수능특강

수학영역 | **수학Ⅱ**

정답과 풀이

01 함수의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ③	**2** ④	**3** 3	**4** ④	**5** ⑤
6 ②	**7** ⑤	**8** 90		

1 $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (ax+1) = a+1$

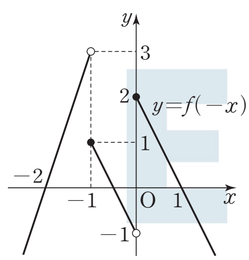
$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (3ax-2) = 3a-2$

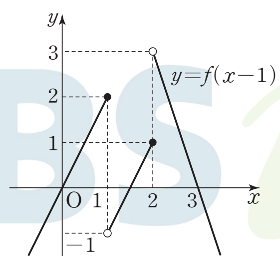
$a+1=3a-2$에서

$a = \frac{3}{2}$

답 ③

2 함수 $y=f(-x)$, $y=f(x-1)$의 그래프는 그림과 같다.





$\lim_{x \to 0+} f(-x) = 2$

$\lim_{x \to 1+} f(x-1) = -1$

따라서

$\lim_{x \to 0+} f(-x) + \lim_{x \to 1+} f(x-1) = 2+(-1) = 1$

답 ④

다른 풀이

$x>0$이고 $x \to 0$이면 $-x<0$이고 $-x \to 0$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(-x) = \lim_{-x \to 0-} f(-x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = 2$

$x>1$이고 $x \to 1$이면 $x-1>0$이고 $x-1 \to 0$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x-1) = \lim_{x-1 \to 0+} f(x-1) = \lim_{x \to 0+} f(x) = -1$

따라서 $\lim_{x \to 0+} f(-x) + \lim_{x \to 1+} f(x-1) = 2+(-1) = 1$

3 $\lim_{x \to 0}\{f(x)+g(x)\}=8$, $\lim_{x \to 0}\{f(x)-g(x)\}=-4$이므로

$\lim_{x \to 0}[\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}] = 8+(-4) = 4$

$\lim_{x \to 0} 2f(x) = 4$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

또한

$\lim_{x \to 0}[\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}] = 8-(-4) = 12$

$\lim_{x \to 0} 2g(x) = 12$이므로 $\lim_{x \to 0} g(x) = 6$

따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \to 0} g(x)}{\lim_{x \to 0} f(x)} = \frac{6}{2} = 3$

답 3

4 $\lim_{x \to 1}(x+2)f(x) = 9$, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x+1} = 6$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{3x+5}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(x)g(x)}{x+1} \times \frac{1}{(x+2)f(x)} \times \frac{(x+1)(x+2)}{3x+5} \right\}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x+1} \times \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+2)f(x)} \times \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x+2)}{3x+5}$$

$$= 6 \times \frac{1}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{2}$$

답 ④

5 $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{x^2-3x+2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{3x+3}-3)(\sqrt{3x+3}+3)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x-6}{(x-1)(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3}{(x-1)(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \frac{3}{1 \times (3+3)} = \frac{1}{2}$$

답 ⑤

6 $f(t) = \sqrt{(t+2)^2+(2t+2)^2} = \sqrt{5t^2+12t+8}$이므로

$$\lim_{t \to 1} \frac{f(t)-5}{t-1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{\sqrt{5t^2+12t+8}-5}{t-1}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(\sqrt{5t^2+12t+8}-5)(\sqrt{5t^2+12t+8}+5)}{(t-1)(\sqrt{5t^2+12t+8}+5)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{5t^2+12t+8-25}{(t-1)(\sqrt{5t^2+12t+8}+5)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{5t^2+12t-17}{(t-1)(\sqrt{5t^2+12t+8}+5)}$$

$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(5t+17)}{(t-1)(\sqrt{5t^2+12t+8}+5)}$

$=\lim_{t\to 1}\frac{5t+17}{\sqrt{5t^2+12t+8}+5}$

$=\frac{5+17}{5+5}$

$=\frac{11}{5}$

답 ②

7 $x\to -2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to -2}(x^2+ax+b)=4-2a+b=0$에서

$b=2a-4$

$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+2a-4}{x^2+x-2}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+a-2)}{(x+2)(x-1)}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{x+a-2}{x-1}$

$=\frac{a-4}{-3}$

$\frac{a-4}{-3}=3$에서

$a=-5$

$b=-10-4=-14$

따라서 $a+b=-19$

답 ⑤

8 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$ …… ㉠

마찬가지로 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)

으로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x-2)(ax+b)$

$=(-1)\times(a+b)$

$=-a-b$

이므로

$-a-b=3$ …… ㉢

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x-1)(ax+b)$

$=1\times(2a+b)$

$=2a+b$

이므로

$2a+b=3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=-9$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(6x-9)$이므로

$f(4)=3\times 2\times 15=90$

답 90

Level 1 기초 연습

본문 12~13쪽

1 ②	**2** ④	**3** ①	**4** 8	**5** ①
6 40	**7** 21	**8** ③		

1 $x>1$일 때 $|x-1|=x-1$이고

$x<2$일 때 $|x-2|=-(x-2)$이므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}+\lim_{x\to 2-}\frac{x^2-4}{|x-2|}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2-1}{x-1}+\lim_{x\to 2-}\frac{x^2-4}{-(x-2)}$

$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}+\lim_{x\to 2-}\frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)}$

$=\lim_{x\to 1+}(x+1)+\lim_{x\to 2-}\frac{x+2}{-1}$

$=2+(-4)$

$=-2$

답 ②

2 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=3$, $\lim_{x\to 1}\{2f(x)-g(x)\}=-6$이므로

$\lim_{x\to 1}[\{f(x)+g(x)\}+\{2f(x)-g(x)\}]=3+(-6)=-3$

$\lim_{x\to 1}3f(x)=-3$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=-1$

따라서

$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)-f(x)\}$

$=\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to 1}f(x)$

$=3-(-1)$
$=4$

답 ④

3 $\lim_{x\to2}\{f(x)-2g(x)\}=\lim_{x\to2}f(x)\left\{1-2\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$
의 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to2}f(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to2}\left\{1-2\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}$

따라서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+4g(x)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{1+4\times\frac{g(x)}{f(x)}}{1-\frac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{1+2}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=6$$

답 ①

4 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{2x+2}-2}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)(\sqrt{2x+2}+2)}{(\sqrt{2x+2}-2)(\sqrt{2x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)(\sqrt{2x+2}+2)}{2x-2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(\sqrt{2x+2}+2)}{2}$$
$$=\frac{4\times(2+2)}{2}$$
$$=8$$

답 8

5 $x\to2$일 때, (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$에서
$b=-2a-4$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x^2+ax-2a-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+a+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+a+2}$$
$$=\frac{4}{a+4}$$

$\frac{4}{a+4}=\frac{1}{3}$에서
$a=8$
$b=-2a-4=-20$
따라서 $a+b=8+(-20)=-12$

답 ①

6 $\lim_{x\to-1}(x^2-2x-3)f(x)$

$$=\lim_{x\to-1}\left\{(\sqrt{x+2}-1)f(x)\times\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+2}-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left\{(\sqrt{x+2}-1)f(x)\times\frac{(x+1)(x-3)(\sqrt{x+2}+1)}{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left\{(\sqrt{x+2}-1)f(x)\times\frac{(x+1)(x-3)(\sqrt{x+2}+1)}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-1}\{(\sqrt{x+2}-1)f(x)\times(x-3)(\sqrt{x+2}+1)\}$$
$$=(-5)\times(-1-3)\times(1+1)$$
$$=40$$

답 40

7 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=f(3)$에서
$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$에서
$b=-a-1$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+a+1)$$
$$=a+2$$

$a+2=f(3)=9+3a+b$에서
$2a+b=-7$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-6$, $b=5$
따라서 $f(x)=x^2-6x+5$이므로
$f(8)=64-48+5=21$

답 21

8 $(x+1)^3-(x-1)^3=6x^2+2$이므로
$(x+1)^3\le f(x)+(x-1)^3\le(x+1)^3+1$에서
$6x^2+2\le f(x)\le6x^2+3$

$$\frac{6x^2+2}{x^2+1} \le \frac{f(x)}{x^2+1} \le \frac{6x^2+3}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2}{x^2+1}=6$, $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3}{x^2+1}=6$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=6$

답 ③

Level 2 기본 연습 　본문 14~15쪽

1 ①	**2** ②	**3** 19	**4** ③	**5** 60
6 62	**7** ③			

1 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$

$\lim_{x\to a+}(2ax+a)=\lim_{x\to a-}(ax+b)$

$2a^2+a=a^2+b$

$a^2+a-b=0$

이차방정식 $a^2+a-b=0$이 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $a^2+a-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1+4b=0$에서

$b=-\frac{1}{4}$

답 ①

2 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{4}{x^2+a}-2\right)=b$에서

극한값이 존재하고 $\lim_{x\to1-}\frac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim_{x\to1+}\frac{1}{x-1}=\infty$

이므로 $\lim_{x\to1}\left(\frac{4}{x^2+a}-2\right)=\frac{4}{1+a}-2=0$이어야 한다.

즉, $a=1$

따라서

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{4}{x^2+1}-2\right)$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left\{\frac{4-2(x^2+1)}{x^2+1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left\{\frac{2(1-x^2)}{x^2+1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left\{\frac{-2(x-1)(x+1)}{x^2+1}\right\}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x+1)}{x^2+1}$

$=-2$

즉, $b=-2$이므로

$a+b=1+(-2)=-1$

답 ②

3 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=a$에서

$f(x)-x^2=ax+b$ (b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(x)=x^2+ax+b$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+x^2}{x-1}=f(0)$에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+x^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x-1}=b$

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(2x^2+ax+b)=2+a+b=0$에서

$b=-a-2$ 　…… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax+b}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax-a-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+a+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(2x+a+2)$

$=4+a$

$4+a=b$이므로

$a-b=-4$ 　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^2-3x+1$이므로

$f(a)=f(-3)=9+9+1=19$

답 19

4 $f(1-x)=2(1-x)^2-4(1-x)+5$

$=2x^2+3$

$f(1+x)=2(1+x)^2-4(1+x)+5$

$=2x^2+3$

$f(1-x)-2<g(x)<f(1+x)+2$에서

$2x^2+1<g(x)<2x^2+5$이므로

$6x^2+1<g(x)+4x^2<6x^2+5$

$2x^2+1>0$이므로 각 변을 $2x^2+1$로 나누면

$\frac{6x^2+1}{2x^2+1}<\frac{g(x)+4x^2}{2x^2+1}<\frac{6x^2+5}{2x^2+1}$

$\frac{6x^2+1}{2x^2+1}>0$, $\frac{6x^2+5}{2x^2+1}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$\frac{2x^2+1}{6x^2+5}<\frac{2x^2+1}{g(x)+4x^2}<\frac{2x^2+1}{6x^2+1}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{6x^2+5}=\frac{1}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{6x^2+1}=\frac{1}{3}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{g(x)+4x^2}=\frac{1}{3}$

답 ③

5 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=k$에서

$x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k+3$에서

$x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고

$f(0)=f(1)=0$이므로

$f(x)=x(x-1)(x+a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x+a)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}(x-1)(x+a)\\&=-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}x(x+a)\\&=1+a\end{aligned}$$

$-a=k$이고, $1+a=k+3$이므로 연립하여 풀면

$a=1$, $k=-1$

따라서 $f(x)=x(x-1)(x+1)$이므로

$f(4)=4\times 3\times 5=60$

답 60

6 조건 (가)에서

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x^2=\frac{1}{t^2}$이고

$x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to 0+}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=4$이므로

$f(x)=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(0)=1$이므로

$b=1$

$f(1)=3$이므로

$4+a+b=3$에서 $a=-2$

따라서 $f(x)=4x^2-2x+1$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x}=3$이므로

$f(x)-2g(x)=3x+c$ (c는 상수)로 놓을 수 있다.

