta}\times\sec\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$

이므로

$f(\theta)=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}$

$\quad=2\cos\theta+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$

위의 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$f'(\theta)=-2\sin\theta-\dfrac{2\sqrt{3}(-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2}$

이때 $\sin a=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$이고, $0<a<\dfrac{\pi}{3}$에서 $\cos a>0$이므로

$\cos a=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

따라서

$$f'(a)=-2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}-\frac{2\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{21}}{7}\right)}{\left(\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2}$$

$$=-\frac{58\sqrt{7}}{175}$$

3 함수 $h(x)$가 구간 $(-2,\ \infty)$에서 미분가능하므로 구간 $(-2,\ \infty)$에서 연속이다.

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0-}h(x)=\lim\limits_{x\to0-}(f(x)+g^{-1}(x))=f(0)+g^{-1}(0)$,

$\lim\limits_{x\to0+}h(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1+f(x))}{x}$,

$h(0)=f(0)+g^{-1}(0)$

에서

$f(0)+g^{-1}(0)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1+f(x))}{x}$ …… ㉠

$g^{-1}(0)=\alpha$라 하면 $g(\alpha)=0$이므로

$e^{2\alpha}+e^{\alpha}-2=0$, $(e^{\alpha}-1)(e^{\alpha}+2)=0$

$e^{\alpha}>0$이므로 $e^{\alpha}=1$

$\alpha=0$, 즉 $g^{-1}(0)=0$

㉠에서 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1+f(x))}{x}=f(0)$

$x\to0+$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0+}\ln(1+f(x))=0$이므로

$\ln(1+f(0))=0$

$f(0)=0$

그러므로 $h(0)=f(0)+g^{-1}(0)=0+0=0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수, $a>0$)이라 하면

$x\to0+$일 때, $f(x)\to0$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+f(x))}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}\times\frac{ax^3+bx^2+cx}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0+}(ax^2+bx+c)=c=0$$

그러므로 $f(x)=ax^3+bx^2$

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하고

$h(0)=0$, $f(0)=0$, $g^{-1}(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)+g^{-1}(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)+g^{-1}(x)-g^{-1}(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0-}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(0)}{x}$$
$$=f'(0)+(g^{-1})'(0)$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\ln(1+f(x))}{x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}\times\frac{ax^3+bx^2}{x^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0+}(ax+b)=b$$

에서

$f'(0)+(g^{-1})'(0)=b$ …… ㉡

$f(x)=ax^3+bx^2$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx$이므로

$f'(0)=0$
$g(x)=e^{2x}+e^{x}-2$에서 $g'(x)=2e^{2x}+e^{x}$이므로
$(g^{-1})'(0)=\frac{1}{g'(g^{-1}(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{3}$
㉡에서 $b=\frac{1}{3}$
$f'(x)=0$에서
$3ax^2+\frac{2}{3}x=0$, $x\left(3ax+\frac{2}{3}\right)=0$
$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{9a}$
$f(0)=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 극댓값 $\frac{1}{9}$을 가지므로
$$f\left(-\frac{2}{9a}\right)=a\left(-\frac{2}{9a}\right)^3+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{9a}\right)^2=\frac{1}{9}\left(-\frac{2}{9a}\right)^2=\frac{1}{9}$$
$a^2=\left(\frac{2}{9}\right)^2$
$a>0$이므로 $a=\frac{2}{9}$
따라서 $f(x)=\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2$이므로
$f(3)=\frac{2}{9}\times 3^3+\frac{1}{3}\times 3^2=6+3=9$

답 9

05 도함수의 활용

유제

본문 57~65쪽

1 ③ **2** ① **3** ② **4** ① **5** ⑤ **6** ④
7 ③ **8** ④

1 점 $(-1, a)$가 곡선 $y=e^{x+1}+ax$ 위의 점이므로
$a=1-a$, 즉 $a=\frac{1}{2}$
$y=e^{x+1}+\frac{1}{2}x$에서 $y'=e^{x+1}+\frac{1}{2}$이므로
곡선 $y=e^{x+1}+\frac{1}{2}x$ 위의 점 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는
$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
곡선 $y=e^{x+1}+\frac{1}{2}x$ 위의 점 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은
$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(x+1)$, 즉 $y=\frac{3}{2}(x+1)+\frac{1}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+2$이므로
$f\left(\frac{1}{a}\right)=f(2)=\frac{3}{2}\times 2+2=5$

답 ③

2 점 $(1, 1)$이 곡선 $x^3+axy+y=b$ 위의 점이므로
$1+a+1=b$
$b=a+2$ …… ㉠
$x^3+axy+y=b$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$3x^2+ay+ax\times\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0$
$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+ay}{ax+1}$ (단, $ax+1\neq 0$)
곡선 $x^3+axy+y=b$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$-\frac{3+a}{a+1}$ (단, $a\neq -1$)
곡선 $x^3+axy+y=b$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은
$y=-\frac{3+a}{a+1}(x-1)+1$
이 직선이 원점을 지나므로
$\frac{3+a}{a+1}+1=0$, $3+a+a+1=0$
$a=-2$

㉠에서 $b=-2+2=0$

따라서

$a+b=-2+0=-2$

답 ①

3 $f(x)=(x-1)e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$f''(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$

$x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 -1이다.

변곡점의 좌표가 $(-1,\ -2e^{-1})$이므로

$a=-1,\ b=-2e^{-1}$

따라서

$a\times b=-1\times(-2e^{-1})=\frac{2}{e}$

답 ②

4 $x_1<k<x_2$인 모든 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)<0$이므로 $f'(k)=0$이고 $x=k$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극값을 갖는다.

$f(x)=xe^{ax}$에서

$f'(x)=e^{ax}+axe^{ax}=(1+ax)e^{ax}$

$f'(k)=0$에서 $(1+ak)e^{ak}=0$이므로

$ak=-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 $(k,\ f(k))$가 곡선 $y=\frac{1}{f(x)}$ 위에 있으므로

$\frac{1}{f(k)}=f(k)$에서

$(f(k))^2=1$

$(ke^{ak})^2=k^2e^{2ak}=1$

㉠에서 $k^2e^{-2}=1$이므로 $k^2=e^2$

따라서

$\frac{k}{a}=\frac{k^2}{ak}=\frac{k^2}{-1}=-k^2=-e^2$

답 ①

5 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$에서

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$

$=2\cos x+2\cos(x+x)$

$=2\cos x+2(\cos x\cos x-\sin x\sin x)$

$=2\cos x+2(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=2\cos x+2(2\cos^2 x-1)$

$=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$

$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	극소	↗	

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(2\pi)=0+0=0$

이므로 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

답 ⑤

6 $x+\frac{a+1}{x}\ge 4-a\ln x$에서

$x+\frac{a+1}{x}-4+a\ln x\ge 0$

정의역이 $\{x\,|\,x>0\}$인 함수 $f(x)$를

$f(x)=x+\frac{a+1}{x}-4+a\ln x$

라 하면

$f'(x)=1-\frac{a+1}{x^2}+\frac{a}{x}$

$=\frac{x^2+ax-(a+1)}{x^2}$

$=\frac{(x-1)(x+a+1)}{x^2}$

$a>0$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값 $a-2$를 가지므로 모든 양수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$을 만족시키려면 $a-2\ge 0$이어야 한다.

따라서 $a\ge 2$이므로 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ④

7 $x=t-\frac{4}{t+1},\ y=3t+2\ln(t+1)$에서

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{4}{(t+1)^2},\ \frac{dy}{dt}=3+\frac{2}{t+1}$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left\{1+\frac{4}{(t+1)^2}\right\}^2+\left(3+\frac{2}{t+1}\right)^2}$$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 속력은

$$\sqrt{\left(1+\frac{4}{2^2}\right)^2+\left(3+\frac{2}{2}\right)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$$

답 ③

8 $x=a\cos t,\ y=a\ln(\cos t)$에서

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\frac{-a\sin t}{\cos t}=-a\tan t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-a\sec^2 t$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(-a\cos t)^2+(-a\sec^2 t)^2}$$

$$=a\sqrt{\cos^2 t+\sec^4 t}$$

점 P의 시각 $t=\frac{\pi}{4}$에서의 가속도의 크기가 6이므로

$$a\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{4}+\sec^4\frac{\pi}{4}}=6$$

$$a\sqrt{\frac{1}{2}+4}=6,\ \frac{3}{\sqrt{2}}a=6$$

따라서 $a=2\sqrt{2}$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 66~67쪽

1 ③	**2** ②	**3** ⑤	**4** ①	**5** ③	**6** ④
7 ③	**8** ④				

1 $y=\sin\frac{\pi x}{2}+2\cos\pi x-2$에서

$$y'=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-2\pi\sin\pi x$$

이므로 곡선 $y=\sin\frac{\pi x}{2}+2\cos\pi x-2$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\pi}{2}\cos\pi-2\pi\sin 2\pi=-\frac{\pi}{2}$$

곡선 $y=\sin\frac{\pi x}{2}+2\cos\pi x-2$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{\pi}{2}(x-2),\ \text{즉 } y=-\frac{\pi}{2}x+\pi$$

따라서 접선의 y절편은 π이다.

답 ③

2 $f(x)=\ln(\tan x)$에서 $f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

접점의 좌표를 $(\alpha,\ \ln(\tan\alpha))$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

접선의 기울기가 2이므로 $\frac{\sec^2\alpha}{\tan\alpha}=2$

즉, $\sec^2\alpha=2\tan\alpha$

$1+\tan^2\alpha=2\tan\alpha$

$\tan^2\alpha-2\tan\alpha+1=0$

$(\tan\alpha-1)^2=0,\ \tan\alpha=1$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)\right)$, 즉 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$이 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$0=2\times\frac{\pi}{4}+k$

따라서 $k=-\frac{\pi}{2}$

답 ②

3 $f(x)=x-2\ln(x^2+3)$에서

$$f'(x)=1-\frac{4x}{x^2+3}=\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}$$

함수 $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$\frac{x^2-4x+3}{x^2+3}\le 0$에서 $x^2+3>0$이므로

$x^2-4x+3\le 0,\ (x-1)(x-3)\le 0$

$1\le x\le 3$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(1,\ 3)$에서 감소하므로 $b-a$의 최댓값은 2이다.

답 ⑤

4 $f(x)=x^3+ae^{x-1}$에서 $f'(x)=3x^2+ae^{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

$f'(1)=3+a=0$이므로 $a=-3$

답 ①

참고

$f''(x)=6x-3e^{x-1}$에서 $f''(1)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

5 $f(x)=e^x(x+a)$라 하면

$f'(x)=e^x(x+a)+e^x=e^x(x+a+1)$

$f''(x)=e^x(x+a+1)+e^x=e^x(x+a+2)$

$f''(x)=0$에서 $x=-a-2$

$x<-a-2$일 때 $f''(x)<0$이고

$x>-a-2$일 때 $f''(x)>0$이다.

곡선 $y=e^x(x+a)$가 구간 $(-5,\ \infty)$에서 아래로 볼록하려면 이 구간에서 $f''(x)>0$이어야 하므로

$-a-2\le-5$, $a\ge3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

답 ③

6 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $1-2\ln x=0$이므로 $x=e^{\frac{1}{2}}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=e^{\frac{1}{2}}$에서 극대이면서 최대이다.

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{1}{2e}$$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2e}$이다.

답 ④

7 정의역이 $\{x\,|\,x>0\}$인 함수 $f(x)$를

$f(x)=x\ln x-2x+a$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-2=\ln x-1$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x-1=0$이므로 $x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

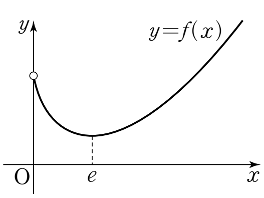
함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극소이면서 최소이고 최솟값 $a-e$를 가지므로 모든 양수 x에 대하여 $f(x)\ge0$을 만족시키려면 $a-e\ge0$이어야 한다.

