수능특강

수학영역
기 하

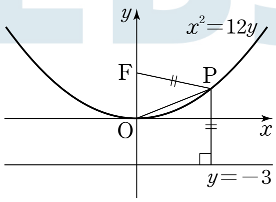
정답과 풀이

01 포물선

유제 본문 5~9쪽

1 ④	2 11	3 ②	4 5	5 ③	6 ①

1 포물선 $x^2=12y$의 초점은 $\mathrm{F}(0, 3)$이고 준선의 방정식은 $y=-3$이다.



점 P의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$이라 하면 포물선의 정의에 의하여 점 P와 직선 $y=-3$ 사이의 거리는 두 점 P, F 사이의 거리와 같으므로

$b-(-3)=5$에서 $b=2$

$a^2=12b=24$에서 $a=2\sqrt{6}$

즉, 점 P의 좌표는 $(2\sqrt{6}, 2)$이므로 삼각형 OPF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

답 ④

2 포물선 $y^2=6x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 $a+b=8$이고, 포물선의 정의에 의하여 두 점 A, B에서 직선 $x=-\frac{3}{2}$에 이르는 거리는 각각 두 선분 AF, BF의 길이와 같다.

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}\\&=\left(a+\frac{3}{2}\right)+\left(b+\frac{3}{2}\right)\\&=(a+b)+3\\&=8+3=11\end{aligned}$$

답 11

3 $x^2-4x=8y$에서

$(x^2-4x+4)-4=8y$, $(x-2)^2=8\left(y+\frac{1}{2}\right)$

이므로 포물선 $x^2-4x=8y$는 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2-4x=8y$의 초점 F의 좌표는

$\left(0+2, 2-\frac{1}{2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

따라서 직선 OF의 기울기는 $\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

답 ②

4 $y^2=2x+k$에 $y=2x+4$를 대입하면

$(2x+4)^2=2x+k$

$4x^2+14x+16-k=0$ …… ㉠

포물선 $y^2=2x+k$가 직선 $y=2x+4$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=7^2-4\times(16-k)>0$

$4k-15>0$, $k>\frac{15}{4}$

또한 포물선 $y^2=2x+k$, 즉 $y^2=2\left(x+\frac{k}{2}\right)$는 포물선 $y^2=2x$를 x축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=2x+k$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}, 0\right)$이다.

이때 점 F의 x좌표가 정수가 되기 위해서는 k가 홀수이어야 하고 $k>\frac{15}{4}$이므로 자연수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

5 포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{\frac{1}{2}}$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+6$

이 직선의 x절편은 -12, y절편은 6이므로 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times6=36$

답 ③

6 포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(3,\ 2\sqrt{6})$에서의 접선의 방정식은

$2\sqrt{6}y=4(x+3)$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x+\sqrt{6}$

이 직선이 포물선의 준선 $x=-2$와 만나는 점 A의 좌표는

$\left(-2,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$이므로 직선 AF의 기울기는

$$\frac{0-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2-(-2)}=-\frac{\sqrt{6}}{12}$$

답 ①

Level **1** **기초 연습** 본문 10~11쪽

1 ④	**2** ④	**3** ①	**4** ③	**5** ⑤	**6** ⑤
7 ④	**8** ④	**9** ④	**10** ①		

1 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-1$인 포물선의 방정식은 $y^2=4x$이다.
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 포물선의 정의에 의하여 점 P와 직선 $x=-1$ 사이의 거리는 두 점 P, F 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PF}}=4$와 같으므로

$|a-(-1)|=4$

$a\geq 0$이므로 $a=3$

$b^2=4a=12$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+12}=\sqrt{21}$

답 ④

2 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 선분 AB의 중점의 x좌표가 4이므로

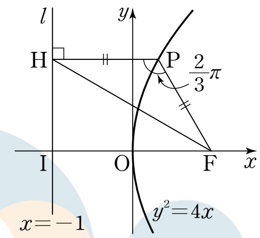
$\dfrac{a+b}{2}=4$, 즉 $a+b=8$

포물선 $y^2=12x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-3$이다.
포물선의 정의에 의하여 포물선 위의 점에서 초점 F에 이르는 거리와 준선에 이르는 거리는 서로 같고, 두 점 A, B에서 준선에 이르는 거리는 각각 $a+3$, $b+3$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}&=(a+3)+(b+3)\\&=(a+b)+6\\&=8+6=14\end{aligned}$$

답 ④

3 포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 준선인 직선 l의 방정식은 $x=-1$이다.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로 삼각형 PHF는 이등변삼각형이다.

이때 $\angle\mathrm{HPF}=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 $\angle\mathrm{PHF}=\dfrac{\pi}{6}$

직선 l이 x축과 만나는 점을 I라 하면 두 직선 HP와 IF가 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{IFH}=\angle\mathrm{PHF}=\dfrac{\pi}{6}$

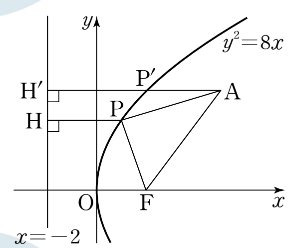
따라서 직각삼각형 HIF에서

$\cos(\angle\mathrm{IFH})=\dfrac{2}{\overline{\mathrm{HF}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{HF}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

답 ①

4 포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



점 P에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이다.
점 A에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H′이라 하고, 선분 AH′이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점을 P′이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}}\\&\geq\overline{\mathrm{AP'}}+\overline{\mathrm{P'H'}}\\&=\overline{\mathrm{AH'}}=7\end{aligned}$$

에서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값은 7이고,

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=5$

이므로 삼각형 PFA의 둘레의 길이의 최솟값은

$7+5=12$

답 ③

5 포물선 $(y-1)^2=8(x-2)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $(y-1)^2=8(x-2)$의 초점 F의 좌표는 $(4,\ 1)$, 준선의 방정식은 $x=0$이다.

이때 포물선 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF}=4$이므로 점 P와 준선 $x=0$ 사이의 거리가 4이다.

즉, 점 P의 x좌표는 $a=4$

포물선의 방정식 $(y-1)^2=8(x-2)$에 $x=4$, $y=b$를 대입하면

$(b-1)^2=16$

$b>0$이므로 $b=5$

따라서 $a+b=4+5=9$

답 ⑤

6 두 상수 m, n에 대하여 포물선 $y^2+ay=8x+b$는 $(y-n)^2=8(x-m)$으로 나타낼 수 있으므로 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $(y-n)^2=8(x-m)$의 초점의 좌표는 $(2+m,\ n)$이므로

$2+m=-1$에서 $m=-3$이고, $n=3$

즉, 이 포물선의 방정식은 $(y-3)^2=8(x+3)$이다.

이 포물선이 y축과 만나는 점의 y좌표는

$(y-3)^2=8\times(0+3)$에서 $y=3+2\sqrt{6}$ 또는 $y=3-2\sqrt{6}$

따라서 선분 AB의 길이는 $3+2\sqrt{6}-(3-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$

답 ⑤

7 직선의 방정식 $y=x+8$, 즉 $x=y-8$을 포물선의 방정식 $(y-2n)^2=4x$에 대입하면

$(y-2n)^2=4(y-8)$, $y^2-4ny+4n^2=4y-32$

$y^2-4(n+1)y+4n^2+32=0$ ...... ㉠

y에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(n+1)^2-(4n^2+32)=8n-28$이므로

$n\le3$이면 $f(n)=0$

$n>3$이면 $f(n)=2$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} f(n)=3\times0+7\times2=14$

답 ④

8 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=3$이 만나는 점을 $\mathrm{A}(k,\ 3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$3y=2p(x+k)$, 즉 $y=\frac{2p}{3}x+\frac{2pk}{3}$

이 직선의 기울기가 6이므로

$\frac{2p}{3}=6$, $p=9$

점 $\mathrm{P}(1,\ a)$는 포물선 $y^2=36x$ 위에 있으므로 $a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$

따라서 포물선 $y^2=36x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$6y=18(x+1)$, 즉 $y=3x+3$

이므로 접선의 기울기는 3이다.

답 ④

9 포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+\frac{2}{m}$

이 직선이 y축과 만나는 점 B의 좌표는 $\left(0,\ \frac{2}{m}\right)$이므로 직선 BF의 기울기는

$\frac{0-\frac{2}{m}}{2-0}=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{2}$

$m=2$

즉, 접선의 방정식은 $y=2x+1$이므로 점 A의 좌표는

$\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

한편, 점 P의 x좌표는

$(2x+1)^2=8x$에서

$4x^2-4x+1=0$, $(2x-1)^2=0$

$x=\frac{1}{2}$

점 P의 y좌표는

$y=2\times\frac{1}{2}+1=2$

따라서 삼각형 PAF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\times2=\frac{5}{2}$

답 ④

10 포물선 $y^2=24x$의 초점의 좌표는 $(6,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-6$이다.

포물선 $y^2=24x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+\frac{6}{m}$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=\frac{6}{m}$, $m=2$

즉, 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=2x+3$이므로 점 P의 x좌표는

$(2x+3)^2=24x$에서

$4x^2-12x+9=0$, $(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$

포물선의 정의에 의하여 점 P와 초점 F 사이의 거리는 점 P와 직선 $x=-6$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\frac{3}{2}-(-6)=\frac{15}{2}$

답 ①

Level **2** **기본 연습** 본문 12~13쪽

1 ② **2** 1 **3** ③ **4** 6 **5** ⑤ **6** ⑤

7 16 **8** ③

1 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

$2\overline{\mathrm{AF}}=3\overline{\mathrm{BF}}$에서 $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:2$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=3t$, $\overline{\mathrm{BF}}=2t\ (t>0)$이라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}=3t$이므로 점 A의 x좌표는 $3t-p$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{HF}}=2p$이고, 선분 BH의 길이는 점 A의 y좌표와 같으므로 삼각형 BHF에서 피타고라스 정리에 의하여

$(2p)^2+4p(3t-p)=(2t)^2$

$12pt=4t^2$

$t>0$이므로 $t=3p$

점 A의 좌표는 $(8p,\ 4\sqrt{2p})$이므로 삼각형 AFC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FC}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times(8p-p)\times4\sqrt{2p}=14\sqrt{2}p^2=42$

따라서 $p^2=\frac{42}{14\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

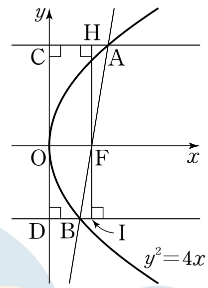
답 ②

2 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=2t$, $\overline{\mathrm{BD}}=t\ (t>0)$이라 하자.

포물선의 정의에 의하여 포물선 위의 점에서 초점에 이르는 거리와 준선에 이르는 거리가 서로 같으므로

$\overline{\mathrm{AF}}=2t+1$, $\overline{\mathrm{BF}}=t+1$



점 F에서 두 직선 AC, BD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 두 삼각형 AHF, BIF는 서로 닮음이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{\overline{\mathrm{BI}}}{\overline{\mathrm{BF}}}$

즉, $\frac{2t-1}{2t+1}=\frac{1-t}{t+1}$이므로

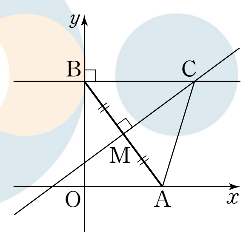
$(2t-1)(t+1)=(1-t)(2t+1)$, $4t^2=2$

$t>0$이므로 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

답 1

3



선분 AB의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 CMA, CMB는 서로 합동이므로 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$이다.

포물선의 정의에 의하여 점 C가 나타내는 곡선은

점 $\mathrm{A}(6,\ 0)$을 초점으로 하고 준선이 y축인 포물선이다.

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 0)$이므로 이 포물선의 방정식은

$y^2=4\times3\times(x-3)$, 즉 $y^2=12(x-3)$

직선 PQ의 기울기가 2이므로 직선 PQ의 방정식을

$y=2x+k$라 하면 두 점 P, Q는 포물선 $y^2=12(x-3)$과 직선 $y=2x+k$의 교점이다.

$(2x+k)^2=12(x-3)$에서

$4x^2+(4k-12)x+k^2+36=0$

이 이차방정식의 실근이 두 점 P, Q의 x좌표이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{4k-12}{4}=12$, $k=-9$

따라서 직선 PQ의 y절편은 -9이다.

답 ③

4 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(2t^2,\ 4t)$에서의 접선의 방정식은

$4ty=4(x+2t^2)$, 즉 $ty=x+2t^2$

$x=ty-2t^2$을 $y^2=-2(x+8t)$에 대입하면

$y^2=-2(ty-2t^2+8t)$

$y^2+2ty-4t^2+16t=0$ ⋯⋯ ㉠

직선 $ty=x+2t^2$이 포물선 $y^2=-2(x+8t)$와 만나지 않으므로 y에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=t^2-(-4t^2+16t)<0$

$5t^2-16t<0$

$t(5t-16)<0$

$0<t<\frac{16}{5}$

따라서 모든 정수 t의 값의 합은

$1+2+3=6$

답 6

5 포물선 $y^2=4px$의 초점은 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이다.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x+\frac{p}{2}$

직선 $y=2x+\frac{p}{2}$와 포물선 $y^2=4px$가 만나는 점 A의 y좌표는

$y^2=4p\left(\frac{y}{2}-\frac{p}{4}\right)$에서

$y^2-2py+p^2=0$, $(y-p)^2=0$

$y=p$

점 A의 x좌표는

$p^2=4px$에서 $x=\frac{p}{4}$

직선 $y=2x+\frac{p}{2}$가 x축과 만나는 점 B의 x좌표는

$x=-\frac{p}{4}$

따라서 삼각형 ABF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{p-\left(-\frac{p}{4}\right)\right\}\times p=\frac{5}{8}p^2=10$

$p^2=16$

$p>0$이므로 $p=4$

두 점 A, F의 좌표는 각각 $(1,\ 4)$, $(4,\ 0)$이므로 직선 AF의 방정식은

$y=-\frac{4}{3}(x-4)$

점 C의 y좌표는

$y^2=16\left(-\frac{3}{4}y+4\right)$에서

$y^2+12y-64=0$

$(y+16)(y-4)=0$

$y<0$이므로 $y=-16$

따라서 삼각형 BCF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times16=40$

답 ⑤

6 포물선 $y^2=px$에 접하고 기울기가 $m\ (m\neq0)$인 직선의 방정식은

$y=mx+\frac{\frac{p}{4}}{m}$, 즉 $y=mx+\frac{p}{4m}$

이 직선이 점 $\mathrm{C}(-2,\ 1)$을 지나므로

$1=-2m+\frac{p}{4m}$, $8m^2+4m-p=0$

두 직선 AC, BC의 기울기는 m에 대한 이차방정식 $8m^2+4m-p=0$의 서로 다른 두 실근이고, 기울기의 곱이 $-\frac{3}{2}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-p}{8}=-\frac{3}{2}$, $p=12$

이차방정식 $8m^2+4m-12=0$, 즉 $2m^2+m-3=0$에서

$(2m+3)(m-1)=0$

$m=-\frac{3}{2}$ 또는 $m=1$

한편, 직선 $y=mx+\frac{3}{m}$과 포물선 $y^2=12x$의 교점의 x좌표는

$\left(mx+\frac{3}{m}\right)^2=12x$에서

$m^2x^2-6x+\frac{9}{m^2}=0$, $\left(mx-\frac{3}{m}\right)^2=0$

$x=\frac{3}{m^2}$

따라서 두 점 A, B의 x좌표는

$\frac{3}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$, $\frac{3}{1^2}=3$

이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는

$\frac{\frac{4}{3}+3+(-2)}{3}=\frac{7}{9}$

답 ⑤

7 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$에서의 접선의 방정식은

$4y=6\left(x+\frac{4}{3}\right)$, 즉 $y=\frac{3}{2}x+2$

이므로 포물선 $(y-k)^2=-12(x-6)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

점 Q를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라 하면 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $Q'\left(\frac{4}{3},\ -4\right)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$이므로 포물선 $y^2=12x$를 y축에 대하여 대칭이동한 포물선 $y^2=-12x$ 위의 점 $\left(-\frac{4}{3},\ -4\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

포물선 $(y-k)^2=-12(x-6)$은 포물선 $y^2=12x$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이고, 두 포물선 위의 점 P, Q에서의 접선이 서로 평행하므로 점 P는 점 $\left(-\frac{4}{3},\ -4\right)$를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점이다. 그러므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{14}{3},\ -4+k\right)$이다.

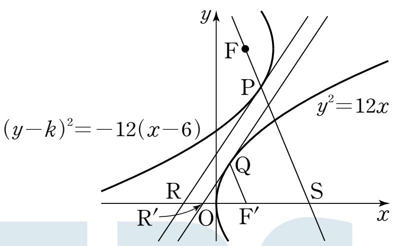
한편, 포물선 $(y-k)^2=-12(x-6)$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ k)$이고 포물선 $y^2=12x$의 초점을 F′이라 하면 점 F′의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

직선 FP의 기울기는 $\dfrac{(-4+k)-k}{\frac{14}{3}-3}=-\frac{12}{5}$이고

직선 QF′의 기울기는 $\dfrac{0-4}{3-\frac{4}{3}}=-\frac{12}{5}$이므로

두 직선 FP, QF′은 서로 평행하다.

그러므로 점 Q에서의 접선이 x축과 만나는 점을 R′이라 하면 삼각형 PRS와 삼각형 QR′F′은 서로 닮음이다.



직선 QR′의 방정식이 $y=\frac{3}{2}x+2$이므로 점 R′의 좌표는 $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$이고 삼각형 QR′F′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{3-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}\times4=\frac{26}{3}$

삼각형 PRS의 넓이는 78이므로 삼각형 QR′F′과 삼각형 PRS의 넓이의 비는 $\frac{26}{3}:78=1:9$이다.

즉, 삼각형 QR′F′과 삼각형 PRS의 닮음비는 $1:3$이고 점 Q의 y좌표는 4이므로 점 P의 y좌표는

$3\times4=12$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{14}{3},\ 12\right)$이므로

$-4+k=12$에서 $k=16$

답 16

8 기울기가 m이고 포물선 $y^2=4px$에 접하는 직선의 방정식은

$y=mx+\frac{p}{m}$

이 직선이 점 $Q(k,\ 4)$를 지나므로

$4=mk+\frac{p}{m},\ km^2-4m+p=0$

두 직선 $l_1,\ l_2$의 기울기를 각각 $m_1,\ m_2$라 하면 $m_1,\ m_2$는 m에 대한 이차방정식 $km^2-4m+p=0$의 두 근이고, 두 직선 $l_1,\ l_2$가 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=\frac{p}{k}=-1,\ k=-p$

점 Q를 지나고 포물선에 접하는 직선의 접점의 좌표를 $(t,\ s)$라 하자.

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(t,\ s)$에서의 접선의 방정식은

$sy=2p(x+t)$

이고 이 접선이 점 $Q(-p,\ 4)$를 지나므로

$4s=2p(-p+t)$ ...... ㉠

또 점 $(t,\ s)$는 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$s^2=4pt$ ...... ㉡

㉠에서 $2pt=4s+2p^2$이므로 ㉡에 대입하면

$s^2=8s+4p^2,\ s^2-8s-4p^2=0$ ...... ㉢

$s=4\pm\sqrt{16+4p^2}$

s에 대한 이차방정식 ㉢의 두 근이 두 점 A, B의 y좌표이고,

$0<p<2$일 때 $16<16+4p^2<32$

이므로 이차방정식 ㉢의 두 근이 정수이기 위해서는

$16+4p^2=25$, 즉 $p^2=\frac{9}{4}$이어야 한다.

$0<p<2$이므로 $p=\frac{3}{2}$

한편, 포물선 $y^2=4px$, 즉 $y^2=6x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이고, 점 Q는 원 C 위의 점이므로 $\overline{PF}=\overline{PQ}$에서 점 Q의 x좌표는 $-\frac{3}{2}$보다 크거나 같다.

그런데 점 Q의 좌표가 $\left(-\frac{3}{2},\ 4\right)$이므로 점 Q는 원 C와 직선 $x=-\frac{3}{2}$의 접점이다.

따라서 두 점 P, Q의 y좌표는 서로 같으므로 점 P의 x좌표는

$16=6x$에서 $x=\frac{8}{3}$

답 ③

Level 3 실력 완성		본문 14쪽
1 44	**2** ③	**3** 10

1 포물선 $y^2=4px$의 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

선분 PR은 x축과 평행하고 삼각형 PFR은 정삼각형이므로 직선 RF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

이때 직선 RF의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 직선 RF의 방정식은

$y=\sqrt{3}(x-p)$

직선 RF가 포물선 $y^2=4px$와 만나는 점 Q의 x좌표는

$\{\sqrt{3}(x-p)\}^2=4px$에서

$3(x-p)^2=4px,\ 3x^2-10px+3p^2=0$

$(3x-p)(x-3p)=0$

$x=\frac{p}{3}$ 또는 $x=3p$

이고 점 Q의 x좌표는 p보다 크므로 $x=3p$이다.

포물선의 정의에 의하여 선분 QF의 길이는 점 Q와 직선 $x=-p$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{QF}=3p-(-p)=4p$

한편, 직선 PF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{2}{3}\pi$이다.

이때 직선 PF의 기울기는 $\tan\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$이므로 직선 PF의 방정식은

$y=-\sqrt{3}(x-p)$

직선 PF가 포물선 $y^2=4px$와 만나는 점 P의 x좌표는

$\{-\sqrt{3}(x-p)\}^2=4px$에서 $x=\frac{p}{3}$ 또는 $x=3p$

이고 점 P의 x좌표는 p보다 작으므로 $x=\frac{p}{3}$이다.

즉, 두 점 $\mathrm{P}\left(\frac{p}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}p\right)$, $\mathrm{Q}(3p,\ 2\sqrt{3}p)$ 사이의 거리는

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(3p-\frac{p}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}p-\frac{2\sqrt{3}}{3}p\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{64}{9}p^2+\frac{16}{3}p^2}=\frac{4\sqrt{7}}{3}p$$

삼각형 PRQ의 둘레의 길이가 $\frac{8}{3}$이므로

$$\overline{PR}+\overline{QR}+\overline{PQ}=\overline{RF}+\overline{QR}+\overline{PQ}=\overline{QF}+\overline{PQ}$$
$$=4p+\frac{4\sqrt{7}}{3}p$$
$$=\frac{12+4\sqrt{7}}{3}p=\frac{8}{3}$$

에서 $p=\frac{8}{12+4\sqrt{7}}=\frac{2}{3+\sqrt{7}}=3-\sqrt{7}$

삼각형 FRS의 넓이는 두 삼각형 FRP와 PRS의 넓이의 합과 같다.

이때 선분 PR을 밑변으로 하면 두 삼각형 FRP와 PRS의 높이의 합은 선분 SO의 길이와 같고,

$\overline{SO}=\overline{OF}\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}p$,

$\overline{PR}=2\times\left(p-\frac{p}{3}\right)=\frac{4}{3}p$

이므로

(삼각형 FRS의 넓이)

=(삼각형 FRP의 넓이)+(삼각형 PRS의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{SO}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}p\times\sqrt{3}p$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}(3-\sqrt{7})^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}(32-12\sqrt{7})$

따라서 $a=32,\ b=12$이므로

$a+b=32+12=44$

답 44

2 포물선 $y^2=-8p(x-b)$는 포물선 $y^2=-8px$를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=-8p(x-b)$의 초점의 좌표는 $(-2p+b,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=2p+b$, 꼭짓점의 좌표는 $(b,\ 0)$이다.

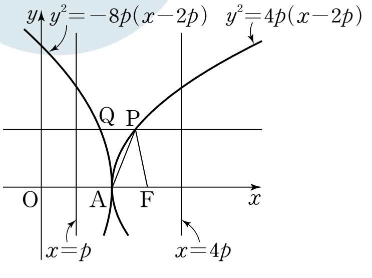
이 포물선의 초점이 원점 O이므로

$-2p+b=0,\ b=2p$

포물선 $y^2=4p(x-a)$는 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $y^2=4p(x-a)$의 초점 F의 좌표는 $(p+a,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-p+a$, 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 0)$이다.

두 포물선의 꼭짓점이 x축 위의 점 A로 일치하므로

$a=b=2p$, 즉 점 A의 좌표는 $(2p,\ 0)$이다.



점 P에서 포물선 $y^2=4p(x-2p)$의 준선 $x=p$에 이르는 거리가 선분 PF의 길이와 같으므로 점 P의 x좌표는 $p+5$이다.

또한 점 F의 좌표는 $(3p,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{OF}}=3\overline{\mathrm{PQ}}$에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=p$

그러므로 점 Q의 x좌표는 $(p+5)-p=5$이다.

두 점 P, Q의 y좌표가 서로 같으므로

$4p(p+5-2p)=-8p(5-2p)$

$p>0$이므로 양변을 $4p$로 나누면

$5-p=-2(5-2p)$

$5p=15,\ p=3$

즉, 점 P의 x좌표는 8이므로 점 P의 y좌표는

$y^2=4\times3\times(8-6)=24$에서 $y=2\sqrt{6}$

따라서 점 P의 좌표는 $(8,\ 2\sqrt{6})$이고, 점 A의 좌표는 $(6,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(8-6)^2+(2\sqrt{6}-0)^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

답 ③

3 포물선 $x^2=12(y-9)$의 초점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(0,\ 12)$이고 준선의 방정식은 $y=6$이다.

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 QH가 직선 $y=6$과 만나는 점을 H′이라 하자.

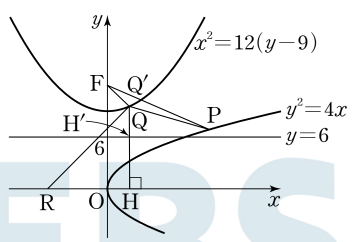
$\overline{\mathrm{HH'}}=6$이고 $\overline{\mathrm{QR}}\ge\overline{\mathrm{QH}}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}\ge\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QH'}}+6$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{QH'}}=\overline{\mathrm{FQ}}$이고, 선분 PF가 포물선 $x^2=12(y-9)$와 만나는 점을 Q′이라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QH'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$

$\ge\overline{\mathrm{PQ'}}+\overline{\mathrm{Q'F}}=\overline{\mathrm{PF}}$



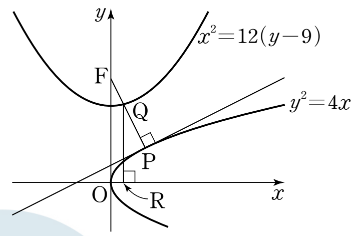
따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}\ge\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QH'}}+6$

$\ge\overline{\mathrm{PF}}+6$

이므로 선분 PF의 길이가 최소가 되는 점 P에 대하여 선분 PF와 포물선 $x^2=12(y-9)$가 만나는 점이 Q, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발이 점 R일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}$의 값이 최소가 된다.

선분 PF의 길이가 최소가 되기 위해서는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 PF와 서로 수직이어야 한다.



점 P의 좌표를 $(t^2,\ 2t)\ (t>0)$이라 하자.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$2ty=2(x+t^2)$, 즉 $y=\dfrac{x}{t}+t$

직선 PF의 기울기는 $\dfrac{2t-12}{t^2}$이고 직선 PF는 직선 $y=\dfrac{x}{t}+t$와 서로 수직이므로

$\dfrac{2t-12}{t^2}\times\dfrac{1}{t}=-1$

$t^3+2t-12=0,\ (t-2)(t^2+2t+6)=0$

$t^2+2t+6=(t+1)^2+5>0$이므로 $t=2$

따라서 점 P의 좌표가 $(4,\ 4)$일 때 선분 PF의 길이는 최소이고, 이때

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(4-0)^2+(4-12)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

이상에서

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}$

$\ge\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QH'}}+6$

(단, 등호는 두 점 R, H가 서로 같을 때 성립한다.)

$\ge\overline{\mathrm{PF}}+6$

(단, 등호는 두 점 Q, Q′이 서로 같을 때 성립한다.)

$\ge4\sqrt{5}+6$

(단, 등호는 점 P의 좌표가 $(4,\ 4)$일 때 성립한다.)

그러므로 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 $6+4\sqrt{5}$이다.