이 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-2g(0)=c$에서

$c=1-2\times 5=-9$

$f(x)-2g(x)=3x-9$이고 $f(x)=4x^2-2x+1$이므로

$$\begin{aligned}2g(x)&=f(x)-3x+9\\&=4x^2-2x+1-3x+9\\&=4x^2-5x+10\end{aligned}$$

따라서 $g(x)=2x^2-\frac{5}{2}x+5$이므로

$g(6)=72-15+5=62$

답 62

7 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-2t)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2(x-t)+t^2-2t$, 즉 $y=-2x+t^2$

이 직선이 곡선 $y=x^2-2x$와 만나는 점의 x좌표는

$x^2-2x=-2x+t^2$에서

$(x+t)(x-t)=0$

$x=t$ 또는 $x=-t$

즉, 점 Q의 좌표는 $(-t,\ t^2+2t)$이므로

$$\begin{aligned}L(t)&=\sqrt{(-t)^2+(t^2+2t)^2}\\&=t\sqrt{1+(t+2)^2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\frac{L(t)}{t}&=\lim_{t\to 0+}\frac{t\sqrt{1+(t+2)^2}}{t}\\&=\lim_{t\to 0+}\sqrt{1+(t+2)^2}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 16쪽

1 ④	**2** ②	**3** ②

1 $f\left(\frac{x-2}{2}\right)<x^2$에서 $\frac{x-2}{2}=t$라 하면 $x=2t+2$이고

$x>0$일 때 $t>-1$이므로 $t>-1$인 모든 실수 t에 대하여

$f(t)<(2t+2)^2$

즉, $f(x)<(2x+2)^2$ $(x>-1)$ …… ㉠

$x^2<f\left(\frac{x-1}{2}\right)$에서 $\frac{x-1}{2}=s$라 하면 $x=2s+1$이고

$x>0$일 때 $s>-\frac{1}{2}$이므로 $s>-\frac{1}{2}$인 모든 실수 s에 대하여

$(2s+1)^2<f(s)$

즉, $(2x+1)^2<f(x)\ \left(x>-\frac{1}{2}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x>-\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$(2x+1)^2<f(x)<(2x+2)^2$ …… ㉢

㉢의 각 변을 $6x^2+5$로 나누면 $x>-\frac{1}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{(2x+1)^2}{6x^2+5}<\frac{f(x)}{6x^2+5}<\frac{(2x+2)^2}{6x^2+5}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{6x^2+5}=\frac{2}{3}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+2)^2}{6x^2+5}=\frac{2}{3}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{6x^2+5}=\frac{2}{3}$$

답 ④

2 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x^2-1}=a$에서

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-x\}=f(1)-1=0$에서

$f(1)=1$ …… ㉠

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(x-2)}{x-3}=3a$에서

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-f(x-2)\}=f(3)-f(1)=0$에서

$f(3)=f(1)=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=k(x-1)(x-3)+1$ (k는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)(x-3)+1-x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{k(x-1)(x-3)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{k(x-3)-1}{x+1}$$
$$=\frac{-2k-1}{2}$$

즉, $\frac{-2k-1}{2}=a$ …… ㉢

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(x-2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{k(x-1)(x-3)+1-k(x-3)(x-5)-1}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}k\{(x-1)-(x-5)\}$$
$$=4k$$

즉, $4k=3a$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-\frac{2}{7}$, $k=-\frac{3}{14}$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{14}(x-1)(x-3)+1$이므로

$f(15)=-\frac{3}{14}\times14\times12+1$

$=-35$

답 ②

참고

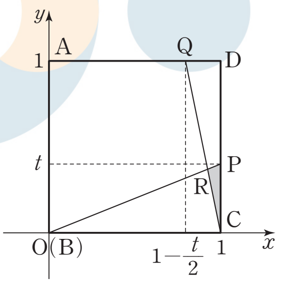
이차함수 $f(x)=-\frac{3}{14}(x-1)(x-3)+1$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{3}{14}(x-1)(x-3)+1-x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{3}{14}(x-3)-1}{x+1}$$
$$=-\frac{2}{7}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(x-2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-\frac{3}{14}(x-1)(x-3)+1+\frac{3}{14}(x-3)(x-5)-1}{x-3}$$
$$=-\frac{3}{14}\lim_{x\to3}\{(x-1)-(x-5)\}$$
$$=-\frac{6}{7}$$

3 점 B를 원점으로 하고, C(1, 0), A(0, 1)이 되도록 좌표축을 잡으면 P(1, t)이므로 직선 BP의 방정식은

$y=tx$



$Q\left(1-\frac{t}{2},\ 1\right)$이므로 직선 CQ의 방정식은

$$y=-\frac{1}{\frac{t}{2}}(x-1)=-\frac{2}{t}(x-1)$$

직선 BP와 직선 CQ의 교점의 x좌표는

$$tx=-\frac{2}{t}(x-1)\text{에서}$$

$$\left(t+\frac{2}{t}\right)x=\frac{2}{t}$$

$$x=\frac{2}{t^2+2}$$

따라서 점 R의 좌표는 $\left(\frac{2}{t^2+2}, \frac{2t}{t^2+2}\right)$

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\times t\times\left(1-\frac{2}{t^2+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times t\times\frac{t^2}{t^2+2}\\&=\frac{t^3}{2(t^2+2)}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^3}&=\lim_{t\to0+}\frac{t^3}{2t^3(t^2+2)}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{1}{2(t^2+2)}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ②

02 함수의 연속

유제 본문 18~22쪽

1 ④ **2** ③ **3** ② **4** ② **5** ③ **6** ④

1 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}(x+a)\\&=a+a\\&=2a\end{aligned}$$

$2a=a+4$에서

$a=4$

답 ④

2 $x\neq-1$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^2-2x-3}{x^3+1}\\&=\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\&=\frac{x-3}{x^2-x+1}\end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$$

따라서

$$\begin{aligned}f(-1)&=\lim_{x\to-1}f(x)\\&=\lim_{x\to-1}\frac{x-3}{x^2-x+1}\\&=-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ③

3 ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 함수 $2g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $f(x)-2g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $f(x)\{f(x)+g(x)\}$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=-2x+1$, $g(x)=x$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이지만 함수

$$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)+x^2}=\frac{-2x+1+x}{-2x+1+x^2}=\frac{-x+1}{(x-1)^2}$$

은 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

이상에서 실수 전체의 집합에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

4 두 함수 $y=x$, $y=x^2-2x+a$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x^2-2x+a\neq0$이어야 한다.

$x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1>0$이어야 하므로

$a-1>0$, $a>1$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

5 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2+ax)$

$=4+2a$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x+a)$

$=2+a$

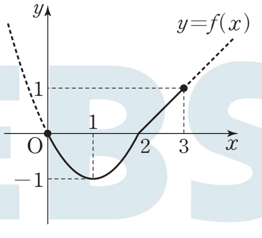
$f(2)=2+a$

$4+2a=2+a$에서

$a=-2$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & (x<2)\\ x-2 & (x\ge2)\end{cases}$$

$x<2$일 때 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$이므로 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $M=f(3)=1$, $m=f(1)=-1$이므로

$M+m=1+(-1)=0$

답 ③

6 $x^3+3x=3x^2-3x+10$에서

$x^3-3x^2+6x-10=0$ ⋯⋯ ㉠

즉, 방정식 ㉠은 오직 하나의 실근 α를 갖는다.

$f(x)=x^3-3x^2+6x-10$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(-1)=-1-3-6-10=-20$

$f(0)=-10$

$f(1)=1-3+6-10=-6$

$f(2)=8-12+12-10=-2$

$f(3)=27-27+18-10=8$

$f(4)=64-48+24-10=30$

$f(2)<0$이고 $f(3)>0$, 즉 $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 α가 속하는 구간은 $(2, 3)$이다.

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 23~24쪽

1 ②	**2** ②	**3** ③	**4** 12	**5** ②
6 ③	**7** ⑤	**8** ③		

1 함수 $(x+1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=2f(1)=4$에서

$f(1)=2$

함수 $3x+f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}\{3x+f(x)\}=6+f(2)=11$에서

$f(2)=5$

따라서 $f(1)+f(2)=2+5=7$

답 ②

2 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x+a)=2+a$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-x+2a)=-1+2a$

$f(1)=-1+2a$

$2+a=-1+2a$에서

$a=3$

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & (x<1)\\ -x+6 & (x\ge1)\end{cases}$$

따라서 $f(0)=3$, $f(2)=4$이므로

$f(0)+f(2)=7$

답 ②

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x+2)=2$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(ax+b)=b$

$f(0)=a\times 0+b=b$

즉, $b=2$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax+b)$

$=2a+b$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-4)=-2$

$f(2)=2-4=-2$

$2a+b=-2$에서 $b=2$이므로

$2a+2=-2$

$a=-2$

따라서 $a+b=-2+2=0$

답 ③

4 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)$$
$$=4+4+4$$
$$=12$$

따라서 $a=12$

답 12

5 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=a$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$이므로

$$f(4a)=f(2)=\frac{\sqrt{2+2}-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

답 ②

6 $x\neq 1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
$$=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$$
$$=x+2$$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$이다.

따라서 $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$

답 ③

7 $g(x)=(x+a)f(x)$라 하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이면 되므로

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-}(x+a)(x+1)$

$=(1+a)\times 2$

$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}(x+a)(-x+a)$

$=(1+a)(-1+a)$

$g(1)=(1+a)(-1+a)$

$(1+a)\times 2=(1+a)(-1+a)$에서

$2+2a=a^2-1$

$a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$

$a=3$ 또는 $a=-1$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.

답 ⑤

8 $f(x)=x^3+3x-20$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(0)=-20<0$

$f(1)=1+3-20=-16<0$

$f(2)=8+6-20=-6<0$

$f(3)=27+9-20=16>0$

$f(4)=64+12-20=56>0$
$f(5)=125+15-20=120>0$
$f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(2, 3)$에 실근 a가 존재한다.

답 ③

Level 2 기본 연습 본문 25~26쪽

1 ④	**2** ①	**3** ①	**4** 9	**5** ②
6 ③	**7** 12	**8** ③		

1 함수 $3f(x)+4$는 $x=0$, $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0}\{3f(x)+4\}=f(1)$에서
$3f(0)+4=f(1)$ ...... ㉠
$\lim_{x\to 1}\{3f(x)+4\}=f(0)$에서
$3f(1)+4=f(0)$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$f(0)=-2$, $f(1)=-2$
따라서 $f(0)+f(1)=-4$

답 ④

2 두 함수 $y=2x-4$, $y=\{f(x)\}^2+(2x-4)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $\dfrac{2x-4}{\{f(x)\}^2+(2x-4)f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)\}^2+(2x-4)f(x)\neq 0$이어야 한다.
$f(x)\{f(x)+2x-4\}\neq 0$
$f(x)\neq 0$이고 $f(x)+2x-4\neq 0$
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^2-4x+n\neq 0$이려면
$x^2-4x+n>0$
이차방정식 $x^2-4x+n=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$\dfrac{D_1}{4}=4-n<0$에서
$n>4$ ...... ㉠
모든 실수 x에 대하여
$f(x)+2x-4=x^2-4x+n+2x-4$
$=x^2-2x+n-4\neq 0$
이려면
$x^2-2x+n-4>0$
이차방정식 $x^2-2x+n-4=0$의 판별식을 D_2라 하면
$\dfrac{D_2}{4}=1-n+4<0$에서
$n>5$ ...... ㉡
㉠, ㉡에서 $n>5$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 ①

3 함수 $y=f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}=b$
$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+a)=2+a=0$에서
$a=-2$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$=\frac{1}{2+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$
즉, $b=\dfrac{1}{4}$
따라서 $a+b=-2+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{7}{4}$

답 ①

4 함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=1$에서 모두 연속이므로
$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다. 즉,
$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3+ax^2+bx+c}{x(x-1)}=3$ ...... ㉠
$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+bx+c}{x(x-1)}=d+3$ ...... ㉡
㉠에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 0}(x^3+ax^2+bx+c)=0$에서
$c=0$ ...... ㉢
㉡에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 1}(x^3+ax^2+bx+c)=0$에서
$a+b+c=-1$ ...... ㉣
㉢, ㉣에서

$c=0$이고 $b=-a-1$

㉠에서

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+ax^2+(-a-1)x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(x+a+1)}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}(x+a+1)$$
$$=a+1$$

$a+1=3$에서 $a=2$

$b=-a-1=-3$

㉡에서

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+3)}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

$4=d+3$이므로

$d=1$

즉, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x(x-1)} & (x\neq0,\ x\neq1)\\ x^2+3 & (x=0 \text{ 또는 } x=1)\end{cases}$

따라서 $f(1)=4$, $f(2)=5$이므로

$f(1)+f(2)=9$

답 9

5 $g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하자.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}(x+a)^2=(1+a)^2$

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}(x+3)^2=16$

$g(1)=(1+3)^2=16$이므로

$(1+a)^2=16$에서

$1+a=4$ 또는 $1+a=-4$

$a=3$ 또는 $a=-5$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다.