따라서 $a\ge e$이므로 실수 a의 최솟값은 e이다.

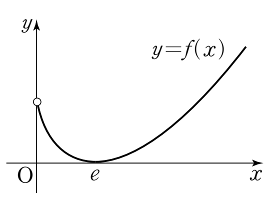
답 ③

참고

곡선 $y=f(x)$를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



$[a>e$일 때$]$



$[a=e$일 때$]$

8 $x=3\ln(t+1)$, $y=t+e^{t-1}$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{t+1},\ \frac{dy}{dt}=1+e^{t-1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{3}{(t+1)^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}=e^{t-1}$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\left\{-\frac{3}{(t+1)^2}\right\}^2+(e^{t-1})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{(t+1)^4}+e^{2t-2}}$$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\frac{9}{2^4}+1}=\frac{5}{4}$$

답 ④

Level **2** **기본 연습** 본문 68~69쪽

1 ② **2** 27 **3** ② **4** ② **5** ③ **6** ③

7 ③ **8** ④

1 점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$f(1)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)$

$g(x)=-4e^{f(x)}$에서

$g'(x)=-4f'(x)\times e^{f(x)}$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -4e^2)$에서의 접선의 기울기는

$-4f'(1)\times e^{f(1)}=-4e^2f'(1)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -4e^2)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)\times(-4e^2f'(1))=-1$

$$(f'(1))^2=\frac{1}{4e^2}$$

$f'(1)=-\dfrac{1}{2e}$ 또는 $f'(1)=\dfrac{1}{2e}$

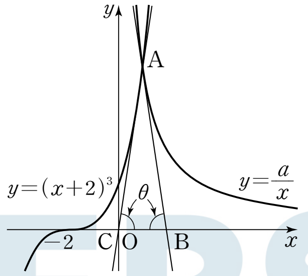
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$f'(1)>0$

따라서 $f'(1)=\dfrac{1}{2e}$

답 ②

2 두 곡선 $y=\frac{a}{x}$, $y=(x+2)^3$은 그림과 같다.



점 A의 x좌표를 $k\ (k>0)$이라 하면

$\frac{a}{k}=(k+2)^3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\angle ACB=\theta$라 하면 $y=(x+2)^3$에서 $y'=3(x+2)^2$이므로

$\tan\theta=3(k+2)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

$y=\frac{a}{x}$에서 $y'=-\frac{a}{x^2}$이고 $\angle ABC=\angle ACB$이므로

$\tan(\pi-\theta)=-\frac{a}{k^2}$

$-\tan\theta=-\frac{a}{k^2}$

$\tan\theta=\frac{a}{k^2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $3(k+2)^2=\frac{a}{k^2}$

이 식에 ㉠을 대입하면 $3(k+2)^2=\frac{(k+2)^3}{k}$

즉, $3k(k+2)^2-(k+2)^3=0$

$(k+2)^2(2k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=1$

㉠에서 $a=27$

답 27

다른 풀이

두 곡선 $y=\frac{a}{x}$, $y=(x+2)^3$이 제1사분면에서 만나는 점 A의 x좌표를 $k\ (k>0)$이라 하면

$\frac{a}{k}=(k+2)^3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y=\frac{a}{x}$에서 $y'=-\frac{a}{x^2}$이므로 곡선 $y=\frac{a}{x}$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{a}{k}=-\frac{a}{k^2}(x-k)$

이 직선의 x절편은

$0-\frac{a}{k}=-\frac{a}{k^2}(x-k)$

에서 $x=2k$이므로 점 B의 좌표는 $(2k,\ 0)$이다.

$y=(x+2)^3$에서 $y'=3(x+2)^2$이므로 곡선 $y=(x+2)^3$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-(k+2)^3=3(k+2)^2(x-k)$

이 직선의 x절편은

$0-(k+2)^3=3(k+2)^2(x-k)$

에서 $x=k-\frac{k+2}{3}=\frac{2}{3}k-\frac{2}{3}$이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{2}{3}k-\frac{2}{3},\ 0\right)$이다.

$\angle ABC=\angle ACB$에서 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발은 선분 BC의 중점이다.

즉, $k=\frac{2k+\left(\frac{2}{3}k-\frac{2}{3}\right)}{2}$에서

$2k=2k+\left(\frac{2}{3}k-\frac{2}{3}\right)$

$k=1$

㉠에서 $a=27$

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의되려면 $x>2$인 모든 실수 x에 대하여 $ax>0$이어야 한다.

즉, $a>0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x<2$일 때

$f'(x)=e^{a(2-x)}-axe^{a(2-x)}=(1-ax)e^{a(2-x)}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ 2)$에서 증가하려면 $x<2$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$1-2a\ge 0$이므로 $a\le\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

$x>2$일 때

$f'(x)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}>0$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(2,\ \infty)$에서 증가한다.

㉠, ㉡에서 $0<a\le\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x_1, $x_2\ (x_1<x_2)$에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립해야 하므로 $\lim_{x\to 2-}f(x)\le\lim_{x\to 2+}f(x)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 2-}xe^{a(2-x)}\le\lim_{x\to 2+}(k+\ln ax)$

$2\le k+\ln 2a$, $k\ge 2-\ln 2a$

㉢에서 $\ln 2a\le 0$이므로 $k\ge 2$

따라서 실수 k의 최솟값은 2이다.

답 ②

4 $f(x)=(\ln x)^2-ax^2$에서

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-2ax$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$g(x)=\frac{2\ln x}{x}$라 하면

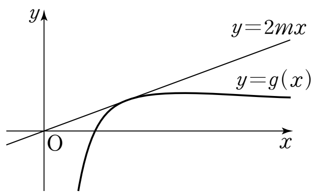
$g'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}=0$에서 $x=e$

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=2ax$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 접할 때의 실수 a의 값을 m이라 하면 m은 실수 a의 최솟값이다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{2\ln k}{k}=\frac{2(1-\ln k)}{k^2}(x-k)$

$y=\frac{2(1-\ln k)}{k^2}(x-k)+\frac{2\ln k}{k}$

즉, $y=\frac{2(1-\ln k)}{k^2}x+\frac{4\ln k-2}{k}$

이 직선이 $y=2mx$와 같으므로

$\frac{2(1-\ln k)}{k^2}=2m$이고, $\frac{4\ln k-2}{k}=0$

$\frac{4\ln k-2}{k}=0$에서 $\ln k=\frac{1}{2}$, $k=e^{\frac{1}{2}}$

$k=e^{\frac{1}{2}}$을 $\frac{2(1-\ln k)}{k^2}=2m$에 대입하면

$m=\frac{1-\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{2e}$이다.

답 ②

다른 풀이 1

$f(x)=(\ln x)^2-ax^2$에서

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-2ax=\frac{2(\ln x-ax^2)}{x}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$g(x)=\ln x-ax^2$이라 하면

$g'(x)=\frac{1}{x}-2ax$

$a\leq 0$이면 $x>0$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가하는 함수이고,

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$이므로 $g(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $g(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 α가 존재하므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

그러므로 $a>0$

$g'(x)=\frac{1}{x}-2ax=0$에서 $x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$

$x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$에서 극대이면서 최대이다.

그러므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면

$g\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=\ln\sqrt{\frac{1}{2a}}-\frac{1}{2}\leq 0$

이어야 한다.

$\ln\sqrt{\frac{1}{2a}}-\frac{1}{2}\leq 0$에서

$\sqrt{\frac{1}{2a}}\leq e^{\frac{1}{2}}$, $a\geq\frac{1}{2e}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{2e}$이다.

다른 풀이 2

$f(x)=(\ln x)^2-ax^2$에서

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}-2ax=2x\left(\frac{\ln x}{x^2}-a\right)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$라 하면

$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}=0$에서 $x=\sqrt{e}$

$x>0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 극대이면서 최대이다.

$g(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$

$f'(x)=2x(g(x)-a)$에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $a\geq\frac{1}{2e}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{2e}$이다.

5 $f(x)=axe^{ax}$에서

$f'(x)=ae^{ax}+a^2xe^{ax}$

$\quad =a(1+ax)e^{ax}$

$f''(x)=a^2e^{ax}+a^2(1+ax)e^{ax}$

$\quad =a^2(2+ax)e^{ax}$

$f''(x)=0$에서 $a^2(2+ax)e^{ax}=0$이므로 $x=-\dfrac{2}{a}$

이때 $x=-\dfrac{2}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-\dfrac{2}{a}$에서 변곡점을 갖는다.

구간 (k, ∞)에서 $f''(x)\le 0$이 되도록 하는 실수 k의 최솟값이 m이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 m이다.

즉, $m=-\dfrac{2}{a}$

$|m|=\left|-\dfrac{2}{a}\right|=4$이므로

$a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$

(i) $a=-\dfrac{1}{2}$일 때

$f''(x)=\dfrac{1}{4}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$이므로 $x>4$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이다.

즉, 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=\dfrac{1}{2}$일 때

$f''(x)=\dfrac{1}{4}\left(2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$이므로 $x>-4$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f'(0)=a=-\dfrac{1}{2}$

답 ③

6 점 P의 좌표를 (t, te^{-t}) $(t>0)$이라 하면 $y=xe^{-x}$에서

$y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

이므로 곡선 $y=\dfrac{x}{e^x}$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=(1-t)e^{-t}(x-t)+te^{-t}$

점 Q의 y좌표는

$(1-t)e^{-t}\times(-t)+te^{-t}=t^2e^{-t}$

삼각형 OPQ의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\dfrac{1}{2}\times t^2e^{-t}\times t=\dfrac{1}{2}t^3e^{-t}$에서

$f'(t)=\dfrac{3}{2}t^2e^{-t}-\dfrac{1}{2}t^3e^{-t}$

$\quad =\dfrac{1}{2}t^2(3-t)e^{-t}$

$t>0$일 때 $f'(t)=0$에서 $t=3$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(t)$가 $t=3$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f(3)=\dfrac{27}{2e^3}$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{27}{2e^3}$이다.

답 ③

7 $x=\ln t-\dfrac{a}{t}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{a}{t^2}=\dfrac{t+a}{t^2}$

이고,

$y=-\dfrac{\ln t+2}{t}$에서

$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\dfrac{1}{t}\times t-(\ln t+2)\times 1}{t^2}=\dfrac{\ln t+1}{t^2}$

이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{\ln t+1}{t^2}}{\dfrac{t+a}{t^2}}=\dfrac{\ln t+1}{t+a}$

곡선 C의 접선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\dfrac{\ln t+1}{t+a}$ $(t>0)$

이고, $t>0$에서 함수 $f(t)$의 최댓값이 $\dfrac{1}{e}$이다.