따라서 $a=6,\ b=4$이므로 $a+b=6+4=10$

답 10

참고

선분 PF의 길이의 최솟값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

점 P의 좌표를 $(t^2,\ 2t)\ (t>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}^2=(t^2-0)^2+(2t-12)^2=t^4+4t^2-48t+144$

$f(t)=t^4+4t^2-48t+144$라 하면

$f'(t)=4t^3+8t-48=4(t-2)(t^2+2t+6)$

$f'(t)=0$에서 $t=2$이고

$0<t<2$일 때 $f'(t)<0$, $t>2$일 때 $f'(t)>0$이므로

함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최소이다.

따라서 점 P의 좌표가 $(4,\ 4)$일 때 선분 PF의 길이는 최소이고, 이때

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{f(2)}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

02 타원

유제 본문 17~21쪽

1 ⑤	**2** ⑤	**3** ②	**4** ⑤	**5** ④	**6** ③

1 직선 $y=\frac{2}{3}x+2$가 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-3,\ 0)$, $(0,\ 2)$이므로 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$에 대하여 $a=3$이고 이 타원의 초점은 $\mathrm{F}(0,\ 2)$, $\mathrm{F}'(0,\ -2)$이다.
$3^2=b^2-2^2$에서 $b^2=13$, $b=\sqrt{13}$
이므로 타원의 장축의 길이는 $2b=2\sqrt{13}$이다.
따라서 타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\sqrt{13}$

답 ⑤

2 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하자.
삼각형 PF′Q가 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{FF'}}=4\sqrt{3}$이므로
$\overline{\mathrm{PF}}=4\sqrt{3}\times\tan\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4$
$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\overline{\mathrm{PF}}=2\times4=8$
타원의 정의에 의하여 타원의 장축의 길이는
$2a=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4+8=12$이므로 $a=6$
$b^2=6^2-(2\sqrt{3})^2=24$, $b=2\sqrt{6}$
따라서 타원의 단축의 길이는
$2b=2\times2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

답 ⑤

3 $x^2-2x+3y^2+12y+k=0$에서
$(x^2-2x+1)+3(y^2+4y+4)=13-k$
$\frac{(x-1)^2}{13-k}+\frac{(y+2)^2}{\frac{13-k}{3}}=1$
이 타원은 타원 $\frac{x^2}{13-k}+\frac{y^2}{\frac{13-k}{3}}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
타원 $\frac{x^2}{13-k}+\frac{y^2}{\frac{13-k}{3}}=1$의 두 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(c+1,\ -2)$, $(-c+1,\ -2)$이고 $c>0$이므로
$c+1=3$, $c=2$
이때 타원 $\frac{x^2}{13-k}+\frac{y^2}{\frac{13-k}{3}}=1$에서
$c^2=(13-k)-\frac{13-k}{3}=\frac{2}{3}(13-k)$이므로
$4=\frac{2}{3}(13-k)$
따라서 $k=7$

답 ②

4 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점을
$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면
$c^2=36-12=24$, $c=2\sqrt{6}$
이므로 타원 $\frac{(x-m)^2}{36}+\frac{(y-n)^2}{12}=1$의 두 초점의 좌표는
$(2\sqrt{6}+m,\ n)$, $(-2\sqrt{6}+m,\ n)$
이때 한 초점이 y축 위에 있고 $m>0$이므로
$-2\sqrt{6}+m=0$, $m=2\sqrt{6}$
또한 타원 $\frac{(x-2\sqrt{6})^2}{36}+\frac{(y-n)^2}{12}=1$이 원점을 지나므로
$\frac{(-2\sqrt{6})^2}{36}+\frac{(-n)^2}{12}=1$, $n^2=4$
$n>0$이므로 $n=2$
두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)\ (a\neq0,\ b\neq0)$이라 하면
$\frac{(a-2\sqrt{6})^2}{36}+\frac{(0-2)^2}{12}=1$에서 $(a-2\sqrt{6})^2=24$, $a=4\sqrt{6}$
$\frac{(0-2\sqrt{6})^2}{36}+\frac{(b-2)^2}{12}=1$에서 $(b-2)^2=4$, $b=4$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\sqrt{6}\times4=8\sqrt{6}$

답 ⑤

5 $c^2=12-8=4$이고 $c>0$이므로 $c=2$
타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$과 직선 $x=2$가 제1사분면에서 만나는 점 P의 좌표를 $(2,\ k)\ (k>0)$이라 하면
$\frac{2^2}{12}+\frac{k^2}{8}=1$, $k^2=\frac{16}{3}$
$k=\frac{4\sqrt{3}}{3}$
따라서 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$\dfrac{2x}{12}+\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}y}{8}=1$, 즉 $x+\sqrt{3}y-6=0$

이므로 점 $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{|-2-6|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=4$

답 ④

6 타원 $\dfrac{x^2}{24k^2}+\dfrac{y^2}{18k^2}=1$의 한 초점 F의 좌표를

$(c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=24k^2-18k^2=6k^2,\ c=\sqrt{6}k$

타원 $\dfrac{x^2}{24k^2}+\dfrac{y^2}{18k^2}=1$이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\dfrac{x^2}{24k^2}=1$에서 $x=\pm2\sqrt{6}k$

이므로 점 A의 좌표는 $(2\sqrt{6}k,\ 0)$이다.

기울기가 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고 타원 $\dfrac{x^2}{24k^2}+\dfrac{y^2}{18k^2}=1$과 제1사분면

위의 한 점에서 접하는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{\dfrac{3}{4}\times24k^2+18k^2}$, 즉 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+6k$

이므로 점 B의 좌표는 $(0,\ 6k)$이다.

삼각형 ABF의 넓이가 $6\sqrt{6}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{6}k-\sqrt{6}k)\times6k=3\sqrt{6}k^2=6\sqrt{6}$

$k^2=2$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{2}$

답 ③

Level 1 **기초 연습** 본문 22~23쪽

1 ①	**2** ①	**3** ④	**4** ③	**5** ②	**6** ④
7 ③	**8** ④				

1 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면 장축의 길이가 8이므로

$2a=8,\ a=4$

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 점 $\mathrm{P}(2,\ \sqrt{6})$을 지나므로

$\dfrac{2^2}{16}+\dfrac{(\sqrt{6})^2}{b^2}=1,\ b^2=8,\ b=2\sqrt{2}$

따라서 타원의 단축의 길이는

$2b=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

답 ①

2 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=t\ (t>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}=8-t$

$\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$이므로 $t<8-t$에서 $0<t<4$

타원의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각

$(c,\ 0),\ (-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=16-4=12,\ c=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{FF'}}=4\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 FPF′에서 피타고라스 정리에 의하여

$(4\sqrt{3})^2=(8-t)^2+t^2$

$2t^2-16t+64=48$

$t^2-8t+8=0$

$0<t<4$이므로 $t=4-2\sqrt{2}$, 즉 $\overline{\mathrm{PF}}=4-2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PF'}}=8-(4-2\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})=8$

답 ①

3 $c^2=18-6=12$이고 $c>0$이므로 $c=2\sqrt{3}$

즉, $\overline{\mathrm{OF}}=c=2\sqrt{3}$

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6\sqrt{2}$

두 점 P, Q는 원점 O에 대하여 서로 대칭이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}$

삼각형 PFQ의 둘레의 길이가 $10\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PQ}}&=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+(\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}})\\&=6\sqrt{2}+2\overline{\mathrm{OP}}=10\sqrt{2}\end{aligned}$$

에서 $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

답 ④

4 타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$의 두 초점의 좌표를

$(c,\ 0),\ (-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=18-2=16,\ c=4$

타원 $\dfrac{(x-m)^2}{18}+\dfrac{(y-n)^2}{2}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 타원 $\dfrac{(x-m)^2}{18}+\dfrac{(y-n)^2}{2}=1$의 두 초점의 좌표는 $(4+m,\ n),\ (-4+m,\ n)$이다.

타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 위의 점의 y좌표는 $\sqrt{2}$ 이하이므로

$n=1$

점 $(4+m,\ 1)$이 타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 위의 점이라 하면

$\dfrac{(4+m)^2}{18}+\dfrac{1^2}{2}=1$에서 $(m+4)^2=9$

이므로 이 식을 만족시키는 자연수 m은 없다.

점 $(-4+m,\ 1)$이 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이라 하면

$\frac{(-4+m)^2}{18}+\frac{1^2}{2}=1$에서 $(-4+m)^2=9$이므로

$m=1$ 또는 $m=7$

$m\neq n$이므로 $m=7$

따라서 $m+n=7+1=8$

답 ③

5 $\frac{(x-k)^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$에 $y=x-4$를 대입하여 정리하면

$2(x-k)^2+(x-4)^2=4$

$3x^2-2(2k+4)x+2k^2+12=0$ …… ㉠

직선과 타원이 서로 다른 두 점에서 만나므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k+4)^2-3(2k^2+12)>0$

$-2k^2+16k-20>0,\ k^2-8k+10<0$

$4-\sqrt{6}<k<4+\sqrt{6}$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$2+3+4+5+6=20$

답 ②

6 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$에 접하고 기울기가 m인 두 직선 중 y절편이 양수인 직선 l의 방정식은

$y=mx+\sqrt{10m^2+5}$

직선 l이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(-\frac{\sqrt{10m^2+5}}{m},\ 0\right),\ (0,\ \sqrt{10m^2+5})$

이고 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{45}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{\sqrt{10m^2+5}}{m}\right|\times\sqrt{10m^2+5}=\frac{10m^2+5}{2m}=\frac{45}{4}$

$2(2m^2+1)=9m,\ 4m^2-9m+2=0$

$(4m-1)(m-2)=0$

$m>1$이므로 $m=2$

답 ④

7 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$은 x축에 대하여 대칭이므로 두 점 P, Q도 x축에 대하여 서로 대칭이다.

이때 $\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle\mathrm{PAO}=\frac{\pi}{6}$

직선 AP의 기울기는 $\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 직선 AP의 방정식은

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times16+3}$

즉, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{5\sqrt{3}}{3}$

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{16}+\frac{y_1y}{3}=1$, 즉 $y=-\frac{3x_1}{16y_1}x+\frac{3}{y_1}$

이고 이 직선은 직선 AP와 일치하므로

$\frac{3}{y_1}=\frac{5\sqrt{3}}{3},\ y_1=\frac{3\sqrt{3}}{5}$

두 점 P, Q는 x축에 대하여 서로 대칭이므로 선분 PQ의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}=2y_1=2\times\frac{3\sqrt{3}}{5}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

답 ③

8 직선 l과 타원 $4x^2+y^2=1$이 접하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하자.

점 P에서의 접선 l의 방정식은

$4ax+by=1$

직선 l이 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나므로

$4a=1,\ a=\frac{1}{4}$

직선 l의 기울기가 양수이므로 점 P는 타원 $4x^2+y^2=1$ 위에 있는 제4사분면 위의 점이다.

즉, $b<0$이므로

$4a^2+b^2=1$에서

$4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+b^2=1,\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

그러므로 직선 l의 방정식은

$x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$, 즉 $2x-\sqrt{3}y-2=0$

타원의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(0,\ c),\ (0,\ -c)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\ c=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 점 $\mathrm{F}\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{\left|-\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{2^2+(-\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

답 ④

Level **2** **기본 연습** 본문 24~25쪽

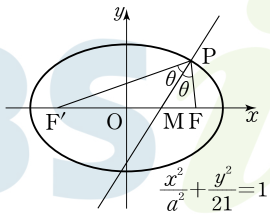
1 ⑤ **2** ④ **3** ④ **4** ② **5** ② **6** 27 **7** ②

1 선분 OF의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}$이므로

$\overline{\mathrm{MF}}:\overline{\mathrm{MF'}}=1:3$

$\overline{\mathrm{PF}}=t\ (t>0)$,

$\angle\mathrm{FPM}=\angle\mathrm{MPF'}=\theta$라 하면 삼각형 PMF에서 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{\mathrm{MF}}}{\sin\theta}=\frac{t}{\sin(\angle\mathrm{PMF})}$$

삼각형 PF′M에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{MF'}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\sin(\pi-\angle\mathrm{PMF})}=\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\sin(\angle\mathrm{PMF})}$$

이때 $\overline{\mathrm{MF}}:\overline{\mathrm{MF'}}=1:3$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=3t$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=t+3t=2a$이므로 $a=2t$ ⋯⋯ ㉠

$c^2=a^2-21$이므로 ㉠을 대입하면

$c^2=4t^2-21$ ⋯⋯ ㉡

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로

$3t=2c$에서 $c=\dfrac{3}{2}t$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{9}{4}t^2=4t^2-21,\ t^2=12$

$t>0$이므로 $t=2\sqrt{3}$

따라서 $a=2t=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

답 ⑤

2 $c^2=25-10=15$이므로 두 점 F, F′의 좌표는 각각 $(\sqrt{15},\ 0)$, $(-\sqrt{15},\ 0)$이다.

점 F는 선분 PQ를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=3t$, $\overline{\mathrm{FQ}}=2t\ (t>0)$이라 하자.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=3t+\overline{\mathrm{PF'}}=10$, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2t+\overline{\mathrm{QF'}}=10$

이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=10-3t$, $\overline{\mathrm{QF'}}=10-2t$

$\angle\mathrm{FPF'}=\theta$라 하면 삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(10-3t)^2+(3t)^2-(2\sqrt{15})^2}{2\times(10-3t)\times3t}$$

$$=\frac{18t^2-60t+40}{6t(10-3t)}$$

$$=\frac{9t^2-30t+20}{3t(10-3t)}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

삼각형 PF′Q에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(10-3t)^2+(5t)^2-(10-2t)^2}{2\times(10-3t)\times5t}$$

$$=\frac{30t^2-20t}{10t(10-3t)}$$

$$=\frac{3t^2-2t}{t(10-3t)}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{9t^2-30t+20}{3t(10-3t)}=\frac{3t^2-2t}{t(10-3t)}$$

$t(10-3t)\neq0$이므로

$9t^2-30t+20=9t^2-6t$

$24t=20$

$t=\dfrac{5}{6}$

한편, 삼각형 PFR과 삼각형 PF′Q는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{QF'}}$ ⋯⋯ ㉢

이때

$\overline{\mathrm{PF}}=3t=\dfrac{5}{2}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=10-3t=\dfrac{15}{2}$, $\overline{\mathrm{QF'}}=10-2t=\dfrac{25}{3}$

이므로 ㉢에서

$\dfrac{5}{2}:\overline{\mathrm{RF}}=\dfrac{15}{2}:\dfrac{25}{3}$

$\overline{\mathrm{RF}}\times\dfrac{15}{2}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{25}{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{RF}}=\dfrac{25}{9}$

답 ④

3 두 점 P, Q는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=2a$

삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 28이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}}&=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}})+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}}\\&=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})+(\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}})\\&=2a+2a\\&=4a=28\end{aligned}$$

에서 $a=7$

한편, $\overline{\mathrm{FF'}}=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}$, $\angle\mathrm{FAF'}=\dfrac{\pi}{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}=8$

$\overline{\mathrm{PF}}=t\ (t>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=8-t$, $\overline{\mathrm{PF'}}=14-t$이므로

직각삼각형 AF′P에서

$(14-t)^2=(8-t)^2+8^2$

$196-28t+t^2=64-16t+t^2+64$

$12t=68$

$t=\frac{17}{3}$

$\overline{\mathrm{QF}}=s\ (s>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{QA}}=8+s$, $\overline{\mathrm{QF'}}=14-s$이므로

직각삼각형 AF′Q에서

$(14-s)^2=(8+s)^2+8^2$

$196-28s+s^2=64+16s+s^2+64$

$44s=68$

$s=\frac{17}{11}$

따라서 삼각형 P′QF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\overline{\mathrm{AP'}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\times\frac{17}{11}\times\frac{7}{3}=\frac{119}{66}$$

답 ④

4 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$의 두 초점의 좌표를

$(0,\ c)$, $(0,\ -c)\ (c>0)$이라 하면

$c^2=2-1=1$, $c=1$

타원 E의 초점의 좌표는 $(m,\ 1+n)$, $(m,\ -1+n)$이고

한 초점이 x축 위에 있으므로

$-1+n=0$, $n=1$

타원 E의 방정식은 $(x-m)^2+\frac{(y-1)^2}{2}=1$이므로

$y=-\frac{1}{2}x+2$를 대입하면

$$(x-m)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2}{2}=1$$

$(8x^2-16mx+8m^2)+(x^2-4x+4)=8$

$9x^2-2(8m+2)x+8m^2-4=0$ …… ㉠

타원 E와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(8m+2)^2-9(8m^2-4)>0$

$-8m^2+32m+40>0$

$m^2-4m-5<0$

$(m-5)(m+1)<0$

$-1<m<5$

따라서 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n의 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$, $(4,\ 1)$

이므로 $m+n$의 최댓값은

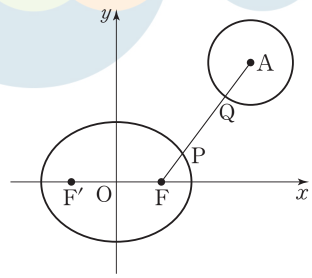
$4+1=5$

답 ②

5 $c^2=25-16=9$에서 $c=3$

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점의 y좌표는 4 이하이고,

$k>1$에서 원 $(x-9)^2+(y-8)^2=\frac{16}{k}$ 위의 점의 y좌표는 4보다 크다. 그러므로 이 타원과 원은 서로 만나지 않는다.



타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}&=(10-\overline{\mathrm{PF}})-\overline{\mathrm{PQ}}\\&=10-(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}})\\&\le 10-\overline{\mathrm{FQ}}\end{aligned}$$

원 $(x-9)^2+(y-8)^2=\frac{16}{k}$의 중심을 A라 하면 점 A의 좌표는 $(9,\ 8)$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AF}}-\frac{4}{\sqrt{k}}=\sqrt{(9-3)^2+8^2}-\frac{4}{\sqrt{k}}=10-\frac{4}{\sqrt{k}}$

그러므로 점 Q가 선분 AF와 원 $(x-9)^2+(y-8)^2=\frac{16}{k}$의 교점이고 점 P가 선분 QF와 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 교점일 때 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 값이 최대가 되고, 이때 최댓값은

$10-\overline{\mathrm{FQ}}=10-\left(10-\frac{4}{\sqrt{k}}\right)=\frac{4}{\sqrt{k}}$

따라서 $\frac{4}{\sqrt{k}}=2\sqrt{2}$에서 $k=2$

답 ②

6 삼각형 OBP의 외접원의 반지름의 길이가 선분 OP의 길이와 같으므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin(\angle\mathrm{OBP})}=2\overline{\mathrm{OP}}$

$\sin(\angle\mathrm{OBP})=\frac{1}{2}$

즉, $\angle\mathrm{OBP}=\frac{\pi}{6}$이므로 직각삼각형 OBA에서 $\angle\mathrm{BAO}=\frac{\pi}{3}$

따라서 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 직선 AB의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 중 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3a^2+b^2}$

이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3a^2+b^2}$이고,

$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\sqrt{3}$에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{\mathrm{OB}}$

삼각형 OBA의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{\mathrm{OB}}^2=\frac{\sqrt{3}}{6}(3a^2+b^2)=12\sqrt{3}$

$3a^2+b^2=72$ ...... ㉠

한편, $\overline{\mathrm{FF'}}=2c=2\sqrt{a^2-b^2}$이고 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로

$\sqrt{3a^2+b^2}=2\sqrt{a^2-b^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=5b^2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=\frac{45}{2}$, $b^2=\frac{9}{2}$

따라서 $a^2+b^2=\frac{45}{2}+\frac{9}{2}=27$

답 27

7 점 A의 y좌표가 타원 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$의 한 꼭짓점 $(0, 4)$의 y좌표와 같으므로 점 A에서 타원에 그은 한 접선의 방정식은 $y=4$이고, 이때 접점 B의 좌표는 $(0, 4)$이다.

한편, 점 C의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$\frac{{x_1}^2}{24}+\frac{{y_1}^2}{16}=1$, $2{x_1}^2+3{y_1}^2=48$ ...... ㉠

타원 위의 점 C에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{24}+\frac{y_1y}{16}=1$

이고, 이 직선이 점 A$(6, 4)$를 지나므로

$\frac{6x_1}{24}+\frac{4y_1}{16}=1$, $x_1+y_1=4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=\frac{24}{5}$, $y_1=-\frac{4}{5}$

즉, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{24}{5}, -\frac{4}{5}\right)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times\left\{4-\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{24}{5}=\frac{72}{5}$

답 ②

Level **3** **실력 완성** 본문 26쪽

1 19 **2** ② **3** 63

1 두 점 A, P_n은 점 Q_n에서 한 원에 그은 두 접선의 접점이므로 $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{A}}$이고,

$\overline{\mathrm{OQ}_n}+\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{A}}=\overline{\mathrm{OQ}_n}+\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{OP}_n}=4\sqrt{3}$

이므로 점 Q_n은 두 점 O, A$(2\sqrt{3}, 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 $4\sqrt{3}$인 타원 위의 점이다.

이 타원의 중심은 선분 OA의 중점 $(\sqrt{3}, 0)$이고, 중심과 초점 A 사이의 거리는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$이므로 단축의 길이는

$2\times\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=6$

그러므로 이 타원의 방정식은 $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$이다.

한편, 두 점 B, P_n은 점 R_n에서 한 원에 그은 두 접선의 접점이므로 $\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{B}}$이고,

$\overline{\mathrm{OR}_n}+\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{OR}_n}+\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{OP}_n}=4\sqrt{3}$

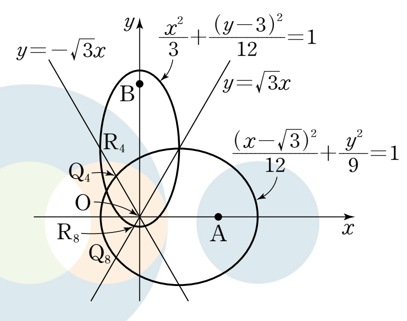
이므로 점 R_n은 두 점 O, B$(0, 6)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 $4\sqrt{3}$인 타원 위의 점이다.

이 타원의 중심은 선분 OB의 중점 $(0, 3)$이고, 중심과 초점 B 사이의 거리는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=3$이므로 단축의 길이는

$2\times\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=2\sqrt{3}$

그러므로 이 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{12}=1$이다.

즉, 점 Q_n은 타원 $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점이고 점 R_n은 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{12}=1$ 위의 점이다.



타원 $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$은 x축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_4}=\overline{\mathrm{OQ}_8}$

타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{12}=1$의 꼭짓점 중 제2사분면에 있는 점의 좌표는 $(-\sqrt{3}, 3)$이고 이 점은 직선 OP_4 위의 점이므로 점 R_4의 좌표는 $(-\sqrt{3}, 3)$이다.

즉, $\overline{\mathrm{OR_4}}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$

그러므로

$\overline{\mathrm{Q_4R_4}}+\overline{\mathrm{Q_8R_8}}=(\overline{\mathrm{OR_4}}-\overline{\mathrm{OQ_4}})+(\overline{\mathrm{OQ_8}}-\overline{\mathrm{OR_8}})$

$=\overline{\mathrm{OR_4}}-\overline{\mathrm{OR_8}}$

$=2\sqrt{3}-\overline{\mathrm{OR_8}}$

한편, 삼각형 $\mathrm{OBR_8}$에서 $\overline{\mathrm{OR_8}}=t$라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{R_8B}}=4\sqrt{3}-t$이고, $\overline{\mathrm{OB}}=6$, $\angle\mathrm{BOR_8}=\frac{5}{6}\pi$이므로

코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{3}-t)^2=t^2+6^2-2\times t\times 6\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$48-8\sqrt{3}t+t^2=t^2+36+6\sqrt{3}t$

$14\sqrt{3}t=12$, $t=\frac{2\sqrt{3}}{7}$

$\overline{\mathrm{Q_4R_4}}+\overline{\mathrm{Q_8R_8}}=2\sqrt{3}-\overline{\mathrm{OR_8}}$

$=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{7}$

$=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

따라서 $p=7$, $q=12$이므로

$p+q=7+12=19$

답 19

2 장축의 길이가 $7\sqrt{5}$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{RF'}}=t\ (t>0)$, $\overline{\mathrm{QF'}}=s\ (s>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{RF}}=7\sqrt{5}-t$, $\overline{\mathrm{FQ}}=7\sqrt{5}-s$

$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로 $7\sqrt{5}-s=t+s$에서

$t+2s=7\sqrt{5}$ ...... ㉠

$\angle\mathrm{QFR}=\angle\mathrm{PFR}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{QFR})=\cos(\angle\mathrm{PFR})=\frac{2}{5}$

삼각형 QFR은 $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 이등변삼각형이므로

$\cos(\angle\mathrm{QFR})=\dfrac{\frac{7\sqrt{5}-t}{2}}{7\sqrt{5}-s}=\dfrac{7\sqrt{5}-t}{2(7\sqrt{5}-s)}=\frac{2}{5}$

$35\sqrt{5}-5t=28\sqrt{5}-4s$

$5t-4s=7\sqrt{5}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$t=3\sqrt{5}$, $s=2\sqrt{5}$

$\angle\mathrm{QRF}=\angle\mathrm{QFR}$이고 $\angle\mathrm{QFR}=\angle\mathrm{PFR}$이므로

$\angle\mathrm{QRF}=\angle\mathrm{PFR}$

즉, 두 직선 QR, FP는 서로 평행하다.

이때 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF'}}=2\sqrt{5}$

삼각형 PRF에서

$\overline{\mathrm{RF}}=7\sqrt{5}-3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{RF}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{RF}}\times\cos(\angle\mathrm{PFR})$

$=(2\sqrt{5})^2+(4\sqrt{5})^2-2\times 2\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}\times\frac{2}{5}$

$=20+80-32=68$

따라서 $\overline{\mathrm{PR}}=2\sqrt{17}$

답 ②

3 직선 l의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 직선 l은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하므로 직선 l의 방정식은

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ...... ㉠

직선 l은 포물선 $y^2=12x$에도 접하므로 직선 l의 방정식은

$y=mx+\frac{3}{m}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{a^2m^2+b^2}=\frac{3}{m}$

양변을 제곱하면

$a^2m^2+b^2=\frac{9}{m^2}$

$a^2m^4+b^2m^2-9=0$ ...... ㉢

점 F(3, 0)은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점이므로

$a^2-b^2=9$

$b^2=a^2-9$를 ㉢에 대입하면

$a^2m^4+(a^2-9)m^2-9=0$

$(a^2m^2-9)(m^2+1)=0$

$m^2+1>0$이므로 $a^2m^2=9$, $m^2=\frac{9}{a^2}$

$m>0$, $a>0$이므로 $m=\frac{3}{a}$

그러므로 직선 l의 방정식은 ㉡에서

$y=\frac{3}{a}x+a$

한편, 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이고, 직선 l의 방정식 $y=\frac{3}{a}x+a$에서 $-\frac{3}{a^2}x+\frac{1}{a}y=1$이므로

$\frac{x_1}{a^2}=-\frac{3}{a^2}$, $\frac{y_1}{b^2}=\frac{1}{a}$에서

$x_1=-3$, $y_1=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-9}{a}$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\dfrac{a^2-9}{a}$이고 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로

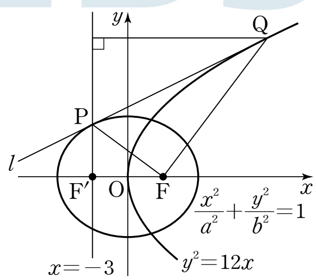
$\overline{\mathrm{PF}}=2a-\dfrac{a^2-9}{a}=\dfrac{a^2+9}{a}$

직선 $y=\dfrac{3}{a}x+a$가 포물선 $y^2=12x$에 접하므로

$\left(\dfrac{3}{a}x+a\right)^2=12x$에서

$\dfrac{9}{a^2}x^2-6x+a^2=0$

$\left(\dfrac{3}{a}x-a\right)^2=0$



그러므로 점 Q의 x좌표는 $\dfrac{a^2}{3}$이고, 포물선 $y^2=12x$의 준선의 방정식은 $x=-3$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{a^2}{3}-(-3)=\dfrac{a^2+9}{3}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\dfrac{\dfrac{a^2+9}{3}}{\dfrac{a^2+9}{a}}=\dfrac{a}{3}=2$이므로 $a=6$

따라서 $b^2=a^2-9=36-9=27$이므로

$a^2+b^2=36+27=63$

답 63

03 쌍곡선

유제 본문 29~33쪽

1 36 **2** ② **3** ⑤ **4** ① **5** ② **6** ④

1 $c^2=12+15=27$이고 $c>0$이므로 $c=3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=6\sqrt{3}$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{15}=1$의 주축의 길이는 $4\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6\sqrt{3}-\overline{\mathrm{PF}}=4\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{PF}}=6\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=36$

답 36

2 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{FF'}}=2c$이고 삼각형 ABF′이 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=2c\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$,

$\overline{\mathrm{AF'}}=2\times\overline{\mathrm{AF}}=2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}c$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}c-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c=2b$, $c=\sqrt{3}b$

$a^2=c^2-b^2=3b^2-b^2=2b^2$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$은 점 $(2,\ 4\sqrt{2})$를 지나므로

$\dfrac{4}{2b^2}-\dfrac{32}{b^2}=-1$, $b^2=30$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{30}$

$a^2=2b^2=60$이고 $a>0$이므로 $a=2\sqrt{15}$

따라서 $ab=2\sqrt{15}\times\sqrt{30}=30\sqrt{2}$

답 ②

3 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 두 점근선의 기울기의 곱이 -2이므로

$\dfrac{b}{a}\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-\dfrac{b^2}{a^2}=-2$, $b^2=2a^2$

쌍곡선의 두 초점을 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}$이고 두 초점 사이의 거리가 6이므로

$2c=2\sqrt{a^2+b^2}=6$, $a^2+b^2=9$

$a^2+b^2=a^2+2a^2=9$이므로 $a^2=3$

$b^2=2a^2=6$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{6}$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2b=2\sqrt{6}$

답 ⑤

4 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표는 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이고, 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표는 $(5+m,\ 2)$, $(-5+m,\ 2)$이다.