답 ②

6 $x=1$에서 두 함수 $f(x)+g(x)$, $g(x)$가 연속이고

$f(x)=f(x)+g(x)-g(x)$이므로 함수 $f(x)$도 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x+a)$

$=-1+a$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x+b)$

$=1+b$

$f(1)=1+b$

$-1+a=1+b$에서

$a-b=2$ …… ㉠

$x=2$에서 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)$가 연속이고,

$g(x)=f(x)+g(x)-f(x)$이므로 함수 $g(x)$도 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}(ax+1)$

$=2a+1$

$\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}(-2x+b)$

$=-4+b$

$g(2)=-4+b$

$2a+1=-4+b$에서

$2a-b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=-9$

따라서 $a+b=-16$

답 ③

7 $(x-1)(x-2)f(x)$

$=(x-2)(x^2+ax+b)+(x-1)(x^2-ax-b)$ …… ㉠

(i) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=(-1)\times(1+a+b)+0$에서

$1+a+b=0$ …… ㉡

(ii) ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=0+1\times(4-2a-b)$에서

$4-2a-b=0$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-6$

㉠에서 $x\neq1$이고 $x\neq2$일 때

$$f(x)=\frac{x^2+5x-6}{x-1}+\frac{x^2-5x+6}{x-2}$$
$$=\frac{(x-1)(x+6)}{x-1}+\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$
$$=x+6+x-3$$
$$=2x+3$$

함수 $f(x)$가 $x=1$과 $x=2$에서 연속이므로

$f(1)+f(2)=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)$

$=\lim_{x\to 1}(2x+3)+\lim_{x\to 2}(2x+3)$

$=5+7=12$

답 12

8 주어진 조건에서

$f(-1)\geq f(0)\geq f(1)=3$

$f(2)=-1$

$-2=f(3)\geq f(4)\geq f(5)$

$g(x)=f(x)+f(x-1)-2x+3$이라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)\geq f(x_2)$, $f(x_1-1)\geq f(x_2-1)$이므로

$$\begin{aligned}g(x_1)-g(x_2)&=f(x_1)+f(x_1-1)-2x_1+3\\&\quad-\{f(x_2)+f(x_2-1)-2x_2+3\}\\&=f(x_1)-f(x_2)+f(x_1-1)-f(x_2-1)\\&\quad-2(x_1-x_2)\\&>0\end{aligned}$$

$g(x_1)>g(x_2)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 오직 하나의 점에서 만난다.

$g(0)=f(0)+f(-1)+3\geq 3+3+3>0$

$g(1)=f(1)+f(0)+1\geq 3+3+1>0$

$g(2)=f(2)+f(1)-1=-1+3-1>0$

$g(3)=f(3)+f(2)-3=-2-1-3<0$

$g(4)=f(4)+f(3)-5\leq -2-2-5<0$

$g(5)=f(5)+f(4)-7\leq -2-2-7<0$

$g(2)g(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(2, 3)$에 방정식 $g(x)=0$의 해가 존재한다.

따라서 열린구간 $(2, 3)$에 방정식

$f(x)+f(x-1)=2x-3$의 해가 존재한다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 27쪽

1 ⑤	**2** 12	**3** ②

1 $g(x)=f(x)\{f(x)-9\}$라 하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}g(x)&=\lim_{x\to 1-}f(x)\{f(x)-9\}\\&=\lim_{x\to 1-}(x+a)(x+a-9)\\&=(a+1)(a-8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}g(x)&=\lim_{x\to 1+}f(x)\{f(x)-9\}\\&=\lim_{x\to 1+}(-x+2a)(-x+2a-9)\\&=(2a-1)(2a-10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(1)&=f(1)\{f(1)-9\}\\&=(-1+2a)(-1+2a-9)\\&=(2a-1)(2a-10)\end{aligned}$$

이므로 $(a+1)(a-8)=(2a-1)(2a-10)$에서

$a^2-7a-8=4a^2-22a+10$

$3a^2-15a+18=0$

$a^2-5a+6=0$

$(a-2)(a-3)=0$

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 5이다.

답 ⑤

참고

$a=2$이면 함수 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x<1)\\ -x+4 & (x\geq 1)\end{cases}$

$\lim_{x\to 1-}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to 1-}(x+2)(x-7)=-18$

$\lim_{x\to 1+}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to 1+}(-x+4)(-x-5)=-18$

$f(1)\{f(1)-9\}=-18$

이므로 함수 $f(x)\{f(x)-9\}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$a=3$이면 함수 $f(x)=\begin{cases}x+3 & (x<1)\\ -x+6 & (x\geq 1)\end{cases}$

$\lim_{x\to 1-}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to 1-}(x+3)(x-6)=-20$

$\lim_{x\to 1+}f(x)\{f(x)-9\}=\lim_{x\to 1+}(-x+6)(-x-3)=-20$

$f(1)\{f(1)-9\}=-20$

이므로 함수 $f(x)\{f(x)-9\}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

2 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $a-1$을 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x^2-2x+a\geq 0$이면

$|f(x)|=f(x)$이고 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=a-1$이므로

$t<f(1)$일 때 $g(t)=0$

$t=f(1)$일 때 $g(t)=1$

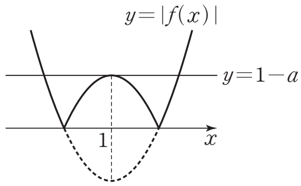
$t>f(1)$일 때 $g(t)=2$

함수 $g(t)$는 $t=f(1)$에서만 불연속이므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(x)=x^2-2x+a<0$인 실수 x가 존재해야 한다.

즉, $f(1)=a-1<0$이고

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$t<0$일 때 $g(t)=0$

$t=0$일 때 $g(t)=2$

$0<t<1-a$일 때 $g(t)=4$

$t=1-a$일 때 $g(t)=3$

$t>1-a$일 때 $g(t)=2$

함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=1-a$일 때 불연속므로

주어진 조건에 의하여

$0+1-a=4$에서

$a=-3$

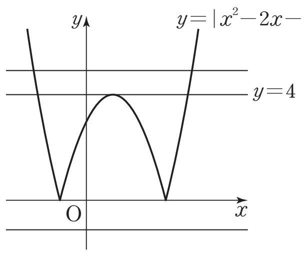
따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(a)=f(-3)=9+6-3=12$

답 12

참고

x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다. 그림에서 함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 t의 값의 범위에 따라 다음과 같다.



$t<0$일 때 $g(t)=0$

$t=0$일 때 $g(t)=2$

$0<t<4$일 때 $g(t)=4$

$t=4$일 때 $g(t)=3$

$t>4$일 때 $g(t)=2$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=4$일 때 불연속이다.

3 $\lim_{x\to 3-} f(x-1)=\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\{-3x(x-1)\}=-6$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)=\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-4)(x-5)=6$

$f(3-1)=f(2)=6$

이므로 함수 $f(x-1)$은 $x=3$에서 불연속이다.

(i) $a=1$일 때

$$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-a)=\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-1)=(-6)^2=36$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-a)=\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-1)=6^2=36$$

$f(3-1)f(3-1)=\{f(2)\}^2=6^2=36$

이므로 함수 $f(x-1)f(x-1)$은 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $a\neq 1$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-a)=(-6)\times\lim_{x\to 3-} f(x-a)$ …… ㉠

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-a)=6\times\lim_{x\to 3+} f(x-a)$ …… ㉡

$f(3-1)f(3-a)=6f(3-a)$ …… ㉢

$a\neq 1$이면 $f(x-a)$는 $x=3$에서 연속이므로

함수 $f(x-1)f(x-a)$가 $x=3$에서 연속이려면

㉠, ㉡, ㉢의 값이 같아야 한다.

$\lim_{x\to 3-} f(x-a)=\lim_{x\to 3+} f(x-a)=f(3-a)=0$

이어야 한다.

$3-a<2$, 즉 $a>1$일 때

$f(3-a)=-3(3-a)(2-a)=0$에서

$a=2$ 또는 $a=3$

$3-a>2$, 즉 $a<1$일 때

$f(3-a)=(-a-1)(-a-2)=0$에서

$a=-1$ 또는 $a=-2$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은

-2, -1, 1, 2, 3

으로 그 합은 3이다.

답 ②

참고

(i) $a=-2$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x+2)=-6f(5)=0$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x+2)=6f(5)=0$

$f(3-1)f(3+2)=0$

이므로 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $a=-1$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x+1)=-6f(4)=0$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x+1)=6f(4)=0$

$f(3-1)f(3+1)=0$

이므로 $x=3$에서 연속이다.

(iii) $a=1$일 때

$\lim_{x\to 3-} f(x-1)f(x-1)=(-6)^2=36$

$\lim_{x\to 3+} f(x-1)f(x-1)=6^2=36$

$f(3-1)f(3-1)=\{f(2)\}^2=6^2=36$

이므로 $x=3$에서 연속이다.

(iv) $a=2$일 때

$\lim_{x\to3-} f(x-1)f(x-2)=-6f(1)=0$

$\lim_{x\to3+} f(x-1)f(x-2)=6f(1)=0$

$f(3-1)f(3-2)=0$

이므로 $x=3$에서 연속이다.

(v) $a=3$일 때

$\lim_{x\to3-} f(x-1)f(x-3)=-6f(0)=0$

$\lim_{x\to3+} f(x-1)f(x-3)=6f(0)=0$

$f(3-1)f(3-3)=0$

이므로 $x=3$에서 연속이다.