$f'(t)=\dfrac{\dfrac{1}{t}\times(t+a)-(\ln t+1)\times 1}{(t+a)^2}$

$\quad =\dfrac{\dfrac{a}{t}-\ln t}{(t+a)^2}$

두 곡선 $y=\dfrac{a}{x}$, $y=\ln x$는 오직 한 점에서만 만나므로 t에 대한 방정식 $\dfrac{a}{t}-\ln t=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근을 p $(p>0)$이라 하면 $\dfrac{a}{p}-\ln p=0$ …… ㉠

$f'(t)=0$에서 $t=p$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	극대	↘

함수 $y=f(t)$는 $t=p$일 때 극대이면서 최대이므로

$f(p)=\frac{1}{e}$

$\frac{\ln p+1}{p+a}=\frac{1}{e}$

㉠에서 $\ln p=\frac{a}{p}$이므로 $\frac{\frac{a}{p}+1}{p+a}=\frac{1}{e}$

$\frac{a+p}{(p+a)p}=\frac{1}{e}$

$p+a>0$이므로 $\frac{1}{p}=\frac{1}{e}$

$p=e$이므로 ㉠에서 $\frac{a}{e}-\ln e=0$

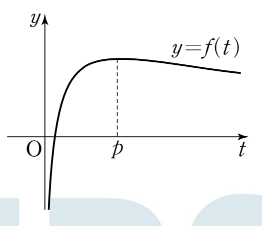
따라서 $a=e$

답 ③

참고

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t+1}{t+a}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln t}{t+a}+\frac{1}{t+a}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\times\frac{t}{t+a}+\frac{1}{t+a}\right)$$
$$=0+0=0$$

이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



8 $x=at+\sin t$, $y=1+2\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=a+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(a+\cos t)^2+(-2\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+2a\cos t+\cos^2 t+4\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{a^2+2a\cos t+\cos^2 t+4(1-\cos^2 t)}$$
$$=\sqrt{-3\cos^2 t+2a\cos t+a^2+4}$$

$\cos t=s\ (-1\le s\le 1)$이라 하면

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{-3s^2+2as+a^2+4}$$
$$=\sqrt{-3\left(s-\frac{a}{3}\right)^2+\frac{4}{3}a^2+4}$$

(ⅰ) $\frac{a}{3}\le -1$, 즉 $a\le -3$일 때

$s=-1$에서 점 P의 속력 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$이 최댓값을 가지므로

$\sqrt{-3-2a+a^2+4}=6$

$a^2-2a-35=0$, $(a+5)(a-7)=0$

$a\le -3$이므로 $a=-5$

(ⅱ) $-1<\frac{a}{3}\le 1$, 즉 $-3<a\le 3$일 때

$s=\frac{a}{3}$에서 점 P의 속력 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$이 최댓값을 가지므로

$\sqrt{\frac{4}{3}a^2+4}=6$

$\frac{4}{3}a^2+4=36$, $a^2=24$

$-3<a\le 3$이므로 a의 값이 존재하지 않는다.

(ⅲ) $\frac{a}{3}>1$, 즉 $a>3$일 때

$s=1$에서 점 P의 속력 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$이 최댓값을 가지므로

$\sqrt{-3+2a+a^2+4}=6$

$a^2+2a-35=0$, $(a+7)(a-5)=0$

$a>3$이므로 $a=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=-5$ 또는 $a=5$이므로

구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$-5\times 5=-25$

답 ④

다른 풀이

$x=at+\sin t$, $y=1+2\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=a+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(a+\cos t)^2+(-2\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+2a\cos t+\cos^2 t+4\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{-3\cos^2 t+2a\cos t+a^2+4}$$

$f(t)=-3\cos^2 t+2a\cos t+a^2+4$라 하면

$f'(t)=-6\cos t\times(-\sin t)-2a\sin t$

$=2\sin t(3\cos t-a)$

(ⅰ) $-3 \le a < 3$일 때

$f'(t)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=\alpha$ $\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{a}{3}\right)$

함수 $f(t)$는 $t=\alpha$에서 극대이면서 최대이므로

$f(\alpha)=-3\times\left(\frac{a}{3}\right)^2+2a\times\frac{a}{3}+a^2+4=36$

에서 $a^2=24$

이때 $-3\le a<3$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a<-3$일 때

$f'(t)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=\pi$

함수 $f(t)$는 증가하므로 $t=\pi$에서 최대이고

$f(\pi)=-3-2a+a^2+4=36$, $a=-5$

(ⅲ) $a\ge 3$일 때

$f'(t)=0$에서

$t=0$ 또는 $t=\pi$

함수 $f(t)$는 감소하므로 $t=0$에서 최대이고

$f(0)=-3+2a+a^2+4=36$, $a=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=-5$ 또는 $a=5$이므로

구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$-5\times5=-25$

Level 3 **실력 완성** 본문 70쪽

1 ① **2** ④ **3** ④

1 $y=\ln(x+t)$에서 $y'=\frac{1}{x+t}$

접점의 좌표를 $(g(t), \ln(g(t)+t))$ $(g(t)+t>0)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-\ln(g(t)+t)=\frac{1}{g(t)+t}(x-g(t))$

이 접선이 원점을 지나므로

$-\frac{g(t)}{g(t)+t}+\ln(g(t)+t)=0$

$-g(t)+(g(t)+t)\ln(g(t)+t)=0$ …… ㉠

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$-g'(t)+(g'(t)+1)\ln(g(t)+t)+(g(t)+t)\times\frac{g'(t)+1}{g(t)+t}=0$$

$\ln(g(t)+t)\times g'(t)+\ln(g(t)+t)+1=0$

$g'(t)=-\frac{1+\ln(g(t)+t)}{\ln(g(t)+t)}$ …… ㉡

$f(t)=\frac{1}{g(t)+t}$이므로 $f(\alpha)=\frac{1}{e}$에서 $g(\alpha)+\alpha=e$

㉡에서

$g'(\alpha)=-\frac{1+\ln e}{\ln e}=-\frac{1+1}{1}=-2$

$f(t)=\frac{1}{g(t)+t}$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)=-\frac{g'(t)+1}{(g(t)+t)^2}$

따라서

$f'(\alpha)=-\frac{-2+1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$

답 ①

다른 풀이

$y=\ln(x+t)$에서 $y'=\frac{1}{x+t}$

접점의 좌표를 $(g(t), \ln(g(t)+t))$ $(g(t)+t>0)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-\ln(g(t)+t)=\frac{1}{g(t)+t}(x-g(t))$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-\ln(g(t)+t)=\frac{1}{g(t)+t}(0-g(t))$

$\ln(g(t)+t)=\frac{g(t)}{g(t)+t}$ …… ㉠

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{g'(t)+1}{g(t)+t}=\frac{g'(t)\times(g(t)+t)-g(t)\times(g'(t)+1)}{(g(t)+t)^2}$

$(g'(t)+1)(g(t)+t)=t\times g'(t)-g(t)$

$g(t)\times g'(t)=-2g(t)-t$

$g'(t)=-\frac{2g(t)+t}{g(t)}$ …… ㉡

$f(t)=\frac{1}{g(t)+t}$이므로 $f(\alpha)=\frac{1}{e}$에서 $g(\alpha)+\alpha=e$

㉠에서

$\ln e=\frac{g(\alpha)}{e}$이므로 $g(\alpha)=e$, $\alpha=0$

㉡에서 $g'(\alpha)=g'(0)=-\frac{2e+0}{e}=-2$

$f(t)=\frac{1}{g(t)+t}$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)=-\frac{g'(t)+1}{(g(t)+t)^2}$

따라서

$f'(\alpha)=-\frac{-2+1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$

2 함수 $g(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=e$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to e-} g(x)=\lim_{x\to e+} g(x)=g(e)$

$\lim_{x \to e-} g(x) = \lim_{x \to e-} (-f(\ln x)) = -f(1)$,

$\lim_{x \to e+} g(x) = \lim_{x \to e+} (f(x)+k) = f(e)+k$,

$g(e) = -f(1)$

에서 $-f(1) = f(e)+k$이므로

$k = -f(1)-f(e)$ …… ㉠

$f(x) = x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x) = 2x+a$

$f''(x) = 2$

조건 (가)에서 모든 양수 x에 대하여

$(x-1)\{g(x)-g'(1)(x-1)-g(1)\} \ge 0$이므로

$0 < x \le 1$일 때 $g(x) \le g'(1)(x-1)+g(1)$이고

$x > 1$일 때 $g(x) \ge g'(1)(x-1)+g(1)$이다.

이때 $y = g'(1)(x-1)+g(1)$은 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식이다.

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y = g(x)$의 그래프가 $x = 1$의 좌우에서 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변하므로 점 $(1, g(1))$은 함수 $y = g(x)$의 그래프의 변곡점이다.

$0 < x < e$일 때, $g(x) = -f(\ln x)$이므로

$g'(x) = -\dfrac{f'(\ln x)}{x}$

$g''(x) = -\dfrac{f''(\ln x) \times \frac{1}{x} \times x - f'(\ln x)}{x^2}$

$= -\dfrac{f''(\ln x) - f'(\ln x)}{x^2}$

$g''(1) = 0$에서 $f''(0) - f'(0) = 0$

$f''(x) = 2$이므로 $2 - a = 0$

즉, $a = 2$이므로

$f(x) = x^2+2x+b$

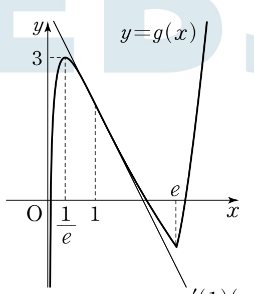
$f'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$

조건 (나)에서 $x = \alpha$일 때 함수 $g(x)$가 극댓값 3을 갖는다고 하면 $0 < \alpha < 1 < e$이고 $g'(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = 3$

$g'(\alpha) = -\dfrac{f'(\ln \alpha)}{\alpha} = 0$

$f'(\ln \alpha) = 0$, $\ln \alpha = -1$, $\alpha = \dfrac{1}{e}$

이때 함수 $y = g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로

$g\left(\dfrac{1}{e}\right) = -f\left(\ln \dfrac{1}{e}\right) = -f(-1)$

$= -(1-2+b) = 1-b = 3$

즉, $b = -2$

따라서 $f(x) = x^2+2x-2$이므로 ㉠에서

$k = -f(1)-f(e)$

$= -(1+2-2)-(e^2+2e-2) = -e^2-2e+1$

답 ④

3 x에 대한 방정식 $(x+a)^2e^x - tx = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = (x+a)^2e^x$과 직선 $y = tx$의 교점의 개수와 같다.

$g(x) = (x+a)^2e^x$이라 하면

$g'(x) = 2(x+a)e^x + (x+a)^2e^x$

$= \{x^2+2(a+1)x+a^2+2a\}e^x$

$= (x+a+2)(x+a)e^x$

$g'(x) = 0$에서 $x = -a-2$ 또는 $x = -a$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a-2$	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

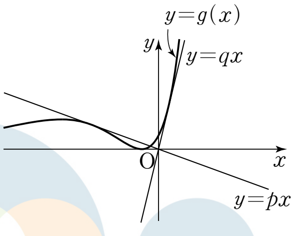
$g(-a-2) = (-a-2+a)^2e^{-a-2} = 4e^{-a-2}$,

$g(-a) = (-a+a)^2e^{-a} = 0$,

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (x+a)^2e^x = 0$,

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} (x+a)^2e^x = \infty$

이므로 함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



직선 $y = tx$가 곡선 $y = g(x)$와 제2사분면에서 접할 때의 t의 값을 p라 하고, 직선 $y = tx$가 곡선 $y = g(x)$와 제1사분면에서 접할 때의 t의 값을 q라 하면

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t < p) \\ 2 & (t = p) \\ 3 & (p < t < 0) \\ 1 & (t = 0) \\ 0 & (0 < t < q) \\ 1 & (t = q) \\ 2 & (t > q) \end{cases}$$

함수 $f(t)$는 $t=p$, $t=0$, $t=q$에서만 불연속이므로 조건에서

$p\times q=-\frac{1}{e^{a+1}}$

직선 $y=tx$가 곡선 $y=g(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 k라 하면 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, (k+a)^2e^k)$에서의 접선의 방정식은

$y=(k+a+2)(k+a)e^k(x-k)+(k+a)^2e^k$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=(k+a+2)(k+a)e^k\times(-k)+(k+a)^2e^k$

$\{k^2+(a+1)k-a\}(k+a)e^k=0$

$k^2+(a+1)k-a=0$ 또는 $k=-a$

$k=-a$이면 접선의 방정식은 $y=0$

따라서 이차방정식 $k^2+(a+1)k-a=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$p=g'(\alpha)$, $q=g'(\beta)$이다.