직선 $y=nx$가 쌍곡선 $\frac{(x-m)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$의 한 초점을 지나면서 이 쌍곡선과 오직 한 점에서 만나기 위해서는 직선 $y=nx$는 이 쌍곡선의 점근선과 평행해야 한다.

이때 $n>0$이므로 $n=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}=\frac{1}{2}$

$m>0$이므로 직선 $y=\frac{1}{2}x$는 점 $(-5+m,\ 2)$를 지난다.

즉, $2=\frac{1}{2}(-5+m)$에서 $m=9$

따라서 $m+n=9+\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$

답 ①

참고

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$의 한 점근선 $y=\frac{b}{a}x$와 평행한 직선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x+k\ (k\neq 0)$

이 식을 쌍곡선의 방정식에 대입하면

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{a}x+k\right)^2=1$

양변에 a^2b^2을 곱하면

$b^2x^2-a^2\left(\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{2bk}{a}x+k^2\right)=a^2b^2$

$2abkx+a^2k^2+a^2b^2=0$

$2bkx+ak^2+ab^2=0$

이 일차방정식의 실근이 쌍곡선의 점근선과 평행한 직선과 쌍곡선의 교점의 x좌표이므로 쌍곡선의 점근선과 평행한 직선은 쌍곡선과 오직 한 점에서 만난다.

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{18}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2\sqrt{3},\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2\sqrt{3}}{12}x-\frac{6}{18}y=-1$, 즉 $\frac{\sqrt{3}}{6}x-\frac{y}{3}=-1$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-2\sqrt{3},\ 0)$, $(0,\ 3)$이므로 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$

답 ②

6 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)\ (x_1>0)$이라 하면 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{20}-\frac{y_1y}{16}=1$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ k)$를 지나므로

$-\frac{y_1k}{16}=1$, $y_1=-\frac{16}{k}$

선분 AP의 중점이 x축 위에 있으므로 선분 AP의 중점의 y좌표는 0이다.

즉, $k+\left(-\frac{16}{k}\right)=0$에서 $k^2=16$이고, $k>0$이므로 $k=4$

이때 $y_1=-\frac{16}{4}=-4$이고

$\frac{{x_1}^2}{20}-\frac{(-4)^2}{16}=1$에서 ${x_1}^2=40$

$x_1>0$이므로 $x_1=2\sqrt{10}$

선분 AP를 지름으로 하는 원의 중심은 x축 위에 있으므로 이 원과 쌍곡선이 만나는 두 점 P, Q는 x축에 대하여 서로 대칭이다.

이때 점 P의 좌표가 $(2\sqrt{10},\ -4)$이므로 점 Q의 좌표는 $(2\sqrt{10},\ 4)$이다.

삼각형 APQ에서 점 Q는 선분 AP를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 삼각형 APQ는 $\angle\mathrm{AQP}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고 두 점 A, Q의 y좌표가 같다.

따라서 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 8=8\sqrt{10}$

답 ④

참고

원의 중심의 좌표는 $(\sqrt{10},\ 0)$이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{10}-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{26}$이다.

원의 중심과 쌍곡선의 한 꼭짓점 $(-2\sqrt{5},\ 0)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}+2\sqrt{5}>\sqrt{26}$이므로 원과 쌍곡선은 $x<0$에서 만나지 않는다.

Level 1 기초 연습 본문 34~35쪽

1 ①	2 ④	3 ①	4 ③	5 ④	6 ③
7 ①	8 ③	9 ②			

1 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=4\sqrt{2}$이므로

$2a=4\sqrt{2},\ a=2\sqrt{2}$

쌍곡선의 두 초점이 $F(4\sqrt{2},\ 0),\ F'(-4\sqrt{2},\ 0)$이므로

$(4\sqrt{2})^2=a^2+b^2$

$32=8+b^2,\ b^2=24$

$b>0$이므로 $b=2\sqrt{6}$

따라서 쌍곡선의 두 점근선의 방정식은

$y=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}x,\ y=-\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}x$, 즉 $y=\sqrt{3}x,\ y=-\sqrt{3}x$

이므로 두 점근선의 기울기의 곱은

$\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})=-3$

답 ①

2 $\overline{QF'}=12$이고 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{QF'}-\overline{QF}=2a$이므로

$\overline{QF}=12-2a$

$\overline{PF}=t\ (t>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$이므로

$\overline{PF'}=2a+t$

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=t+12-2a$이므로

$\overline{PF'}=\overline{PQ}$에서 $2a+t=t+12-2a$

$a=3$

쌍곡선의 두 초점이 $F(2\sqrt{6},\ 0),\ F'(-2\sqrt{6},\ 0)$이므로

$(2\sqrt{6})^2=a^2+b^2$

$24=9+b^2,\ b^2=15$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{15}$

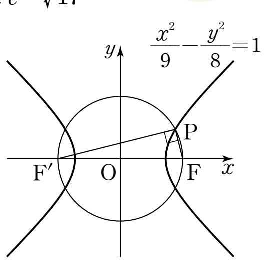
따라서 $ab=3\times\sqrt{15}=3\sqrt{15}$

답 ④

3 $c^2=9+8=17$이고 $c>0$이므로 $c=\sqrt{17}$

원 $x^2+y^2=17$은 선분 FF′을 지름으로 하는 원이고 점 P는 이 원 위에 있으므로

$\angle FPF'=\frac{\pi}{2}$



$\overline{PF}=t\ (t>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6,\ \overline{PF'}=t+6$

직각삼각형 FPF′에서

$t^2+(t+6)^2=(2\sqrt{17})^2$

$2t^2+12t+36=68,\ t^2+6t-16=0$

$(t-2)(t+8)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

따라서 $\overline{PF}=2,\ \overline{PF'}=8$이므로 삼각형 FPF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times8=8$

답 ①

4 두 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{3}x,\ y=-\sqrt{3}x$이고 쌍곡선 위의 점 중 x좌표가 1인 점의 y좌표가 $\sqrt{3}$보다 크므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$이라 하자.

두 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{3}x,\ y=-\sqrt{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}a$

점 $(1,\ 3)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=-1$ 위의 점이므로

$\frac{1}{a^2}-\frac{9}{3a^2}=-1,\ \frac{2}{a^2}=1,\ a^2=2$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

$b=\sqrt{3}a=\sqrt{6}$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는 $2b=2\sqrt{6}$

답 ③

5 $5x^2-4y^2+10x+16y-31=0$에서

$5(x+1)^2-4(y-2)^2-20=0$

$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$이므로 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표는 $(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(2,\ 2),\ (-4,\ 2)$이다.

따라서

$\overline{OF}\times\overline{OF'}=\sqrt{2^2+2^2}\times\sqrt{(-4)^2+2^2}$
$=2\sqrt{2}\times2\sqrt{5}=4\sqrt{10}$

답 ④

6 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$의 점근선의 방정식은

$y=2x,\ y=-2x$이다.

자연수 m에 대하여 직선 $y=mx$가 쌍곡선과 만나기 위해서는 $m>2$이어야 하므로 자연수 m의 최솟값은 $c=3$

$y=3x+k$를 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$에 대입하면

$x^2-4(3x+k)^2=4$

$35x^2+24kx+4k^2+4=0$ …… ㉠

직선 $y=3x+k$와 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$이 서로 만나지 않으려면 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(12k)^2-35\times(4k^2+4)<0$

$4k^2-140<0$, $k^2<35$

따라서 정수 k의 값은 -5, -4, -3, $\cdots$, 5이고, 그 개수는 11이다.

답 ③

7 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 기울기가 m인 두 직선 중 y절편이 양수인 직선 l의 방정식은

$y=mx+\sqrt{2m^2-3}$

원점 O와 직선 $y=mx+\sqrt{2m^2-3}$, 즉

$mx-y+\sqrt{2m^2-3}=0$ 사이의 거리는 1이므로

$\frac{\sqrt{2m^2-3}}{\sqrt{m^2+1}}=1$에서 $2m^2-3=m^2+1$, $m^2=4$

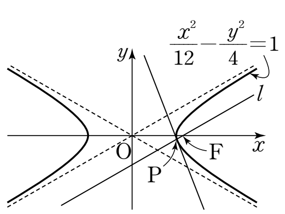
$m>0$이므로 $m=2$

답 ①

8 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점 F의 좌표를 $(c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=12+4=16$, $c=4$

점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선이 쌍곡선과 한 점에서만 만나기 위해서는 쌍곡선의 점근선과 평행해야 한다. 이 직선을 l이라 하면 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식이 $y=\frac{2}{2\sqrt{3}}x$, 즉 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로 직선 l의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$이다.



직선 l과 쌍곡선이 만나는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\frac{a^2}{12}-\frac{b^2}{4}=1$ …… ㉠

$b=\frac{\sqrt{3}}{3}(a-4)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{a^2}{12}-\frac{(a-4)^2}{12}=1$에서 $8a=28$, $a=\frac{7}{2}$

$b=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{7}{2}-4\right)=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{7}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{7}{24}x+\frac{\sqrt{3}}{24}y=1$

따라서 이 직선의 y절편은 $\frac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$

답 ③

9 $c^2=8+8=16$이고 $c>0$이므로 $c=4$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ s)$ $(t>0,\ s>0)$이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{t}{8}x-\frac{s}{8}y=1$

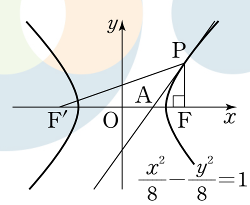
이 직선이 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 지나므로

$\frac{t}{4}=1$, $t=4$

점 $\mathrm{P}(4,\ s)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4^2}{8}-\frac{s^2}{8}=1$에서 $\frac{s^2}{8}=1$

$s>0$이므로 $s=2\sqrt{2}$, 즉 $\mathrm{P}(4,\ 2\sqrt{2})$



따라서 삼각형 FPF′은 $\angle\mathrm{F'FP}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+(2\sqrt{2}-0)^2}=6\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{2}$이므로

$\cos(\angle \mathrm{FPF'}) = \dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{PF'}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}$

답 ②

Level **2** **기본 연습** 본문 36~37쪽

1 ③ **2** ① **3** ⑤ **4** ③ **5** 12 **6** ③

1 쌍곡선의 주축의 길이를 $2a\ (a>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PO}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$이다.

$\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$\overline{\mathrm{PO}}-\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

즉, $2a=2\sqrt{6}$에서 $a=\sqrt{6}$

쌍곡선의 두 초점이 O, F이므로 점 F의 좌표를

$(2c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{(x-c)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b^2=c^2-a^2$)

$\dfrac{(x-c)^2}{6}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

이 쌍곡선이 점 $\left(0,\ \dfrac{7\sqrt{6}}{2}\right)$을 지나므로

$\dfrac{c^2}{6}-\dfrac{(7\sqrt{6})^2}{4b^2}=1$

이때 $c^2=6+b^2$이므로

$\left(1+\dfrac{b^2}{6}\right)-\dfrac{49\times 6}{4b^2}=1$

$b^4=\dfrac{49\times 36}{4},\ b^2=21$

$c^2=6+21=27$에서 $c=3\sqrt{3}$

이므로 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{(x-3\sqrt{3})^2}{6}-\dfrac{y^2}{21}=1$

두 점근선의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}(x-3\sqrt{3}),\ y=-\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}(x-3\sqrt{3}),$

즉 $y=\dfrac{\sqrt{14}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{42}}{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{14}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{42}}{2}$

이므로 두 점근선은 점 $(3\sqrt{3},\ 0)$에서 만나고, 두 점근선의 y절편은 각각 $-\dfrac{3\sqrt{42}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{42}}{2}$이다.

따라서 두 점근선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left\{\dfrac{3\sqrt{42}}{2}-\left(-\dfrac{3\sqrt{42}}{2}\right)\right\}\times 3\sqrt{3}=\dfrac{27\sqrt{14}}{2}$

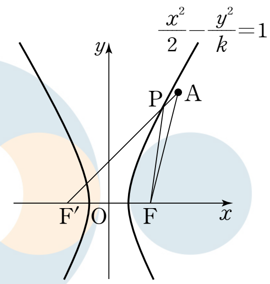
답 ③

2 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}+(\overline{\mathrm{PF'}}-2\sqrt{2})$

$=(\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF'}})-2\sqrt{2}$

$\geq\overline{\mathrm{AF'}}-2\sqrt{2}$



이때 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값이 $6\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{AF'}}=8\sqrt{2}$

즉, $\sqrt{(-c-5)^2+(0-8)^2}=8\sqrt{2}$이므로

$c^2+10c-39=0$

$(c-3)(c+13)=0$

$c>0$이므로 $c=3$

$3^2=2+k$에서 $k=7$

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 값이 최소일 때 점 P는 선분 AF′ 위의 점이므로 직선 $\mathrm{P_0F'}$의 방정식은

$y=\dfrac{8}{5-(-3)}(x+3)$, 즉 $y=x+3$

두 점 $\mathrm{P_0}$, Q는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{7}=1$과 직선 $y=x+3$의 교점이므로

$7x^2-2(x+3)^2=14,\ 5x^2-12x-32=0$

에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 점 $\mathrm{P_0}$, Q의 x좌표의 합은 $\dfrac{12}{5}$

따라서 삼각형 $\mathrm{P_0QF}$의 무게중심의 x좌표는

$\dfrac{\dfrac{12}{5}+3}{3}=\dfrac{9}{5}$

답 ①

3 $c^2=9+27=36$에서 $c=6$

$\overline{\mathrm{PF}}=t\ (t>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=t+6$

삼각형 PFF′에서 $\cos(\angle\mathrm{PFF'})=\dfrac{5}{8}$이므로 코사인법칙에 의하여

$(t+6)^2=t^2+12^2-2\times 12t\times\dfrac{5}{8}$

$27t=108$

$t=4$

원 C가 x축, 직선 QF′에 접하는 점을 각각 R, S라 하면

$\overline{PF}=\overline{RF}=4$, $\overline{SF'}=\overline{RF'}=12-4=8$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 F, F′이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{QF'}-\overline{QF}&=(\overline{QS}+\overline{SF'})-(\overline{QP}+\overline{PF})\\&=\overline{SF'}-\overline{PF}\\&=8-4\\&=4=2a\end{aligned}$$

$a=2$이고 $6^2=2^2+b^2$에서 $b^2=32$이므로

$b^2-a^2=32-4=28$

답 ⑤

4 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$이므로

$\overline{PF}=\overline{PF'}-2a=8-2a$

포물선 $y^2=4x$의 초점은 F이고 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 점 P에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}=8-2a$이고 점 P의 x좌표는

$(8-2a)-1=7-2a$

직각삼각형 PHF′에서 선분 HF′의 길이는 점 P의 y좌표와 같으므로

$\overline{HF'}=\sqrt{4(7-2a)}$

그러므로 $\overline{PF'}^2=\overline{PH}^2+\overline{HF'}^2$에서

$8^2=(8-2a)^2+4(7-2a)$

$4a^2-40a+28=0$

$a^2-10a+7=0$

$0<a<1$이므로 $a=5-\sqrt{18}=5-3\sqrt{2}$

한편, $\overline{QF}=t\ (t>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{QF'}=2a+t$이고 $\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=8-2a+t$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}-\overline{QF'}&=(8-2a+t)-(2a+t)\\&=8-4a\\&=8-4(5-3\sqrt{2})\\&=12\sqrt{2}-12\end{aligned}$$

답 ③

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 꼭짓점 A, B의 좌표는 각각 $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$이다.

타원 E는 두 점 O$(0,\ 0)$, A$(a,\ 0)$을 초점으로 하고 두 점 B, F를 꼭짓점으로 하므로 타원 E의 장축의 길이는

$2\times\left(\overline{OB}+\frac{1}{2}\overline{OA}\right)=2\times\left(a+\frac{a}{2}\right)=3a$

$\overline{OF}=\overline{BF}-\overline{OB}=3a-a=2a$이므로 점 F의 좌표는 $(2a,\ 0)$이다.

$\overline{PF}=t\ (t>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{PF'}-t=2a$

$\overline{PF'}=2a+t$

$\overline{PA}=s\ (s>0)$이라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PA}+\overline{PO}=s+\overline{PO}=3a$

$\overline{PO}=3a-s$

쌍곡선과 타원은 각각 x축에 대하여 대칭이므로

$\overline{QO}=\overline{PO}=3a-s$, $\overline{QF}=\overline{PF}=t$

그러므로 삼각형 PF′A의 둘레의 길이는 $(2a+t)+3a+s$, 삼각형 OQF의 둘레의 길이는 $(3a-s)+t+2a$이고 두 삼각형의 둘레의 길이의 차는 6이므로

$(5a+t+s)-(5a+t-s)=2s=6$

$s=3$

따라서

$$\begin{aligned}3\overline{FF'}-4\overline{PO}&=3\times 4a-4\times(3a-s)\\&=4s=4\times 3=12\end{aligned}$$

답 12

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2}{a^2}x-\frac{\sqrt{2}}{b^2}y=1$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $\left(\frac{a^2}{2},\ 0\right)$, $\left(0,\ -\frac{b^2}{\sqrt{2}}\right)$이고 이 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{2}\times\frac{b^2}{\sqrt{2}}=\frac{a^2b^2\sqrt{2}}{8}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

$a^2b^2=18$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 $(2,\ \sqrt{2})$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1$

양변에 a^2b^2을 곱하면

$4b^2-2a^2=a^2b^2$

$4b^2-2a^2=18$, $2b^2-a^2=9$

즉, $a^2=2b^2-9$이므로 ㉠에 대입하면

$2b^4-9b^2-18=0$

$(b^2-6)(2b^2+3)=0$

$2b^2+3>0$이므로 $b^2=6$

㉠에서 $a^2=\frac{18}{b^2}=\frac{18}{6}=3$

따라서 $a^2+b^2=3+6=9$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 38쪽

1 205 **2** ③ **3** 24

1 쌍곡선 H: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{25}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하자.

기울기가 k $(k>0)$이고 점 F′을 지나는 직선 l의 방정식은 $y=k(x+c)$이고, 직선 l이 쌍곡선 H와 제1사분면에서 만나지 않으므로 직선 l의 기울기는 쌍곡선 H의 한 점근선의 기울기인 $\frac{5}{a}$보다 크거나 같다.

즉, $k\geq\frac{5}{a}$

한편, 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}&=\overline{\mathrm{PQ}}+(\overline{\mathrm{PF}}+2a)\\&=(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}})+2a\\&\geq\overline{\mathrm{FQ}}+2a\end{aligned}$$

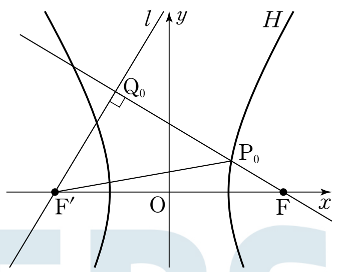
점 F에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 할 때,

$\overline{\mathrm{FQ}}\geq\overline{\mathrm{FI}}$이고

$$\overline{\mathrm{FI}}=\frac{2ck}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2c}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}$$

이므로 직선 l의 기울기가 작을수록 $\overline{\mathrm{FI}}$는 작아진다.

즉, 직선 l의 기울기가 $k_0=\frac{5}{a}$이고 점 F에서 직선 l에 내린 수선의 발이 Q, 선분 FQ가 쌍곡선과 만나는 점이 P일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값은 최소이다.



그러므로 직선 l의 방정식이 $y=\frac{5}{a}(x+c)$일 때, 점 F에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q_0}$이라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{FQ_0}}+2a$이고, 선분 $\mathrm{FQ_0}$이 쌍곡선 H와 만나는 점이 $\mathrm{P_0}$이다.

이때 선분 $\mathrm{FQ_0}$의 길이는 점 F$(c, 0)$과 직선 $y=\frac{5}{a}(x+c)$, 즉 $5x-ay+5c=0$ 사이의 거리와 같다.

즉, $\overline{\mathrm{FQ_0}}=\frac{|5c-a\times0+5c|}{\sqrt{5^2+(-a)^2}}=\frac{10c}{c}=10$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P_0Q_0}}+\overline{\mathrm{P_0F'}}&=\overline{\mathrm{P_0Q_0}}+(\overline{\mathrm{P_0F}}+\overline{\mathrm{P_0F'}}-\overline{\mathrm{P_0F}})\\&=(\overline{\mathrm{P_0Q_0}}+\overline{\mathrm{P_0F}})+(\overline{\mathrm{P_0F'}}-\overline{\mathrm{P_0F}})\\&=\overline{\mathrm{FQ_0}}+2a\\&=10+2a\end{aligned}$$

직각삼각형 $\mathrm{FQ_0F'}$에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=2c$이므로

$(2c)^2=10^2+\overline{\mathrm{Q_0F'}}^2$

$\overline{\mathrm{Q_0F'}}=\sqrt{4c^2-10^2}=2\sqrt{c^2-5^2}=2a$

삼각형 $\mathrm{P_0Q_0F'}$의 둘레의 길이는

$(10+2a)+2a=10+4a=22$이므로 $a=3$

그러므로 $k_0=\frac{5}{a}=\frac{5}{3}$

$\overline{\mathrm{P_0F}}=t$ $(t>0)$이라 하면 직각삼각형 $\mathrm{P_0Q_0F'}$에서

$\overline{\mathrm{P_0Q_0}}=\overline{\mathrm{FQ_0}}-t=10-t$, $\overline{\mathrm{P_0F'}}=6+t$, $\overline{\mathrm{Q_0F'}}=6$이므로

$(6+t)^2=(10-t)^2+6^2$

$32t=100$

$t=\frac{25}{8}$

$\overline{\mathrm{P_0Q_0}}=10-t=10-\frac{25}{8}=\frac{55}{8}$

따라서 $24\times(k_0+\overline{\mathrm{P_0Q_0}})=24\times\left(\frac{5}{3}+\frac{55}{8}\right)=205$

답 205

2 직선 l과 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$의 접점을 B(a, b) $(a>0, b>0)$이라 하자.

직선 l의 방정식은 $ax-by=-1$이고 직선 l이 점 A$(-k, 0)$을 지나므로

$-ka=-1$, $a=\frac{1}{k}$

$a^2-b^2=-1$에서 $b^2=a^2+1=\frac{k^2+1}{k^2}$이므로

$b=\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$

즉, 직선 l의 방정식은

$\frac{1}{k}x-\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}y=-1$

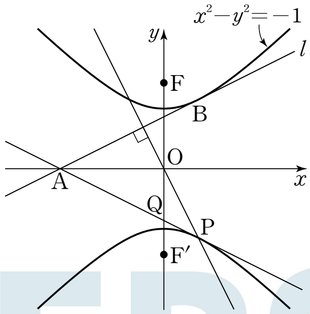
$y=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}x+\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

그러므로 직선 l과 수직인 직선 OP의 기울기는 $-\sqrt{k^2+1}$이다.

그런데 직선 OB의 기울기는

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}}{\frac{1}{k}}=\sqrt{k^2+1}$$

이므로 두 직선 OP, OB는 x축에 대하여 서로 대칭이고, 쌍곡선도 x축에 대하여 대칭이므로 두 점 B, P도 x축에 대하여 서로 대칭이다.



점 B에서의 접선 l의 y절편이 $\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)$이다.

한편, 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$의 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(0,\ \sqrt{2})$, $(0,\ -\sqrt{2})$이므로 $\overline{\text{FQ}}\times\overline{\text{F}'\text{Q}}=\frac{5}{4}$에서

$$\overline{\text{FQ}}\times\overline{\text{F}'\text{Q}}=\left(\sqrt{2}+\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)$$
$$=2-\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{5}{4}$$

$k^2=3$

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}$$

답 ③

3 삼각형 PGF′의 둘레의 길이와 삼각형 PG′F의 둘레의 길이의 차가 $4\sqrt{2}-4$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$|(\overline{\text{PF}'}+\overline{\text{PG}}+\overline{\text{F}'\text{G}})-(\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PG}'}+\overline{\text{FG}'})|$

$=|(\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{PF}})-(\overline{\text{PG}'}-\overline{\text{PG}})+(\overline{\text{F}'\text{G}}-\overline{\text{FG}'})|$

$=|2a-4|$

$=2a-4=4\sqrt{2}-4$

에서 $a=2\sqrt{2}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=8+8=16$, $c=4$

점 P의 좌표를 $(r,\ s)$ $(r>0,\ s>0)$이라 하면 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{4}=-1$ 위의 점 $\text{P}(r,\ s)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{r}{b^2}x-\frac{s}{4}y=-1$

이 직선이 점 $\text{F}'(-4,\ 0)$을 지나므로

$\frac{-4r}{b^2}=-1$, $4r=b^2$

점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{4}=-1$ 위의 점이므로

$\frac{r^2}{b^2}-\frac{s^2}{4}=-1$, $\frac{r}{4}-\frac{s^2}{4}=-1$ …… ㉠

또한 점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\frac{r^2}{8}-\frac{s^2}{8}=1$ …… ㉡

㉠에서 $s^2=r+4$이므로 ㉡에 대입하여 정리하면

$r^2-r-12=0$, $(r-4)(r+3)=0$

$r>0$이므로 $r=4$

$s^2=4+4=8$이고 $s>0$이므로 $s=2\sqrt{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $(4,\ 2\sqrt{2})$이므로

$\overline{\text{OP}}^2=4^2+(2\sqrt{2})^2=24$

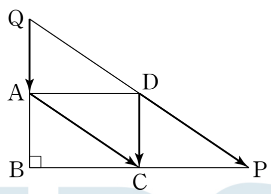
답 24

04 벡터의 연산

유제 본문 41~49쪽

1 ②	**2** ③	**3** ①	**4** ③	**5** ④	**6** ③
7 ①	**8** ②	**9** ⑤	**10** 125		

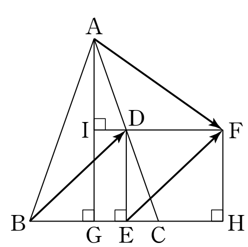
1 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DP}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DP}$의 크기와 방향이 각각 같다.
즉, 사각형 ACPD는 평행사변형이다.
또 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{QA}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{QA}$의 크기와 방향이 각각 같다.
즉, 사각형 QACD는 평행사변형이다.