03 미분계수와 도함수

유제 본문 29~35쪽

1 33 **2** ③ **3** ③ **4** ① **5** ②
6 ④ **7** ⑤

1 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+3}{x^2-x-2}=4f(-1)$ …… ㉠

㉠에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(-1)+3=0$에서

$f(-1)=-3$

㉠에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+3}{x^2-x-2}&=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\times\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-2}\\&=f'(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$f'(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=4f(-1)=-12$이므로

$f'(-1)=36$

따라서 $f(-1)+f'(-1)=-3+36=33$

답 33

2 조건 (가)에서

$$\begin{aligned}\frac{f(2)-f(0)}{2-0}&=\frac{(4+2a+b)-b}{2}\\&=2+a=4\end{aligned}$$

이므로 $a=2$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b-(1-a+b)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax-1+a}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1+a)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{x-1+a}{x-1}\\&=\frac{-2+a}{-2}\\&=0\end{aligned}$$

$f(1)=1+a+b=b+3$이므로

$b+3=0$에서

$b=-3$

따라서 $ab=2\times(-3)=-6$

답 ③

3 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} f(x)&=\lim_{x\to 1-}(x+a)(x+b)\\&=(1+a)(1+b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} f(x)&=\lim_{x\to 1+}(ax+b)\\&=a+b\end{aligned}$$

$f(1)=a+b$

이므로

$(1+a)(1+b)=a+b$

$1+a+b+ab=a+b$에서

$ab=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+a)(x+b)-(a+b)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+ax+bx+ab-a-b}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+ax+bx-1-a-b}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+1)(x-1)+a(x-1)+b(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x+1+a+b)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}(x+1+a+b)\\&=2+a+b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\frac{a(x-1)}{x-1}\\&=a\end{aligned}$$

$2+a+b=a$이므로

$b=-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=\frac{1}{2}+(-2)=-\frac{3}{2}$

답 ③

4 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=x^2-2x+3$에서

$f'(x)=x^2-2x+3$

따라서

$$\begin{aligned}&f'(1)+f'(2)+f'(3)\\&=(1-2+3)+(4-4+3)+(9-6+3)\\&=11\end{aligned}$$

답 ①

5
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{f(x)-f(x-h)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\\&=f'(x)+f'(x)\\&=2f'(x)\\&=-8x^3+4x^2+2\end{aligned}$$

이므로

$f'(x)=-4x^3+2x^2+1$

$$\begin{aligned}g(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)-f(x-2h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+4h)-f(x)\}+\{f(x)-f(x-2h)\}}{2h}\\&=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{4h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\\&=2f'(x)+f'(x)\\&=3f'(x)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}g(x)&=3f'(x)\\&=3(-4x^3+2x^2+1)\\&=-12x^3+6x^2+3\end{aligned}$$

이고

$g(0)=3$,

$g(1)=-12+6+3=-3$이므로

$$\begin{aligned}g(0)\times g(1)&=3\times(-3)\\&=-9\end{aligned}$$

답 ②

6 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=3\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}$
$=3f'(1)$
$f(x)=2x^3-x^2+3x+5$에서
$f'(x)=6x^2-2x+3$이므로
$f'(1)=6-2+3=7$
따라서 $3f'(1)=3\times7=21$

답 ④

7 $g(x)=5x^2-2xf(x)$에서
$g'(x)=10x-2f(x)-2xf'(x)$
이때 $f(2)=3,\ f'(2)=1$이므로
$g'(2)=20-2f(2)-4f'(2)$
$=20-6-4$
$=10$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 36~37쪽

1 ⑤	**2** ④	**3** ③	**4** ⑤	**5** ③
6 ②	**7** ③	**8** 12		

1 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$에서
$f'(x)=3x^2-4x+3$이므로
$f'(1)=3-4+3=2$

답 ⑤

2 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(1)-1=0$에서
$f(1)=1$
또
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$=f'(1)=3$
함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$에서
$f(1)=1+a+b-1=1$
$a+b=1$ …… ㉠
$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서
$f'(1)=3+2a+b=3$
$2a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1,\ b=2$
따라서 $f(x)=x^3-x^2+2x-1$에서
$f(2)=8-4+4-1=7$
$f'(x)=3x^2-2x+2$에서
$f'(2)=12-4+2=10$이므로
$f(2)+f'(2)=7+10=17$

답 ④

3 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$에서
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(ax^2+b)=a+b$
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(6x+a)=6+a$
$f(1)=6+a$
이므로 $a+b=6+a$
$b=6$
또 $f(x)=\begin{cases}ax^2+6 & (x<1)\\ 6x+a & (x\ge1)\end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능하면 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로
$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+6-(6+a)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1-}\{a(x+1)\}$
$=2a$
$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{6x+a-(6+a)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1+}\frac{6(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1+}6$
$=6$
$2a=6$에서
$a=3$
따라서 $\frac{b}{a}=\frac{6}{3}=2$

답 ③

4 $xf(x)+f(x)=kx^4+kx$에서
$(x+1)f(x)=kx(x^3+1)$

$(x+1)f(x)=kx(x+1)(x^2-x+1)$
$f(x)$가 다항함수이므로
$f(x)=kx(x^2-x+1)=kx^3-kx^2+kx$
따라서 $f'(x)=3kx^2-2kx+k$이고
$f'(1)=3k-2k+k=2k=10$이므로
$k=5$

답 ⑤

다른 풀이
$xf(x)+f(x)=kx^4+kx$에 $x=1$을 대입하면
$f(1)+f(1)=2k$
$f(1)=k$
$xf(x)+f(x)=kx^4+kx$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+xf'(x)+f'(x)=4kx^3+k$
이 식에 $x=1$을 대입하면
$f(1)+2f'(1)=4k+k$
$k+2f'(1)=5k$
$f'(1)=2k=10$
따라서 $k=5$

5 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}=0$이고 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(0)-g(0)=0$에서
$f(0)=g(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)-f(0)+g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)-f(0)\}-\{g(x)-g(0)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$=f'(0)-g'(0)=2$ …… ㉠

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-6}{x}=4$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)-6\}=0$이고 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(0)+g(0)-6=0$
이때 $f(0)=g(0)$이므로
$f(0)=g(0)=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-6}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-\{f(0)+g(0)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)-f(0)\}+\{g(x)-g(0)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$=f'(0)+g'(0)=4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$f'(0)=3$, $g'(0)=1$
따라서 $h(x)=f(x)g(x)$에서
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
$=3\times 3+3\times 1$
$=12$

답 ③

6 $f(x)=(x^2+1)(2x-3)$에서
$f'(x)=2x(2x-3)+2(x^2+1)$
$=6x^2-6x+2$
$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=14$이므로
$f'(a)=14$에서
$6a^2-6a+2=14$
$a^2-a-2=0$
$(a+1)(a-2)=0$
$a=-1$ 또는 $a=2$
$a>0$이므로
$a=2$

답 ②

7 $f'(x)=3x^2-6$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-6$이다.
$f(x)=x^3-6x$에서
$f(-3)=-27+18=-9$, $f(3)=27-18=9$이므로
두 점 $(-3,\ -9)$, $(3,\ 9)$를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{9-(-9)}{3-(-3)}=3$이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선과 두 점 $(-3,\ f(-3))$, $(3,\ f(3))$을 지나는 직선이 서로 평행하므로
$3a^2-6=3$
$3a^2=9$
$a^2=3$

$a>0$이므로

$a=\sqrt{3}$

답 ③

참고

두 점 $(-3,\ f(-3))$, $(3,\ f(3))$, 즉 두 점 $(-3,\ -9)$, $(3,\ 9)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=3x$이다.
점 $(a,\ f(a))$, 즉 점 $(\sqrt{3},\ -3\sqrt{3})$은 직선 $y=3x$ 위의 점이 아니므로 두 점 $(-3,\ f(-3))$, $(3,\ f(3))$을 지나는 직선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선은 일치하지 않는다.

8 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)으로 놓으면 $f(-x)=-ax^3+bx^2-cx+d$이고 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+f(-x)=2bx^2+2d=0$이므로

$b=0,\ d=0$

조건 (나)에서 $f(1)=4$, $f'(1)=2$이므로

$f(x)=ax^3+cx$에서

$f(1)=a+c=4$ ⋯⋯ ㉠

$f'(x)=3ax^2+c$에서

$f'(1)=3a+c=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ c=5$

따라서 $f(x)=-x^3+5x$이므로

$f(-3)=27-15=12$

답 12

Level 2 기본 연습 본문 38~39쪽

1 ⑤	**2** ①	**3** 72	**4** 13	**5** ④
6 ①	**7** ①	**8** ⑤		

1 $\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=x^3-5x-3$에서

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times2=2f'(x)$이므로

$f'(x)=\dfrac{x^3-5x-3}{2}$

$g(x)=(x^2-4x)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-4)f(x)+(x^2-4x)f'(x)$

따라서

$g'(2)=(4-4)\times f(2)+(4-8)\times\dfrac{8-10-3}{2}$

$=10$

답 ⑤

2 $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{5}nx^{n-1}$에서

$f(x)=\sum_{n=2}^{5}nx^{n-1}+1$

$f'(x)=\sum_{n=2}^{5}n(n-1)x^{n-2}$

따라서 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=\sum_{n=2}^{5}n(n-1)$

$=\sum_{n=1}^{4}(n+1)n$

$=\sum_{n=1}^{4}(n^2+n)$

$=\dfrac{4\times5\times9}{6}+\dfrac{4\times5}{2}$

$=30+10$

$=40$

답 ①

다른 풀이

$f(x)=\sum_{n=1}^{5}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$에서

$f'(x)=2+6x+12x^2+20x^3$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2+6+12+20=40$

3 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)+g(x)$는 최고차항의 계수가 3인 사차함수이고,
조건 (나)에서 $f(x)-g(x)=x^4+4x^2+5$이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 사차함수이다.

$f(x)=2x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면

$g(x)=x^4+ax^3+(b-4)x^2+cx+d-5$

이므로

$f'(x)=8x^3+3ax^2+2bx+c$

$g'(x)=4x^3+3ax^2+2(b-4)x+c$

이때 $f'(1)=g'(-1)$이므로

$8+3a+2b+c=-4+3a-2(b-4)+c$

$4b=-4$

$b=-1$

따라서 $f'(x)=8x^3+3ax^2-2x+c$,

$g'(x)=4x^3+3ax^2-10x+c$이므로

$f'(2)-g'(-2)$

$=(64+12a-4+c)-(-32+12a+20+c)$

$=72$

답 72

4 $a_1=7$이고 조건 (가)에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 공차가 6인 등차수열이므로 일반항은

$a_n=7+(n-1)\times 6$

$=6n+1$

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하자.

x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(n+2)-f(n)}{2}$

$=\frac{a(n+2)^2+b(n+2)+c-(an^2+bn+c)}{2}$

$=\frac{4an+4a+2b}{2}$

$=2an+2a+b$

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$2an+2a+b=6n+1$이므로

$2a=6$, $2a+b=1$

$a=3$, $b=-5$

따라서 $f'(x)=2ax+b=6x-5$이므로

$f'(3)=18-5=13$

답 13

5 $f(x)=x^2-4x+2$에서

$f'(x)=2x-4$

$p(x)=f(x)g(x)$라 하면

$p'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)g(h)+6}{h}=12$에서 $h\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(h)g(h)+6\}=0$

이때 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)g(0)+6=0$

$2g(0)+6=0$

$g(0)=-3$ ...... ㉠

또 $p(0)=-6$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)g(h)+6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p(h)-p(0)}{h}$

$=p'(0)$

$=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=(-4)\times(-3)+2\times g'(0)$

$=12+2g'(0)$

즉, $12+2g'(0)=12$에서

$g'(0)=0$ ...... ㉡

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)g(1-h)-3}{h}=-7$에서 $h\to 0$일 때

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(1-h)g(1-h)-3\}=0$

이때 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)-3=0$

$(-1)\times g(1)-3=0$

$g(1)=-3$ ...... ㉢

또 $p(1)=3$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)g(1-h)-3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{p(1-h)-p(1)}{-h}\times(-1)$

$=-p'(1)$

$=-\{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\}$

$=-\{(-2)\times(-3)+(-1)\times g'(1)\}$

$=-6+g'(1)$

즉, $-6+g'(1)=-7$에서

$g'(1)=-1$ ...... ㉣

㉠, ㉢에서

$g(x)-(-3)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)

으로 놓을 수 있다.