즉,

$p=(\alpha+a+2)(\alpha+a)e^\alpha$, $q=(\beta+a+2)(\beta+a)e^\beta$

이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a-1$, $\alpha\beta=-a$

이므로

$$\begin{aligned}p\times q&=(\alpha+a+2)(\alpha+a)e^\alpha\times(\beta+a+2)(\beta+a)e^\beta\\&=(\alpha+a+2)(\beta+a+2)(\alpha+a)(\beta+a)e^{\alpha+\beta}\\&=\{\alpha\beta+(a+2)(\alpha+\beta)+(a+2)^2\}\\&\qquad\times\{\alpha\beta+a(\alpha+\beta)+a^2\}e^{\alpha+\beta}\\&=\{-a+(a+2)(-a-1)+(a+2)^2\}\\&\qquad\times\{-a+a(-a-1)+a^2\}e^{-a-1}\\&=-4ae^{-a-1}\end{aligned}$$

$-4ae^{-a-1}=-\frac{1}{e^{a+1}}$에서 $\frac{4a-1}{e^{a+1}}=0$이므로 $a=\frac{1}{4}$

$\lim_{t\to t_2-}f(t)=\lim_{t\to 0-}f(t)=3$이므로

$a+\lim_{t\to t_2-}f(t)=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$

답 ④

06 여러 가지 적분법

유제 본문 73~81쪽

1 ①	**2** ①	**3** ②	**4** ④	**5** ④	**6** ⑤
7 ②	**8** 4	**9** 64	**10** ②		

1 $\int_0^1\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$

$$\begin{aligned}&=\int_0^1(e^x-1)dx\\&=\Big[e^x-x\Big]_0^1\\&=(e^1-1)-(e^0-0)\\&=e-2\end{aligned}$$

답 ①

2 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\cos x-\sin x=0$의 실근은

$x=\frac{\pi}{4}$

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $\cos x\ge\sin x$이고,

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x\le\sin x$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x-\sin x|}{2}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)\right\}\\&\qquad+\frac{1}{2}\left\{\left(-\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)\right\}\\&\qquad+\frac{1}{2}\left\{(-0-1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{2}-1)+(-1+\sqrt{2})\}\\&=\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

답 ①

3 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x\,dx$에서 $\tan x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이고 $\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx=\int_0^1 t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{2}\times 0^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

다른 풀이

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$에서 $\sec x=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $s=\sqrt{2}$이고

$\sec x \tan x=\frac{ds}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x(\sec x \tan x)dx$$
$$=\int_1^{\sqrt{2}} s\,ds$$
$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\times 1^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

4 $\int_1^2 \frac{(\ln 2x^2)^2}{x}dx$에서 $\ln 2x^2=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=\ln 2$, $x=2$일 때 $t=\ln 8$이고

$(\ln 2x^2)'=\frac{(2x^2)'}{2x^2}=\frac{2}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^2 \frac{(\ln 2x^2)^2}{x}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{1}{2}t^2\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}t^3\right]_{\ln 2}^{\ln 8}$$
$$=\frac{1}{6}(\ln 8)^3-\frac{1}{6}(\ln 2)^3$$
$$=\frac{1}{6}(3\ln 2)^3-\frac{1}{6}(\ln 2)^3$$
$$=\frac{13}{3}(\ln 2)^3$$

답 ④

5 $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x^2$으로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

$$\int_1^e x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{3}x^3\times\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}e^3\ln e-\frac{1}{3}\ln 1\right)-\int_1^e \frac{1}{3}x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{3}e^3-0-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{3}e^3-\left(\frac{1}{9}e^3-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\frac{2e^3+1}{9}$$

답 ④

6 주어진 조건에서

$f'(x)=\frac{x+1}{e^x}=(x+1)e^{-x}$

$u(x)=x+1$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$f(x)=\int (x+1)e^{-x}dx$$
$$=-(x+1)e^{-x}+\int e^{-x}dx$$
$$=-(x+1)e^{-x}-e^{-x}+C$$
$$=-(x+2)e^{-x}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때

$f(0)=-(0+2)e^0+C=-2+C=0$

에서 $C=2$이므로

$f(x)=-(x+2)e^{-x}+2$

따라서

$f(-1)=-(-1+2)e+2=-e+2$

답 ⑤

7 $\int_1^{2x} f(t)dt=\sin \pi x+a$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=\sin\frac{\pi}{2}+a$

$0=1+a$, $a=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(2x)\times(2x)'=\pi\cos \pi x$

$f(2x)=\frac{\pi}{2}\cos \pi x$

위 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(2)=\frac{\pi}{2}\cos \pi=-\frac{\pi}{2}$

이므로

$f(-2a)=f(2)=-\frac{\pi}{2}$

답 ②

8 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=ae^x+2x+b$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=ae^x+2x+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0\times\int_0^0 f(t)dt-\int_0^0 tf(t)dt=ae^0+0+b$

$0=a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=ae^x+2$

$\int_0^x f(t)dt=ae^x+2$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_0^0 f(t)dt=ae^0+2$

$0=a+2$이므로 $a=-2$이고 ㉡에서

$b=2$

㉢에서

$\int_0^x f(t)dt=-2e^x+2$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-2e^x$

따라서

$$\begin{aligned}f(a)\times f(b)&=f(-2)\times f(2)\\&=(-2e^{-2})\times(-2e^2)\\&=4e^{-2+2}=4\end{aligned}$$

답 4

9 $f(t)=\log_2 t^2$이라 하고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}\int_4^x \log_2 t^2\,dt&=\lim_{x\to4}\frac{F(x)-F(4)}{x-4}\\&=F'(4)=f(4)\\&=\log_2 4^2=4\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}\int_4^x x^2\log_2 t^2\,dt\\&=\lim_{x\to4}\frac{x^2}{x-4}\int_4^x \log_2 t^2\,dt\\&=\lim_{x\to4}x^2\times\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}\int_4^x \log_2 t^2\,dt\\&=4^2\times4=64\end{aligned}$$

답 64

10 $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-2}{x-\pi}=\frac{1}{2}$에서 $x\to\pi$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\pi}(f(x)-2)=0$이고 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(\pi)=2$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-2}{x-\pi}&=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}\\&=f'(\pi)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$g(t)=4\cos(2\pi t)$라 하고, 함수 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_2^{f(x)}4\cos(2\pi t)dt\\&=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{f(\pi)}^{f(x)}g(t)dt\\&=\lim_{x\to\pi}\frac{G(f(x))-G(f(\pi))}{x-\pi}\\&=(G\circ f)'(\pi)\\&=G'(f(\pi))\times f'(\pi)\\&=g(f(\pi))\times f'(\pi)\\&=g(2)\times\frac{1}{2}\\&=4\cos4\pi\times\frac{1}{2}\\&=4\times1\times\frac{1}{2}=2\end{aligned}$$

답 ②

Level 1 **기초 연습** 본문 82~83쪽

1 ①	**2** ③	**3** 29	**4** ③	**5** ④	**6** ⑤
7 ④	**8** ③				

1 $\frac{\sqrt{x}-1}{x^2}=x^{\frac{1}{2}-2}-x^{-2}=x^{-\frac{3}{2}}-x^{-2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^4\frac{\sqrt{x}-1}{x^2}dx&=\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx-\int_1^4 x^{-2}dx\\&=\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4-\left[-x^{-1}\right]_1^4\\&=\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4+\left[\frac{1}{x}\right]_1^4\\&=\left(-\frac{2}{\sqrt{4}}+\frac{2}{\sqrt{1}}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1}\right)\\&=(-1+2)-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ①

2 $\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=2e^x-1$에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=-2e^x+1$

이므로 $f'(x)=-2e^x+1$
이때
$f(x)=\int(-2e^x+1)dx$
$=-2e^x+x+C$ (단, C는 적분상수)
이므로
$f(0)=-2e^0+0+C=-2+C=0$
에서 $C=2$
따라서 $f(x)=-2e^x+x+2$이므로
$f(1)=-2e+1+2=-2e+3$

답 ③

3 $f(x)=-2\sin(-x)-1=2\sin x-1$이므로

$$\int_0^{n\pi}f(x)dx=\int_0^{n\pi}(2\sin x-1)dx$$
$$=\Big[-2\cos x-x\Big]_0^{n\pi}$$
$$=(-2\cos n\pi-n\pi)-(-2\cos 0-0)$$
$$=-2\cos n\pi-n\pi+2$$
$$=-2\times(-1)^n-n\pi+2$$

따라서 $-10\pi\le\int_0^{n\pi}f(x)dx\le-8\pi$이려면
$-10\pi\le-2\times(-1)^n-n\pi+2\le-8\pi$
즉, $\frac{(8-n)\pi}{2}\le(-1)^n-1\le\frac{(10-n)\pi}{2}$이어야 한다.
(ⅰ) n이 짝수이면
$\frac{(8-n)\pi}{2}\le0\le\frac{(10-n)\pi}{2}$에서
$8\le n\le10$이므로 n의 값은 8, 10이다.
(ⅱ) n이 홀수이면
$\frac{(8-n)\pi}{2}\le-2\le\frac{(10-n)\pi}{2}$에서
$(n-10)\pi\le4\le(n-8)\pi$
$3<\pi<4$이므로 n의 값은 11이다.
따라서 $-10\pi\le\int_0^{n\pi}f(x)dx\le-8\pi$를 만족시키는 자연수 n은 8, 10, 11이므로 모든 n의 값의 합은
$8+10+11=29$

답 29

4 $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx$에서
$2-\cos x=t$로 놓으면
$x=0$일 때 $t=2-\cos 0=2-1=1$,
$x=\pi$일 때 $t=2-\cos\pi=2-(-1)=3$이고
$\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx=\int_1^3\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^3$$
$$=\ln 3-\ln 1$$
$$=\ln 3$$

답 ③

5 $f'(x)=(1-\cos^2 x)^2\cos x$
$=(\sin^2 x)^2\cos x$
$=\sin^4 x\cos x$
$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로
$f(x)=\int\sin^4 x\cos x\,dx$
$=\int t^4dt$
$=\frac{1}{5}t^5+C$
$=\frac{1}{5}\sin^5 x+C$ (단, C는 적분상수)
이때 $f(0)=0+C=1$에서 $C=1$이므로
$f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x+1$
따라서
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{5}\sin^5\frac{\pi}{2}+1=\frac{1}{5}\times1^5+1=\frac{6}{5}$

답 ④

6 $\int_1^e\frac{(x^2+1)\ln x}{x}dx=\int_1^e x\ln x\,dx+\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ …… ㉠

$\int_1^e x\ln x\,dx$에서
$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면
$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로
$\int_1^e x\ln x\,dx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\right)dx$
$=\left(\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1}{2}\ln 1\right)-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$
$=\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)$
$=\frac{e^2+1}{4}$ …… ㉡

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이고 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\int_1^e \frac{(x^2+1)\ln x}{x}dx=\frac{e^2+1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{e^2+3}{4}$$

답 ⑤

7 $\int_1^x f'(e^t)dt=e^{-2x}+a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=e^{-2}+a$, $a=-e^{-2}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(e^x)=-2e^{-2x}$

이때 $e^x=s$라 하면 $e^{-2x}=s^{-2}$이므로

$f'(s)=-2s^{-2}$ (단, $s>0$)

그러므로

$f(s)=\int(-2s^{-2})ds=\frac{2}{s}+C$ (단, C는 적분상수)

이고, $f(2)=\frac{2}{2}+C=1$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2}{x}$이므로

$f(-a)=f(e^{-2})=\frac{2}{e^{-2}}=2e^2$

답 ④

8 $\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x (2x+a)f'(t)dt$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{2x+a}{x-\pi}\int_\pi^x f'(t)dt$

$=\lim_{x\to\pi}\left\{(2x+a)\times\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}\right\}$

$=\lim_{x\to\pi}(2x+a)\times\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$

$=(2\pi+a)f'(\pi)=3\pi \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=\sin 3x-\cos x$에서

$f'(x)=3\cos 3x+\sin x$

이므로

$f'(\pi)=3\cos 3\pi+\sin\pi=-3$

따라서 ㉠에서 $-3(2\pi+a)=3\pi$, 즉 $-2\pi-a=\pi$이므로

$a=-3\pi$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

1 ①	**2** ②	**3** ②	**4** ①	**5** ②	**6** ⑤
7 ③	**8** ①				

1 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=\ln 4$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to\ln 4-}f(x)=\lim_{x\to\ln 4-}e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{\ln 4}{2}}=e^{\ln 2}=2$,