따라서 $\overline{BP}=6$, $\overline{BQ}=4$이므로 삼각형 BPQ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{BQ}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

답 ②

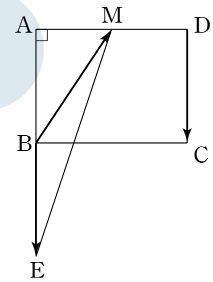
2 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=6$, $|\overrightarrow{BC}|=4$이므로
$\overline{AB}=\overline{AC}=6$, $\overline{BC}=4$
선분 AC의 중점이 D, 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점이 E이므로
$\overline{AD}=\overline{CD}=3$, $\overline{BE}=3$, $\overline{CE}=1$
점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 G라 하면
$\overline{BG}=\overline{CG}=2$
점 D가 선분 AC의 중점이므로 점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발은 선분 GC의 중점, 즉 점 E이다.
한편, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EF}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EF}$의 크기와 방향이 각각 같다.
즉, 사각형 DBEF는 평행사변형이다.



점 F에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H, 점 D에서 직선 AG에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{EH}=\overline{BE}=3$이므로
$\overline{IF}=\overline{GH}=\overline{GE}+\overline{EH}=1+3=4$
$\overline{AI}=\frac{1}{2}\overline{AG}=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BG}^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6^2-2^2}=2\sqrt{2}$
따라서 $|\overrightarrow{AF}|=\overline{AF}=\sqrt{\overline{AI}^2+\overline{IF}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6}$

답 ③

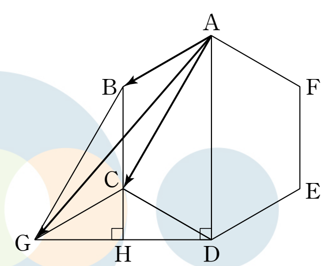
3 그림과 같이 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BE}$를 만족시키는 점 E를 잡으면



$|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BE}|$
$=|\overrightarrow{EM}|$
직각삼각형 AEM에서
$\overline{AE}=2\overline{AB}=2\times3=6$,
$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\times4=2$
이므로
$\overline{EM}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{AM}^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$
따라서 $|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{EM}|=\overline{EM}=2\sqrt{10}$

답 ①

4 $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AC}$이므로
$\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}$인 점 G를 잡으면 사각형 ABGC가 평행사변형이고
$|\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}|=|\overrightarrow{AG}|$ …… ㉠
삼각형 CGD에서 $\overline{CG}=\overline{CD}$, $\angle DCG=\frac{2}{3}\pi$이므로
점 C에서 선분 GD에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{DH}=\overline{CD}\times\sin\frac{\pi}{3}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



한편, 삼각형 AGD에서 $\angle ADG=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AD}=2$,
$\overline{GD}=2\overline{DH}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$이므로
$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{GD}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$|\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}|=|\overrightarrow{AG}|=\overline{AG}=\sqrt{7}$

답 ③

5 두 벡터 $k\vec{a}+4\vec{b}$와 $2\vec{a}+\vec{b}$가 서로 평행하므로

$k\vec{a}+4\vec{b}=l(2\vec{a}+\vec{b})$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 l이 존재한다.

$k\vec{a}+4\vec{b}=2l\vec{a}+l\vec{b}$에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$k=2l$, $4=l$

따라서 $k=8$

답 ④

6 $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CP}$에서

$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

이므로 벡터 $\overrightarrow{CP}$는 벡터 $\overrightarrow{BA}$와 방향이 같고 크기가

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|=\frac{1}{2}\times4=2$인 벡터이다.

즉, 선분 BA의 중점을 D라 하면 사각형 BCPD는 평행사변형이다.

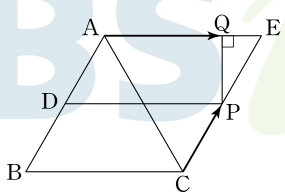
또 $3\overrightarrow{CB}=-4\overrightarrow{AQ}$에서

$\overrightarrow{AQ}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

이므로 벡터 $\overrightarrow{AQ}$는 벡터 $\overrightarrow{BC}$와 방향이 같고 크기가

$\frac{3}{4}|\overrightarrow{BC}|=\frac{3}{4}\times4=3$인 벡터이다.

사각형 ABCE가 평행사변형이 되도록 점 E를 잡으면 점 Q는 선분 AE 위에 있고,



$\overline{EQ}=1$,

$\overline{PE}=\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4=2$,

$\overline{PQ}\perp\overline{EQ}$이다.

따라서

$|\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{PQ}|=\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{EQ}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

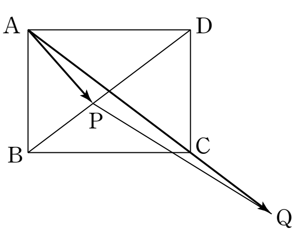
답 ③

7 점 P는 대각선 BD를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

점 Q는 대각선 AC를 $3:1$로 외분하는 점이므로

$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$



$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

$=\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)-\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$

$=\frac{9}{10}\vec{a}+\frac{11}{10}\vec{b}$

이때 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$m=\frac{9}{10}$, $n=\frac{11}{10}$

따라서 $\frac{n}{m}=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{11}{9}$

답 ①

8 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$이므로

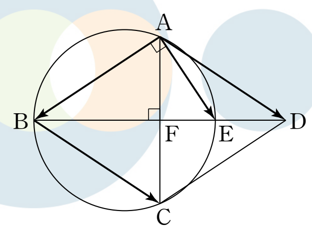
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=\frac{25}{3}$에서

$|\overrightarrow{DB}|=\overline{DB}=\frac{25}{3}$

두 선분 AC, BD의 교점을 F라 하면

$\overline{BF}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\frac{25}{3}=\frac{25}{6}$, $\angle BFA=\frac{\pi}{2}$



한편, 선분 BE는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로

$\angle BAE=\frac{\pi}{2}$

두 직각삼각형 BAE, BFA는 서로 닮음이므로

$\overline{BE}:\overline{BA}=\overline{BA}:\overline{BF}$

즉, $\overline{BE}\times\overline{BF}=\overline{BA}^2$이므로

$\overline{BE}\times\frac{25}{6}=5^2$

$\overline{BE}=6$

이때 $\overline{DE}=\overline{BD}-\overline{BE}=\frac{25}{3}-6=\frac{7}{3}$이므로

$\overline{BE}:\overline{DE}=6:\frac{7}{3}=18:7$

점 E는 선분 BD를 $18:7$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AE}=\frac{18}{25}\overrightarrow{AD}+\frac{7}{25}\overrightarrow{AB}=\frac{7}{25}\overrightarrow{AB}+\frac{18}{25}\overrightarrow{AD}$

이때 영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AD}$가 서로 평행하지 않으므로

$p=\frac{7}{25}$, $q=\frac{18}{25}$

따라서 $q-p=\frac{18}{25}-\frac{7}{25}=\frac{11}{25}$

답 ②

9 $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2)+(-3,\ 5)=(-2,\ 3)$

$2\vec{a}-\vec{c}=2(1,\ -2)-(-4,\ x)$

$=(2,\ -4)-(-4,\ x)$

$=(6,\ -4-x)$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $2\vec{a}-\vec{c}$가 서로 평행하므로

$t(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}-\vec{c}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재한다.

$t(-2,\ 3)=(6,\ -4-x)$에서

$(-2t,\ 3t)=(6,\ -4-x)$

$-2t=6$ …… ㉠

$3t=-4-x$ …… ㉡

㉠에서 $t=-3$

$t=-3$을 ㉡에 대입하면

$3\times(-3)=-4-x$

따라서 $x=5$

답 ⑤

10 조건 (가)에서

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{OC}$는 서로 평행하므로

$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{AB}$ …… ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재한다.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,\ 4)-(3,\ 2)=(-4,\ 2)$

이므로 ㉠에서

$(a,\ b)=t(-4,\ 2)$

$a=-4t,\ b=2t$

조건 (나)에서

$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(-4t)^2+(2t)^2}=4\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2=4$

$t=-2$ 또는 $t=2$

(i) $t=-2$일 때

$\overrightarrow{OC}=(8,\ -4)$이므로

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(8,\ -4)-(3,\ 2)=(5,\ -6)$

$|\overrightarrow{AC}|^2=5^2+(-6)^2=61$

(ii) $t=2$일 때

$\overrightarrow{OC}=(-8,\ 4)$이므로

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-8,\ 4)-(3,\ 2)=(-11,\ 2)$

$|\overrightarrow{AC}|^2=(-11)^2+2^2=125$

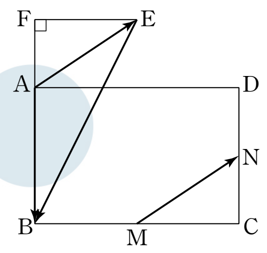
(i), (ii)에서 $|\overrightarrow{AC}|^2$의 최댓값은 125이다.

답 125

Level **1** **기초 연습** 본문 50~51쪽

1 ③	**2** ④	**3** ⑤	**4** ②	**5** ④	**6** ①
7 ③	**8** ②				

1 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AE}$가 되도록 점 E를 잡으면



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{EB}$

점 E에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 F라 하면

직각삼각형 BEF에서

$\overline{BF}=6,\ \overline{EF}=3$

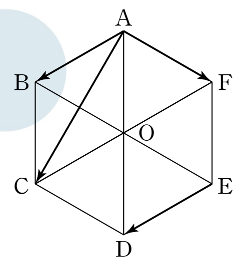
이므로

$\overline{EB}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{EF}^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

따라서 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{EB}|=\overline{EB}=3\sqrt{5}$

답 ③

2 $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}$ …… ㉠



두 선분 AD와 BE의 교점을 O라 하면 사각형 ABOF는 평행사변형이므로

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

또 사각형 ABCO도 평행사변형이므로

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}$

$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{ED}=3(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})+4\overrightarrow{AB}$

$=10\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AF}$

이때 영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AF}$가 서로 평행하지 않으므로

$m=10,\ n=3$

따라서 $m+n=10+3=13$

답 ④

3 $\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$이므로

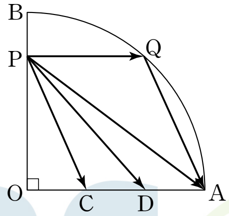
두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{OA}$는 서로 평행하고 방향이 서로 같다.

이때 $|\overrightarrow{PQ}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{OA}|=\frac{2}{3}\times6=4$

직각삼각형 POQ에서

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{PQ}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

선분 OA를 1 : 2로 내분하는 점을 C라 하면



$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{PC}$

선분 AC의 중점을 D라 하면

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$

$\qquad\qquad=2\overrightarrow{PD}$

직각삼각형 POD에서 $\overline{OD}=4$이므로

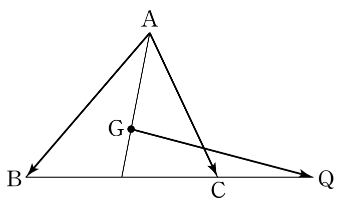
$\overline{PD}=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{OD}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=6$

따라서

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{QA}|=2|\overrightarrow{PD}|=2\overline{PD}=2\times 6=12$

답 ⑤

4



점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\quad=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

또 점 Q는 선분 BC를 3 : 1로 외분하는 점이므로

$\overrightarrow{AQ}=\frac{3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{3-1}$

$\quad=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

그러므로

$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AG}$

$\quad=\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$\quad=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{6}\overrightarrow{AC}$

이때 영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$가 서로 평행하지 않으므로

$m=-\frac{5}{6}$, $n=\frac{7}{6}$

따라서 $m+n=-\frac{5}{6}+\frac{7}{6}=\frac{1}{3}$

답 ②

5 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재해야 한다.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-5\vec{a}+k\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})$

$\qquad\qquad\qquad=-6\vec{a}+(k-1)\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}-2\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}-3\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$에서

$-6\vec{a}+(k-1)\vec{b}=t(2\vec{a}-3\vec{b})$

$-6\vec{a}+(k-1)\vec{b}=2t\vec{a}-3t\vec{b}$

이때 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$-6=2t$ ...... ㉠

$k-1=-3t$ ...... ㉡

㉠에서 $t=-3$

$t=-3$을 ㉡에 대입하면

$k-1=-3\times(-3)=9$

따라서 $k=10$

답 ④

6 $(6\vec{a}+m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$에서

$(6-n)\vec{a}+(m+4)\vec{b}=2\vec{a}+\vec{b}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$6-n=2$, $m+4=1$

따라서 $m=-3$, $n=4$이므로

$m+n=-3+4=1$

답 ①

7 $3\vec{a}+\vec{b}=3(4,\ -2)+(2,\ 5)$

$\qquad=(12,\ -6)+(2,\ 5)$

$\qquad=(14,\ -1)$

따라서 벡터 $3\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$14+(-1)=13$

답 ③

8 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,\ 6)-(-1,\ 4)=(4,\ 2)$

$\overrightarrow{OC}=(a,\ b)$라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{OC}$와 $\overrightarrow{AB}$가 서로 평행하므로

$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재한다.

즉, $(a,\ b)=t(4,\ 2)$에서

$a=4t$, $b=2t$

삼각형 ABC의 무게중심이 G이므로

$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\left(\frac{-1+3+4t}{3},\ \frac{4+6+2t}{3}\right)$

$\quad=\left(\frac{2+4t}{3},\ \frac{10+2t}{3}\right)$

벡터 $\overrightarrow{OG}$의 모든 성분의 합이 8이므로

$\frac{2+4t}{3}+\frac{10+2t}{3}=8$

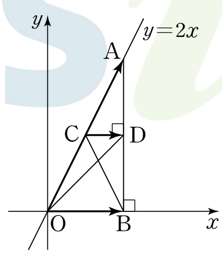
$2t=4$, $t=2$
따라서 $\overrightarrow{OC}=(8,\ 4)$이므로 벡터 $\overrightarrow{OC}$의 모든 성분의 곱은
$8\times4=32$

답 ②

Level **2** **기본 연습** 본문 52~53쪽

1 ③ **2** 7 **3** ② **4** ② **5** ⑤ **6** ①
7 52 **8** 9

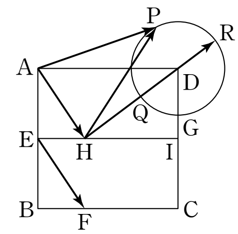
1 조건 (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OC}$는 서로 평행하고, 방향이 같다.
이때 점 A가 직선 $y=2x$ 위에 있는 제1사분면 위의 점이므로 점 C도 직선 $y=2x$ 위에 있는 제1사분면 위의 점이다.
조건 (나)에서
$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|$, 즉 $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$
이므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선과 직선 $y=2x$가 만나는 점이다.
선분 AB의 중점을 D라 하면



$\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\overrightarrow{OD}$이므로
$\left|\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}-\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{5}{4}$에서
$|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}|=\dfrac{5}{4}$
$|\overrightarrow{CD}|=\dfrac{5}{4}$
이때 점 A의 좌표를 $(a,\ 2a)\ (a>0)$이라 하면
$a=\overline{OB}=2\overline{CD}=2|\overrightarrow{CD}|=2\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{2}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{5}{4}=\dfrac{25}{8}$

답 ③

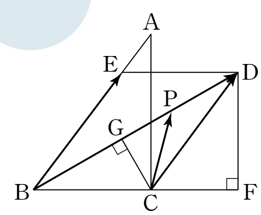
2 $\overline{DG}=\dfrac{1}{3}\overline{DC}=\dfrac{1}{3}\times6=2$
이므로 점 P는 중심이 점 D이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.
$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AH}$가 되도록 점 H를 잡으면
$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HP}$
이므로
$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{HP}|=\overline{HP}$



직선 HD와 중심이 점 D이고 반지름의 길이가 2인 원이 만나는 두 점을 각각 Q, R $(\overline{HQ}<\overline{HR})$이라 하면
$\overline{HQ}\le\overline{HP}\le\overline{HR}$
이므로 점 P가 점 R일 때
$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{EF}|$의 값은 최대이다.
선분 CD의 중점을 I라 하면 $\overline{ID}=3$이고 점 H는 선분 EI를 $1:2$로 내분하는 점이므로
$\overline{HI}=4$
그러므로 $\overline{HD}=\sqrt{\overline{HI}^2+\overline{ID}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$
따라서 $\overline{HR}=\overline{HD}+\overline{DR}=5+2=7$이므로
$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{EF}|$의 최댓값은 7이다.

답 7

3 직각삼각형 ABC에서
$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$
$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}$를 만족시키는 점 E에 대하여
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BE}$
이므로 사각형 EBCD는 평행사변형이고
$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{BE}|=\dfrac{3}{4}|\overrightarrow{BA}|=\dfrac{3}{4}\times5=\dfrac{15}{4}$
점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\overline{DF}=\dfrac{3}{4}\overline{AC}=\dfrac{3}{4}\times4=3$
두 직각삼각형 ABC와 DCF는 서로 닮음이므로
$\overline{CF}=\dfrac{3}{4}\overline{BC}=\dfrac{3}{4}\times3=\dfrac{9}{4}$
한편, 점 C에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 G라 하면 두 직각삼각형 BFD와 BGC는 서로 닮음이다.
$\overline{BF}=\overline{BC}+\overline{CF}=3+\dfrac{9}{4}=\dfrac{21}{4}$
삼각형 BGC에서 $\overline{CG}=x\ (x>0)$이라 하면
$\overline{BG}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CG}^2}=\sqrt{9-x^2}$
$\overline{BF}:\overline{DF}=\overline{BG}:\overline{CG}$에서
$\dfrac{21}{4}:3=\sqrt{9-x^2}:x$
$7x=4\sqrt{9-x^2}$
양변을 제곱하면
$49x^2=144-16x^2$, $65x^2=144$
$x^2=\dfrac{144}{65}$
$x=\dfrac{12\sqrt{65}}{65}$

점 P가 점 D일 때 $|\overrightarrow{CP}|$는 최대이고, 점 P가 점 G일 때 $|\overrightarrow{CP}|$는 최소이므로

$M=\overline{CD}=\dfrac{15}{4}$, $m=\overline{CG}=\dfrac{12\sqrt{65}}{65}$

따라서 $M\times m=\dfrac{15}{4}\times\dfrac{12\sqrt{65}}{65}=\dfrac{9\sqrt{65}}{13}$

답 ②

4 조건 (가)에서 $4\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$이므로

$4\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{PC}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

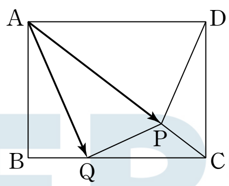
$\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

즉, 점 P는 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 점이다.

조건 (나)에서 $3\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$이므로

$\overrightarrow{BQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

즉, 점 Q는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이다.



그림에서

(삼각형 CDP의 넓이)$=\dfrac{1}{4}\times$(삼각형 ACD의 넓이),

(삼각형 ACD의 넓이)=(삼각형 ABC의 넓이)

이므로

(삼각형 CDP의 넓이)$=\dfrac{1}{4}\times$(삼각형 ABC의 넓이) ...... ㉠

또한

(삼각형 APQ의 넓이)$=\dfrac{3}{4}\times$(삼각형 ACQ의 넓이),

(삼각형 ACQ의 넓이)$=\dfrac{2}{3}\times$(삼각형 ABC의 넓이)

이므로

(삼각형 APQ의 넓이)$=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\times\right.$(삼각형 ABC의 넓이)$\left.\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times$(삼각형 ABC의 넓이) ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

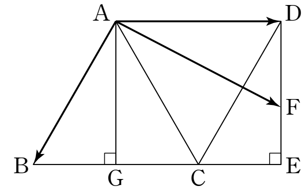
(삼각형 APQ의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times$(4×(삼각형 CDP의 넓이))

=2×(삼각형 CDP의 넓이)

$=2\times6=12$

답 ②

5 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G라 하면



$\overline{BG}=\overline{CG}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{DF}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{DE}$

$=\dfrac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$

$=\overrightarrow{AD}+\left(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{13}{10}\overrightarrow{AD}$

이때 영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AD}$가 서로 평행하지 않으므로

$p=\dfrac{3}{5}$, $q=\dfrac{13}{10}$

따라서 $p+q=\dfrac{3}{5}+\dfrac{13}{10}=\dfrac{19}{10}$

답 ⑤

6 원점을 O라 하면

$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|$, 즉 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$이므로

삼각형 OAB는 정삼각형이다.

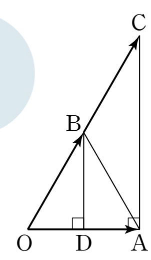
$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$가 되도록 점 C를 잡고 점 C의 위치벡터를 $\vec{c}$라 하자.

$|\vec{a}-2\vec{b}|=4\sqrt{3}$에서

$\vec{a}-2\vec{b}=\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$이므로

$|\overrightarrow{CA}|=4\sqrt{3}$

정삼각형 OAB에서 선분 OA의 중점을 D라 하면



$\overline{OD}\perp\overline{BD}$

이때 $\overline{OB}=\overline{BC}$이므로 $\overline{OA}\perp\overline{CA}$이다.

정삼각형 OAB의 한 변의 길이를 $k\ (k>0)$이라 하면

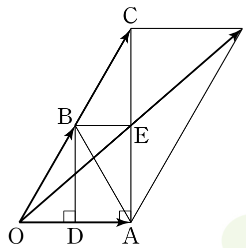
$\overline{OC}=2\overline{OB}=2k$

직각삼각형 OAC에서

$\overline{CA}=\overline{OC}\sin\dfrac{\pi}{3}$이므로

$4\sqrt{3}=2k\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $k=4$

직각삼각형 OAC에서 선분 AC의 중점을 E라 하면



$\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\vec{a}+2\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OE}$

따라서

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=2|\overrightarrow{OE}|$$
$$=2\overline{OE}$$
$$=2\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AE}^2}$$
$$=2\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}$$
$$=4\sqrt{7}$$

답 ①

7 조건 (가)에서 $3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}$이므로

$3\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$는 서로 평행하고, 방향은 반대이다.

이때 $\overline{OA}=3\overline{OB}$, 즉 $\overline{OB}=\frac{1}{3}\overline{OA}$이다.

또한 $|\overrightarrow{OA}|=\overline{OA}=12$이므로

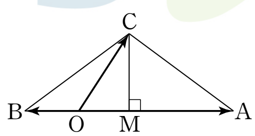
$|\overrightarrow{OB}|=\overline{OB}=\frac{1}{3}\times\overline{OA}=\frac{1}{3}\times12=4$

$\overline{AB}=\overline{OB}+\overline{OA}=4+12=16$

조건 (나)에서 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|$이므로

$|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$, 즉 $\overline{CA}=\overline{CB}$

삼각형 ABC는 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 이등변삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면



$\overline{AB}\perp\overline{CM}$

삼각형 ABC의 넓이가 48이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CM}=48$

$\frac{1}{2}\times16\times\overline{CM}=48$

$\overline{CM}=6$

직각삼각형 COM에서 $\overline{OM}=4$이므로

$\overline{OC}^2=\overline{OM}^2+\overline{MC}^2=4^2+6^2=52$

따라서 $|\overrightarrow{OC}|^2=\overline{OC}^2=52$

답 52

8 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$

$$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}|=|(x, y)+(4, 6)|$$
$$=|(x+4, y+6)|$$
$$=\sqrt{(x+4)^2+(y+6)^2}$$

조건 (가)에서 $\sqrt{2}\times|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}|$이므로

$\sqrt{2}\times\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y+6)^2}$

양변을 제곱하면

$2x^2+2y^2=(x+4)^2+(y+6)^2$

$x^2-8x+y^2-12y-52=0$

$(x-4)^2+(y-6)^2=104$

즉, 점 P는 중심이 점 A$(4, 6)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{26}$인 원 위의 점이다.

조건 (나)에서

$|\overrightarrow{OQ}|\times\overrightarrow{OB}=-|\overrightarrow{OB}|\times\overrightarrow{OQ}$, 즉 $\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}=-\frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OQ}$는 서로 평행하고 방향은 반대이다.

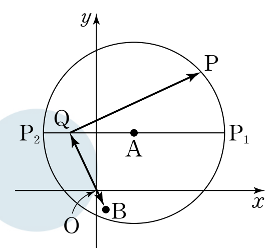
$\overrightarrow{OB}=(1, -2)$이므로 양수 t에 대하여 $\overrightarrow{OQ}=(-t, 2t)$로 놓을 수 있다.

$$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}=(-t, 2t)-(1, -2)$$
$$=(-t-1, 2t+2)$$

벡터 $\overrightarrow{BQ}$의 모든 성분의 합이 4이므로

$(-t-1)+(2t+2)=4$, $t=3$

즉, $\overrightarrow{OQ}=(-3, 6)$이고



$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QP}$이므로

직선 QA와 원 $(x-4)^2+(y-6)^2=104$가 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2 $(\overline{QP_1}>\overline{QP_2})$라 하면

점 P가 점 P_1일 때 $|\overrightarrow{QP}|$의 값은 최대이다.

$|\overrightarrow{QA}|=\overline{QA}=4-(-3)=7$이므로

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은 $7+2\sqrt{26}$이다.

따라서 $p=7$, $q=2$이므로

$p+q=7+2=9$

답 9

Level 3 **실력 완성** 본문 54쪽

1 ④ **2** 32 **3** ⑤

1 선분 BC의 중점을 E, 선분 AD의 중점을 F라 하면

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CF}$

조건 (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$와 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}$가 서로 평행하므로 두 벡터 $2\overrightarrow{PE}$와 $2\overrightarrow{CF}$는 서로 평행하다.

점 P가 정사각형 ABCD의 내부의 점이므로 점 P는 선분 AE 위에 있다.

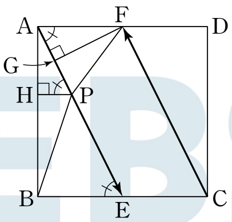
조건 (나)에서

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|=2|\overrightarrow{PF}|=2$

이므로

$|\overrightarrow{PF}|=1$

이때 $\overline{AF}=\overline{PF}$이므로 삼각형 FAP는 이등변삼각형이다.



점 F에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\angle FAG=\angle AEB$,

$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{AG}&=\overline{AF}\times\cos(\angle FAG)\\&=\overline{AF}\times\cos(\angle AEB)\\&=1\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$\overline{AP}=2\overline{AG}=2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle APH=\angle AEB$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PH}&=\overline{AP}\times\cos(\angle APH)\\&=\overline{AP}\times\cos(\angle AEB)\\&=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}$

답 ④

2 $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{EA}=3\overrightarrow{AE}$

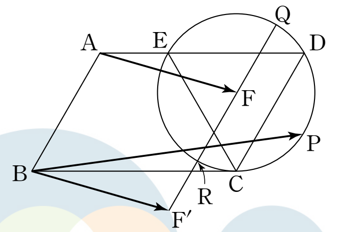
이므로 점 E는 선분 AD를 1 : 2로 내분하는 점이다.

이때 $\overline{DE}=\overline{DC}=2$이고 $\angle CDE=\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 CDE는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}&=\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{3}\\&=\frac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}}{3}\end{aligned}$$

이므로 점 F는 삼각형 CDE의 무게중심이다.

이때 삼각형 CDE가 정삼각형이므로 점 F는 삼각형 CDE의 외접원의 중심이다.



$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF'}$을 만족시키는 점 F′에 대하여

$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BF'}=\overrightarrow{F'P}$

직선 FF′과 삼각형 CDE의 외접원이 만나는 두 점을 각각 Q, R $(\overline{F'Q}>\overline{F'R})$이라 하면

$|\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{F'P}|$는 점 P가 점 Q일 때 최대이고, 점 P가 점 R일 때 최소이다.