즉, $g(x)=(ax+b)(x^2-x)-3$이므로

$g'(x)=a(x^2-x)+(ax+b)(2x-1)$

㉡에서 $g'(0)=-b=0$이므로

$b=0$

㉣에서 $g'(1)=a+b=-1$이므로

$a=-1$

따라서 $g(x)=-x(x^2-x)-3$이므로

$g(-2)=2\times(4+2)-3$

$=9$

답 ④

다른 풀이

$f(x)=x^2-4x+2$에서

$f'(x)=2x-4$

$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$g'(x)=3ax^2+2bx+c$

$p(x)=f(x)g(x)$라 하면

$p'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)g(h)+6}{h}=12$에서 $h\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(h)g(h)+6\}=0$

이때 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)g(0)+6=0$

$2d+6=0$

$d=-3$

$p(0)=-6$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(h)g(h)+6}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{p(h)-p(0)}{h}\\&=p'(0)\\&=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\\&=(-4)\times d+2\times c\\&=12+2c\end{aligned}$$

즉, $12+2c=12$에서

$c=0$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)g(1-h)-3}{h}=-7$에서 $h\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(1-h)g(1-h)-3\}=0$

이때 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)-3=0$

$(-1)\times(a+b+c+d)-3=0$

$a+b=0$ ⋯⋯ ㉠

$p(1)=3$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)g(1-h)-3}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{p(1-h)-p(1)}{-h}\times(-1)\\&=-p'(1)\\&=-\{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\}\\&=-\{(-2)\times(a+b+c+d)+(-1)\times(3a+2b+c)\}\\&=-(6-a)\end{aligned}$$

즉, $-(6-a)=-7$에서

$a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$b=1$

따라서 $g(x)=-x^3+x^2-3$이므로

$$\begin{aligned}g(-2)&=8+4-3\\&=9\end{aligned}$$

6 함수 $g(x)=\begin{cases}ax-5 & (x<3)\\ f(x) & (x\geq3)\end{cases}$이 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3+}g(x)=g(3)$

$\lim_{x\to3-}g(x)=\lim_{x\to3-}(ax-5)=3a-5$

다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$

$g(3)=f(3)$

즉, $f(3)=3a-5$

함수 $g(x)=\begin{cases}ax-5 & (x<3)\\ f(x) & (x\geq3)\end{cases}$이 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}&=\lim_{x\to3-}\frac{(ax-5)-f(3)}{x-3}\\&=\lim_{x\to3-}\frac{(ax-5)-(3a-5)}{x-3}\\&=a\end{aligned}$$

다항함수 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}&=\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\\&=f'(3)\end{aligned}$$

즉, $f'(3)=a$

함수 $y=(x+1)f(x)$에서

$y'=f(x)+(x+1)f'(x)$

이므로 점 $(3, 4f(3))$에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned}f(3)+(3+1)f'(3)&=(3a-5)+4a\\&=7a-5\end{aligned}$$

즉, $7a-5=9$, $a=2$

따라서 $g(3)=f(3)=3\times2-5=1$

답 ①

7 조건 (다)에 의하여

$\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}=tg(t)$

$\{f(t)\}^2=t^2\{g(t)\}^2-t^2$

조건 (나)에 의하여 $t>0$일 때

$$\begin{aligned}f(t)&=\sqrt{t^2\{g(t)\}^2-t^2}\\&=t\sqrt{\{g(t)\}^2-1}\end{aligned}$$

다항함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$f'(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
이때 $f(0)=0$이므로
$$f'(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x\sqrt{\{g(x)\}^2-1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\{g(x)\}^2-1}$$
이때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로
$$\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)=5$$
따라서
$$f'(0)=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\{g(x)\}^2-1}$$
$$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

답 ①

8 함수 $f(x)=\begin{cases}|x+1| & (x\le 0)\\ 3x+1 & (x>0)\end{cases}$에서
$$f(x)g(x)=\begin{cases}(-x-1)g(x) & (x\le -1)\\ (x+1)g(x) & (-1<x\le 0)\\ (3x+1)g(x) & (x>0)\end{cases}$$
함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x=-1$과 $x=0$에서 미분가능하다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로
$$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}$$
$$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{(-x-1)g(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\{-g(x)\}$$
이고
$$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{(x+1)g(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}g(x)$$
이때 함수 $g(x)$가 다항함수이므로
$$\lim_{x\to -1-}\{-g(x)\}=-g(-1)$$
$$\lim_{x\to -1+}g(x)=g(-1)$$
즉, $-g(-1)=g(-1)$

$g(-1)=0$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)g(x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\left\{g(x)+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$$
이고
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(3x+1)g(x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\left\{3g(x)+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$$
이때 함수 $g(x)$가 다항함수이므로
$$\lim_{x\to 0-}\left\{g(x)+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}=g(0)+g'(0),$$
$$\lim_{x\to 0+}\left\{3g(x)+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}=3g(0)+g'(0)$$
즉, $g(0)+g'(0)=3g(0)+g'(0)$이므로

$g(0)=0$

(i), (ii)에 의하여

$g(x)=x(x+1)$

따라서 $g(4)=4\times 5=20$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 40쪽

1 44 **2** 53 **3** 75

1 $g(1)=3f(1)$이므로

조건 (가)에서
$$\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-3f(1)}{x-1}$$
$$=3f'(1)$$
$3f'(1)=g(1)+3$ …… ㉠

조건 (나)에서
$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-3f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)$$
$g'(1)=f(1)+11$ …… ㉡

$g(x)=(2x+1)f(x)$에서

$g'(x)=2f(x)+(2x+1)f'(x)$이므로

$g'(1)=2f(1)+3f'(1)$ ...... ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$f(1)+11=2f(1)+g(1)+3$

$g(1)=3f(1)$이므로

$f(1)+11=2f(1)+3f(1)+3$에서

$f(1)=2$

따라서 $g(1)=6$, $f'(1)=3$, $g'(1)=13$

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$

$=h'(1)$

$=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=3\times6+2\times13$

$=44$

답 44

2 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

이때 $f'(8-x)=2(8-x)+a$이므로

$f'(x)+f'(8-x)=16+2a=0$에서

$a=-8$

즉, $f(x)=x^2-8x+b$, $f'(x)=2x-8$

$\lim_{h\to0}\frac{f(k-3+h)-f(k-3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(k-3+h)-f(k-3)-f(k-3-h)+f(k-3)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(k-3+h)-f(k-3)}{h}$

$+\lim_{h\to0}\frac{f(k-3-h)-f(k-3)}{-h}$

$=f'(k-3)+f'(k-3)$

$=2f'(k-3)$

$=2\{2(k-3)-8\}$

$=4(k-7)$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}\lim_{h\to0}\frac{f(k-3+h)-f(k-3-h)}{h}$

$=4\sum_{k=1}^{10}(k-7)$

$=4\left(\sum_{k=1}^{10}k-7\times10\right)$

$=4\times(55-70)$

$=-60$

$-60=-f(0)=-b$

$b=60$이므로

$f(x)=x^2-8x+60$

따라서 $f(1)=1-8+60=53$

답 53

다른 풀이

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+a$

$f'(x)+f'(8-x)=0$에서

$f'(1)+f'(7)=0$, $f'(2)+f'(6)=0$, $f'(3)+f'(5)=0$

이고

$f'(4)+f'(4)=0$이므로 $f'(4)=0$

$f'(4)=8+a=0$에서 $a=-8$

$f'(x)=2x-8$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\lim_{h\to0}\frac{f(k-3+h)-f(k-3-h)}{h}$

$=\sum_{k=1}^{10}2f'(k-3)$

$=2\{f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+f'(1)+f'(2)$

$+f'(3)+f'(4)+f'(5)+f'(6)+f'(7)\}$

$=2[f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+\{f'(1)+f'(7)\}$

$+\{f'(2)+f'(6)\}+\{f'(3)+f'(5)\}+f'(4)]$

$=2\{f'(-2)+f'(-1)+f'(0)\}$

$=2\times(-12-10-8)$

$=-60$

$-60=-f(0)=-b$이므로

$b=60$

따라서 $f(x)=x^2-8x+60$이므로

$f(1)=1-8+60$

$=53$

3 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{x\to-1+}g(x)=g(-1)$

$f(-1)-2=-f(-1)-1+a$에서

$f(-1)=\frac{a+1}{2}$ ...... ㉠

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$

$-f(2)-4+a=f(2)+4+b$에서

$f(2)=\frac{a-b-8}{2}$ ...... ㉡

(i) 함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)+2x-\{-f(-1)-1+a\}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)+2x-\{f(-1)-2\}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)+2(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}+2\right\}$$
$$=f'(-1)+2$$

이고

$$\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{-f(x)-x^2+a-\{-f(-1)-1+a\}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{-\{f(x)-f(-1)\}-(x^2-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{-\{f(x)-f(-1)\}-(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=-\lim_{x\to-1+}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}+x-1\right\}$$
$$=-f'(-1)+2$$

이므로 $f'(-1)+2=-f'(-1)+2$에서

$f'(-1)=0$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{-f(x)-x^2+a-\{f(2)+4+b\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{-f(x)-x^2+a-\{-f(2)-4+a\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{-\{f(x)-f(2)\}-(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$=-\lim_{x\to2-}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+x+2\right\}$$
$$=-f'(2)-4$$

이고

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)+2x+b-\{f(2)+4+b\}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)+2(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+2\right\}$$
$$=f'(2)+2$$

이므로 $-f'(2)-4=f'(2)+2$에서

$f'(2)=-3$

$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ (p, q, r은 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f'(-1)=3-2p+q=0$ …… ㉢

$f'(2)=12+4p+q=-3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$p=-2$, $q=-7$

$f(x)=x^3-2x^2-7x+r$에서

$f(2)=6$이므로

$8-8-14+r=6$

$r=20$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-7x+20$이므로

㉠에서

$a=2f(-1)-1$

$=2\times(-1-2+7+20)-1$

$=47$

㉡에서

$b=a-8-2f(2)$

$=47-8-2\times(8-8-14+20)$

$=27$

따라서

$g(1)=-f(1)-1+a$

$=-(1-2-7+20)-1+47$

$=34$

$g(3)=f(3)+6+b$

$=(27-18-21+20)+6+27$

$=41$

이므로

$g(1)+g(3)=34+41=75$

답 75

04 도함수의 활용 (1)

유제 본문 42~48쪽

1 ③	**2** ②	**3** ①	**4** ③	**5** 6
6 ③	**7** ④	**8** ⑤		

1 $f(x)=x^3-8x+9$에서
$f'(x)=3x^2-8$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가
$f'(2)=12-8=4$
이므로 접선의 방정식은
$y-1=4(x-2)$
즉, $y=4x-7$
이 접선이 점 $(a, 13)$을 지나므로
$4a-7=13$
따라서 $a=5$

답 ③

2 $f(x)=-x^3+2x^2-8$이라 하면
$f'(x)=-3x^2+4x$
접점의 좌표를 $(a, -a^3+2a^2-8)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(a)=-3a^2+4a$이므로 접선의 방정식은
$y-(-a^3+2a^2-8)=(-3a^2+4a)(x-a)$
즉, $y=(-3a^2+4a)x+2a^3-2a^2-8$
이 직선의 방정식이 $y=mx$이므로
$m=-3a^2+4a$
$2a^3-2a^2-8=0$
$2(a-2)(a^2+a+2)=0$
모든 실수 a에 대하여 $a^2+a+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로
$a=2$
따라서 $m=-12+8=-4$

답 ②

3 함수 $f(x)=x^4-x^2+2$에서
$f'(x)=4x^3-2x$
$f(-1)=2$, $f(0)=2$이므로
$f(0)-f(-1)=0$
$f'(a)=4a^3-2a=0$에서
$2a(2a^2-1)=0$
$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $a=0$ 또는 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$
이때 $-1<a<0$이므로
$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ①

4 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 조건 (가)와 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'\left(\frac{2}{3}\right)$
이때 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{8+4a+2b}{2}=4+2a+b$이고,
$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서
$f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}a+b$이므로
$4+2a+b=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}a+b$
$a=-4$
조건 (나)에서
$f'(3)=27-24+b=3+b=0$
$b=-3$
따라서 $f(x)=x^3-4x^2-3x$이므로
$f(1)=1-4-3=-6$

답 ③

5 $f(x)=-x^3+ax^2-ax$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax-a$
다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하므로
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이고,
이차방정식 $-3x^2+2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면
$D\le 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$
$a(a-3)\le 0$에서 $0\le a\le 3$
$f(2)=-8+4a-2a=2a-8$이므로
$-8\le 2a-8\le -2$
따라서 $M=-2$, $m=-8$이므로
$M-m=-2-(-8)=6$

답 6

6 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$에서
$x_1-x_2>0$이면 $f(x_1)-f(x_2)>0$이고
$x_1-x_2<0$이면 $f(x_1)-f(x_2)<0$이다.