$\lim_{x\to\ln 4+}f(x)=\lim_{x\to\ln 4+}ae^{-x}=ae^{-\ln 4}=ae^{\ln\frac{1}{4}}=\frac{a}{4}$,

$f(\ln 4)=\frac{a}{4}$

이므로 $\lim_{x\to\ln 4-}f(x)=\lim_{x\to\ln 4+}f(x)=f(\ln 4)$에서

$2=\frac{a}{4}$, 즉 $a=8$

$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x}{2}} & (x<\ln 4) \\ 8e^{-x} & (x\ge\ln 4)\end{cases}$이므로

$F(x)=\begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}}+C & (x<\ln 4) \\ -8e^{-x}+D & (x\ge\ln 4)\end{cases}$

(단, C, D는 적분상수)

$F(\ln 16)=-8e^{-\ln 16}+D$

$=-8e^{\ln\frac{1}{16}}+D$

$=-8\times\frac{1}{16}+D$

$=-\frac{1}{2}+D=0$

이므로 $D=\frac{1}{2}$

한편, 모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이므로 함수 $F(x)$는 $x=\ln 4$에서 연속이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to\ln 4+}F(x)=\lim_{x\to\ln 4+}\left(-8e^{-x}+\frac{1}{2}\right)$

$=-8e^{-\ln 4}+\frac{1}{2}$

$=-8e^{\ln\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$

$=-8\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

이므로 $\lim_{x\to\ln 4-}F(x)=-\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\lim_{x\to\ln 4-}F(x)=\lim_{x\to\ln 4-}(2e^{\frac{x}{2}}+C)$

$=2e^{\frac{\ln 4}{2}}+C=2e^{\ln 2}+C$

$=2\times 2+C=-\frac{3}{2}$

에서 $C=-\frac{11}{2}$

따라서 $F(x)=\begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{11}{2} & (x<\ln 4) \\ -8e^{-x}+\dfrac{1}{2} & (x\geq \ln 4) \end{cases}$ 이므로

$$F(0)+F(\ln 8)=\left(2e^{0}-\frac{11}{2}\right)+\left(-8e^{-\ln 8}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(2-\frac{11}{2}\right)+\left(-8\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{7}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$$

답 ①

다른 풀이

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=\ln 4$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to\ln 4-} f(x)=\lim\limits_{x\to\ln 4-} e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{\ln 4}{2}}=e^{\ln 2}=2$,

$\lim\limits_{x\to\ln 4+} f(x)=\lim\limits_{x\to\ln 4+} ae^{-x}=ae^{-\ln 4}=ae^{\ln\frac{1}{4}}=\frac{a}{4}$,

$f(\ln 4)=\frac{a}{4}$

이므로 $\lim\limits_{x\to\ln 4-} f(x)=\lim\limits_{x\to\ln 4+} f(x)=f(\ln 4)$에서

$2=\frac{a}{4}$, $a=8$

즉, $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x}{2}} & (x<\ln 4) \\ 8e^{-x} & (x\geq\ln 4) \end{cases}$

이때 $F'(x)=f(x)$와 $F(\ln 16)=0$을 모두 만족시키는 함수 $F(x)$는 $F(x)=\int_{\ln 16}^{x} f(x)dx$이므로

$F(0)+F(\ln 8)$
$$=\int_{\ln 16}^{0} f(x)dx+\int_{\ln 16}^{\ln 8} f(x)dx$$
$$=-\int_{0}^{\ln 16} f(x)dx-\int_{\ln 8}^{\ln 16} f(x)dx$$
$$=-\int_{0}^{\ln 4} f(x)dx-\int_{\ln 4}^{\ln 16} f(x)dx-\int_{\ln 8}^{\ln 16} f(x)dx$$
$$=-\int_{0}^{\ln 4} e^{\frac{x}{2}}dx-\int_{\ln 4}^{\ln 16} 8e^{-x}dx-\int_{\ln 8}^{\ln 16} 8e^{-x}dx$$
$$=-\left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_{0}^{\ln 4}-\left[-8e^{-x}\right]_{\ln 4}^{\ln 16}-\left[-8e^{-x}\right]_{\ln 8}^{\ln 16}$$
$$=-2(e^{\ln 2}-e^{0})+8\left(e^{\ln\frac{1}{16}}-e^{\ln\frac{1}{4}}\right)+8\left(e^{\ln\frac{1}{16}}-e^{\ln\frac{1}{8}}\right)$$
$$=-2(2-1)+8\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\right)+8\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\right)$$
$$=-2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-4$$

2 $\int_{0}^{x} t\sin t^2 dt$에서

$t^2=s$로 놓으면 $t=0$일 때 $s=0$, $t=x$일 때 $s=x^2$이고

$2t=\frac{ds}{dt}$이므로

$$f(x)=\int_{0}^{x} t\sin t^2 dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{x^2}\sin s\,ds$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\cos s\Big]_{0}^{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos x^2+\cos 0)$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos x^2+1)$$

이때 $0\leq x\leq\sqrt{2\pi}$에서 $0\leq x^2\leq 2\pi$

$-1\leq\cos x^2\leq 1$이므로 함수 $f(x)$는 $\cos x^2=-1$일 때 최댓값

$b=\frac{1}{2}\times\{-(-1)+1\}=1$

을 갖는다.

$\cos a^2=-1$에서 $a^2=\pi$

$0\leq a\leq\sqrt{2\pi}$이므로 $a=\sqrt{\pi}$

따라서 $a\times b=\sqrt{\pi}\times 1=\sqrt{\pi}$

답 ②

다른 풀이

$f(x)=\int_{0}^{x} t\sin t^2 dt$에서

$f'(x)=x\sin x^2$

이므로 $f'(x)=0$ $(0<x<\sqrt{2\pi})$에서

$x^2=\pi$, 즉 $x=\sqrt{\pi}$

이때 $x=\sqrt{\pi}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{\pi}$일 때 극대이면서 최대이다.

즉, $a=\sqrt{\pi}$이고, 최댓값은

$b=f(\sqrt{\pi})$
$$=\int_{0}^{\sqrt{\pi}} t\sin t^2 dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{\pi}}(t^2)'\sin t^2 dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\cos t^2\Big]_{0}^{\sqrt{\pi}}$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos\pi+\cos 0)$$
$$=\frac{1}{2}\times\{-(-1)+1\}=1$$

따라서 $a\times b=\sqrt{\pi}\times 1=\sqrt{\pi}$

3 $\sin\theta=t\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$에서

$t=0$일 때 $\theta=0$, $t=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이고

$\cos\theta=\frac{dt}{d\theta}$이므로

$$\int_{0}^{1}\theta\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$u(\theta)=\theta$, $v'(\theta)=\cos\theta$로 놓으면

$u'(\theta)=1$, $v(\theta)=\sin\theta$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos\theta\,d\theta=\Big[\theta\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\sin 0\right)-\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-(-0+1)=\frac{\pi}{2}-1$$

답 ②

4 $\int\ln t\,dt=t\ln t-\int 1\,dt$

$=t\ln t-t+C$ (단, C는 적분상수)

이므로 $f(x)=\int_x^{x^2}\ln\frac{x}{t}dt$라 하면

$$f(x)=\int_x^{x^2}\ln\frac{x}{t}dt$$
$$=\int_x^{x^2}(\ln x-\ln t)dt$$
$$=\ln x\int_x^{x^2}1\,dt-\int_x^{x^2}\ln t\,dt$$
$$=\ln x\times\Big[t\Big]_x^{x^2}-\Big[t\ln t-t\Big]_x^{x^2}$$
$$=\ln x\times(x^2-x)-\{(x^2\ln x^2-x^2)-(x\ln x-x)\}$$
$$=(x^2\ln x-x\ln x)-(2x^2\ln x-x^2-x\ln x+x)$$
$$=-x^2\ln x+x^2-x$$

이때

$$f'(x)=-2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}+2x-1$$
$$=-2x\ln x+x-1$$

이므로

$$f''(x)=-2\ln x-2x\times\frac{1}{x}+1$$
$$=-2\ln x-1$$

$f''(x)=0$에서 $\ln x=-\frac{1}{2}$, 즉 $x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$이고

$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 x좌표는 $\frac{1}{\sqrt{e}}$이다.

답 ①

5 조건 (가)에서 $0\le x\le\pi$일 때

$f(x+\pi)=(a+x)\sin x+b$ …… ㉠

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi+}f(x)=f(\pi)$ …… ㉡

이어야 한다.

이때 조건 (가)와 ㉠에서

$$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi-}x=\pi,$$
$$\lim_{x\to\pi+}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x+\pi)$$
$$=\lim_{x\to0+}\{(a+x)\sin x+b\}=b,$$

$f(\pi)=\pi$

이므로 ㉡에서 $b=\pi$

또

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi-}\frac{x-\pi}{x-\pi}=1,$$
$$\lim_{x\to\pi+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{h\to0+}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{(a+h)\sin h+\pi-\pi}{h}$$
$$=a\lim_{h\to0+}\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to0+}\sin h$$
$$=a\times1+0=a$$

이므로 조건 (나)에서 $a=1$

㉠에서 $0\le x\le\pi$일 때

$f(x+\pi)=(1+x)\sin x+\pi$

$x+\pi=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=\pi$, $x=\pi$일 때 $t=2\pi$이고 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\pi}f(x+\pi)dx=\int_{\pi}^{2\pi}f(t)dt$$

즉,

$$\int_{\pi}^{2\pi}f(t)dt=\int_0^{\pi}f(x+\pi)dx$$
$$=\int_0^{\pi}\{(1+x)\sin x+\pi\}dx$$

$u(x)=1+x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\pi}\{(1+x)\sin x+\pi\}dx$$
$$=\Big[-(1+x)\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx+\int_0^{\pi}\pi\,dx$$
$$=\{-(1+\pi)\cos\pi+(1+0)\cos 0\}+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}+\Big[\pi x\Big]_0^{\pi}$$
$$=(1+\pi+1)+(0-0)+(\pi^2-0)$$
$$=\pi^2+\pi+2$$

따라서

$$\int_{\pi}^{2\pi}f(x)dx=\int_{\pi}^{2\pi}f(t)dt$$
$$=\int_0^{\pi}\{(1+x)\sin x+\pi\}dx$$
$$=\pi^2+\pi+2$$

답 ②

6 $x>0$일 때

$\{\ln(e^x-e^{-x})\}'=\dfrac{(e^x-e^{-x})'}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

이므로 $f'(\ln(e^x-e^{-x}))=e^{2x}-e^{-2x}$의 양변에 $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$을 곱하면

$\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\times f'(\ln(e^x-e^{-x}))$

$=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\times(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})$

즉, $f'(\ln(e^x-e^{-x}))\times\{\ln(e^x-e^{-x})\}'=(e^x+e^{-x})^2$

합성함수의 미분법에 의하여

$(f(\ln(e^x-e^{-x})))'=e^{2x}+2+e^{-2x}$

이므로 $x>0$일 때

$f(\ln(e^x-e^{-x}))$

$=\int(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+C$ (단, C는 적분상수) ...... ㉠

한편, $\ln(e^x-e^{-x})=\ln\left(e-\frac{1}{e}\right)$에서

$e^x-e^{-x}=e-\frac{1}{e}$

$e^{2x}-\left(e-\frac{1}{e}\right)e^x-1=0$

$(e^x-e)\left(e^x+\frac{1}{e}\right)=0$

이때 $e^x+\frac{1}{e}>0$이므로 $e^x=e$

즉, $x=1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f\left(\ln\left(e-\frac{1}{e}\right)\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^{-2}+2+C$

$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)+2+C$

$f\left(\ln\left(e-\frac{1}{e}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$에서

$2+C=0$, 즉 $C=-2$이므로

$f(\ln(e^x-e^{-x}))=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x-2$ ...... ㉡