한편, 사각형 ABF′F는 평행사변형이므로

$\overline{F'F}=\overline{BA}=2$

삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$이므로

$\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$, $R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $|\overrightarrow{F'P}|$의 최댓값은 $M=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

최솟값은 $m=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\begin{aligned}12\times M\times m&=12\times\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\&=12\times\frac{8}{3}=32\end{aligned}$$

답 32

3 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x, y)-(2, 1)=(x-2, y-1)$

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$에서

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{0^2+(-1)^2}$

양변을 제곱하면

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

이므로 점 P는 중심이 점 A$(2, 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

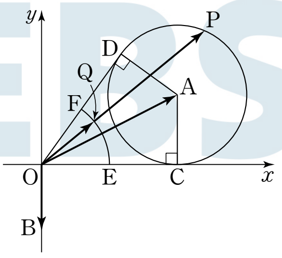
원점에서 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 C, D라 하자. (단, 점 C는 x축 위의 점이다.)

$\dfrac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\overrightarrow{OE}$, $\dfrac{\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OD}|}=\overrightarrow{OF}$를 만족시키는 두 점 E, F에 대

하여 $\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 Q는 부채꼴 OEF의 호 EF 위의 점이다.

$$\left|\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}-\overrightarrow{OB}\right|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BQ}|$$

이므로 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BF}$일 때, $\left|\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}-\overrightarrow{OB}\right|$의 값은 최대이다.



직선 OD의 방정식을 $y=mx$ $(m>0)$이라 하자.
점 A$(2,\ 1)$과 직선 OD, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|2m-1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2-4m=0,\ m(3m-4)=0$$

$m>0$이므로 $m=\dfrac{4}{3}$

즉, $\tan(\angle\text{FOE})=\dfrac{4}{3}$이므로 점 F의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$이다.

이때 $\overline{BF}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}+1\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

따라서 $\left|\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}-\overrightarrow{OB}\right|$의 최댓값은

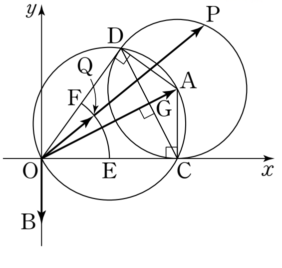
$$|\overrightarrow{BF}|=\overline{BF}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$$

답 ⑤

참고

선분 BF의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.
삼각형 CDO의 외접원의 반지름의 길이는

$$\dfrac{1}{2}\overline{OA}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$$



한편, $\overline{OA}\perp\overline{CD}$이므로 선분 OA와 선분 CD의 교점을 G라 하자.
삼각형 AOC의 넓이에서

$$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{CG}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{AC}$$

$$\sqrt{5}\times\overline{CG}=2\times1$$

$$\overline{CG}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$$

이때 $\overline{CD}=2\overline{CG}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$\angle\text{DOC}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}$에서

$$\dfrac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\sin\theta}=2\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$$

삼각형 OBF에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BF}^2&=\overline{OB}^2+\overline{OF}^2-2\times\overline{OB}\times\overline{OF}\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\\&=\overline{OB}^2+\overline{OF}^2-2\times\overline{OB}\times\overline{OF}\times(-\sin\theta)\\&=1^2+1^2-2\times1\times1\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)\\&=\dfrac{18}{5}\end{aligned}$$

그러므로 $\overline{BF}=\sqrt{\dfrac{18}{5}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

05 벡터의 내적

유제 본문 57~65쪽

1 ①	**2** 37	**3** ③	**4** ②	**5** ⑤	**6** ④
7 ④	**8** ①	**9** ③	**10** 3		

1 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=(2,\ 3)-(-1,\ 5)=(3,\ -2)$

따라서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=(7,\ 4)\cdot(3,\ -2)$

$=7\times3+4\times(-2)=13$

답 ①

2 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 ABP에서

$\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\frac{3}{4}$

이때 $\overline{AB}=4k$, $\overline{BP}=3k\ (k>0)$으로 놓을 수 있다.

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{PB}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{PB}|\sin\theta$

$=4k\times3k\times\frac{3}{4}=9k^2$

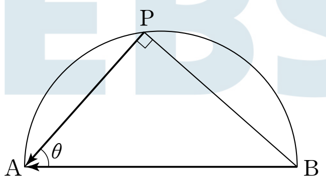
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PB}=4$에서 $9k^2=4$, $k^2=\frac{4}{9}$

$k>0$이므로 $k=\frac{2}{3}$

한편, 직각삼각형 ABP에서

$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2-\overline{BP}^2=(4k)^2-(3k)^2=7k^2$

$=7\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{28}{9}$



$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{PA}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{PA}|\cos\theta=|\overrightarrow{PA}|^2=\overline{PA}^2=\frac{28}{9}$

따라서 $p=9$, $q=28$이므로

$p+q=9+28=37$

답 37

3 $|2\vec{a}+\vec{b}|=8$에서 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=64$

이때

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times(\sqrt{10})^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2$

$=56+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

이므로

$56+4\vec{a}\cdot\vec{b}=64$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

따라서

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=(\sqrt{10})^2-2\times2+4^2$

$=22$

이므로 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{22}$

답 ③

4 $\angle CAB=\theta$라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3\sqrt{7}}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{4}$

$\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{4}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=3\times2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$

한편,

$\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$

이므로

$3\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BM}=3\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+4\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$

$=-2\vec{a}+3\vec{b}$

$|3\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BM}|^2=(-2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(-2\vec{a}+3\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\times3^2-12\times\frac{9}{2}+9\times2^2$

$=18$

따라서 $|3\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BM}|=3\sqrt{2}$

답 ②

5 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $2\vec{a}-3\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=0$

즉, $2|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2=0$에서

$2\times(\sqrt{2})^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-3\times1^2=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

이때

$$\begin{aligned}|\vec{a}+3\vec{b}|^2&=(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2\\&=(\sqrt{2})^2+6\times1+9\times1^2\\&=17\end{aligned}$$

이므로

$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{17}$

답 ⑤

6 두 벡터 $\vec{a}=(6, 3)$과 $\vec{b}=(-2, k)$가 서로 평행하므로

$\vec{a}=t\vec{b}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재한다.

$(6, 3)=t(-2, k)$에서

$6=-2t$, $3=tk$

즉, $t=-3$, $k=-1$

이때

$\vec{a}-\vec{c}=(6, 3)-(3, -1)=(3, 4)$,

$\vec{b}-\vec{c}=(-2, -1)-(3, -1)=(-5, 0)$

이므로

$|\vec{a}-\vec{c}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$|\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$

$$\begin{aligned}(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})&=(3, 4)\cdot(-5, 0)\\&=3\times(-5)+4\times0=-15\end{aligned}$$

따라서

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})}{|\vec{a}-\vec{c}||\vec{b}-\vec{c}|}=\frac{-15}{5\times5}=-\frac{3}{5}$$

답 ④

7 두 직선 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{2}$, $x+4=\frac{y-2}{7}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_1}=(-2, 2)$, $\vec{u_2}=(1, 7)$

따라서

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}\\&=\frac{|-2\times1+2\times7|}{\sqrt{(-2)^2+2^2}\times\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{12}{2\sqrt{2}\times5\sqrt{2}}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ④

8 $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 점 A$(-6, 8)$을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{OB}=(2, 4)$인 직선이다.

점 P가 나타내는 직선의 방정식은

$2(x+6)+4(y-8)=0$, 즉 $x+2y-10=0$

원점 O와 직선 $x+2y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$$

이므로

$|\overrightarrow{OP}|\ge2\sqrt{5}$

따라서 $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

답 ①

9 $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AP}|^2$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2, 4)-(2, 1)=(-4, 3)$이므로

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=4+|\overrightarrow{AB}|$에서

$|\overrightarrow{AP}|^2=9$, 즉 $|\overrightarrow{AP}|=3$이므로

점 P가 나타내는 도형은 점 A$(2, 1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

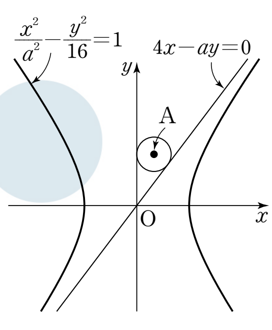
답 ③

10 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=1$에서 $|\overrightarrow{AP}|=1$

이므로 점 P는 중심이 A$(1, 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은 $y=\frac{4}{a}x$, 즉 $4x-ay=0$이다.

점 P가 나타내는 도형과 직선 $4x-ay=0$이 한 점에서 만나므로 점 A$(1, 3)$과 직선 $4x-ay=0$ 사이의 거리가 1이어야 한다.



즉, $\frac{|4\times1-a\times3|}{\sqrt{4^2+(-a)^2}}=1$

에서

$|4-3a|=\sqrt{16+a^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$8a^2-24a=0$, $8a(a-3)=0$

$a>0$이므로 $a=3$

답 3

Level 1 기초 연습					본문 66~67쪽
1 ②	**2** ③	**3** ①	**4** ①	**5** ④	**6** 64
7 ⑤	**8** ④				

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,\ -2)\cdot(4,\ k)$

$=3\times4+(-2)\times k$

$=12-2k$

이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$에서

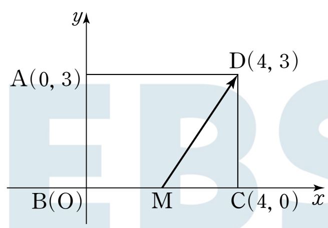
$12-2k=2$

따라서 $k=5$

답 ②

2 그림과 같이 점 B가 원점, 점 A의 좌표가 $(0,\ 3)$, 점 C의 좌표가 $(4,\ 0)$이 되도록 좌표평면을 잡으면

두 점 D, M의 좌표는 각각 $(4,\ 3)$, $(2,\ 0)$이다.



이때

$\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BA}+k(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA})$

$=-(0,\ 3)+k((4,\ 3)-(0,\ 3))$

$=(0,\ -3)+k(4,\ 0)$

$=(4k,\ -3)$,

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BM}=(4,\ 3)-(2,\ 0)=(2,\ 3)$

이므로 $(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{MD}=0$에서

$(4k,\ -3)\cdot(2,\ 3)=0$

$4k\times2+(-3)\times3=0$

$8k=9$

따라서 $k=\dfrac{9}{8}$

답 ③

3 $|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{5}$에서 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=20$

이때

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$

$=25+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

이므로

$25+2\vec{a}\cdot\vec{b}=20$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{5}{2}$

따라서

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

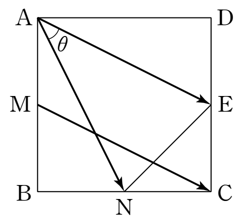
$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=4^2-2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=21$

답 ①

4 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AN}\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DM})=\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}$

선분 CD의 중점을 E라 하면 $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AE}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MC}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기와 같다.



삼각형 ANE에서 $\angle\text{EAN}=\theta$라 하면

$\overline{\text{AN}}=\overline{\text{AE}}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{\text{NE}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\text{AN}}^2+\overline{\text{AE}}^2-\overline{\text{NE}}^2}{2\times\overline{\text{AN}}\times\overline{\text{AE}}}$

$=\dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

따라서

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{MC}|\cos\theta$

$=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\dfrac{4}{5}=4$

답 ①

다른 풀이

$\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{DM}$이므로 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=0$

따라서

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DC}-0$

$=|\overrightarrow{DC}|^2=2^2=4$

5 $\vec{a}-2\vec{b}=(6,\ -2)-2(1,\ k)=(4,\ -2-2k)$

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-2\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$

이때

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=(6,\ -2)\cdot(4,\ -2-2k)$

$=6\times4-2\times(-2-2k)$

$=28+4k$

이므로 $28+4k=0$

따라서 $k=-7$

답 ④

6 $|3\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{13}$에서 $|3\vec{a}-\vec{b}|^2=52$

이때

$$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$$
$$=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=9|\vec{a}|^2-6|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+|\vec{b}|^2$$
$$=9\times2^2-6\times2\times|\vec{b}|\times\frac{1}{2}+|\vec{b}|^2$$
$$=36-6|\vec{b}|+|\vec{b}|^2$$

이므로

$36-6|\vec{b}|+|\vec{b}|^2=52$

$|\vec{b}|^2-6|\vec{b}|-16=0$

$(|\vec{b}|+2)(|\vec{b}|-8)=0$

$|\vec{b}|>0$이므로 $|\vec{b}|=8$

따라서 $\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2=8^2=64$

답 64

7 직선 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{5-y}{6}$, 즉 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{-6}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(2,\ -6)$

두 벡터 $\vec{n}=(4,\ 2)$, $\vec{u}=(2,\ -6)$에 대하여

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=(4,\ 2)\cdot(2,\ -6)$$
$$=4\times2+2\times(-6)=-4<0$$

이므로 두 벡터 $\vec{n}$, $\vec{u}$가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}+\theta$이다.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{u}}{|\vec{n}||\vec{u}|}$$
$$=\frac{4\times2+2\times(-6)}{\sqrt{4^2+2^2}\times\sqrt{2^2+(-6)^2}}$$
$$=\frac{-4}{2\sqrt{5}\times2\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

이고, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로

$-\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

즉, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

따라서 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

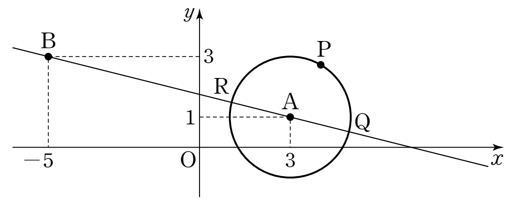
답 ⑤

8 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}=4$에서

$|\overrightarrow{AP}|^2=4$, 즉 $|\overrightarrow{AP}|=2$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 점 A(3, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AP}$



직선 AB와 점 P가 나타내는 도형이 만나는 두 점을 각각 Q, R $(\overline{BR}<\overline{BQ})$라 하자.

점 P가 점 Q의 위치일 때 $|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AP}|$의 값은 최대이고,

점 P가 점 R의 위치일 때 $|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AP}|$의 값은 최소이다.

$|\overrightarrow{BA}|=\overline{BA}=\sqrt{\{3-(-5)\}^2+(1-3)^2}=2\sqrt{17}$

이므로

$M=|\overrightarrow{BA}|+2|\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{17}+4$

$m=|\overrightarrow{BA}|-2|\overrightarrow{AR}|=2\sqrt{17}-4$

따라서 $M\times m=(2\sqrt{17}+4)(2\sqrt{17}-4)=52$

답 ④

다른 풀이

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}=4$에서

$|\overrightarrow{AP}|^2=4$, 즉 $|\overrightarrow{AP}|=2$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 점 A(3, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

원점을 O라 하면

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})$$
$$=2\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$=2\overrightarrow{OP}-((3,\ 1)+(-5,\ 3))$$
$$=2\overrightarrow{OP}-(-2,\ 4)$$
$$=2(\overrightarrow{OP}-(-1,\ 2))\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$\overrightarrow{OC}=(-1,\ 2)$라 하면 ㉠에서

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{CP}$

이때 $\overline{CA}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$이므로

$\sqrt{17}-2\le|\overrightarrow{CP}|\le\sqrt{17}+2$

즉, $2(\sqrt{17}-2)\le|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|\le2(\sqrt{17}+2)$이므로

$M=2(\sqrt{17}+2)$, $m=2(\sqrt{17}-2)$

따라서 $M\times m=2(\sqrt{17}+2)\times2(\sqrt{17}-2)=52$

Level **2** **기본 연습** 본문 68~69쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ① **4** 3 **5** ② **6** ③

7 12 **8** 32

1 조건 (가)에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로

$\overline{AB}\perp\overline{AD}$, $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

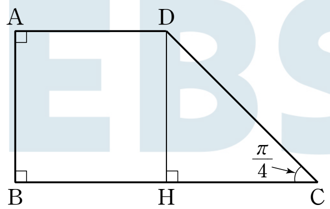
$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=a$라 하고 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{DH}=\overline{HC}=a$

이므로

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{HC}^2+\overline{DH}^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

$\angle DCH=\frac{\pi}{4}$



조건 (나)에서 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=16$이므로

$|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CD}|\cos(\angle DCH)=16$

$2a\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

$a^2=8$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

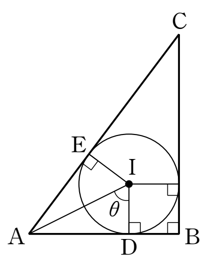
$$\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times(a+2a)\times a$$
$$=\frac{3}{2}a^2=\frac{3}{2}\times 8=12$$

답 ⑤

2 점 I에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{DI}$가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle AID$이다.



직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형 ABC의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{r(6+8+10)}{2}$, $r=2$

직각삼각형 ADI에서 $\overline{AD}=4$, $\overline{ID}=2$이므로

$\overline{AI}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{ID}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\cos\theta=\frac{\overline{ID}}{\overline{AI}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

그러므로

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AI}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta$$
$$=2\sqrt{5}\times 8\times\frac{1}{\sqrt{5}}=16 \quad\cdots\cdots ㉠$$

점 I에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\angle EAI=\angle DAI$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CA}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}+\theta$이다.

이때

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AI}||\overrightarrow{CA}|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=|\overrightarrow{AI}||\overrightarrow{CA}|(-\sin\theta)$$
$$=2\sqrt{5}\times 10\times\left(-\frac{4}{2\sqrt{5}}\right)=-40 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\overrightarrow{AI}\cdot(2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA})=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$=2\times 16-(-40)$$
$$=72$$

답 ④

다른 풀이

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형 ABC의 넓이에서

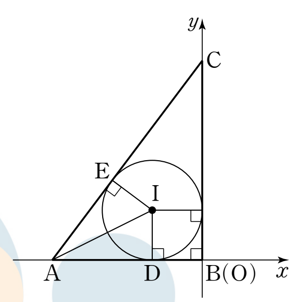
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{r(6+8+10)}{2}$

$r=2$

점 B를 원점, 직선 AB를 x축, 직선 BC를 y축이라 하면 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 2이고 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$이므로

$A(-6, 0)$, $B(0, 0)$, $C(0, 8)$, $I(-2, 2)$



이때

$\overrightarrow{AI}=(-2, 2)-(-6, 0)=(4, 2)$,

$\overrightarrow{BC}=(0, 8)$,

$\overrightarrow{CA}=(-6, 0)-(0, 8)=(-6, -8)$

이므로

$2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=2(0, 8)-(-6, -8)=(6, 24)$

따라서

$$\overrightarrow{AI}\cdot(2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA})=(4, 2)\cdot(6, 24)$$
$$=4\times 6+2\times 24$$
$$=72$$

3 점 P가 호 AB 위의 점이므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\theta=|\overrightarrow{AP}|^2$

이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=20$에서

$|\overrightarrow{AP}|^2=20$, $|\overrightarrow{AP}|=2\sqrt{5}$

직각삼각형 ABP에서

$\overline{BP}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$

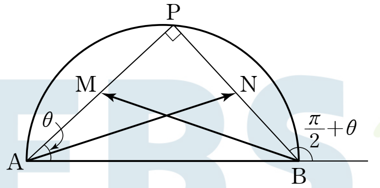
한편, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$이므로

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}$

$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\right)$

$=-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ …… ㉠



이때 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}+\theta$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BP}|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BP}|(-\sin\theta)$

$=6\times4\times\left(-\frac{4}{6}\right)$

$=-16$

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

㉠에서

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\times6^2+\frac{1}{4}\times(-16)-\frac{1}{4}\times20+\frac{1}{4}\times0$

$=-18$

답 ①

4 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{BC}$는 서로 수직이다.

즉, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AB는 원의 지름이고

$\overline{AB}=4$이다.

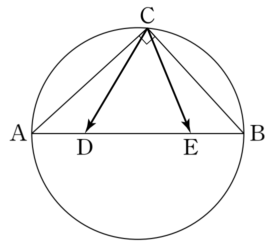
이때 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$에서

$|\overrightarrow{AC}|^2=9$, $|\overrightarrow{AC}|=3$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}$

$=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$



한편, 점 D는 선분 AB를

1 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

점 E는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{CE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$

따라서

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}$

$=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\right)$

$=\frac{3}{16}|\overrightarrow{CB}|^2+\frac{5}{8}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{3}{16}|\overrightarrow{CA}|^2$

$=\frac{3}{16}\times(\sqrt{7})^2+\frac{5}{8}\times0+\frac{3}{16}\times3^2$

$=3$

답 3

5 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

조건 (가)에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로

$\cos\theta>0$

조건 (나)에서 삼각형 OAB의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\times|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\sin\theta=9$

$\frac{1}{2}\times6\times5\times\sin\theta=9$

$\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

한편, 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$와 $\vec{a}+t\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$

이때

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2+(t-1)|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-t|\vec{b}|^2$

$=6^2+(t-1)\times6\times5\times\frac{4}{5}-t\times5^2$

$=-t+12$

이므로

$-t+12=0$

따라서 $t=12$

답 ②

6 점 A$(-1, 2)$를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{OB}=(2, 1)$인 직선 l의 방정식은

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}$$

점 P의 좌표를 (a, b)라 하자.

점 P가 직선 l 위의 점이므로

$\frac{a+1}{2}=\frac{b-2}{1}=t$ (t는 실수)라 하면

$a=2t-1,\ b=t+2$ ⋯⋯ ㉠

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(-1, 2)-(2, 1)=(-3, 1)$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(2t-1, t+2)-(2, 1)$

$\qquad=(2t-3, t+1)$

두 벡터 $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{BP}$가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

즉, $(-3, 1)\cdot(2t-3, t+1)=0$에서

$-3\times(2t-3)+(t+1)=0$

$-5t+10=0,\ t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$a=3,\ b=4$

따라서 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 모든 성분의 합은

$a+b=3+4=7$

답 ③

7 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$이므로 점 P는 점 A$(-1, 2)$를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{OA}$인 직선 위에 있다.

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

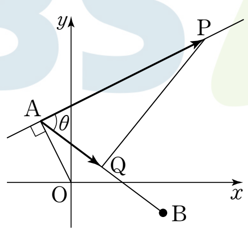
$\quad=\frac{1}{2}(-1, 2)+\frac{1}{2}(3, -1)$

$\quad=\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}$

$\quad=\left(1, \frac{1}{2}\right)-(-1, 2)$

$\quad=\left(2, -\frac{3}{2}\right)$



두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 점 P가 제1사분면 위의 점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=(1, -2)$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AQ}|}$$

$$=\frac{1\times2+(-2)\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\times\sqrt{2^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{5}\times\frac{5}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=6\sqrt{5}$에서

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$

$\qquad=|\overrightarrow{AP}|\times\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{AP}|$

이므로 $\frac{\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{AP}|=6\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}=|\overrightarrow{AP}|=12$

답 12

8 $4|\overrightarrow{OX}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$에서

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|(5, -2)+(-1, 6)|$

$\qquad=|(4, 4)|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

이므로

$4|\overrightarrow{OX}|=4\sqrt{2},\ |\overrightarrow{OX}|=\sqrt{2}$

즉, 점 X가 나타내는 도형 S는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다.

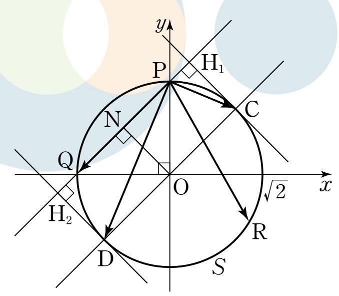
도형 S 위의 두 점 P, Q에 대하여

$|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|=2$, 즉 $|\overrightarrow{PQ}|=2$이고

$\overline{OP}=\overline{OQ}=\sqrt{2}$이므로 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$이다.

직선 PQ와 수직이고 도형 S에 접하는 두 직선이 도형 S와 만나는 두 점을 각각 C, D ($\overline{PC}<\overline{PD}$)라 하자.

점 C에서 도형 S에 접하는 직선이 직선 PQ와 만나는 점을 H_1이라 하고, 점 D에서 도형 S에 접하는 직선이 직선 PQ와 만나는 점을 H_2라 하자.



점 R이 점 D의 위치일 때 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$의 값은 최대이고,

점 R이 점 C의 위치일 때 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$의 값은 최소이다.

이때 선분 PQ의 중점을 N이라 하면

$\overline{\mathrm{PH_2}}=\overline{\mathrm{PN}}+\overline{\mathrm{NH_2}}=1+\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{NH_1}}-\overline{\mathrm{NP}}=\sqrt{2}-1$

이므로

$M=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{PH_2}}|$

$=2\times(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$

$m=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{PH_1}}|$

$=-2\times(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}$

따라서

$(M-m)^2=\{(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})\}^2=(4\sqrt{2})^2=32$

답 32

Level 3 실력 완성			본문 70쪽
1 ③	**2** ⑤	**3** 108	

1 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=(-3)^2+1^2=10$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$에서

$2|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=10$

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=5$

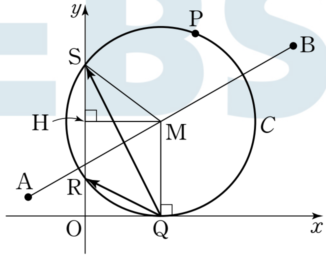
즉, 점 P가 나타내는 도형 C는 점 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이다.

점 M의 좌표가 $\left(4,\ \dfrac{a+1}{2}\right)$이고 도형 C와 x축이 한 점 Q에서 접하고, $a>-1$이므로

$\dfrac{a+1}{2}=5$에서 $a=9$

또 점 Q의 좌표는 $(4,\ 0)$이고, 점 M의 좌표는 $(4,\ 5)$이다.

한편, 점 M에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(0,\ 5)$이다.



$\overline{\mathrm{OR}}<\overline{\mathrm{OS}}$라 하면

$\overline{\mathrm{HS}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MS}}^2-\overline{\mathrm{HM}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

$\overline{\mathrm{HR}}=\overline{\mathrm{HS}}=3$

이므로 두 점 R, S의 좌표는 각각 $(0,\ 2)$, $(0,\ 8)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 2)-(4,\ 0)=(-4,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ 8)-(4,\ 0)=(-4,\ 8)$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QS}}=(-4,\ 2)\cdot(-4,\ 8)$

$=(-4)\times(-4)+2\times8$

$=32$

답 ③

2 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=4$에서

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=4$, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=2$

즉, 점 P는 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}=0$이므로 점 Q는 점 B를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$인 직선 위의 점이다.

점 $\mathrm{B}(2,\ 6)$을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$인 직선의 방정식은

$2(x-2)+6(y-6)=0$, 즉 $x+3y-20=0$

이때 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$와 직선 $x+3y-20=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1\times4+3\times2-20|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

이므로 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원과 직선 $x+3y-20=0$은 만나지 않는다.

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 서로 평행하므로 세 점 O, P, Q는 한 직선 위에 있다.

직선 $y=mx$ (m은 상수)가 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$에 접할 때, m의 값을 구해 보자.

점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 2이므로

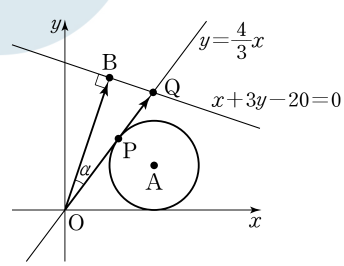
$\dfrac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|4m-2|=2\sqrt{m^2+1}$, $|2m-1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3m^2-4m=0$, $m(3m-4)=0$

$m=0$ 또는 $m=\dfrac{4}{3}$



세 점 O, P, Q가 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 위의 점일 때 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\theta=\alpha$일 때 θ는 최소이고 $\cos\theta$의 값은 최대이다.

$\theta=\alpha$일 때 직선 OQ의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(3,\ 4)$로 놓을 수 있다.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{OB}||\vec{u}|}$$
$$=\frac{2\times3+6\times4}{\sqrt{2^2+6^2}\times\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$=\frac{30}{2\sqrt{10}\times5}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

따라서 $\cos\theta\leq\cos\alpha$이므로 $\cos\theta$의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$이다.

답 ⑤

3 삼각형 ABC에서

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$$

이므로 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$이고

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$$

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{BC}$는 서로 수직이다.

선분 BC의 중점을 E라 하면

$\overline{BC}\perp\overline{AE}$

이므로 점 P는 직선 AE 위에 있다.

이때 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}\leq0$이므로 삼각형 ABC의 외접원이 직선 AE와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하면 점 P는 선분 AF 위에 있다.

즉, 점 P가 나타내는 도형은 선분 AF이다.