즉, $x_1>x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이고

$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이므로

함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 증가한다.

$f(x)=-2x^3+9x^2+24x-3$에서

$f'(x)=-6x^2+18x+24$

$=-6(x^2-3x-4)$

$=-6(x+1)(x-4)>0$

즉, $-1<x<4$

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1, 4)$에서 증가하므로

$b-a$의 최댓값은

$4-(-1)=5$

답 ③

참고

$f'(x)=-6x^2+18x+24$

$=-6(x^2-3x-4)$

$=-6(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

7 $f(x)=x^3+6x^2-15x+3$에서

$f'(x)=3x^2+12x-15$

$=3(x+5)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-5$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-5$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이다.

따라서 $\alpha=-5$, $\beta=1$이므로

$\beta-\alpha=1-(-5)=6$

답 ④

8 $f(x)=2x^3-3(2a+1)x^2+6a(a+1)x+8$에서

$f'(x)=6x^2-6(2a+1)x+6a(a+1)$

$=6\{x^2-(2a+1)x+a(a+1)\}$

$=6(x-a)(x-a-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=a+1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이므로

$f(a)=4$

$f(a)=2a^3-3a^2(2a+1)+6a^2(a+1)+8$

$=2a^3+3a^2+8$

$=4$

$2a^3+3a^2+4=0$

$(a+2)(2a^2-a+2)=0$

$a=-2$ 또는 $2a^2-a+2=0$

이때 모든 실수 a에 대하여

$2a^2-a+2=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$이므로

$a=-2$

따라서 함수 $f(x)=2x^3+9x^2+12x+8$은 $x=-1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(-1)=-2+9-12+8=3$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 49~50쪽

1 ⑤	**2** ①	**3** 25	**4** ②	**5** ⑤
6 ③	**7** ②	**8** ⑤		

1 $f(x)=2x^3-3x^2-10x+1$에서

$f'(x)=6x^2-6x-10$

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기가 2로 같으므로

$f'(a)=6a^2-6a-10=2$

$f'(b)=6b^2-6b-10=2$

즉, a, b는 이차방정식 $6x^2-6x-12=0$의 두 근이다.

$6(x^2-x-2)=0$에서

$6(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$b-a=2-(-1)=3$

답 ⑤

2 직선 $y=tx+\frac{4}{3}$는 실수 t의 값에 관계없이 점 $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$를 지난다.

$f(x)=-x^4+1$에서 $f'(x)=-4x^3$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^4+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=-4a^3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^4+1)=-4a^3(x-a)$

$y=-4a^3x+3a^4+1$ …… ㉠

이 직선이 점 $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$를 지나므로

$3a^4+1=\frac{4}{3}$

$a^4=\frac{1}{9}$

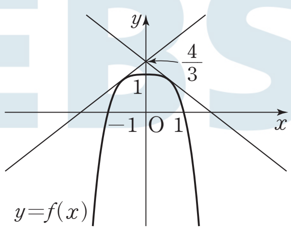
$\left(a^2+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{1}{3}\right)=0$

a는 실수이므로 $a^2=\frac{1}{3}$

$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

㉠에서 접선의 방정식은

$y=\frac{4\sqrt{3}}{9}x+\frac{4}{3}$ 또는 $y=-\frac{4\sqrt{3}}{9}x+\frac{4}{3}$



그러므로 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & \left(t<-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \\ 1 & \left(t=-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \\ 0 & \left(-\frac{4\sqrt{3}}{9}<t<\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \\ 1 & \left(t=\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \\ 2 & \left(t>\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \end{cases}$$

이때 $\lim_{t\to -\frac{4\sqrt{3}}{9}+} g(t)=0$, $\lim_{t\to -\frac{4\sqrt{3}}{9}-} g(t)=2$이므로 구하는 m의 값은 $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$이다.

답 ①

3 함수 $f(x)=x^3+ax^2+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

점 $\left(\frac{2}{3},\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{2}{3}\right)=3\times\frac{4}{9}+2a\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}a$이고,

두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(2,\ f(2))$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{(8+4a+b)-(-1+a+b)}{3}$$
$$=\frac{9+3a}{3}$$
$$=3+a$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{2}{3},\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$에서의 접선과 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(2,\ f(2))$를 지나는 직선이 서로 평행하므로 두 직선의 기울기는 같다.

즉, $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}a=3+a$에서

$\frac{a}{3}=\frac{5}{3}$

$a=5$

함수 $f(x)=x^3+5x^2+b$에서 $f(1)=3$이므로

$f(1)=1+5+b=3$

$b=-3$

따라서 $f(x)=x^3+5x^2-3$이므로

$f(2)=8+20-3=25$

답 25

4 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-10)x+4$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+(a^2-10)$

함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 x에 대한 이차방정식 $3x^2-2ax+(a^2-10)=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3(a^2-10)=-2a^2+30\leq 0$

$a^2\geq 15$

$(a+\sqrt{15})(a-\sqrt{15})\geq 0$에서

$a\leq -\sqrt{15}$ 또는 $a\geq\sqrt{15}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ②

5 $f(x)=-x^3+12x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x^2-4)$

$=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$의 극솟값이 -1이므로

$f(-2)=-16+k=-1$

따라서 $k=15$

답 ⑤

6 $f(x)=-2x^3+3ax^2+8$에서

$f'(x)=-6x^2+6ax$

$=-6x(x-a)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=a$

곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하므로 함수 $f(x)$의 극값이 0이다.

즉, $f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$

$f(0)=8$이므로 $f(a)=0$이어야 한다.

$f(a)=-2a^3+3a^3+8=a^3+8=0$

$(a+2)(a^2-2a+4)=0$

모든 실수 a에 대하여 $a^2-2a+4=(a-1)^2+3>0$이므로

$a=-2$

따라서 $f(x)=-2x^3-6x^2+8$이므로

$f(-a)=f(2)=-16-24+8=-32$

답 ③

7 $h(x)=f(x)-2g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)-2g'(x)$

$=-3x^2+14x-11-2(x-1)$

$=-3x^2+12x-9$

$=-3(x^2-4x+3)$

$=-3(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이고 $x=3$에서 극대이므로

$a=1$, $b=3$

따라서 $2a-b=2-3=-1$

답 ②

8 $f(x)=2x^3+kx^2+kx+1$에서 $f'(x)=6x^2+2kx+k$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 x에 대한 이차방정식 $6x^2+2kx+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $6x^2+2kx+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=k^2-6k=k(k-6)>0$에서

$k<0$ 또는 $k>6$

따라서 자연수 k의 최솟값은 7이다.

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 51~52쪽

1 ①	**2** ③	**3** ①	**4** 102	**5** ①
6 ④	**7** ③	**8** ②		

1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=-3x+5$이므로

$f(1)=2$, $f'(1)=-3$이다.

$g(x)=x^3f(x)$에서 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이므로

$g(1)=f(1)=2$, $g'(1)=3f(1)+f'(1)=3$

그러므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선 m의 방정식은

$y-2=3(x-1)$

즉, $y=3x-1$

따라서 직선 l의 x절편이 $\frac{5}{3}$, 직선 m의 x절편이 $\frac{1}{3}$이고,

두 직선 l, m이 만나는 점의 좌표는 $(1, 2)$이므로

두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{4}{3}$

답 ①

2 $f(x)=x^3+kx+k-3$에서

$f'(x)=3x^2+k$

$f'(-1)=3+k$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ -4)$에서의 접선의 방정식은 $y+4=(3+k)(x+1)$

즉, $y=(3+k)x+k-1$ …… ㉠

점 B가 선분 AC를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$

즉, 두 직선 AB와 BC는 서로 수직이다.

이때 직선 BC의 기울기가 $-\dfrac{1}{5}$이므로 직선 AB의 기울기는 5이다.

㉠에서 $3+k=5$이므로 $k=2$이고,

직선 AB의 방정식은 $y=5x+1$이다.

$f(x)=x^3+2x-1$이므로

$x^3+2x-1=5x+1$

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

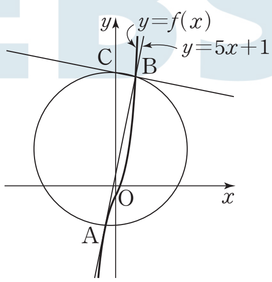
즉, 점 B의 좌표는 $(2,\ 11)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{11-(-4)\}^2}=3\sqrt{26}$

답 ③

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=5x+1$ 및 선분 AC를 지름으로 하는 원은 그림과 같다.



3 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & (x<0) \\ -x^2+4x & (x\ge 0) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2+4x)=0$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(-x^2+4x)=0$

$f(0)=0$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+4x}{x}=\lim_{x\to 0-}(x+4)=4$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^2+4x}{x}=\lim_{x\to 0+}(-x+4)=4$$

이므로 $\lim_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

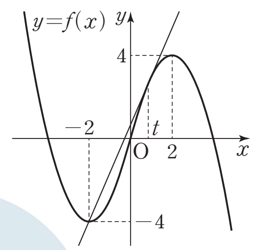
한편, $f(-2)=4-8=-4$이므로 점 $(-2,\ -4)$에서 곡선 $y=-x^2+4x\ (x\ge 0)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4t)\ (t>0)$이라 하면

$y'=-2x+4$에서 접선의 기울기는 $-2t+4$이고

접선의 방정식은

$y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t)$

즉, $y=(-2t+4)x+t^2$



이 직선이 점 $(-2,\ -4)$를 지나므로

$-4=4t-8+t^2$

$t^2+4t-4=0$

$t=-2\pm 2\sqrt{2}$

$t>0$이므로

$t=-2+2\sqrt{2}$

그림에서 함수 $g(a)$는

$g(a)=\begin{cases} 1 & (-2<a\le -2+2\sqrt{2}) \\ 2 & (-2+2\sqrt{2}<a<2) \end{cases}$이므로

$\lim_{x\to m-} g(x)=1,\ \lim_{x\to m+} g(x)=2$를 만족시키는 상수 m의 값은 $-2+2\sqrt{2}$이다.

답 ①

4 조건 (가)에서 $x\to -2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)-2=(x+2)g(x)$로 놓을 수 있다.

또 $\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x)-2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{g(x)}{x+2}=k$에서

$x\to -2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $f(x)-2=(x+2)g(x)=(x+2)^2(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(x)=(x^2+4x+4)(x-a)+2$에서
$f'(x)=(2x+4)(x-a)+(x+2)^2$
$=(x+2)(3x-2a+2)$
조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 가지므로
$f'(4)=0$
$f'(4)=6(12-2a+2)=0$
$a=7$
따라서 $f(x)=(x+2)^2(x-7)+2$이므로
$f(8)=10^2\times1+2=102$

답 102

5 $f(x)=x^3+ax^2-5x+3a$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-5$
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극소이므로
$f'(a)=3a^2+2a^2-5=5a^2-5=5(a+1)(a-1)=0$에서
$a=-1$ 또는 $a=1$
(i) $a=-1$일 때,
$f(x)=x^3-x^2-5x-3$
$f'(x)=3x^2-2x-5$
$=(x+1)(3x-5)$
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=1$일 때,
$f(x)=x^3+x^2-5x+3$
$f'(x)=3x^2+2x-5$
$=(3x+5)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

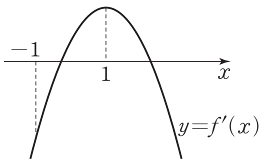
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 조건을 만족시킨다.
따라서 $a=1$, $b=-\frac{5}{3}$이므로
$a+3b=1+3\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-4$

답 ①

6 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$
이때
$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(2x^3-9x^2+18x+2)$
$=2a^3-9a^2+18a+2$
$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(2x^3-9x^2+12x+b)$
$=2a^3-9a^2+12a+b$
$f(a)=2a^3-9a^2+18a+2$
이므로 $2a^3-9a^2+18a+2=2a^3-9a^2+12a+b$에서
$6a+2=b$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f(x)=\begin{cases}2x^3-9x^2+12x+b & (x<a)\\ 2x^3-9x^2+18x+2 & (x\geq a)\end{cases}$에서
$f'(x)=\begin{cases}6x^2-18x+12 & (x<a)\\ 6x^2-18x+18 & (x>a)\end{cases}$
(i) $x>a$일 때,
$f'(x)=6x^2-18x+18=6(x^2-3x+3)$
이차방정식 $x^2-3x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$
이므로 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
즉, $x>a$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.
(ii) $x<a$일 때,
$f'(x)=6x^2-18x+12$
$=6(x^2-3x+2)$
$=6(x-1)(x-2)$
이므로 $x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이려면 $a\leq1$이어야 한다.
(i), (ii)에서 $a\leq1$
따라서 ㉠에서 $a+b=a+(6a+2)=7a+2\leq9$이므로
$a+b$의 최댓값은 9이다.