또 $\ln(e^x-e^{-x})=\ln\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$에서

$e^x-e^{-x}=e^2-\frac{1}{e^2}$

$e^{2x}-\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)e^x-1=0$

$(e^x-e^2)\left(e^x+\frac{1}{e^2}\right)=0$

이때 $e^x+\frac{1}{e^2}>0$이므로

$e^x=e^2$

즉, $x=2$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f\left(\ln\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\right)=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^{-4}+4-2$

$=\frac{e^4}{2}-\frac{1}{2e^4}+2$

답 ⑤

7 $f(x)=\int f'(x)dx=\int xe^x\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$f(x)=\int xe^x\,dx$

$=xe^x-\int e^x\,dx$

$=xe^x-e^x+C$

$=e^x(x-1)+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=e^0(0-1)+C=-1+C=-1$에서

$C=0$이므로

$f(x)=e^x(x-1)$

한편, $f'(x)=xe^x$이므로

$\int_0^1 xe^{x+f(x)}dx=\int_0^1 e^{f(x)}xe^x\,dx$

$=\int_0^1 e^{f(x)}f'(x)dx$

이때 $f(x)=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=f(0)=-1$, $x=1$일 때 $t=f(1)=0$이고

$f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^1 e^{f(x)}f'(x)dx=\int_{-1}^0 e^t\,dt$

$=\Big[e^t\Big]_{-1}^0=e^0-e^{-1}$

$=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$

답 ③

8 $\int_2^x\left(f(t)-\frac{t^2}{x^2}f(t)\right)dt=xe^{ax}+b$에서

$\int_2^x f(t)dt-\frac{1}{x^2}\int_2^x t^2f(t)dt=xe^{ax}+b$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2e^{2a}+b$ ...... ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+\frac{2}{x^3}\int_2^x t^2f(t)dt-\frac{1}{x^2}\times x^2f(x)=e^{ax}+axe^{ax}$

$\int_2^x t^2f(t)dt=\frac{1}{2}(ax^4+x^3)e^{ax}$ ...... ㉢

ⓒ의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=\frac{1}{2}(16a+8)e^{2a}$

$e^{2a}>0$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

ⓛ에서 $b=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$

ⓒ에서

$\int_2^x t^2f(t)dt=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^4+x^3\right)e^{-\frac{x}{2}}$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2f(x)=\frac{1}{2}(-2x^3+3x^2)e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^4+x^3\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$\qquad=e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)$

즉, $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right)$

따라서

$f\left(-\frac{1}{a}\right)=f(2)=e^{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2e}$

이므로

$\frac{1}{b}f\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{e}{2}\times\left(-\frac{1}{2e}\right)=\frac{1}{4}$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 86쪽

1 50 **2** ④ **3** ②

1 $f(x)=a(\ln x+1)^2(\ln x-2)+a$에서

$f'(x)=\frac{2a}{x}(\ln x+1)(\ln x-2)+\frac{a}{x}(\ln x+1)^2$

$\qquad=\frac{3a}{x}(\ln x+1)(\ln x-1)$

이때 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은

$\ln x+1=0$에서 $x=\frac{1}{e}$

$\ln x-1=0$에서 $x=e$

이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{e}$일 때 극댓값

$f\left(\frac{1}{e}\right)=a(-1+1)^2(-1-2)+a=a$,

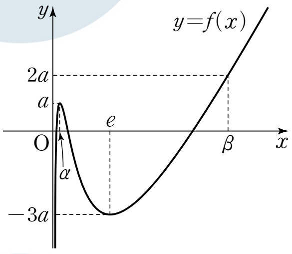
$x=e$일 때 극솟값

$f(e)=a(1+1)^2(1-2)+a=-3a$

를 가지므로 $\alpha=\frac{1}{e}$이고,

$f(\beta)=2f(\alpha)=2f\left(\frac{1}{e}\right)=2a$

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



위 그래프에서 $\alpha<e<\beta$이므로

$\int_\alpha^\beta|f'(x)|dx=\int_\alpha^e(-f'(x))dx+\int_e^\beta f'(x)dx$

$\qquad=\Big[-f(x)\Big]_\alpha^e+\Big[f(x)\Big]_e^\beta$

$\qquad=-f(e)+f(\alpha)+f(\beta)-f(e)$

$\qquad=3a+a+2a+3a$

$\qquad=9a$

따라서 $9a=5$에서 $a=\frac{5}{9}$이므로

$90a=50$

답 50

2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(t)e^{f(t)}}{e^{f(t)}+e^{-f(t)}}dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=\sin x-k$

$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(t)e^{f(t)}}{e^{f(t)}+e^{-f(t)}}dt$에서 $f(t)=s$로 놓으면

$t=0$일 때 $s=f(0)=-k$, $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-k$

이고 $f'(t)=\frac{ds}{dt}$이므로

$k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(t)e^{f(t)}}{e^{f(t)}+e^{-f(t)}}dt$

$\quad=\int_{-k}^{1-k}\frac{e^s}{e^s+e^{-s}}ds$

$$=\int_{-k}^{1-k}\frac{e^{2s}}{e^{2s}+1}ds$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-k}^{1-k}\frac{(e^{2s}+1)'}{e^{2s}+1}ds$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(e^{2s}+1)\Big]_{-k}^{1-k}$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(e^{2-2k}+1)-\ln(e^{-2k}+1)\}$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{2-2k}+1}{e^{-2k}+1}$$

즉, $2k=\ln\frac{e^{2-2k}+1}{e^{-2k}+1}$이므로

$e^{2k}=\frac{e^{2-2k}+1}{e^{-2k}+1}$

$1+e^{2k}=e^{2-2k}+1$

$e^{2k}=e^{2-2k}$

$2k=2-2k$

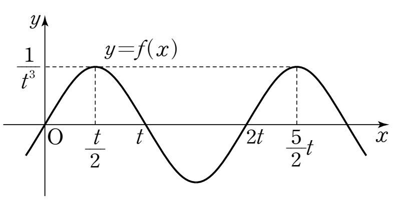
그러므로 $k=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ④

3 함수 $f(x)=\frac{1}{t^3}\sin\frac{\pi x}{t}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{t}}=2t$이고 최댓값은 $\frac{1}{t^3}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le x\le 1$에서

$1<\frac{t}{2}$이면 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=\frac{1}{t^3}\sin\frac{\pi}{t}$이고,

$0<\frac{t}{2}\le 1$이면 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{t^3}$이다.

즉, $g(t)=\begin{cases}\frac{1}{t^3} & (0<t\le 2)\\ \frac{1}{t^3}\sin\frac{\pi}{t} & (t>2)\end{cases}$

이때

$$\int_1^2 g(t)dt=\int_1^2\frac{1}{t^3}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^2$$
$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

또 $\int_2^6 g(t)dt=\int_2^6\frac{1}{t^3}\sin\frac{\pi}{t}dt$에서

$\frac{\pi}{t}=s$로 놓으면

$t=2$일 때 $s=\frac{\pi}{2}$, $t=6$일 때 $s=\frac{\pi}{6}$이고

$\frac{ds}{dt}=-\frac{\pi}{t^2}=-\frac{s^2}{\pi}$이므로

$$\int_2^6\frac{1}{t^3}\sin\frac{\pi}{t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left\{\left(\frac{s}{\pi}\right)^3\times\sin s\times\left(-\frac{\pi}{s^2}\right)\right\}ds$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}s\sin s\,ds$$

이때 $u(s)=s$, $v'(s)=\sin s$로 놓으면

$u'(s)=1$, $v(s)=-\cos s$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}s\sin s\,ds=\Big[-s\cos s\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos s\,ds$$
$$=\left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right)+\Big[\sin s\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=0+\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+1-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}$$

따라서

$$\int_2^6\frac{1}{t^3}\sin\frac{\pi}{t}dt=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}s\sin s\,ds$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12\pi}+\frac{1}{2\pi^2}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉠, ㉡에서

$$\int_1^6 g(t)dt=\int_1^2 g(t)dt+\int_2^6 g(t)dt$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{12\pi}+\frac{1}{2\pi^2}$$

답 ②

07 정적분의 활용

유제 본문 89~97쪽

1 ②	**2** ②	**3** ①	**4** ③	**5** ④	**6** 16
7 ①	**8** ⑤	**9** ④			

1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{2k}{n}}-e^{-\frac{k}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{2k}{n}}-e^{-\frac{k}{n}}\right)$

$$=\int_0^1 (e^{2x}-e^{-x})dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{-x}\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2+e^{-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2+e^{-1}-\frac{3}{2}$$

답 ②

2 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{\frac{3k^2+n^2}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt{\frac{3k^2+n^2}{n^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$
$$=\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\,dx$$

$3x^2+1=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=4$이고 $6x=\frac{dt}{dx}$이므로

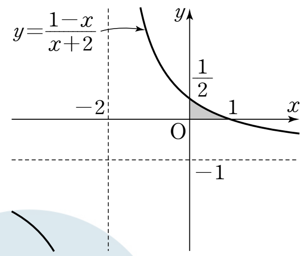
$$\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\,dx=\frac{1}{6}\int_1^4\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{3}\times4^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\times1\right)$$
$$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{3}\times8-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{7}{9}$$

답 ②

3 $y=\frac{1-x}{x+2}=\frac{-(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}-1$

이므로 곡선 $y=\frac{1-x}{x+2}$는 곡선 $y=\frac{3}{x}$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $\frac{1-x}{x+2}=0$에서 $x=1$이므로 곡선 $y=\frac{1-x}{x+2}$와 x축의 교점의 x좌표는 1이다.



따라서 구하는 넓이는

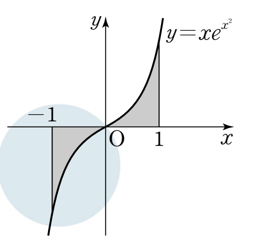
$$\int_0^1\frac{1-x}{x+2}dx=\int_0^1\left(\frac{3}{x+2}-1\right)dx$$
$$=\Big[3\ln|x+2|-x\Big]_0^1$$
$$=(3\ln 3-1)-(3\ln 2-0)$$
$$=3\ln\frac{3}{2}-1$$

답 ①

4 $f(x)=xe^{x^2}$이라 하면 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^1|xe^{x^2}|dx=2\int_0^1 xe^{x^2}dx$$
$$=\int_0^1 2xe^{x^2}dx$$

$x^2=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이고 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

구하는 넓이는

$$\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\int_0^1 e^t\,dt$$
$$=\Big[e^t\Big]_0^1$$
$$=e-1$$

답 ③

5 $\sin 3x=\cos 3x$ …… ㉠

에서 $\cos 3x=0$이면 $\sin 3x\neq0$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

$\cos 3x\neq0$이므로 ㉠에서

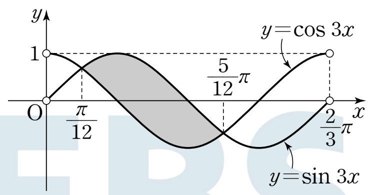
$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\tan 3x=1$$

이때 $0<x<\frac{2}{3}\pi$, 즉 $0<3x<2\pi$이므로

$3x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $3x=\frac{5}{4}\pi$

에서 두 곡선 $y=\sin 3x$, $y=\cos 3x$의 교점의 x좌표는

$\frac{\pi}{12}$, $\frac{5}{12}\pi$이다.