조건 (나)에서

$$3\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{QA}$$

이므로

$$3\overrightarrow{CQ}-3\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CQ})$$
$$\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$$

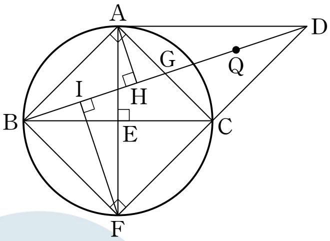
즉, 점 Q는 선분 BD를 3 : 1로 내분하는 점이다.

선분 AC와 선분 BD의 교점을 G라 하면 직각삼각형 ABG에서

$$\overline{BG}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AG}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{BD}=2\sqrt{5}$$
$$\overline{QB}=\frac{3}{4}\overline{BD}=\frac{3}{4}\times2\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$



두 벡터 $\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{DR}$이 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

점 R은 선분 AF 위의 점이므로 두 점 A, F에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$$\overline{DH}\leq|\overrightarrow{DR}|\cos\theta\leq\overline{DI} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 ABG의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AG}=\frac{1}{2}\times\overline{BG}\times\overline{AH}$이므로

$$\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{AH}$$
$$\overline{AH}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

직각삼각형 AHD에서

$$\overline{DH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

삼각형 BFD에서 $\overline{DF}=4$

삼각형 BFD의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{DF}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{FI}$이므로

$$\frac{1}{2}\times2\times4=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\overline{FI}$$
$$\overline{FI}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

직각삼각형 DIF에서

$$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DF}^2-\overline{FI}^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{5} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}\leq|\overrightarrow{DR}|\cos\theta\leq\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

이때

$$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{DR}=|\overrightarrow{QB}||\overrightarrow{DR}|\cos\theta=\frac{3\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{DR}|\cos\theta$$

이므로

$$9\leq\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{DR}\leq12$$

따라서 $M=12$, $m=9$이므로

$$M\times m=12\times9=108$$

답 108

06 공간도형

유제 본문 73~81쪽

1 ③ **2** ③ **3** ⑤ **4** ④ **5** 10 **6** 89

1 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 CI, 직선 DJ, 직선 EK, 직선 FL, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 KL, 직선 LG이므로

$a=8$

직선 AB와 평행한 평면은 평면 DEKJ와 평면 GHIJKL이므로

$b=2$

따라서 $a+b=8+2=10$

답 ③

2 정사각기둥, 정육각기둥과 같이 정n각기둥에서 n이 짝수이면 직선 AB와 평행한 직선은 같은 밑면에 1개, 다른 밑면에 2개 있으므로 모두 3개이고, 정삼각기둥, 정오각기둥과 같이 정n각기둥에서 n이 홀수이면 직선 AB와 평행한 직선은 다른 밑면에 1개만 있다.

n이 짝수이면 정n각기둥에서 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 밑면에 수직인 모서리 중에서 두 점 A, B를 지나지 않는 모서리를 연장한 직선과 직선 AB를 포함하지 않은 밑면의 모서리 중에서 직선 AB와 평행하지 않은 모서리를 연장한 직선이므로 그 개수는

$(n-2)+(n-2)=2n-4$

로 짝수이다.

n이 홀수이면 정n각기둥에서 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 밑면에 수직인 모서리 중에서 두 점 A, B를 지나지 않는 모서리를 연장한 직선과 직선 AB를 포함하지 않은 밑면의 모든 모서리 중에서 직선 AB와 평행하지 않은 모서리를 연장한 직선이므로 그 개수는

$(n-2)+(n-1)=2n-3$

으로 홀수이다.

$n=n_1$일 때, 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수가 19로 홀수이므로 n_1은 홀수이고

$2n_1-3=19$, $n_1=11$

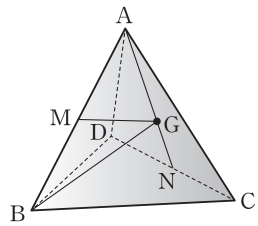
$n=n_2$일 때, 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수가 20으로 짝수이므로 n_2는 짝수이고

$2n_2-4=20$, $n_2=12$

따라서 $n_1+n_2=11+12=23$

답 ③

3 선분 CD의 중점을 N이라 하면



$\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6$

$=3\sqrt{3}$

$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AN}=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$

점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발이 점 G와 같으므로

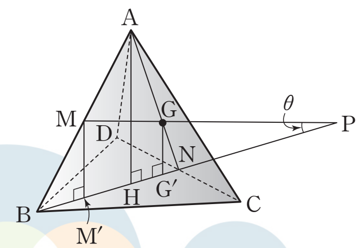
$\cos(\angle MAG)=\cos(\angle BAG)=\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6=3$이므로 삼각형 AMG에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{MG}^2=\overline{AM}^2+\overline{AG}^2-2\times\overline{AM}\times\overline{AG}\times\cos(\angle MAG)$

$=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 3\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=9$

$\overline{MG}=3$



한편, 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심과 같고

$\overline{BH}=\frac{2}{3}\overline{BN}=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\overline{HN}=\overline{BN}-\overline{BH}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

점 M에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 M′이라 하면

$\overline{HM'}=\frac{1}{2}\overline{BH}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

점 G에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 G′이라 하면

$\overline{HG'}=\frac{2}{3}\overline{HN}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{M'G'}=\overline{HM'}+\overline{HG'}=\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

두 직선 MG, M′G′이 만나는 점을 P라 하면 직선 MG와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기는 두 직선 MG, M′G′이 이루는 예각의 크기와 같으므로 $\theta=\angle MPM'$이고, $\overline{MM'}\,/\!/\,\overline{GG'}$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{M'P}}{\overline{MP}}=\frac{\overline{M'G'}}{\overline{MG}}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

답 ⑤

4 두 삼각형 HEP, HGQ에서

$\overline{EP}=\overline{GQ}=1$, $\overline{HE}=\overline{HG}$, $\angle HEP=\angle HGQ=\frac{\pi}{2}$

이므로 두 삼각형 HEP, HGQ는 서로 합동이다.
또 두 삼각형 HRQ, HGQ에서

$\overline{QR}=\overline{QG}=1$, $\angle HRQ=\angle HGQ=\frac{\pi}{2}$, $\overline{HQ}$가 공통

이므로 두 삼각형 HRQ, HGQ는 서로 합동이다. …… ㉠

즉, $\angle EHP=\angle RHQ=\angle GHQ$이고

$\angle EHP+\angle RHQ+\angle GHQ=\frac{\pi}{2}$이므로

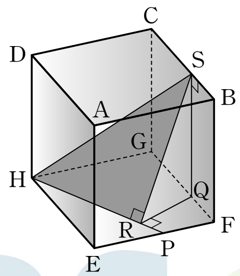
$\angle EHP=\angle RHQ=\angle GHQ=\frac{\pi}{6}$

이때

$\overline{HE}=\dfrac{\overline{EP}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$

이므로 정육면체의 한 모서리의 길이는 $\sqrt{3}$이다.

한편, 점 Q에서 직선 BC에 내린 수선의 발이 S이므로 $\overline{QS}\perp\overline{BC}$이고, $\overline{BC}/\!/\overline{GF}$이므로 $\overline{QS}\perp\overline{GF}$이다.
이때 두 평면 EFGH, BCGF가 서로 수직이므로



$\overline{QS}\perp$(평면 EFGH)

$\overline{QR}=1$, $\overline{QS}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{SR}=\sqrt{\overline{QR}^2+\overline{QS}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

또 $\overline{QR}\perp\overline{HP}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{SR}\perp\overline{HP}$

즉, $\angle HRS=\frac{\pi}{2}$

한편, ㉠에 의하여 $\overline{HR}=\overline{HG}=\sqrt{3}$

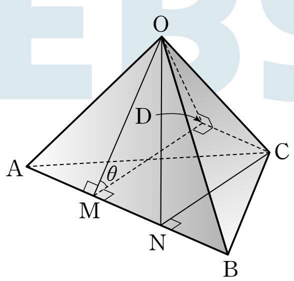
따라서 삼각형 SHR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{HR}\times\overline{SR}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2=\sqrt{3}$

답 ④

5 $\overline{AB}=3$이고 두 점 M, N이 선분 AB를 삼등분하므로

$\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}=1$



평면 ABC 위의 점 D를 사각형 MNCD가 직사각형이 되도록 잡으면 $\overline{MD}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로 평면 OMD는 직선 AB와 서로 수직이다.

이때 $\overline{CD}/\!/\overline{AB}$이므로 $\angle ODC=\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{CD}=\overline{MN}=1$이므로

$\overline{OD}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

한편, 두 평면 OAB, ABC가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\theta=\angle OMD$이고 $\overline{MD}=\overline{NC}=2$이므로 삼각형 OMD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OM}^2+\overline{DM}^2-\overline{OD}^2}{2\times\overline{OM}\times\overline{DM}}=\dfrac{2^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\times2\times2}=\dfrac{5}{8}$

따라서 $16\cos\theta=16\times\frac{5}{8}=10$

답 10

6 $\overline{CG}=4$, $\overline{PC}=1$이므로

$\overline{PG}=\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$

$\overline{HQ}=2$이므로

$\overline{QG}=\sqrt{\overline{HG}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

한편, $\overline{DQ}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$이고

$\overline{DP}=3$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{DQ}^2+\overline{DP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+3^2}=\sqrt{29}$

삼각형 PQG에서 코사인법칙에 의하여

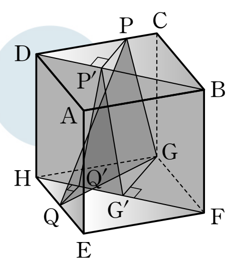
$$\cos(\angle PGQ)=\dfrac{\overline{PG}^2+\overline{QG}^2-\overline{PQ}^2}{2\times\overline{PG}\times\overline{QG}}$$
$$=\dfrac{(\sqrt{17})^2+(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{29})^2}{2\times\sqrt{17}\times2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{85}}{85}$$

$\sin(\angle PGQ)=\sqrt{1-\cos^2(\angle PGQ)}=\dfrac{9\sqrt{85}}{85}$

삼각형 PQG의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{PG}\times\overline{QG}\times\sin(\angle PGQ)$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times2\sqrt{5}\times\frac{9\sqrt{85}}{85}$$
$$=9$$

한편, 두 평면 ABCD, EFGH는 각각 평면 BDHF에 수직이므로 점 P에서 평면 BDHF에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 점 P′은 선분 BD 위에 있고, 두 점 Q, G에서 평면 BDHF에 내린 수선의 발을 각각 Q′, G′이라 하면 두 점 Q′, G′은 선분 FH 위에 있다.



이때 점 G′은 선분 FH의 중점이고, 점 Q′은 선분 G′H의 중점이므로

$\overline{Q'G'}=\frac{1}{4}\overline{HF}=\sqrt{2}$

삼각형 P′Q′G′의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{Q'G'}\times4=2\sqrt{2}$

두 평면 PQG, BDHF가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\cos\theta=\frac{S_2}{S_1}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$이므로

$\cos^2\theta=\frac{8}{81}$

따라서 $p=81$, $q=8$이므로

$p+q=81+8=89$

답 89

Level 1 기초 연습 본문 82~83쪽

1 ③	**2** ③	**3** ③	**4** ④	**5** 23	**6** ③
7 ③					

1 정육면체의 모든 모서리를 연장한 12개의 직선 중에서 직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BC, 직선 EH, 직선 CD, 직선 DH, 직선 GH, 직선 CG이므로

$a=6$

또 직선 AG와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BC, 직선 CD, 직선 DH, 직선 BF, 직선 EF, 직선 EH이므로

$b=6$

한편, 평면 AFG와 평행한 직선은 직선 BC, 직선 EH이므로

$c=2$

따라서 $a+b+c=6+6+2=14$

답 ③

참고

점 A를 지나는 직선 AB, AD, AE와 점 F를 지나는 직선 BF, EF, FG는 직선 AF와 만난다.

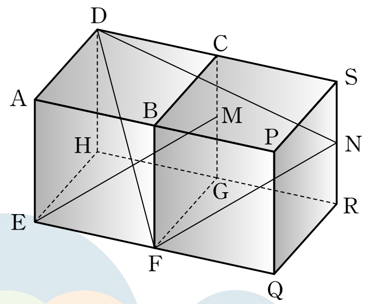
이때 점 A를 지나지 않는 직선 중 직선 AF와 평행한 직선은 없으므로 직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는

$12-6=6$

또 점 A를 지나는 직선 AB, AD, AE와 점 G를 지나는 직선 CG, FG, GH는 직선 AG와 만나고, 점 A와 점 G를 지나지 않는 직선 중 직선 AG와 평행한 직선은 없으므로 직선 AG와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는

$12-6=6$

2 그림과 같이 공간의 네 점 P, Q, R, S를 입체도형 BPSC−FQRG가 정육면체가 되도록 잡고, 모서리 RS의 중점을 N이라 하자.



$\overline{EF}\,/\!/\,\overline{MN}$, $\overline{EF}=\overline{MN}$이므로 사각형 EFNM은 평행사변형이다. 즉, 두 직선 EM, FN은 서로 평행하므로 두 직선 DF, EM이 이루는 각의 크기는 두 직선 DF, FN이 이루는 각의 크기와 같다.

정육면체 ABCD−EFGH의 한 모서리의 길이를 a라 하면 $\overline{DE}=\sqrt{2}a$이므로

$\overline{DF}=\sqrt{\overline{DE}^2+\overline{EF}^2}=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2+a^2}=\sqrt{3}a$

또 $\overline{QN}=\sqrt{\overline{QR}^2+\overline{RN}^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$이므로

$\overline{FN}=\sqrt{\overline{FQ}^2+\overline{QN}^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}=\frac{3}{2}a$

한편,

$\overline{DN}=\sqrt{\overline{DS}^2+\overline{SN}^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}a$

이므로 삼각형 DFN에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle DFN)=\frac{\overline{DF}^2+\overline{FN}^2-\overline{DN}^2}{2\times\overline{DF}\times\overline{FN}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}a)^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{17}}{2}a\right)^2}{2\times\sqrt{3}a\times\frac{3}{2}a}$$

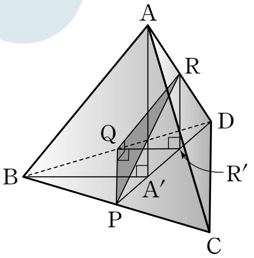
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$\theta=\angle DFN$이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{9}$

답 ③

3 두 점 A, R에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 A′, R′이라 하면 점 A′은 삼각형 BCD의 무게중심과 같고, 점 R′은 선분 A′D의 중점과 같다.



이때

$\overline{BQ}:\overline{QD}=\overline{A'R'}:\overline{R'D}$이므로 $\overline{BA'}\,/\!/\,\overline{QR'}$이고, $\overline{BA'}\perp\overline{PQ}$이므로 $\overline{QR'}\perp\overline{PQ}$이다.

$\overline{RR'}\perp$(평면 BCD)이고 $\overline{QR'}\perp\overline{PQ}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{RQ}\perp\overline{PQ}$

한편, 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 $6a$라 하면

$\overline{QR'}=\frac{1}{2}\overline{BA'}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6a=\sqrt{3}a$

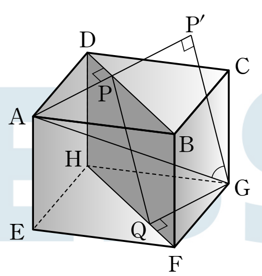
$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3a$

따라서 두 평면 BCD, PQR이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\cos\theta=\frac{\overline{QR'}}{\overline{QR}}=\frac{\sqrt{3}a}{3a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ③

4 두 평면 ABCD, EFGH와 평면 DHFB가 각각 서로 수직이므로 두 점 A, G에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면 두 점 P, Q는 각각 선분 BD와 선분 FH 위에 있다.



$\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=3$이므로 $\overline{BD}=5$이고

$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AP}$에서

$\overline{AP}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$

두 삼각형 DAB, FGH가 서로 합동이므로

$\overline{GQ}=\overline{AP}=\frac{12}{5}$

선분 AP의 연장선 위에 점 P′을 $\overline{P'P}=\overline{AP}$가 되도록 잡으면 사각형 PQGP′이 직사각형이므로 직선 AG와 평면 DHFB가 이루는 예각의 크기 θ는

$\theta=\angle AGP'$

이때

$\overline{AP'}=2\overline{AP}=\frac{24}{5}$

이고 $\sin\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{AP'}}{\overline{AG}}=\frac{4}{5}$

$\overline{AG}=\frac{24}{5}\times\frac{5}{4}=6$

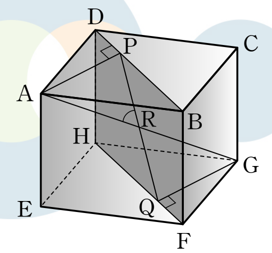
$\overline{EG}=5$이므로 직각삼각형 AEG에서

$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AG}^2-\overline{EG}^2}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

답 ④

참고

$\overline{AP}\,/\!/\,\overline{GQ}$이므로 네 점 A, P, G, Q는 한 평면 위에 있고 두 직선 AG, PQ는 한 점에서 만난다. 두 직선 AG, PQ의 교점을 R이라 하면 직선 AG와 평면 DHFB가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\theta=\angle ARP$이다.



5 $\overline{AB}=x$, $\overline{BF}=y$라 하자.

점 C에서 평면 AEFB에 내린 수선의 발이 B이므로 삼각형 AFC의 평면 AEFB 위로의 정사영은 삼각형 AFB이다.

이때 이 정사영의 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}xy=3$, $xy=6$ ...... ㉠

마찬가지로 삼각형 AFC의 평면 BFGC 위로의 정사영은 삼각형 BFC이고, 삼각형 AFC의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 ABC이다.

이때 이 두 정사영의 넓이의 합이 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$이고 $\overline{AD}=\sqrt{6}$이므로

$\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{6}+\frac{1}{2}\times y\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}(x+y)=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$x+y=3\sqrt{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\overline{AB}<\overline{AE}$이므로

$x=\sqrt{3}$, $y=2\sqrt{3}$

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{15}$,

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2}=3$,

$\overline{CF}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{BF}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(2\sqrt{3})^2}=3\sqrt{2}$

이므로 삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACF)=\frac{\overline{AC}^2+\overline{CF}^2-\overline{AF}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{CF}}$$
$$=\frac{3^2+(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{15})^2}{2\times3\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\angle ACF)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ACF)}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

삼각형 AFC의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CF}\times\sin(\angle ACF)$

$=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}$

$=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

삼각형 ABC의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

두 평면 ABC, AFC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{14}}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

삼각형 ABC의 평면 AFC 위로의 정사영의 넓이 S는

$S=S_2\cos\theta=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{7}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$

이므로

$S^2=\frac{9}{14}$

따라서 $p=14$, $q=9$이므로 $p+q=14+9=23$

답 23

6 $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{AD}=\overline{BE}$, $\angle CAD=\angle CBE=\frac{\pi}{2}$이므로 두 삼각형 CAD, CBE는 서로 합동이다.

그러므로 $\overline{CD}=\overline{CE}$

$\overline{CD}=\overline{CE}=x$라 하면

$\overline{DE}=\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\cos(\angle DCE)=\frac{17}{19}$이므로

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2-2\times\overline{CD}\times\overline{CE}\times\cos(\angle DCE)$

$(2\sqrt{3})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\frac{17}{19}$

$\frac{4}{19}x^2=12$, $x^2=57$

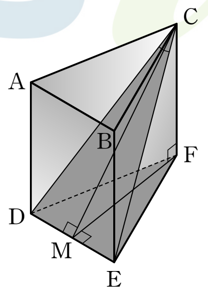
즉, $\overline{CD}=\overline{CE}=\sqrt{57}$

선분 DE의 중점을 M이라 하면

$\overline{CM}\perp\overline{DE}$이므로

$\overline{CM}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{DM}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{57})^2-(\sqrt{3})^2}=3\sqrt{6}$



두 삼각형 CDE와 DEF의 넓이의 비가 3 : 2이므로 두 평면 CDE, DEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 DEF의 넓이})}{(\text{삼각형 CDE의 넓이})}=\frac{2}{3}$$

이때 $\theta=\angle CMF$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{FM}}{\overline{CM}}=\frac{2}{3}$에서

$\overline{FM}=\frac{2}{3}\times3\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

$\overline{CF}=\sqrt{\overline{CM}^2-\overline{FM}^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{6})^2-(2\sqrt{6})^2}$

$=\sqrt{30}$

따라서 삼각기둥의 부피는

$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{FM}\times\overline{CF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{30}$

$=12\sqrt{15}$

답 ③

7 조건 (가)에서 직선 CD의 평면 α 위로의 정사영이 점 A를 지나므로 평면 CDA는 평면 α와 서로 수직이고, 직선 AD는 평면 α와 서로 수직이다.

즉, 직선 CD의 평면 α 위로의 정사영은 직선 AC이고 직선 AC가 원 O의 중심을 지나므로 선분 AC는 원 O의 지름이다.

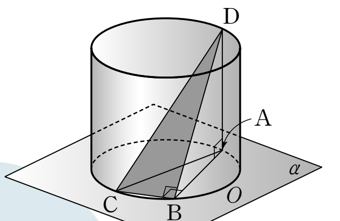
즉, $\overline{AC}=2\sqrt{3}$

이때 원기둥의 높이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=2\sqrt{2}$

직각삼각형 DCA에서

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$



한편, 선분 AC가 원 O의 지름이므로 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이고 조건 (나)에서 $\overline{AB}=\sqrt{10}$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{2}$

이때 $\overline{AD}\perp\alpha$, $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DB}\perp\overline{BC}$이고

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

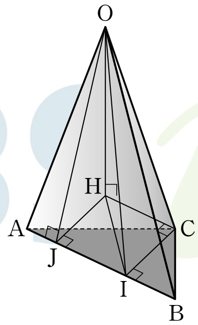
$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=3$

답 ③

Level **2** **기본 연습** 본문 84~85쪽

1 ③ **2** ② **3** 72 **4** ② **5** 27 **6** 17

1 직각삼각형 ABC에서



$\overline{AC}=2\sqrt{3}$, $\overline{BC}=\sqrt{6}$, $\angle C=\frac{\pi}{2}$

이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2}$

$=3\sqrt{2}$

$\overline{AC}\times\overline{BC}=\overline{AB}\times\overline{CI}$에서

$\overline{CI}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=2$

조건 (가)에서

$\overline{CH}=\overline{CI}$, $\overline{CH}\perp\overline{CI}$이므로

$\overline{HI}=\sqrt{2}\,\overline{CI}=2\sqrt{2}$

$\overline{OH}\perp\overline{HI}$이고 조건 (나)에서 $\overline{OI}=6$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OI}^2-\overline{HI}^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}$

한편, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 J라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OJ}\perp\overline{AB}$

이고 $\overline{HJ}=\overline{CI}$이므로

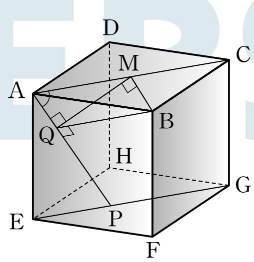
$\overline{OJ}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{HJ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2+2^2}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OJ}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=12$

답 ③

2 평면 ABCD와 평면 AEGC는 서로 수직이므로 점 B에서 평면 AEGC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 선분 AC의 중점이다.



조건 (가)에서 점 C와 직선 AP 사이의 거리가 1이므로 점 M에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\overline{MQ}=\frac{1}{2}$

조건 (나)에서 $\angle PAC=\frac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 AQM에서

$\overline{AM}=\frac{\overline{MQ}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 즉 $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

한편, $\overline{MB}\perp$(평면 AEGC), $\overline{MQ}\perp\overline{AP}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{BQ}\perp\overline{AP}$

따라서 점 B와 직선 AP 사이의 거리는

$\overline{BQ}=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{BM}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{6}$

답 ②

3 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 C′이라 하자.

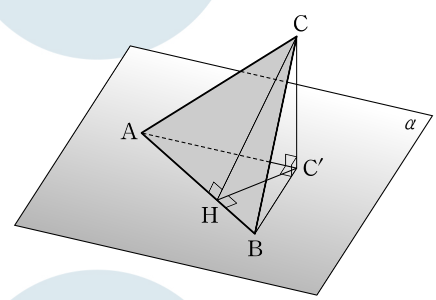
$\angle BAC'=\frac{\pi}{2}$이면 삼수선의 정리에 의하여 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$

이고, $\angle ABC'=\frac{\pi}{2}$이면 삼수선의 정리에 의하여

$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이지만 삼각형 ABC가 예각삼각형이므로

$\angle BAC'\neq\frac{\pi}{2}$, $\angle ABC'\neq\frac{\pi}{2}$이다.

이때 조건 (가)에서 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영이 직각삼각형이므로 $\angle AC'B=\frac{\pi}{2}$이다.



직선 BC가 평면 α와 이루는 예각의 크기 θ는

$\theta=\angle CBC'$

이고 조건 (나)에서 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 직각삼각형 CBC′에서

$\overline{BC'}=\overline{BC}\cos\theta=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{6}$

$\overline{CC'}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BC'}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 ABC′에서

$\overline{AC'}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC'}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$

이므로 점 C′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AC'}\times\overline{BC'}=\overline{AB}\times\overline{C'H}$에서

$\overline{C'H}=\dfrac{\overline{AC'}\times\overline{BC'}}{\overline{AB}}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=2$

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CC'}^2+\overline{C'H}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4=6\sqrt{2}$

따라서 $S^2=(6\sqrt{2})^2=72$

답 72

4 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 $3a$ $(a>0)$이라 하면 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

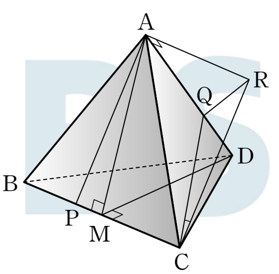
$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{BP}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BP}\times\cos(\angle ABP)$

$=(3a)^2+a^2-2\times3a\times a\times\dfrac{1}{2}$

$=7a^2$

$\overline{AP}=\sqrt{7}a$

마찬가지 방법으로 $\overline{CQ}=\sqrt{7}a$임을 알 수 있다.



모서리 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{BC}\perp\overline{AM}$, $\overline{BC}\perp\overline{DM}$이므로 평면 AMD는 직선 BC와 서로 수직이고 평면 AMD는 직선 AD를 포함하므로

$\overline{BC}\perp\overline{AD}$

이때 공간에 점 R을 사각형 APCR이 평행사변형이 되도록 잡으면

$\overline{AP}\,/\!/\,\overline{RC}$

이므로 두 직선 AP, CQ가 이루는 예각의 크기 θ는

$\theta=\angle RCQ$

이때 $\overline{AR}=\overline{PC}=\overline{AQ}$이고 $\overline{PC}\perp\overline{AQ}$에서 $\overline{AR}\perp\overline{AQ}$이므로

$\overline{QR}=\sqrt{2}\,\overline{AQ}=2\sqrt{2}a$

따라서 삼각형 RCQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{RC}^2+\overline{QC}^2-\overline{QR}^2}{2\times\overline{RC}\times\overline{QC}}$

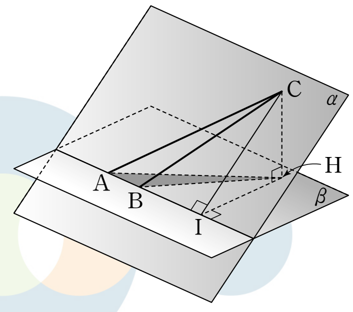
$=\dfrac{(\sqrt{7}a)^2+(\sqrt{7}a)^2-(2\sqrt{2}a)^2}{2\times\sqrt{7}a\times\sqrt{7}a}$

$=\dfrac{3}{7}$

답 ②

5 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{CI}$



$\angle ABC=\dfrac{2}{3}\pi$에서 $\angle CBI=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\overline{BC}=x$로 놓으면

$\overline{BI}=\overline{BC}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{x}{2}$, $\overline{CI}=\overline{BC}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$\overline{AB}=1$이므로

$\overline{AI}=\overline{AB}+\overline{BI}=1+\dfrac{x}{2}$

조건 (가)에서 삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times1\times\overline{HI}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $\overline{HI}=\sqrt{7}$

직각삼각형 AIH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AI}^2+\overline{HI}^2}$

$=\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^2+(\sqrt{7})^2}$

$=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x+8}$

직선 AC와 평면 β가 이루는 각의 크기 θ_1은

$\theta_1=\angle CAH$

이고 조건 (나)에서 $\tan\theta_1=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$이므로

$\overline{CH}=\overline{AH}\tan\theta_1=\dfrac{\sqrt{5}}{4}\times\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x+8}$

직각삼각형 CIH에서

$\overline{CI}^2=\overline{CH}^2+\overline{HI}^2$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\times\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x+8}\right)^2+(\sqrt{7})^2$

$43x^2-20x-608=0$

$(43x+152)(x-4)=0$

$x>0$이므로 $x=4$

$\overline{BI}=2$이므로

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{BI}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{7})^2}=\sqrt{11}$

$\overline{BC}=4$이고 직선 BC와 평면 β가 이루는 각의 크기 θ_2는

$\theta_2=\angle CBH$

이므로

$\cos^2\theta_2=\left(\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BC}}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{11}}{4}\right)^2=\dfrac{11}{16}$

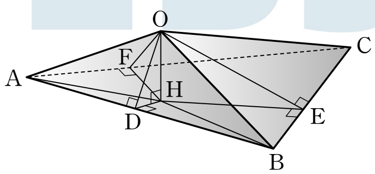
따라서 $p=16$, $q=11$이므로

$p+q=16+11=27$

답 27

6 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 8이므로 정삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AB}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2=16\sqrt{3}$



점 H에서 세 직선 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면 점 H가 삼각형 ABC의 내부에 있으므로 세 점 D, E, F는 각각 세 선분 AB, BC, CA 위의 점이다.