답 ④

7 $f(x)=-x^3+3x^2+kx+3$에서
$f'(x)=-3x^2+6x+k$
$=-3(x-1)^2+k+3$
함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 1)$에서 극솟값을 가지려면
함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, $f'(-1)=k-9<0$, $f'(1)=k+3>0$이어야 하므로
$-3<k<9$
이때 함수 $f'(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하고, $f'(-1)<0$, $f'(1)>0$이므로 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 c도 존재한다.
$-3<k<9$인 정수 k는 $-2, -1, 0, \cdots, 8$이므로
$M=8$, $m=-2$
따라서 $M-m=8-(-2)=10$

답 ③

8 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$를 $f(x)=x(x-a)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
이때
$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$
$$=x(x-2)f(x)$$
$$=x^2(x-2)(x-a)$$
이므로 $g(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$
조건 (가)에서 집합 $\{x|g(x)=0\}$의 원소의 개수는 2이므로
$\{x|g(x)=0\}=\{0, 2\}$에서
$a=0$ 또는 $a=2$
즉, $f(x)=x^2$ 또는 $f(x)=x(x-2)$
(i) $f(x)=x^2$일 때,
$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$
$$=x^4-2x^3$$
$$g'(x)=4x^3-6x^2$$
$$=2x^2(2x-3)$$
$g'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{27}{16}$	$\nearrow$

함수 $g(x)$는 극솟값 $-\frac{27}{16}$을 갖고, 극댓값을 갖지 않는다.

(ii) $f(x)=x(x-2)$일 때,
$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$
$$=x^4-4x^3+4x^2$$
$$g'(x)=4x^3-12x^2+8x$$
$$=4x(x-1)(x-2)$$
$g'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $g(x)$는 극댓값을 가지므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$는
$g(x)=x^4-2x^3$이고, 이때 함수 $g(x)$의 극솟값은 $-\frac{27}{16}$이다.

답 ②

Level **3** **실력 완성** 본문 53쪽

1 29 **2** 19 **3** ③

1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=x-2$이므로
$f(1)=-1$, $f'(1)=1$에서
$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)-1$ (a, b는 상수)
로 놓을 수 있고
$f'(x)=x^2+ax+b+(x-1)(2x+a)$에서
$f'(1)=1+a+b=1$
즉, $b=-a$이므로
$f(x)=(x-1)(x^2+ax-a)-1$
$f'(x)=x^2+ax-a+(x-1)(2x+a)$
$3g(3)=2h(3)$에서
$3\times\{f(3)-3+2\}=2\times2\times\{f'(3)-3\}$
$3(4a+16)=4(4a+18)$
$a=-6$
따라서 $f(x)=(x-1)(x^2-6x+6)-1$이므로
$f(6)=29$

답 29

참고

$f(x)-(x-2)=(x-1)(x^2+ax-a)-1-(x-2)$
$=(x-1)(x^2+ax-a)-(x-1)$
$=(x-1)(x^2+ax-a-1)$
$=(x-1)^2(x+a+1)$ …… ㉠

즉, $f(x)-(x-2)=(x^2-2x+1)(x+a+1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-1=(2x-2)(x+a+1)+(x^2-2x+1)$
$=2(x-1)(x+a+1)+(x-1)^2$
$=(x-1)(3x+2a+1)$

이므로

$f'(x)=(x-1)(3x+2a+1)+1$
$f'(x)-x=(x-1)(3x+2a+1)+1-x$
$=(x-1)(3x+2a)$ …… ㉡

㉠에서 $g(x)=(x-1)^2(x+a+1)$이고,
㉡에서 $h(x)=(x-1)^2(3x+2a)$이므로
$3g(3)=3\times4\times(4+a)$
$2h(3)=2\times4\times(9+2a)$
$3g(3)=2h(3)$에서
$12(4+a)=8(9+2a)$
$a=-6$
㉠에서 $f(x)-(x-2)=(x-1)^2(x-5)$이므로
$f(x)=x^3-7x^2+12x-7$

2 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
닫힌구간 $[-3,\ -1]$에서 함수 $g(t)$의 값이 항상 상수 k로 일정하므로
$t=-3$일 때, 닫힌구간 $[-4,\ -2]$에서 함수 $f'(x)$는 최솟값 k를 갖고,
$t=-1$일 때, 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f'(x)$는 최솟값 k를 갖는다.
즉, 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $x=-2$에서 최솟값 k를 갖는다.

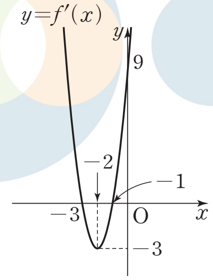
$f'(x)=3(x+2)^2+k$
$=3x^2+12x+12+k$

이므로 $a=6$, $b=12+k$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 2를 가지므로
$f'(-1)=0$
$3-12+12+k=0$에서
$k=-3$, $b=9$
또 $f(-1)=-1+6-9+c=2$에서
$c=6$이므로
$f(x)=x^3+6x^2+9x+6$
따라서 $f(1)=1+6+9+6=22$이므로
$f(1)+k=22+(-3)=19$

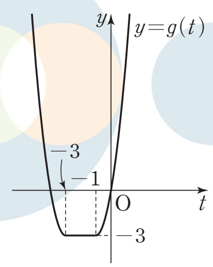
답 19

참고

$f(x)=x^3+6x^2+9x+6$에서
$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+2)^2-3$
이고, 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$t<-3$일 때 $g(t)=f'(t+1)$
$-3\le t\le -1$일 때 $g(t)=f'(-2)=-3$
$t>-1$일 때 $g(t)=f'(t-1)$
이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



3 $f(x)=(x-a)^3(x-b)+7$
$=(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)(x-b)+7$
에서

$f'(x)=(3x^2-6ax+3a^2)(x-b)$
$\qquad+(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)$
$=3(x-a)^2(x-b)+(x-a)^3$
$=(x-a)^2(4x-a-3b)$

$f'(x)=0$에서
$x=a$ 또는 $x=\dfrac{a+3b}{4}$
조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌어야 한다.
그러면 $a=2$ 또는 $\dfrac{a+3b}{4}=2$

만약 $a=2$이면 $f'(x)$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 바뀌어야 하므로 $\frac{a+3b}{4}=2$이어야 하고 $a=b=2$가 되어 a와 b가 서로 다르다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a\neq2$, $\frac{a+3b}{4}=2$

즉, $a\neq2$, $a+3b=8$

한편, 조건 (나)에서 $f'(t)=0$을 만족시키는 $t>2$인 실수 t의 값이 존재하지 않으므로

$a<2$

이때 $a=-3b+8$이므로

$-3b+8<2$에서 $b>2$

b가 정수이므로

$b\geq3$

따라서 방정식 $f'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 합은

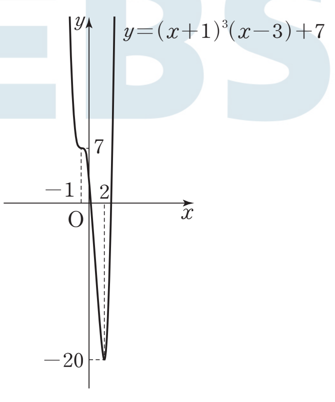
$a+2=(-3b+8)+2=-3b+10$

이므로 구하는 최댓값은 $b=3$일 때 1이다.

답 ③

참고

$a=-1$, $b=3$일 때 함수 $y=(x+1)^3(x-3)+7$의 그래프는 그림과 같다.



05 도함수의 활용 (2)

유제 본문 55~61쪽

1 ① 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5 ③
6 ② 7 ④ 8 11

1 $f(x)=-x^3+9x^2-15x+a$에서

$f'(x)=-3x^2+18x-15$

$=-3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=5$

닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$25+a$	$\searrow$	$-7+a$	$\nearrow$	$20+a$

닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $25+a$를 갖고, $x=1$에서 최솟값 $-7+a$를 갖는다.

$25+a=45$에서 $a=20$이므로

$m=-7+20=13$

따라서 $am=20\times13=260$

답 ①

2 $f(x)=3x^4-4x^3-36x^2+a$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-72x$

$=12x(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$0<a\leq4$에서 $0<\frac{a}{2}\leq2$이므로

닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f\left(-\frac{a}{2}\right)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$f\left(\frac{a}{2}\right)$

닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 a를 가지므로 $a=2$

따라서 $f(x)=3x^4-4x^3-36x^2+2$에서

$f(-1)=-27$, $f(1)=-35$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -35를 갖는다.

즉, $m=-35$이므로

$a-m=2-(-35)=37$

답 ③

3 x에 대한 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉

$x^3-2x^2-k=4x^2-9x+k$에서

$x^3-6x^2+9x=2k$

$h(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면

$h'(x)=3x^2-12x+9$

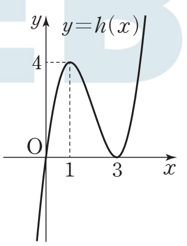
$\quad=3(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	4	↘	0	↗



함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 방정식 $x^3-6x^2+9x=2k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=2k$가 만나는 점의 개수가 2이어야 한다.

따라서 $2k=4$ 또는 $2k=0$에서 $k>0$이므로

$k=2$

답 ④

4 $f(x)=-3x^4-4x^3+12x^2-24$라 하면

$f'(x)=-12x^3-12x^2+24x$

$\quad=-12x(x^2+x-2)$

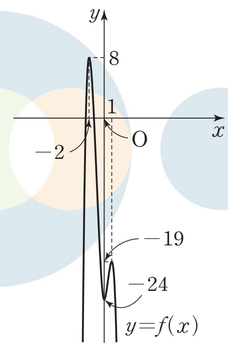
$\quad=-12x(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	8	↘	-24	↗	-19	↘



함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 방정식 $-3x^4-4x^3+12x^2-24=k$가 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 1이어야 한다.

따라서 $k=8$

답 ⑤

5 부등식 $f(x)\le g(x)$에서

$-2x^2+3x-a\le x^4+x^2-7x$

$x^4+3x^2-10x+a\ge 0$

$h(x)=x^4+3x^2-10x+a$라 하면

$h'(x)=4x^3+6x-10$

$\quad=2(x-1)(2x^2+2x+5)$

$h'(x)=0$에서

$x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-6+a$	↗

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-6+a$를 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le g(x)$, 즉 $x^4+3x^2-10x+a\ge 0$이 성립하려면 $-6+a\ge 0$이어야 한다.

따라서 $a\ge 6$이므로 실수 a의 최솟값은 6이다.

답 ③

6 부등식 $2x^3-6x^2+14>a$, 즉 $2x^3-6x^2+14-a>0$에서
$f(x)=2x^3-6x^2+14-a$라 하면
$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$14-a$	$\searrow$	$6-a$	$\nearrow$

$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=6-a$이므로
$x\geq0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2x^3-6x^2+14>a$가 성립하려면 $6-a>0$이어야 한다.
따라서 $a<6$이므로 정수 a의 최댓값은 5이다.