$\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5}{12}\pi$에서 $\sin 3x\ge\cos 3x$이므로 구하는 넓이는

$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}(\sin 3x-\cos 3x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}$

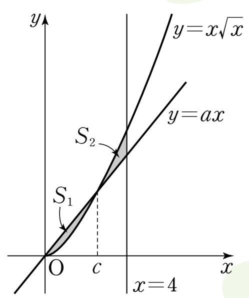
$=\frac{1}{3}\left(-\cos\frac{5}{4}\pi-\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\frac{1}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ④

6 곡선 $y=x\sqrt{x}$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 c $(0<c<4)$라 하면



$S_1=\int_0^c(ax-x\sqrt{x})dx$

$S_2=\int_c^4(x\sqrt{x}-ax)dx$

$S_1=S_2$이므로

$\int_0^c(ax-x\sqrt{x})dx=\int_c^4(x\sqrt{x}-ax)dx$

$\int_0^c(ax-x\sqrt{x})dx+\int_c^4(ax-x\sqrt{x})dx=0$

$\int_0^4(ax-x\sqrt{x})dx=0$

$\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=0$

$\left(8a-\frac{2}{5}\times 32\right)-0=0$

$a=\frac{8}{5}$

따라서 $10a=16$

답 16

7 $1\le t\le e$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{\ln\sqrt{t}}}{2t}$인 반원이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{\ln\sqrt{t}}}{2t}\right)^2$

$=\frac{\pi}{8}\times\frac{\ln\sqrt{t}}{t^2}$

$=\frac{\pi}{16}\times\frac{\ln t}{t^2}$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_1^e S(t)dt=\frac{\pi}{16}\int_1^e\frac{\ln t}{t^2}dt$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=\frac{1}{t^2}$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=-\frac{1}{t}$이므로

$\int_1^e\frac{\ln t}{t^2}dt=\left[\ln t\times\left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{t^2}dt$

$=\left(-\frac{\ln e}{e}+\ln 1\right)+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^e$

$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)$

$=1-\frac{2}{e}$

따라서

$V=\frac{\pi}{16}\int_1^e\frac{\ln t}{t^2}dt=\frac{\pi}{16}\left(1-\frac{2}{e}\right)$

답 ①

8 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

이므로 $1\le x\le 7$에서 곡선 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$의 길이는

$\int_1^7\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_1^7\sqrt{1+x}\,dx$

$=\int_1^7(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^7$

$=\frac{2}{3}\left(8^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)$

$=\frac{2}{3}\{(2\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^3\}$

$=\frac{2}{3}(16\sqrt{2}-2\sqrt{2})$

$=\frac{28\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

9 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$

이므로 $-a\le x\le a$에서 곡선 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$의 길이는

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)}\,dx$$
$$=\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)}\,dx$$
$$=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

이때 $f(x)=e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

그러므로

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\int_{0}^{a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$
$$=a\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^a$$
$$=a\left\{\left(e-\frac{1}{e}\right)-(1-1)\right\}$$
$$=a\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

따라서 $\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=a\left(e-\frac{1}{e}\right)$이므로

$a\left(e-\frac{1}{e}\right)=e^3-e=e^2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

에서

$a=e^2$

답 ④

Level **1** **기초 연습** 본문 98~99쪽

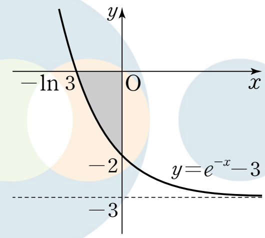
1 ④	**2** ④	**3** ②	**4** ②	**5** ③	**6** ⑤
7 ③	**8** ⑤				

1 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{n+3k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{\frac{n+3k}{n}}}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\frac{2}{3}(2-1)=\frac{2}{3}$$

답 ④

2 곡선 $y=e^{-x}-3$과 x축의 교점의 x좌표는

$e^{-x}-3=0$에서 $-x=\ln 3$이므로 $x=-\ln 3$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-\ln 3}^{0}(-e^{-x}+3)dx=\left[e^{-x}+3x\right]_{-\ln 3}^{0}$$
$$=(e^0+0)-(e^{\ln 3}-3\ln 3)$$
$$=1-(3-3\ln 3)$$
$$=3\ln 3-2$$

답 ④

3 두 곡선 $y=8x^2$, $y=\sqrt{x}$가 만나는 점의 x좌표는

$8x^2=\sqrt{x}\ (x\ge 0)$에서

$64x^4=x,\ x(64x^3-1)=0$

$x(4x-1)(16x^2+4x+1)=0$ …… ㉠

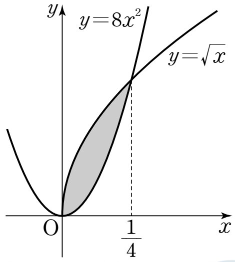
이때 이차방정식 $16x^2+4x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-16\times 1=-12<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

그러므로 ㉠에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

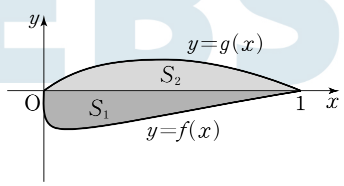


$0\le x\le\frac{1}{4}$에서 $\sqrt{x}\ge 8x^2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{4}}(\sqrt{x}-8x^2)dx=\int_0^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}}-8x^2)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}-\frac{8}{3}\times\frac{1}{64}$$
$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$$

답 ②

4 $0\le x\le 1$에서 $\sqrt{x}\le\sqrt[3]{x}$이고, $x\ge x^a$ $(a>1)$이다.



곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^1(-f(x))dx$$
$$=\int_0^1(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^1 g(x)dx$$
$$=\int_0^1(x-x^a)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}$$

$S_1=S_2$이므로

$\frac{1}{12}=\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}$에서

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

따라서

$$a=\frac{12}{5}-1=\frac{7}{5}$$

답 ②

5 $\int_0^x f'(t)dt=\sin x-f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=\sin 0-f(0)$

$f(0)=0$

이때

$$\int_0^x f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^x=f(x)-f(0)=f(x)$$

이므로 ㉠에서

$f(x)=\sin x-f(x)$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$이므로 $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos x\right]_0^\pi$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 0$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

답 ③

다른 풀이

$\int_0^x f'(t)dt=\sin x-f(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=\sin 0-f(0)$, $f(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\cos x-f'(x)$

이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x$

$$f(x)=\int\frac{1}{2}\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\sin x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=\frac{1}{2}\sin 0+C=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$이므로 $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos x\right]_0^\pi$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 0$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

6 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<e<f(x)$이므로

$$S(t)=\int_0^t (f(x)-g(x))dx$$
$$=\int_0^t (e^{-2x}+e^{-3x})dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^t$$
$$=\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{3}e^0\right)$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{5}{6}$$

이때 $\lim_{t\to\infty}e^{-2t}=0$, $\lim_{t\to\infty}e^{-3t}=0$이므로

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{5}{6}\right)$$
$$=-0-0+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

7 $1\le t\le 8$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(t^{\frac{2}{3}}\right)^2=t^{\frac{4}{3}}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^8 S(t)dt=\int_1^8 t^{\frac{4}{3}}dt$$
$$=\left[\frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}\right]_1^8$$
$$=\frac{3}{7}\left(8^{\frac{7}{3}}-1^{\frac{7}{3}}\right)$$
$$=\frac{3}{7}(2^7-1)=\frac{381}{7}$$

답 ③

8 $x=e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}\right)$이고

$y=t$에서 $\frac{dy}{dt}=1$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}\right)^2+1$$
$$=\frac{1}{4}(e^t-2+e^{-t})+1$$
$$=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)^2$$

따라서 시각 $t=\ln 4$에서 $t=\ln 9$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\ln 4}^{\ln 9}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln 9}\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln 9}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)dt$$
$$=\left[e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}\right]_{\ln 4}^{\ln 9}$$
$$=\left(e^{\frac{\ln 9}{2}}-e^{-\frac{\ln 9}{2}}\right)-\left(e^{\frac{\ln 4}{2}}-e^{-\frac{\ln 4}{2}}\right)$$
$$=\left(e^{\ln 3}-e^{\ln\frac{1}{3}}\right)-\left(e^{\ln 2}-e^{\ln\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\left(3-\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{6}$$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ② **2** ④ **3** ③ **4** ① **5** ⑤ **6** ④
7 ② **8** 14

1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2k}{n\sqrt{n}}\right)^2 f\left(\frac{2k}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\left(\frac{n+2k}{n}\right)^2 f\left(\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2 f\left(\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (1+x)^2 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (1+x)e^x dx$$

이때 $u(x)=1+x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^2 (1+x)e^x dx=\left[(1+x)e^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx$$
$$=(3e^2-1)-\left[e^x\right]_0^2$$
$$=(3e^2-1)-(e^2-1)$$
$$=2e^2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2k}{n\sqrt{n}}\right)^2 f\left(\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^2 (1+x)e^x dx$$
$$=\frac{1}{2}\times 2e^2=e^2$$

답 ②

2 점 P_k의 x좌표는 $\frac{k}{n}\times\frac{\pi}{2}=\frac{k\pi}{2n}$이므로 삼각형 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k\mathrm{R}_{k-1}$의 넓이 S_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}\times\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\frac{1}{2}\times\sin\frac{k\pi}{4n}\times\frac{\pi}{2n}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4n}\sin\frac{k\pi}{4n}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos 0$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

답 ④

3 $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$이라 하면

$$f'(x)=\frac{2x(x^3+1)-x^2\times 3x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

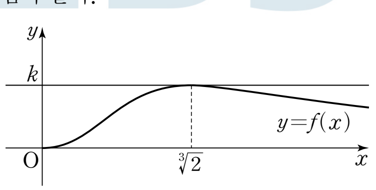
$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\sqrt[3]{2}$

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	극대	↘

한편, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3+1}=0$이므로 $x\ge 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ $(x\ge 0)$과 x축 및 직선 $x=t$ $(t>0)$으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx$$

이므로 $S'(t)=f(t)$

$S'(t)=f(t)=k$ $(k>0)$을 만족시키는 양수 t가 α뿐이므로 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수는 1이고, 그 교점의 t좌표는 α이다.

즉, $\alpha=\sqrt[3]{2}$

이때

$$\int f(x)dx=\int\frac{x^2}{x^3+1}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

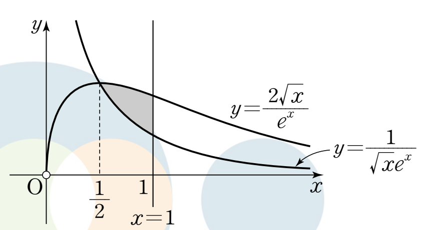
이고 $\alpha^3=2$이므로

$$S(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\ln|x^3+1|\right]_0^\alpha$$
$$=\frac{1}{3}\ln(\alpha^3+1)-\frac{1}{3}\ln 1$$
$$=\frac{1}{3}\ln 3$$

답 ③

4 방정식 $\frac{2\sqrt{x}}{e^x}=\frac{1}{\sqrt{xe^x}}$, 즉 $2\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$의 실근은 $x=\frac{1}{2}$이므로 두 곡선 $y=\frac{2\sqrt{x}}{e^x}$, $y=\frac{1}{\sqrt{xe^x}}$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이다.

한편, $x>\frac{1}{2}$이면 $2\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{x}}$이므로 $\frac{2\sqrt{x}}{e^x}>\frac{1}{\sqrt{xe^x}}$



그러므로 두 곡선 $y=\frac{2\sqrt{x}}{e^x}$, $y=\frac{1}{\sqrt{xe^x}}$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{2\sqrt{x}}{e^x}-\frac{1}{\sqrt{xe^x}}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}2\sqrt{x}e^{-x}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

이다.