조건 (가)에서 세 삼각형 HAB, HBC, HCA의 넓이의 비가 1 : 4 : 3이고 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=8$이므로

$\overline{HD}:\overline{HE}:\overline{HF}=1:4:3$

이때 $\overline{HD}=a$, $\overline{HE}=4a$, $\overline{HF}=3a\ (a>0)$으로 놓으면

세 삼각형 HAB, HBC, HCA의 넓이의 합은

$\dfrac{1}{2}\times 8\times(a+4a+3a)=32a$

즉, $32a=16\sqrt{3}$에서

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

한편, $\overline{OH}\perp$(평면 ABC)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OD}\perp\overline{AB}$, $\overline{OE}\perp\overline{BC}$

조건 (나)에서 두 삼각형 OAB, OBC의 넓이의 비가 1 : 2이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\overline{OD}:\overline{OE}=1:2$ ...... ㉠

$\overline{OH}=b\ (b>0)$으로 놓으면 직각삼각형 ODH에서

$\overline{OD}=\sqrt{\overline{HD}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+b^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}+b^2}$

직각삼각형 OHE에서

$\overline{OE}=\sqrt{\overline{HE}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+b^2}=\sqrt{12+b^2}$

㉠에서 $\overline{OD}^2:\overline{OE}^2=1:4$이므로

$4\left(\dfrac{3}{4}+b^2\right)=12+b^2$, $3b^2=9$

$b=\sqrt{3}$

직각삼각형 ODH에서

$\overline{OD}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{DH}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

두 평면 OAB, HAB가 이루는 각의 크기는 ∠ODH의 크기와 같으므로

$\cos(\angle ODH)=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{OD}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 HAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

이므로 삼각형 HAB의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이 S는

$S=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

그러므로 $S^2=\left(\dfrac{2\sqrt{15}}{5}\right)^2=\dfrac{12}{5}$

따라서 $p=5$, $q=12$이므로

$p+q=5+12=17$

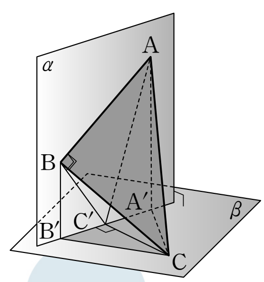
답 17

Level **3** **실력 완성** 본문 86쪽

1 ③ **2** ③ **3** ④

1 두 평면 α, β가 서로 수직이므로 두 점 A, B의 평면 β 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 두 점 A′, B′은 두 평면 α, β의 교선 위의 점이다.

삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영 A′B′C가 넓이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형이므로



$\overline{A'B'}=2$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{B'C}$이므로

$\overline{A'B}=\overline{BC}$

이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\overline{AB}=\overline{A'B}$이므로

$\overline{AA'}=2\overline{BB'}$

또 $\overline{AC}=\sqrt{2}\,\overline{BC}$이므로 $\overline{AC}^2=2\overline{BC}^2$에서

$\overline{AA'}^2+\overline{A'C}^2=2(\overline{BB'}^2+\overline{B'C}^2)$

$4\overline{BB'}^2+4=2(\overline{BB'}^2+4)$

$\overline{BB'}^2=2$

$\overline{BB'}=\sqrt{2}$

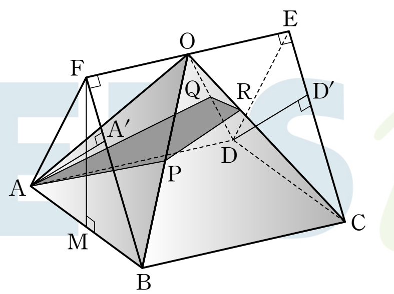
$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{\overline{BB'}^2+\overline{B'C}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$

점 C의 평면 α 위로의 정사영을 C′이라 하면 두 평면 α, β가 서로 수직이므로 점 C′은 직선 A′B′ 위의 점이고, 삼각

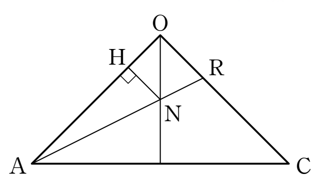
형 A′B′C가 정삼각형이므로 점 C′은 선분 A′B′의 중점과 일치한다.
이때 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{BC'}\perp\overline{AB}$
직각삼각형 BB′C′에서
$\overline{BC'}=\sqrt{\overline{BB'}^2+\overline{B'C'}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$
$\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{AB}\perp\overline{BC'}$이므로 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여
$\theta=\angle CBC'$
따라서 $\cos\theta=\cos(\angle CBC')=\dfrac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 ③

2 평면 OBC 위에 사각형 BCEF가 직사각형이고 점 O가 선분 EF의 중점이 되도록 두 점 E, F를 잡으면
$\overline{BF}=\overline{CE}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

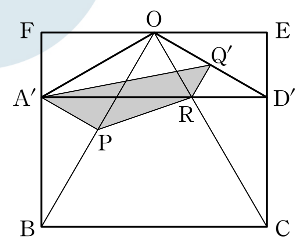


$\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{BF}\perp\overline{BC}$이므로 두 평면 ABF, BCEF는 서로 수직이고 점 A에서 평면 BCEF에 내린 수선의 발을 A′이라 하면 점 A′은 선분 BF 위에 있다.
선분 AB의 중점을 M이라 하면
$\overline{FM}=\sqrt{\overline{BF}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$
$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{FM}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{AA'}$이므로
$\overline{AA'}=\dfrac{6\times3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$
$\overline{FA'}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AA'}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$
$\overline{BA'}=\overline{BF}-\overline{FA'}=2\sqrt{3}$



한편, 선분 PQ의 중점을 N이라 하고 점 N에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{ON}=\dfrac{1}{2}\overline{FM}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
이므로
$\overline{OH}=\overline{NH}=\dfrac{3}{2}$, $\overline{AH}=\dfrac{9}{2}$
$\overline{AH}:\overline{HN}=\overline{AO}:\overline{OR}$이므로
$\overline{OR}=\dfrac{\frac{3}{2}\times6}{\frac{9}{2}}=2$
두 점 D, Q에서 평면 BCEF에 내린 수선의 발을 각각 D′, Q′이라 하면 점 Q′은 선분 OD′ 위에 있고, 점 Q가 선분 OD의 중점이므로 점 Q′은 선분 OD′의 중점이다.



사각형 APRQ의 평면 OBC 위로의 정사영은 사각형 A′PRQ′이고, 이 사각형의 넓이는 세 삼각형 OA′P, OPR, ORQ′의 넓이의 합에서 삼각형 OA′Q′의 넓이를 뺀 것과 같다.

(삼각형 OA′P의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times$(삼각형 OA′B의 넓이)
$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\right)$
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(삼각형 OPR의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times$(삼각형 OBC의 넓이)
$=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}\right)$
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(삼각형 ORQ′의 넓이)$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times$(삼각형 OCD′의 넓이)
$=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\right)$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(삼각형 OA′Q′의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times$(삼각형 OA′D′의 넓이)
$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}\right)$
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는
$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

답 ③

3 $\overline{AB}=4$이고 조건 (가)에서 직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발 B′에 대하여 $\angle BAB'=\frac{\pi}{6}$이다.

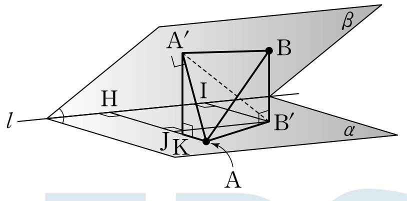
이때

$$\overline{BB'}=\overline{AB}\sin(\angle BAB')$$
$$=4\sin\frac{\pi}{6}=4\times\frac{1}{2}=2,$$
$$\overline{AB'}=\overline{AB}\cos(\angle BAB')$$
$$=4\cos\frac{\pi}{6}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

이므로 삼각형 BAB′의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB'}\times\overline{BB'}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에서 $\overline{AH}=3\sqrt{3}$이다.



점 B′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{BI}\perp l$이다.

이때 $\angle BIB'$은 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 $\frac{\pi}{6}$와 같으므로

$$\overline{B'I}=\frac{\overline{BB'}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}$$

점 B′에서 직선 AH에 내린 수선의 발을 J라 하면

$$\overline{JH}=\overline{B'I}=2\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{AJ}=\overline{AH}-\overline{JH}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

직각삼각형 JAB′에서

$$\overline{B'J}=\sqrt{\overline{AB'}^2-\overline{AJ}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$$

한편, 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발이 A′이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{A'H}\perp l$이다.

이때 $\angle A'HA$는 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 $\frac{\pi}{6}$와 같으므로 $\angle A'AH=\frac{\pi}{3}$이다.

점 A′에서 평면 α에 내린 수선의 발을 K라 하면

$$\overline{AK}=\overline{AA'}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\left(\overline{AH}\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

이므로 삼각형 KAB′의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AK}\times\overline{B'J}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times3=\frac{9\sqrt{3}}{8}$$

한편, 점 K와 직선 AB′ 사이의 거리를 s라 하면 삼각형 KAB′의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB'}\times s$이므로

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times s=\frac{9\sqrt{3}}{8}$$
$$s=\frac{9}{8}$$

즉, 점 K와 직선 AB′ 사이의 거리는 $\frac{9}{8}$이다.

이때 직선 A′K와 평면 BAB′은 모두 평면 α에 수직이므로 점 A′과 평면 BAB′ 사이의 거리는 점 K와 평면 BAB′ 사이의 거리와 같고, 이는 점 K와 직선 AB′ 사이의 거리와 같다.

따라서 사면체 A′ABB′의 밑면을 삼각형 BAB′으로 놓으면 높이는 $\frac{9}{8}$이므로 사면체 A′ABB′의 부피는

$$\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{9}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

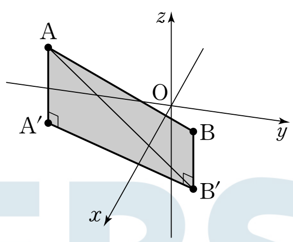
답 ④

07 공간좌표

유제 본문 89~97쪽

1 ② **2** 52 **3** ⑤ **4** ② **5** ⑤ **6** 500
7 ②

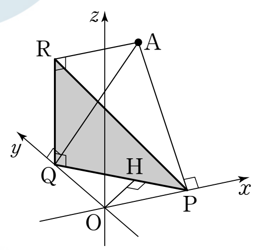
1 점 A′은 점 A(a, -5, 4)에서 xy평면에 내린 수선의 발이므로 점 A′의 좌표는 (a, -5, 0)이고
$\overline{\text{AA}'}=|4|=4$
점 B′은 점 B(7, a, a)에서 xy평면에 내린 수선의 발이므로 점 B′의 좌표는 (7, a, 0)이고 $a>0$이므로
$\overline{\text{BB}'}=|a|=a$



두 점 A′(a, -5, 0), B′(7, a, 0)에 대하여
$\overline{\text{A}'\text{B}'}=\sqrt{(7-a)^2+\{a-(-5)\}^2+(0-0)^2}$
$=\sqrt{2a^2-4a+74}$
$\angle\text{AA}'\text{B}'=\frac{\pi}{2}$이고 삼각형 AA′B의 넓이가 $8\sqrt{5}$이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AA}'}\times\overline{\text{A}'\text{B}'}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{2a^2-4a+74}=8\sqrt{5}$
$\sqrt{2a^2-4a+74}=4\sqrt{5}$
양변을 제곱하면
$2a^2-4a+74=80$
$a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0$
$a>0$이므로 $a=3$
즉, $\overline{\text{BB}'}=a=3$, $\overline{\text{A}'\text{B}'}=\sqrt{2a^2-4a+74}=4\sqrt{5}$
삼각형 AB′B의 밑변을 선분 BB′이라 하면 높이는 $\overline{\text{A}'\text{B}'}$이므로 삼각형 AB′B의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\text{A}'\text{B}'}\times\overline{\text{BB}'}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times3=6\sqrt{5}$

답 ②

2 점 P는 점 A(a, $\sqrt{30}$, b) ($a>0$, $b>0$)에서 x축에 내린 수선의 발이므로 점 P의 좌표는
(a, 0, 0)
점 Q는 점 A에서 y축에 내린 수선의 발이므로 점 Q의 좌표는
(0, $\sqrt{30}$, 0)
점 R은 점 A에서 yz평면에 내린 수선의 발이므로 점 R의 좌표는
(0, $\sqrt{30}$, b)
직선 QR은 yz평면 위에 있고, xy평면과 yz평면의 교선인 y축에 수직이므로
$\overline{\text{QR}}\perp$($xy$평면)
따라서 직선 QR을 포함한 평면 PQR은 xy평면과 서로 수직이며 이때 점 O에서 평면 PQR에 내린 수선의 발 H는 평면 PQR과 xy평면의 교선인 직선 PQ 위에 있다.



두 점 P, Q의 좌표가 각각 (a, 0, 0), (0, $\sqrt{30}$, 0)이므로
$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{(0-a)^2+(\sqrt{30}-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{a^2+30}$
이고, $\overline{\text{OH}}=2\sqrt{3}$이므로
$\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{OQ}}=\overline{\text{PQ}}\times\overline{\text{OH}}$에서
$\overline{\text{OH}}=\frac{\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{OQ}}}{\overline{\text{PQ}}}=\frac{\sqrt{30}a}{\sqrt{a^2+30}}=2\sqrt{3}$
$\sqrt{30}a=2\sqrt{3(a^2+30)}$
양변을 제곱하면
$30a^2=12(a^2+30)$
$a^2=20$
$a>0$이므로 $a=2\sqrt{5}$
$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{a^2+30}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+30}=5\sqrt{2}$
한편, 직선 PQ는 xy평면 위에 있으므로
$\overline{\text{PQ}}\perp\overline{\text{QR}}$
$b>0$이므로 $\overline{\text{QR}}=|b|=b$
삼각형 PQR의 넓이가 20이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{\text{PQ}}\times\overline{\text{QR}}=\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times b=20$
에서 $b=4\sqrt{2}$
따라서 $a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2+(4\sqrt{2})^2=20+32=52$

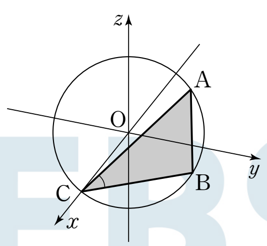
답 52

3 y축 위의 점 P의 좌표를 (0, a, 0)이라 하면
$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{BP}}$에서 $\overline{\text{AP}}^2=\overline{\text{BP}}^2$이므로

$(3-0)^2+(-4-a)^2+(6-0)^2$
$=(-4-0)^2+(1-a)^2+(2-0)^2$
$a^2+8a+61=a^2-2a+21$
$10a=-40$
$a=-4$
즉, 점 P의 좌표는 $(0,\ -4,\ 0)$이다.
$\overline{AP}=\sqrt{(3-0)^2+\{-4-(-4)\}^2+(6-0)^2}=3\sqrt{5}$
$\overline{BP}=\overline{AP}=3\sqrt{5}$
$\overline{AB}=\sqrt{(-4-3)^2+\{1-(-4)\}^2+(2-6)^2}=3\sqrt{10}$
$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이므로 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$
따라서 삼각형 ABP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BP}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=\frac{45}{2}$

답 ⑤

4



$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(4-3)^2+(0-3)^2}=\sqrt{19}$
$\overline{BC}=\sqrt{(5-2)^2+(0-4)^2+(0-0)^2}=5$
$\overline{AC}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(0-3)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{6}$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB)=\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}=\frac{(3\sqrt{6})^2+5^2-(\sqrt{19})^2}{2\times3\sqrt{6}\times5}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin(\angle ACB)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ACB)}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=2R$$

$$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin(\angle ACB)}=\frac{\sqrt{19}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{57}}{2}$$

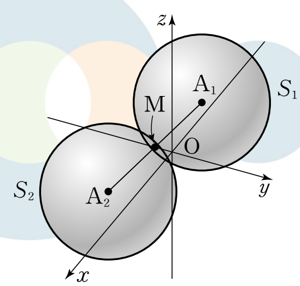
따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는
$\pi\times\left(\frac{\sqrt{57}}{2}\right)^2=\frac{57}{4}\pi$

답 ②

5 $\angle ABC=\angle ABD=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$이므로 세 직선 BC, BD, AB를 각각 x축, y축, z축이 되도록, 점 B가 원점에 오도록 삼각뿔 A$-$BCD를 좌표공간에 놓으면 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\overline{BD}=3$이므로
$A(0,\ 0,\ 5)$, $C(4,\ 0,\ 0)$, $D(0,\ 3,\ 0)$
이때 삼각형 ACD의 무게중심 G의 좌표는
$\left(\frac{0+4+0}{3},\ \frac{0+0+3}{3},\ \frac{5+0+0}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{5}{3}\right)$
이므로
$\overline{BG}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

6



구 S_1의 방정식
$x^2+2ax+y^2-4y+z^2-10z+a^2-21=0$
을 정리하면
$(x+a)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=50$
이므로 구 S_1의 중심 A_1의 좌표는 $(-a,\ 2,\ 5)$이고 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$이다.
구 S_2의 방정식
$x^2-6x+y^2+12y+z^2+10z+b=0$
을 정리하면
$(x-3)^2+(y+6)^2+(z+5)^2=70-b$
이므로 구 S_2의 중심 A_2의 좌표는 $(3,\ -6,\ -5)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{70-b}$이다.
선분 A_1A_2의 중점을 M이라 하면
$\overline{A_1M}=\overline{A_2M}$
이고 구 S_1이 점 M을 지나므로 선분 A_1M의 길이는 구 S_1의 반지름의 길이와 같다.
즉, $\overline{A_1M}=5\sqrt{2}$이다.

$\overline{A_1A_2}=2\overline{A_1M}=10\sqrt{2}$이므로

$\overline{A_1A_2}=\sqrt{\{3-(-a)\}^2+(-6-2)^2+(-5-5)^2}$

$=\sqrt{a^2+6a+173}=10\sqrt{2}$

에서 $a^2+6a+173=200$

$a^2+6a-27=0$, $(a-3)(a+9)=0$

$a>0$이므로 $a=3$

한편, 구 S_2도 점 M을 지나므로 구 S_2의 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$이다.

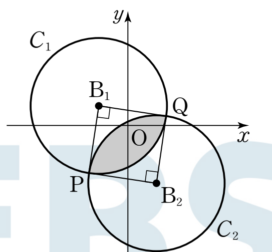
즉, $\sqrt{70-b}=5\sqrt{2}$에서

$70-b=50$

$b=20$

구 S_1의 xy평면 위로의 정사영인 원 C_1은 중심의 좌표가 $(-3,\ 2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원이고, 구 S_2의 xy평면 위로의 정사영인 원 C_2는 중심의 좌표가 $(3,\ -6,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$인 원이다.

두 점 $(-3,\ 2,\ 0)$, $(3,\ -6,\ 0)$을 각각 B_1, B_2라 하자.



$\overline{B_1B_2}=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+(-6-2)^2}=10$

이고 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이가 모두 $5\sqrt{2}$이므로 두 원 C_1, C_2는 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점을 P, Q라 하면

$\angle PB_1Q=\frac{\pi}{2}$

그러므로 도형 C_1의 내부와 도형 C_2의 내부의 공통부분의 넓이는

$2\times\left\{\frac{1}{2}\times(5\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times(5\sqrt{2})^2\right\}=25\pi-50$

따라서 $p=25$, $q=50$이므로

$\frac{b}{a}\times(p+q)=\frac{20}{3}\times(25+50)=500$

답 500

7 구 S의 중심을 O′이라 하면 점 O′의 좌표는 $(a,\ b,\ c)$이다.
조건 (가)에서 구 S와 y축이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로 구 S의 중심 O′에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이고,

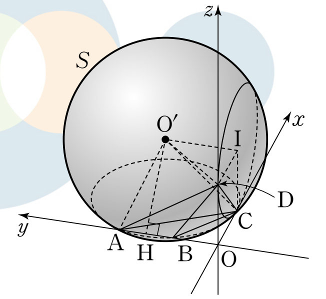
$\overline{AB}=2$에서 $\overline{AH}=1$

$\overline{AO'}=\sqrt{15}$이므로 직각삼각형 AHO′에서

$\overline{HO'}=\sqrt{\overline{AO'}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-1^2}=\sqrt{14}$

한편, 조건 (나)에서 구 S와 x축이 점 C에서만 만나므로 직선 CO′은 x축과 수직이고, 구 S와 z축이 점 D에서만 만나므로 직선 DO′은 z축과 수직이다.

이때 점 O′에서 zx평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 직선 CI와 x축은 서로 수직이고, 직선 DI와 z축은 서로 수직이다.



한편, 두 삼각형 CO′I, DO′I에서

$\overline{CO'}=\overline{DO'}$, $\angle CIO'=\angle DIO'=\frac{\pi}{2}$, $\overline{O'I}$는 공통이므로

두 삼각형 CO′I, DO′I는 서로 합동이다.

그러므로 $\overline{CI}=\overline{DI}$이다.

이때 $a>0$, $c>0$이므로 $\overline{CI}=c$, $\overline{DI}=a$이고

$\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{14}$, $a=c$에서 $a=c=\sqrt{7}$

즉, $C(\sqrt{7},\ 0,\ 0)$, $D(0,\ 0,\ \sqrt{7})$이다.

직각삼각형 CO′I에서

$\overline{O'I}=\sqrt{\overline{CO'}^2-\overline{CI}^2}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

$b>0$이므로 $\overline{O'I}=b$, 즉 $b=2\sqrt{2}$

점 H의 y좌표가 $2\sqrt{2}$이므로 원점 O에 대하여 $\overline{OA}>\overline{OB}$라 하면

$A(0,\ 2\sqrt{2}+1,\ 0)$, $B(0,\ 2\sqrt{2}-1,\ 0)$

따라서 사면체 ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times$(삼각형 ABC의 넓이)$\times$|(점 D의 z좌표)|

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}\right)\times|\sqrt{7}|=\frac{7}{3}$

답 ②

참고

사면체 ABCD의 부피를 다음과 같이 구할 수도 있다. 즉,

(사면체 ABCD의 부피)

=(사면체 AOCD의 부피)−(사면체 BOCD의 부피)

$=\frac{1}{3}\times$(삼각형 OCD의 넓이)$\times\overline{OA}$

$-\frac{1}{3}\times$(삼각형 OCD의 넓이)$\times\overline{OB}$

$=\frac{1}{3}\times$(삼각형 OCD의 넓이)$\times(\overline{OA}-\overline{OB})$

$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}\times(\sqrt{7})^2\right\}\times2=\frac{7}{3}$

Level **1** **기초 연습** 본문 98~99쪽

1 ③ **2** ④ **3** ③ **4** ④ **5** ③ **6** ③
7 ④ **8** ⑤

1 점 C의 좌표를 $(0, 0, t)$ $(t>0)$이라 하자.

$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$에서

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

이므로

$(5-1)^2+(-3-3)^2+\{2-(-2)\}^2$

$=[(0-1)^2+(0-3)^2+\{t-(-2)\}^2]$

$\quad+[(0-5)^2+\{0-(-3)\}^2+(t-2)^2]$

$68=(t^2+4t+14)+(t^2-4t+38)$

$2t^2=16$

$t>0$이므로 $t=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{OC}=2\sqrt{2}$

답 ③

2 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 서로 같으므로 두 점 A, B는 zx평면으로 나뉜 좌표공간의 두 부분 중 같은 부분에 있다.
점 B를 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(0, 2, a)$이다.
zx평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{(0-4)^2+\{2-(-6)\}^2+(a-2)^2}$

$=\sqrt{a^2-4a+84}$

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 9이므로

$\sqrt{a^2-4a+84}=9$

$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$a=1$ 또는 $a=3$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a의 값의 합은

$1+3=4$

답 ④

3 두 점 $A(3, 2, -4)$, $B(a, b, a+b)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times a+1\times 3}{2+1}, \frac{2\times b+1\times 2}{2+1}, \frac{2\times(a+b)+1\times(-4)}{2+1}\right)$

즉, $\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}, \frac{2a+2b-4}{3}\right)$

점 P가 x축 위의 점일 때, y좌표와 z좌표는 모두 0이므로

$\frac{2b+2}{3}=0$, $\frac{2a+2b-4}{3}=0$에서

$b=-1$, $a=3$

즉, 점 P_1의 좌표는 $(3, 0, 0)$이다.

점 P가 y축 위의 점일 때, x좌표와 z좌표는 모두 0이므로

$\frac{2a+3}{3}=0$, $\frac{2a+2b-4}{3}=0$에서

$a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{2}$

즉, 점 P_2의 좌표는 $(0, 3, 0)$이다.

따라서

$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2+(0-0)^2}=3\sqrt{2}$

답 ③

4 $x^2+y^2+z^2+8x-4y-12z+k=0$에서

$(x+4)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=56-k$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-4, 2, 6)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{56-k}$이다.

점 P의 좌표를 (a, b, c)라 하고 점 Q의 좌표를 (x, y, z)라 하면 점 Q가 선분 OP의 중점이므로

$x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$

즉, $a=2x$, $b=2y$, $c=2z$ …… ㉠

점 $P(a, b, c)$는 구 $x^2+y^2+z^2+8x-4y-12z+k=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2+c^2+8a-4b-12c+k=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2+8\times 2x-4\times 2y-12\times 2z+k=0$

$x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+\frac{k}{4}=0$

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=14-\frac{k}{4}$

즉, 점 Q가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-2, 1, 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{14-\frac{k}{4}}$인 구이다.

이 구의 부피가 $4\sqrt{3}\pi$이므로

$\frac{4}{3}\pi\times\left(\sqrt{14-\frac{k}{4}}\right)^3=4\sqrt{3}\pi$

$\left(\sqrt{14-\frac{k}{4}}\right)^3=3\sqrt{3}$

$\sqrt{14-\frac{k}{4}}=\sqrt{3}$

$14-\frac{k}{4}=3$

따라서 $k=44$

답 ④

다른 풀이

주어진 구를 S라 하자.

$x^2+y^2+z^2+8x-4y-12z+k=0$에서

$(x+4)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=56-k$

이므로 구 S의 중심의 좌표는 $(-4,\ 2,\ 6)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{56-k}$이다.

구 S 위의 임의의 점 P에 대하여 점 Q가 선분 OP의 중점이므로

$\overline{OP}:\overline{OQ}=2:1$

즉, 점 Q가 나타내는 도형은 구 S와 닮음비가 $2:1$인 구이다.