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}2\sqrt{x}e^{-x}dx$에서

$u(x)=2\sqrt{x}$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\sqrt{x}e^{-x}dx=\Big[-2\sqrt{x}e^{-x}\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\sqrt{x}e^{-x}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\Big[-2\sqrt{x}e^{-x}\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=-2e^{-1}+\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$
$$=-\frac{2}{e}+\sqrt{\frac{2}{e}}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{e}}-\frac{2}{e}$$

답 ①

5 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\dfrac{7}{12}\tan x$의 교점의 x좌표를 θ $\left(0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{7}{12}\tan\theta$, 즉 $\cos\theta=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

에서

$12\cos^2\theta=7\sin\theta$

$12(1-\sin^2\theta)=7\sin\theta$

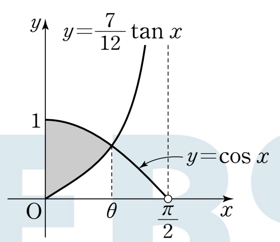
$12\sin^2\theta+7\sin\theta-12=0$

$(3\sin\theta+4)(4\sin\theta-3)=0$

이때 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $0\le\sin\theta<1$, $0<\cos\theta\le1$이므로

$\sin\theta=\dfrac{3}{4}$,

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$



이때

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\ln|\cos x|+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이고, $0\le x\le\theta$에서 $\cos x\ge\dfrac{7}{12}\tan x$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^\theta\left(\cos x-\frac{7}{12}\tan x\right)dx$$
$$=\left[\sin x+\frac{7}{12}\ln|\cos x|\right]_0^\theta$$
$$=\left(\sin\theta+\frac{7}{12}\ln|\cos\theta|\right)-\left(\sin 0+\frac{7}{12}\ln|\cos 0|\right)$$
$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\ln\frac{\sqrt{7}}{4}\right)-(0+0)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\ln\frac{\sqrt{7}}{4}$$

답 ⑤

6 $\dfrac{1}{2}\le t\le1$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}\ln\frac{t}{2}\right)^2=\frac{1}{t}\left(\ln\frac{t}{2}\right)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1}S(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t}\left(\ln\frac{t}{2}\right)^2dt$$

$\ln\dfrac{t}{2}=s$로 놓으면

$t=\dfrac{1}{2}$일 때 $s=\ln\dfrac{1}{4}=-2\ln 2$,

$t=1$일 때 $s=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$이고

$\dfrac{1}{t}=\dfrac{ds}{dt}$이므로

$$V=\int_{-2\ln 2}^{-\ln 2}s^2ds$$
$$=\left[\frac{1}{3}s^3\right]_{-2\ln 2}^{-\ln 2}$$
$$=\frac{1}{3}(-\ln 2)^3-\frac{1}{3}(-2\ln 2)^3$$
$$=\frac{7}{3}(\ln 2)^3$$

답 ④

7 $x=t+2\cos t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1-2\sin t$이고

$y=\sqrt{3}\sin t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=\sqrt{3}\cos t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-2\sin t)^2+3\cos^2 t$$
$$=1-4\sin t+4\sin^2 t+3\cos^2 t$$
$$=1-4\sin t+\sin^2 t+3(\sin^2 t+\cos^2 t)$$
$$=4-4\sin t+\sin^2 t$$
$$=(2-\sin t)^2$$

따라서 $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3}{2}\pi$에서 이 곡선의 길이는

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{(2-\sin t)^2}\, dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |2-\sin t|\, dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (2-\sin t)\, dt$$
$$= \Big[2t+\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$= \left(3\pi + \cos\frac{3}{2}\pi\right) - \left(\pi + \cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (3\pi+0) - (\pi+0)$$
$$= 2\pi$$

답 ②

8 점 P가 원점을 출발한 후 t초 동안 점 Q가 움직인 거리는 $0 \le x \le 2t$에서의 곡선 $y=x^2$의 길이와 같고, 함수 $y=x^2$에 대하여 $y'=2x$이므로

$$d(t) = \int_0^{2t} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_0^{2t} \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

따라서

$$d'(t) = \sqrt{1+4\times(2t)^2} \times (2t)'$$
$$= 2\sqrt{1+16t^2}$$

에서

$$d'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{1+16\times(\sqrt{3})^2}$$
$$= 2\sqrt{49} = 14$$

답 14

Level **3** **실력 완성** 본문 102쪽

1 ④ **2** 150

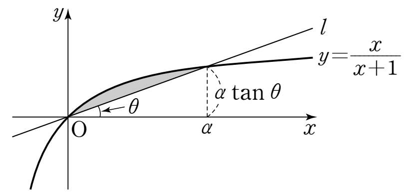
1 직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x$이다.

이때 직선 l과 곡선 $y=\frac{x}{x+1}$가 만나는 점의 x좌표는

$(\tan\theta)x = \frac{x}{x+1}$에서

$x(x\tan\theta + \tan\theta - 1) = 0$

$x=0$ 또는 $x=-1+\cot\theta$



직선 l과 곡선 $y=\frac{x}{x+1}$가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점의 x좌표를 α라 하면

$\alpha = -1+\cot\theta$, 즉 $\tan\theta = \frac{1}{\alpha+1}$이고,

$$S(\theta) = \int_0^{\alpha} \left\{\frac{x}{x+1} - (\tan\theta)x\right\} dx$$
$$= \int_0^{\alpha} \frac{x}{x+1}\, dx - \tan\theta \int_0^{\alpha} x\, dx$$

위 등식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$S'(\theta) = \frac{\alpha}{\alpha+1} \times \frac{d\alpha}{d\theta} - \sec^2\theta \int_0^{\alpha} x\, dx - \tan\theta \times \alpha \times \frac{d\alpha}{d\theta}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+1} \times \frac{d\alpha}{d\theta} - \sec^2\theta \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha+1} \times \frac{d\alpha}{d\theta}$$
$$= -\frac{1}{2}\alpha^2 \sec^2\theta$$
$$= -\frac{1}{2}(-1+\cot\theta)^2 \sec^2\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$일 때

$$\cot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3},\ \sec^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3}$$

이므로

$$S'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})^2 \times \frac{4}{3}$$
$$= \frac{4(-2+\sqrt{3})}{3}$$

답 ④

다른 풀이

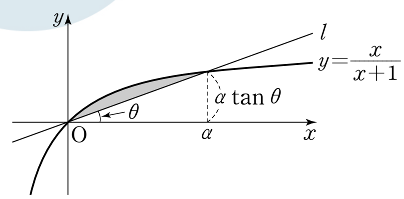
직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x$이다.

이때 직선 l과 곡선 $y=\frac{x}{x+1}$가 만나는 점의 x좌표는

$(\tan\theta)x = \frac{x}{x+1}$에서

$x(x\tan\theta + \tan\theta - 1) = 0$

$x=0$ 또는 $x=-1+\cot\theta$



직선 l과 곡선 $y=\frac{x}{x+1}$가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점의 x좌표를 α라 하면 $\alpha=-1+\cot\theta$이고,

$$S(\theta)=\int_0^\alpha \frac{x}{x+1}dx-\frac{1}{2}\times\alpha\times\alpha\tan\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\frac{d\alpha}{d\theta}=-\csc^2\theta$이고, 함수 $f(x)=\frac{x}{x+1}$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_0^\alpha f(x)dx=F(\alpha)-F(0)$$

위 등식의 양변을 θ에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{d\theta}\int_0^\alpha f(x)dx=\frac{dF(\alpha)}{d\theta}=\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\times\frac{d\alpha}{d\theta}$$

$$=f(\alpha)\times\frac{d\alpha}{d\theta}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha+1}\times(-\csc^2\theta) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

한편,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\alpha^2\tan\theta\right)$$

$$=\alpha\times\frac{d\alpha}{d\theta}\times\tan\theta+\frac{1}{2}\alpha^2\times\sec^2\theta$$

$$=\alpha\times(-\csc^2\theta)\times\tan\theta+\frac{1}{2}\alpha^2\times\sec^2\theta \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면 ㉡, ㉢에 의하여

$$S'(\theta)=-\frac{\alpha}{\alpha+1}\times\csc^2\theta+\alpha\times\csc^2\theta\times\tan\theta-\frac{1}{2}\alpha^2\times\sec^2\theta \qquad \cdots\cdots ㉣$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때

$$\alpha=-1+\cot\frac{\pi}{6}=-1+\sqrt{3},$$

$$\csc^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{6}}=4,$$

$$\sec^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}$$

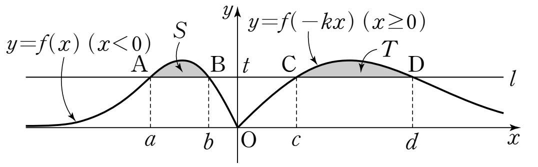
이므로 ㉣의 양변에 $\theta=\frac{\pi}{6}$를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\times4+(-1+\sqrt{3})\times4\times\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\times(-1+\sqrt{3})^2\times\frac{4}{3}$$

$$=0-\frac{2}{3}(4-2\sqrt{3})$$

$$=\frac{4(-2+\sqrt{3})}{3}$$

2



직선 l의 방정식을 $y=t$라 하고, x좌표가 a, b, c, d인 네 교점을 각각 A, B, C, D라 하자.

$x<0$에서 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 두 실근은 a, b $(a<b<0)$이므로

$$f(a)=f(b)=t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\geq0$에서 x에 대한 방정식 $f(-kx)=t$의 서로 다른 두 실근은 c, d $(0<c<d)$이므로

$$f(-kc)=f(-kd)=t \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $a<b<0$이고 ㉡에서 $-kd<-kc<0$이므로

$a=-kd$, $b=-kc$

$a=3b$, $c=-\frac{2}{3}a$에서

$$b=\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}c\right)=-\frac{1}{2}c$$

이므로

$$k=\frac{1}{2},\ c=-2b,\ d=-2a=-6b \qquad \cdots\cdots ㉢$$

x에 대한 방정식 $f(x)=-2xe^{-x^2}=t$의 서로 다른 두 실근이 a, b, 즉 $3b$, b이므로

$-6be^{-9b^2}=t$이고 $-2be^{-b^2}=t$

이때 $-6be^{-9b^2}=-2be^{-b^2}$에서

$e^{8b^2}=3$

$8b^2=\ln 3$

한편,

$$\int f(x)dx=\int(-2xe^{-x^2})dx$$

$$=\int(-x^2)'e^{-x^2}dx$$

$$=e^{-x^2}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ $(x<0)$과 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_a^b(f(x)-t)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx-\Big[tx\Big]_a^b$$

$$=\int_a^b f(x)dx-t(b-a)$$

$$=\int_{3b}^b f(x)dx+2tb \qquad \cdots\cdots ㉣$$

$$=\Big[e^{-x^2}\Big]_{3b}^b+2tb$$

$$=(e^{-b^2}-e^{-9b^2})+2tb$$

이때 $t=-2be^{-b^2}$이고 $b^2=\frac{\ln 3}{8}$에서

$e^{-b^2}=e^{-\frac{1}{8}\ln 3}=e^{\ln 3^{-\frac{1}{8}}}=3^{-\frac{1}{8}}$이므로

$$\begin{aligned}S&=e^{-b^2}-e^{-9b^2}+2tb\\&=e^{-b^2}-(e^{-b^2})^9-4b^2e^{-b^2}\\&=3^{-\frac{1}{8}}-3^{-\frac{9}{8}}-\frac{\ln 3}{2}\times 3^{-\frac{1}{8}}\\&=3^{-\frac{1}{8}}\left(1-3^{-1}-\frac{\ln 3}{2}\right)\\&=3^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{2}{3}-\frac{\ln 3}{2}\right)\end{aligned}$$

한편, 곡선 $y=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ $(x\ge 0)$과 선분 CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면

$$\begin{aligned}T&=\int_c^d\left(f\left(-\frac{1}{2}x\right)-t\right)dx\\&=\int_c^d f\left(-\frac{1}{2}x\right)dx-\Big[tx\Big]_c^d \qquad \cdots\cdots ㉤\end{aligned}$$

이때 $-\frac{1}{2}x=s$로 놓으면 ㉢에서

$x=c$일 때 $s=-\frac{1}{2}c=b$, $x=d$일 때 $s=-\frac{1}{2}d=3b$이고

$-\frac{1}{2}=\frac{ds}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}\int_c^d f\left(-\frac{1}{2}x\right)dx&=-2\int_b^{3b}f(s)ds\\&=2\int_{3b}^{b}f(s)ds\end{aligned}$$

이고,

$$\Big[tx\Big]_c^d=t(d-c)=t(-6b+2b)=-4tb$$

㉣, ㉤에서

$$T=2\int_{3b}^{b}f(s)ds+4tb=2S$$

이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S+T=3S=3^{-\frac{1}{8}}\left(2-\frac{3}{2}\ln 3\right)$$

따라서 $p=\frac{3}{2}$이므로

$$100p=100\times\frac{3}{2}=150$$

답 150

memo

memo

memo