점 Q가 나타내는 구의 반지름의 길이를 r이라 하면 부피가 $4\sqrt{3}\pi$이므로

$\frac{4}{3}\pi r^3=4\sqrt{3}\pi$

$r^3-3\sqrt{3}=0$

$(r-\sqrt{3})(r^2+\sqrt{3}r+3)=0$

$r=\sqrt{3}$

따라서 구 S의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{56-k}=2\sqrt{3}$

$56-k=12$

$k=44$

5 $x^2+y^2+z^2-8x+2y-4z+k=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=21-k$

이므로 구 S의 중심의 좌표는 $(4,\ -1,\ 2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{21-k}$이다.

구 S의 중심을 C라 하면 $C(4,\ -1,\ 2)$이다.

점 A를 지나는 직선이 구 S와 점 P에서만 만나므로 직선 AP는 점 P에서 구 S에 접하고

$\overline{AP}\perp\overline{CP}$

이때 점 $A(-2,\ 3,\ 0)$에 대하여

$\overline{AC}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(-1-3)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{14}$

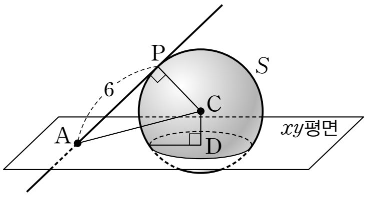
이고 $\overline{CP}=\sqrt{21-k}$, $\overline{AP}=6$이므로

$\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{CP}^2$에서

$(2\sqrt{14})^2=6^2+(\sqrt{21-k})^2$

$k=1$

즉, 구 S의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.



구 S의 중심 C의 z좌표의 절댓값보다 구 S의 반지름의 길이가 더 크므로 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 도형은 원이다. 이 원의 중심을 D라 하고 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{CD}=|2|=2$

이므로

$r=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{20-4}=4$

따라서 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이는

$\pi\times4^2=16\pi$

답 ③

6 $\overline{AB}=3$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2+(2-1)^2}=3$

$a^2=8$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$

$\overline{BC}=5$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(b-2\sqrt{2})^2+(c-0)^2+(3-2)^2}=5$

$b^2+c^2-4\sqrt{2}b-16=0$ …… ㉠

$\overline{CA}=4$이므로

$\overline{CA}=\sqrt{(0-b)^2+(0-c)^2+(1-3)^2}=4$

$b^2+c^2-12=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$4\sqrt{2}b+4=0$

$b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

㉡에 대입하여 정리하면

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+c^2-12=0$

$c>0$이므로 $c=\frac{\sqrt{46}}{2}$

즉, $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(2\sqrt{2},\ 0,\ 2)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{46}}{2},\ 3\right)$이다.

세 점 A, B, C의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′이라 하면 $A'(0,\ 0,\ 0)$, $B'(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$,

$C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{46}}{2},\ 0\right)$이므로 삼각형 A′B′C′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{46}}{2}=\sqrt{23}$

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=4$에서

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times4=6$

따라서 평면 ABC와 xy평면이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\cos\theta=\frac{\sqrt{23}}{6}$

답 ③

7 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$에서
$(x-1)^2+(y-3)^2=9$
이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(1,\ 3,\ 0)$이고 반지름의 길이는 3이다.
원 C의 중심을 O_1이라 하면 $O_1(1,\ 3,\ 0)$이다.
좌표공간의 구 $x^2+y^2+z^2-ax-by-8z+k=0$을 S라 하자.
$x^2+y^2+z^2-ax-by-8z+k=0$에서
$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+(z-4)^2=\frac{a^2+b^2}{4}+16-k$
이므로 구 S의 중심의 좌표는 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ 4\right)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}+16-k}$이다.
구 S의 중심을 O_2라 하면 $O_2\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ 4\right)$이다.
구 S 위의 점 Q에 대하여 좌표공간의 점 X와 점 Q 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각 점 Q가 직선 XO_2와 구 S의 교점 중 하나일 때이고, 구 S의 반지름의 길이를 r이라 하면 선분 XQ의 길이의 최댓값과 최솟값은 각각 $\overline{XO_2}+r$, $|\overline{XO_2}-r|$이다.
이때 xy평면 위의 원 C 위의 임의의 점 P에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값이 일정하므로 선분 PO_2의 길이가 일정하다. 즉, 점 $O_2\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ 4\right)$에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원 C의 중심인 점 $O_1(1,\ 3,\ 0)$과 같고
$\frac{a}{2}=1$, $\frac{b}{2}=3$에서 $a=2$, $b=6$
이때 $\overline{O_1O_2}=4$이고 원 C의 반지름의 길이가 3이므로
$\overline{PO_2}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2+3^2}=5$
선분 PQ의 길이의 최솟값이 1이므로
$5-r=1$에서 $r=4$
즉, $\sqrt{\frac{2^2+6^2}{4}+16-k}=\sqrt{26-k}=4$에서
$26-k=16$, $k=10$
한편, $r-5=1$에서 $r=6$이면
$\sqrt{26-k}=6$에서 $k=-10$이므로
$k>0$이라는 조건에 모순이다.
따라서 $a+b+k=2+6+10=18$

답 ④

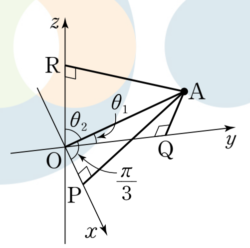
8 점 A의 xy평면 위로의 정사영을 A_1, yz평면 위로의 정사영을 A_2, zx평면 위로의 정사영을 A_3이라 하면
$A_1(a,\ b,\ 0)$, $A_2(0,\ b,\ c)$, $A_3(a,\ 0,\ c)$이다.
조건 (가)에서 선분 OA의 xy평면 위로의 정사영의 길이가 4이므로
$\overline{OA_1}=\sqrt{a^2+b^2+0^2}=4$
$a^2+b^2=16$ $\cdots\cdots$ ㉠
조건 (나)에서 선분 OA의 yz평면 위로의 정사영의 길이가 $2\sqrt{6}$이므로
$\overline{OA_2}=\sqrt{0^2+b^2+c^2}=2\sqrt{6}$
$b^2+c^2=24$ $\cdots\cdots$ ㉡
선분 OA의 zx평면 위로의 정사영의 길이는
$\overline{OA_3}=\sqrt{a^2+0^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$
㉠, ㉡의 양변을 더하여 정리하면
$a^2+2b^2+c^2=40$
$a^2+c^2=40-2b^2$
이므로
$\overline{OA_3}=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{40-2b^2}$ $\cdots\cdots$ ㉢
이때 ㉠에서
$b^2=16-a^2\le 16$
이고 ㉡에서
$b^2=24-c^2\le 24$
이므로 $0\le b^2\le 16$이다.
따라서 ㉢에서 선분 OA의 zx평면 위로의 정사영의 길이의 최댓값 M은
$M=\sqrt{40-2\times 0}=2\sqrt{10}$
이고 최솟값 m은
$m=\sqrt{40-2\times 16}=2\sqrt{2}$
따라서 $M\times m=2\sqrt{10}\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{5}$

답 ⑤

Level **2** **기본 연습** 본문 100~101쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ④ **4** ④ **5** ③ **6** ② **7** 720

1



점 $A(3,\ a,\ b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 P라 하면 점 P의 좌표는 $(3,\ 0,\ 0)$이고 직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\tan(\angle \text{AOP}) = \dfrac{\overline{\text{AP}}}{\overline{\text{OP}}} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{3} = \sqrt{3}$

$a^2+b^2=27$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

즉, $\overline{\text{OA}}=\sqrt{3^2+a^2+b^2}=\sqrt{9+27}=6$

점 $\text{A}(3,\ a,\ b)$에서 y축에 내린 수선의 발을 Q라 하면 점 Q의 좌표는 $(0,\ a,\ 0)$이고 직선 OA와 y축이 이루는 예각의 크기 θ_1에 대하여 $\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$이므로

$\cos\theta_1=\dfrac{\overline{\text{OQ}}}{\overline{\text{OA}}}=\dfrac{a}{6}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{15}$

㉠에 대입하면

$15+b^2=27,\ b^2=12$

$b>0$이므로 $b=2\sqrt{3}$

점 $\text{A}(3,\ \sqrt{15},\ 2\sqrt{3})$에서 z축에 내린 수선의 발을 R이라 하면 점 R의 좌표는 $(0,\ 0,\ 2\sqrt{3})$이므로 직선 OA와 z축이 이루는 예각의 크기 θ_2에 대하여

$\cos\theta_2=\dfrac{\overline{\text{OR}}}{\overline{\text{OA}}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $a\times b\times\cos\theta_2=\sqrt{15}\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{15}$

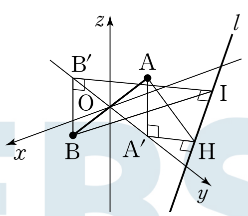
답 ⑤

2 좌표공간의 점 $\text{A}(a,\ b,\ 3)\ (0<b<6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(a,\ -b,\ -3)$

직선 AB가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(a,\ 0,\ 0)$이고, 직선 AB가 원점을 지나므로

$a=0$



두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 $\text{A}'(0,\ b,\ 0)$, $\text{B}'(0,\ -b,\ 0)$이고

$b>0$에서 $\overline{\text{A}'\text{B}'}=2b$이다.

xy평면 위의 직선 $x-y+6=0$을 l이라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\text{A}'\text{H}}\perp l,\ \overline{\text{B}'\text{I}}\perp l$

이고 직선 l과 직선 A′B′이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\overline{\text{HI}}=3\sqrt{2}$에서

$\overline{\text{A}'\text{B}'}=\dfrac{\overline{\text{HI}}}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=6$

즉, $2b=6$에서 $b=3$

두 점 $\text{A}'(0,\ 3,\ 0)$, $\text{B}'(0,\ -3,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리가 각각 $\overline{\text{A}'\text{H}}$, $\overline{\text{B}'\text{I}}$이므로

$\overline{\text{A}'\text{H}}=\dfrac{|0-3+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{\text{B}'\text{I}}=\dfrac{|0-(-3)+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

이고 $\overline{\text{AA}'}=3$, $\overline{\text{BB}'}=3$이므로

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{A}'\text{H}}^2+\overline{\text{AA}'}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

$\overline{\text{BI}}=\sqrt{\overline{\text{B}'\text{I}}^2+\overline{\text{BB}'}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{22}}{2}$

따라서 $\dfrac{\overline{\text{BI}}}{\overline{\text{AH}}}=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{22}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$

답 ②

3 두 점 A, C의 z좌표가 양수이므로 두 점 A, C는 좌표공간에서 xy평면에 의해 나뉜 두 부분 중 같은 부분에 있다.

점 C를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 C′이라 하면

$\overline{\text{BC}}=\overline{\text{BC}'}$

조건 (가)에서 xy평면 위의 임의의 점 P에 대하여

$\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BC}}\le\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PC}}$이므로

$\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BC}'}\le\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PC}'}$

즉, 점 B는 선분 AC′ 위의 점이다.

조건 (나)에서 $\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BC}}=1:2$이므로

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BC}'}=1:2$

즉, 점 B는 선분 AC′을 $1:2$로 내분하는 점이다.

$\text{A}(-2,\ 1,\ 3)$, $\text{B}(0,\ 2,\ 0)$, $\text{C}'(a,\ b,\ -c)$에서

$\dfrac{1\times a+2\times(-2)}{1+2}=0$이므로 $a=4$

$\dfrac{1\times b+2\times1}{1+2}=2$이므로 $b=4$

$\dfrac{1\times(-c)+2\times3}{1+2}=0$이므로 $c=6$

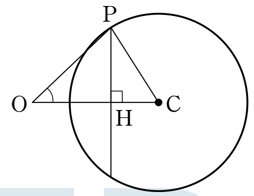
따라서 $a+b+c=4+4+6=14$

답 ④

4 점 $(3,\ \sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$을 중심으로 하고 xy평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 구의 중심의 z좌표의 절댓값과 같으므로

$|-2\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

점 $(3, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$을 C라 할 때, 직선 OC를 포함하는 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

이고 $\overline{\mathrm{CP}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OP}}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 POC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{POC})=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{CP}}^2}{2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OC}}}=\frac{(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$\sin(\angle\mathrm{POC})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{POC})}=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{69}}{12}$$

점 P에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P가 나타내는 도형은 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{PH}}$인 원이다. 이때

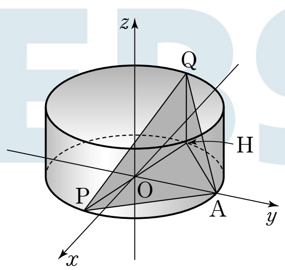
$$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin(\angle\mathrm{POC})=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{69}}{12}=\frac{\sqrt{138}}{4}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{138}}{4}$인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{\sqrt{138}}{4}\right)^2=\frac{69}{8}\pi$$

답 ④

5



점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 QH는 z축과 평행하다.

조건 (가)에서 직선 PQ가 z축 위의 점을 지나므로 평면 PQH는 z축을 포함하고 직선 PH는 원점을 지난다.

즉, 선분 PH는 밑면의 지름이다.

이때 직선 PQ가 z축과 만나는 점의 z좌표가 1이고 $\overline{\mathrm{PH}}=2\overline{\mathrm{PO}}$이므로 점 Q의 z좌표는 2이다. 즉, $\overline{\mathrm{QH}}=2$

한편, 선분 PH가 밑면의 지름이고 점 A가 밑면의 둘레 위의 점이므로

$\angle\mathrm{PAH}=\frac{\pi}{2}$

삼수선의 정리에 의하여

$\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{2}$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{QA}}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{QA}}=a$, $\overline{\mathrm{AH}}=b$로 놓으면 직각삼각형 QHA에서

$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{QH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2$

$a^2=2^2+b^2$

$a^2=b^2+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직각삼각형 PAH에서

$\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2$

$(2\sqrt{5})^2=a^2+b^2$

$a^2+b^2=20$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

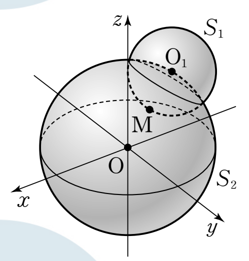
$a^2=12$, $b^2=8$

따라서 삼각형 PAQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{QA}}=\frac{1}{2}a^2=6$

답 ③

6



$x^2+12x+y^2+z^2-16z+k=0$에서

$(x+6)^2+y^2+(z-8)^2=100-k$

이므로 구 S_1의 중심인 점 $\mathrm{O_1}$의 좌표는 $(-6, 0, 8)$이다.

구 S_2가 원점 O를 중심으로 하고 점 $\mathrm{O_1}$을 지나므로 구 S_2의 반지름의 길이는

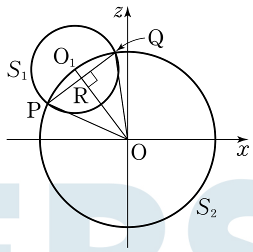
$\overline{\mathrm{OO_1}}=\sqrt{(-6)^2+0^2+8^2}=10$

선분 $\mathrm{OO_1}$의 중점을 M이라 하면 구 S_1은 점 M을 지나므로 구 S_1의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{O_1M}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OO_1}}=5$

두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 도형은 원이다. 이 원을 C라 하자.

원 C가 zx평면과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 두 구 S_1, S_2를 zx평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



두 직선 OO_1, PQ의 교점을 R이라 하면 $\angle PRO=\frac{\pi}{2}$이다.

$\overline{OP}=\overline{OO_1}=10$, $\overline{PO_1}=5$에서

$$\cos(\angle PO_1O)=\frac{\frac{1}{2}\overline{PO_1}}{\overline{OO_1}}=\frac{\frac{5}{2}}{10}=\frac{1}{4}$$

이므로

$$\sin(\angle PO_1O)=\sqrt{1-\cos^2(\angle PO_1O)}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\overline{PR}=\overline{PO_1}\sin(\angle PO_1O)=\frac{5\sqrt{15}}{4}$

즉, 원 C의 반지름의 길이는 $\frac{5\sqrt{15}}{4}$이다.

한편, 원 C를 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 θ는 직선 PQ와 x축이 이루는 예각의 크기와 같고, 직선 O_1O와 x축이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

$\overline{O_1O}=10$이고 점 O_1의 z좌표가 8이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$$\left\{\pi\times\left(\frac{5\sqrt{15}}{4}\right)^2\right\}\times\cos\theta=\frac{375}{16}\pi\times\frac{4}{5}=\frac{75}{4}\pi$$

답 ②

7 점 $C(a, b, 2\sqrt{6})$ $(a>0, b>2\sqrt{6})$을 중심으로 하는 구가 점 A에서 xy평면에 접하므로

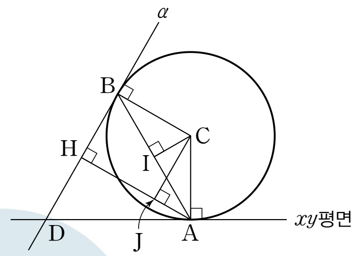
$\overline{AC}\perp(xy\text{평면})$, $\overline{AC}=2\sqrt{6}$

마찬가지로 점 $C(a, b, 2\sqrt{6})$ $(a>0, b>2\sqrt{6})$을 중심으로 하는 구가 점 B에서 평면 α에 접하므로

$\overline{BC}\perp\alpha$, $\overline{BC}=2\sqrt{6}$

$\overline{AC}\perp(xy\text{평면})$, $\overline{BC}\perp\alpha$이므로 세 점 A, B, C를 지나는 평면 ABC는 평면 α와 xy평면에 각각 수직이다. 따라서 평면 ABC는 x축에 수직이다.

평면 ABC가 x축과 만나는 점을 D라 하자.



점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I, 점 C에서 선분 AH에 내린 수선의 발을 J라 하자.

조건 (가)에서 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로

$\overline{BH}=3\sqrt{2}$

사각형 BHJC가 직사각형이므로

$\overline{CJ}=\overline{BH}=3\sqrt{2}$

$\overline{AC}=2\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 CJA에서

$$\sin(\angle CAJ)=\frac{\overline{CJ}}{\overline{AC}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $\angle CAJ=\frac{\pi}{3}$이고 $\angle CAD=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle HAD=\frac{\pi}{6}$

$\angle ADB=\frac{\pi}{2}-\angle HAD=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

한편, $\angle CAJ=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{AH}$이므로

$\angle ACB=\frac{2}{3}\pi$

$\overline{CA}=\overline{CB}$이므로

$$\angle CAB=\angle CBA=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$$

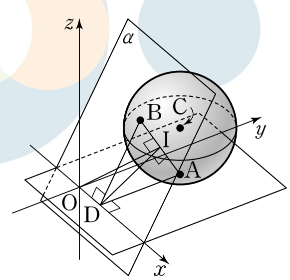
$$\angle BAD=\frac{\pi}{2}-\angle CAB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

즉, 삼각형 ABD는 정삼각형이고

$$\overline{AD}=\overline{AB}=\frac{\overline{BH}}{\cos(\angle ABH)}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=6\sqrt{2}$$

이므로 점 C의 y좌표는

$b=6\sqrt{2}$



$\overline{OD}\perp$(평면 ABC)이고 $\overline{DI}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OI}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

즉, 점 O와 직선 AB 사이의 거리는 선분 OI의 길이와 같다.

조건 (나)에서 원점 O와 직선 AB 사이의 거리가 8이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=8$

$\overline{\mathrm{DI}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{6}$

이므로 직각삼각형 ODI에서

$\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OI}}^2-\overline{\mathrm{DI}}^2}=\sqrt{8^2-(3\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$

즉, $a=\sqrt{10}$이므로

$$\begin{aligned}(ab)^2&=a^2\times b^2\\&=(\sqrt{10})^2\times(6\sqrt{2})^2\\&=720\end{aligned}$$

답 720

Level 3 실력 완성 본문 102쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** 43

1 xy평면 위의 점 P의 좌표를 $(x, y, 0)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$\{x-(-1)\}^2+(y-5)^2+(0-2)^2$

$=(x-5)^2+\{y-(-3)\}^2+(0-8)^2$

$3x-4y-17=0$

즉, 점 P는 xy평면 위의 직선 $3x-4y-17=0$ 위의 점이다. 이 직선을 l이라 하자.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{MP}}$

이므로 삼각형 ABP의 넓이는 선분 MP의 길이가 최소일 때 최소이다.

점 M의 좌표는

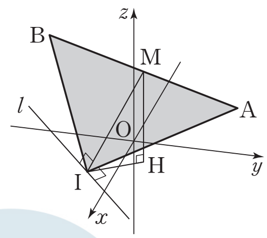
$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{5+(-3)}{2}, \frac{2+8}{2}\right)$, 즉 $(2, 1, 5)$

이고, 점 M에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(2, 1, 0)$이다.

점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{MI}}\perp l$

이므로 점 P가 점 I와 일치할 때, 선분 MP의 길이가 최소이다.



선분 HI의 길이는 xy평면에서 점 H$(2, 1)$과 직선 $3x-4y-17=0$ 사이의 거리이므로

$\overline{\mathrm{HI}}=\frac{|3\times2-4\times1-17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

$\overline{\mathrm{MH}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{MI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{HI}}^2+\overline{\mathrm{MH}}^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

한편,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(-3-5)^2+(8-2)^2}=2\sqrt{34}$

이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{MI}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{34}\times\sqrt{34}=34$

답 ③

다른 풀이

xy평면 위의 점 P의 좌표를 $(x, y, 0)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서

$\sqrt{\{x-(-1)\}^2+(y-5)^2+(0-2)^2}$

$=\sqrt{(x-5)^2+\{y-(-3)\}^2+(0-8)^2}$

$3x-4y-17=0$ …… ㉠

삼각형 ABP의 넓이는 선분 AP의 길이가 최소일 때 최소이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2+4}$ …… ㉡

이고 ㉠에서

$y=\frac{3}{4}x-\frac{17}{4}$ …… ㉢

이므로 ㉡에 대입하여 정리하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x+1)^2+\left\{\left(\frac{3}{4}x-\frac{17}{4}\right)-5\right\}^2+4}$

$=\sqrt{\frac{1}{16}(5x-19)^2+68}$

즉, $x=\frac{19}{5}$일 때 선분 AP의 길이가 최소이다.

$x=\frac{19}{5}$를 ㉢에 대입하면 $y=-\frac{7}{5}$

즉, 삼각형 ABP의 넓이가 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{19}{5}, -\frac{7}{5}, 0\right)$이다. 이 점을 I라 하자.

$\overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{\left\{\frac{19}{5}-(-1)\right\}^2+\left(-\frac{7}{5}-5\right)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{17}$

$\overline{\mathrm{BI}}=2\sqrt{17}$

한편,

$\overline{AB}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(-3-5)^2+(8-2)^2}=2\sqrt{34}$

이므로 $\overline{AI}^2+\overline{BI}^2=\overline{AB}^2$이 성립한다.

즉, 삼각형 ABI는 $\angle AIB=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ABI의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AI}\times\overline{BI}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{17}\times2\sqrt{17}=34$

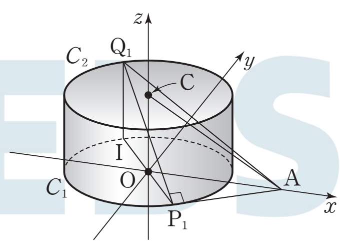
2 점 Q에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H, 점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp\overline{AP}$

이므로 평면 PQA와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $\angle QHI$와 같다.

이때 원 C_2 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{QI}=3$이므로 $\angle QHI$의 크기는 선분 HI의 길이가 최대일 때 최소이다.

따라서 직선 AP가 원 C_1에 접하고 선분 HI가 원 C_1의 지름일 때 $\angle QHI$는 최소이고, 이때의 두 점 P, Q가 각각 P_1, Q_1이다.



직각삼각형 OP_1A에서

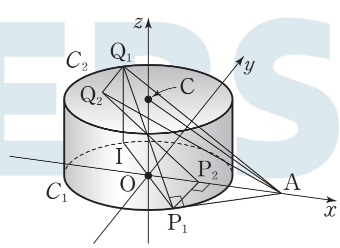
$\overline{AP_1}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP_1}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

직각삼각형 P_1IQ_1에서

$\overline{P_1Q_1}=\sqrt{\overline{P_1I}^2+\overline{Q_1I}^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

그러므로 삼각형 P_1Q_1A의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{P_1Q_1}\times\overline{AP_1}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times4=6\sqrt{5}$



한편, 점 P_1에서 zx평면에 내린 수선의 발을 P_2라 하면 점 P_2는 선분 OA 위의 점이고

$\overline{OA}:\overline{P_1A}=\overline{P_1A}:\overline{P_2A}$에서

$\overline{P_2A}=\frac{\overline{P_1A}^2}{\overline{OA}}=\frac{16}{5}$

점 Q_1에서 zx평면에 내린 수선의 발을 Q_2라 하면 점 Q_2의 z좌표가 3이므로 삼각형 P_2Q_2A의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{P_2A}\times3=\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}\times3=\frac{24}{5}$

그러므로 평면 P_1Q_1A와 zx평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{24}{5}}{6\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{25}$

한편, 삼각형 OAC의 넓이를 S_3이라 하면

$S_3=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times5\times3=\frac{15}{2}$

따라서 삼각형 OAC의 평면 P_1Q_1A 위로의 정사영의 넓이 S는

$S=S_3\cos\theta=\frac{15}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{25}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

3 조건 (가)에서 직선 AC가 x축과 만나므로 원점 O에 대하여 평면 OCA는 x축을 포함한다.

즉, x축을 포함하고 점 A를 지나는 평면이 구 S의 중심 C를 지나므로 두 점 A, C의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A', C'이라 하면 점 C'은 직선 OA' 위에 있다.

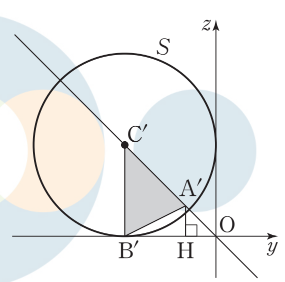
한편, 점 B의 yz평면 위로의 정사영을 B'이라 하고, 점 A'에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 $A'HO$와 삼각형 $C'B'O$는 서로 닮음이다.

이때 구 S가 xy평면 위의 점 B에서 xy평면에 접하고 반지름의 길이가 r이므로 점 C의 좌표를

$(a, -r, r)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 삼각형 ABC의 yz평면 위로의 정사영의 넓이가 12이므로 삼각형 $A'B'C'$의 넓이는 12이다.



따라서 $r>2$이고

$12=\frac{1}{2}\times\overline{B'C'}\times\overline{B'H}=\frac{1}{2}\times r\times(r-2)$에서

$r^2-2r-24=0$

$(r+4)(r-6)=0$

$r>2$이므로 $r=6$

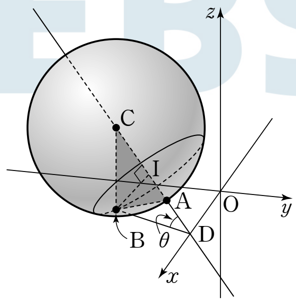
즉, 점 C의 좌표는 $(a,\ -6,\ 6)$이다.

한편, 점 $(8,\ 0,\ 0)$을 D라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DA}} : \overline{\mathrm{AC}} &= \overline{\mathrm{OA'}} : \overline{\mathrm{A'C'}}\\ &= \overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{HB'}}\\ &= 2 : (6-2)\\ &= 1 : 2\end{aligned}$$

이므로 점 A는 선분 DC를 $1:2$로 내분하는 점이다.

$\dfrac{1\times a+2\times 8}{1+2}=7$에서 $a=5$



직선 AD와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 점 A의 z좌표가 2이므로

$$\sin\theta=\frac{2}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{2}{\sqrt{(8-7)^2+\{0-(-2)\}^2+(0-2)^2}}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\angle\mathrm{CBI}=\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos\theta=6\times\frac{\sqrt{5}}{3}=2\sqrt{5}$$

점 B를 지나고 직선 AC에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원의 넓이는

$\pi\times\overline{\mathrm{BI}}^2=\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$

이고, 이 평면과 xy평면이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$20\pi\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=20\pi\times\sin\theta=20\pi\times\frac{2}{3}=\frac{40}{3}\pi$$

따라서 $p=3$, $q=40$이므로

$p+q=3+40=43$

답 43