답 ②

7 점 P의 시각 t에서의 속도 v는
$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+3$이므로
점 P의 시각 $t=1$에서의 속도는 2이고,
점 P의 시각 t에서의 가속도 a는
$a=\frac{dv}{dt}=6t-4$이므로
점 P의 시각 $t=1$에서의 가속도는 2이다.
따라서 $p=2$, $q=2$이므로
$p+q=2+2=4$

답 ④

8 점 P의 시각 t에서의 속도 v는
$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+k$
t에 대한 이차방정식 $3t^2-12t+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=36-3k>0$에서 $k<12$
$t=0$일 때, $v=k>0$이고 t에 대한 이차함수
$v=3t^2-12t+k=3(t-2)^2+k-12$의 그래프의 축의 방정식이 $t=2$이므로
t에 대한 이차방정식 $3t^2-12t+k=0$이 갖는 서로 다른 두 실근은 모두 $t>0$에서 존재한다.
따라서 $k<12$이므로 자연수 k의 최댓값은 11이다.

답 11

Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

1 ⑤ **2** ⑤ **3** ④ **4** ③ **5** 15
6 ③ **7** ⑤ **8** 9

1 $f(x)=-3x^4+4x^3+k$에서
$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	k	$\nearrow$	$k+1$	$\searrow$	$k-16$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $k+1$을 갖고 $x=2$에서 최솟값 $k-16$을 갖는다.
따라서 $(k+1)+(k-16)=2k-15=0$이므로
$k=\frac{15}{2}$

답 ⑤

2 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서
$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
$a>0$이므로 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	b	$\searrow$	$-4a+b$	$\nearrow$	b

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$의 최댓값이 5이므로 $b=5$
이 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 -23이므로
$-4a+b=-23$에서 $a=7$
따라서 $f(x)=7x^3-21x^2+5$이므로
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}-\frac{21}{4}+5=\frac{5}{8}$

답 ⑤

3 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근과 같다.

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이 존재하려면 곡선 $y=f(x)-g(x)$가 x축과 만나야 한다.

$f(x)-g(x)$
$=(x^4+5x^3+9x^2+14x-2)-(x^3-x^2+2x-a)$
$=x^4+4x^3+10x^2+12x-2+a$

에서 $h(x)=x^4+4x^3+10x^2+12x-2+a$라 하면

$h'(x)=4x^3+12x^2+20x+12$
$\quad=4(x+1)(x^2+2x+3)$

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=-1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-7+a$	↗

함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-7+a$를 갖는다.

곡선 $y=h(x)$가 x축과 만나려면 $-7+a\le 0$이어야 한다.

따라서 $a\le 7$이므로 실수 a의 최댓값은 7이다.

답 ④

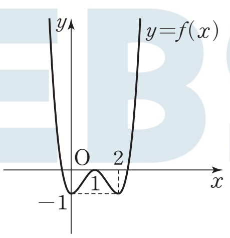
4 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+8x$
$\quad=4x(x^2-3x+2)$
$\quad=4x(x-1)(x-2)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)-k=0$에서

$f(x)=k$

방정식 $f(x)-k=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수와 같으므로

$$g(k)=\begin{cases} 2 & (k>0) \\ 3 & (k=0) \\ 4 & (-1<k<0) \\ 2 & (k=-1) \\ 0 & (k<-1) \end{cases}$$

따라서 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=4$, $g(0)=3$, $g(4)=2$이므로

$g\left(-\frac{1}{2}\right)+g(0)+g(4)=4+3+2=9$

답 ③

5 $x^3+5=12x+k$에서 $x^3-12x+5=k$이므로 $f(x)=x^3-12x+5$라 하면 방정식 $x^3+5=12x+k$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

$f(x)=x^3-12x+5$에서

$f'(x)=3x^2-12$
$\quad=3(x+2)(x-2)$

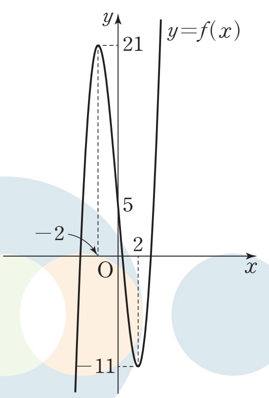
$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	21	↘	-11	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

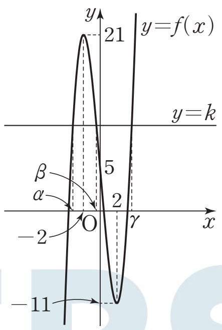


함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 3이고 각각의 점의 x좌표 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$가 $\alpha\beta\gamma>0$을 만족시키려면 $\alpha<0$, $\beta<0$, $\gamma>0$이어야 한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $5<k<21$이다.

즉, 정수 k의 최솟값은 6, 최댓값은 20이다.

따라서 정수 k의 개수는 15이다.



답 15

다른 풀이

$g(x)=x^3+5$라 하면 x에 대한 방정식 $x^3+5=12x+k$의 실근은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=12x+k$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ t^3+5)$에 접하고 기울기가 12인 접선의 방정식을 구하면

$g'(x)=3x^2$에서 $3t^2=12$

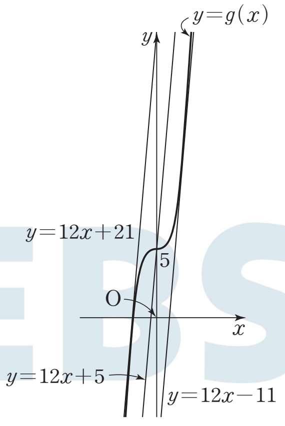
$t=-2$ 또는 $t=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-2,\ -3)$에서의 접선의 방정식은 $y=12x+21$이고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 13)$에서의 접선의 방정식은 $y=12x-11$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=12x+k$가 만나는 점의 개수가 3이고 각각의 점의 x좌표 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$가 $\alpha\beta\gamma>0$을 만족시키려면 $\alpha<0,\ \beta<0,\ \gamma>0$이어야 한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 5)$를 지나므로 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $5<k<21$이다.

즉, 정수 k의 최솟값은 6, 최댓값은 20이다.



따라서 정수 k의 개수는 15이다.

6 $f(x)=-4x^3+3x^2+6x+1$이라 하면

$f'(x)=-12x^2+6x+6$

$\quad=-6(2x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$x\ge-\frac{1}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$	↗	6	↘

그러므로 $x\ge-\frac{1}{2}$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 6이다.

이때 $x\ge-\frac{1}{2}$에서 부등식 $-4x^3+3x^2+6x+1\le k$가 성립하려면 실수 k는 이 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

즉, $k\ge6$

따라서 실수 k의 최솟값은 6이다.

답 ③

7 점 P의 위치가 2가 되는 시각을 t_1이라 하면

$t_1^3-t_1^2-5t_1-1=2$

$t_1^3-t_1^2-5t_1-3=0$

$(t_1+1)^2(t_1-3)=0$

$t_1\ge0$이므로 $t_1=3$

점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t-5$

이므로 $t=3$일 때 점 P의 속도는

$3\times3^2-2\times3-5=16$

답 ⑤

8 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1,\ v_2$라 하자.

점 P의 시각 t에서의 속도 v_1은

$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-4t-5$

점 Q의 시각 t에서의 속도 v_2는

$v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t^2-2t-2$

$v_1=v_2$에서

$3t^2-4t-5=2t^2-2t-2$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t\ge0$이므로 $t=3$

$t=3$일 때, 점 P의 위치는

$3^3-2\times3^2-5\times3=-6$

$t=3$일 때, 점 Q의 위치는

$\frac{2}{3}\times3^3-3^2-2\times3=3$

따라서 $t=3$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$3-(-6)=9$

답 9

Level 2 기본 연습

본문 64~65쪽

1 ② **2** ④ **3** ① **4** 3 **5** ⑤
6 17 **7** 9 **8** ①

1 $f(x)=x^3-3x+1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

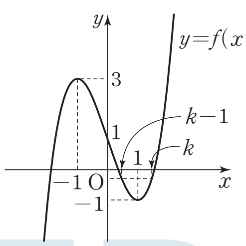
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x-1)=f(x)$의 실근을 k $(k>1)$이라 하자.

(i) $-\sqrt{3}\le t<-1$일 때, $g(t)=f(t)=t^3-3t+1$

(ii) $-1\le t\le 0$일 때, $g(t)=3$

(iii) $0<t<k$일 때,

$g(t)=f(t-1)=(t-1)^3-3(t-1)+1$

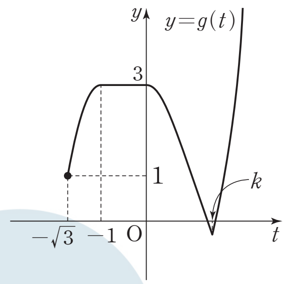
함수 $y=f(t-1)$의 그래프는 함수 $y=f(t)$의 그래프를 t축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(iv) $t\ge k$일 때,

$g(t)=f(t)$

$=t^3-3t+1$

(i)~(iv)에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=k$에서 최솟값을 가지므로

$f(k-1)=f(k)$에서

$(k-1)^3-3(k-1)+1=k^3-3k+1$

$3k^2-3k-2=0$

$k=\frac{3\pm\sqrt{33}}{6}$

$k>1$이므로 $k=\frac{3+\sqrt{33}}{6}$

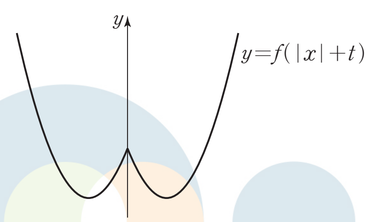
따라서 $a=\frac{3+\sqrt{33}}{6}$

답 ②

2 $f(|x|+t)=\begin{cases}f(-x+t) & (x<0)\\ f(x+t) & (x\ge0)\end{cases}$에서 $x\ge0$일 때 함수 $y=f(|x|+t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 그래프에서 $x\ge0$인 부분이고, $x<0$일 때 함수 $y=f(|x|+t)$의 그래프는 $x>0$에서의 함수 $y=f(x+t)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

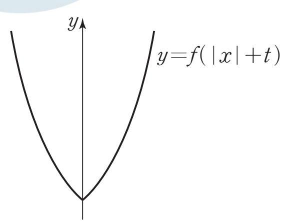
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=k$에 대하여 대칭이라 하면 실수 t의 값의 범위에 따른 함수 $y=f(|x|+t)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $t<k$일 때,



극소인 x의 값의 개수는 2, 극대인 x의 값의 개수는 1이므로 $g(t)=3$

(ii) $t\ge k$일 때,

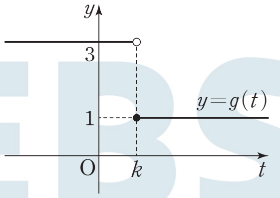


극소인 x의 값의 개수는 1, 극대인 x의 값의 개수는 0이므로 $g(t)=1$

(i), (ii)에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같고,

$\lim_{t\to 1-} g(t) \neq \lim_{t\to 1+} g(t)$이므로

$k=1$



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로

$f(x)=x^2-2x+p$ (p는 상수)로 놓으면

$h(x)=(x-3)(x^2-2x+p)$

$h'(x)=x^2-2x+p+(x-3)(2x-2)$

$\quad\quad=3x^2-10x+p+6$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여

$h'(1)\times h'(3)=(p-1)(p+3)<0$에서

$-3<p<1$이고, 조건 (가)에 의하여 p는 정수이므로

$p=-2$ 또는 $p=-1$ 또는 $p=0$

$p=-2$, $p=-1$이면 방정식 $h(x)=0$의 모든 근이 정수가 아니고 $p=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 모든 근이 정수이므로

$p=0$

따라서 ㉠에서 $h'(x)=3x^2-10x+6$이므로

$h'(4)=48-40+6=14$

답 ④

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f'(1)=0$

$h(x)=(x-3)f(x)$에서 $h'(x)=f(x)+(x-3)f'(x)$

$h'(1)=f(1)-2f'(1)=f(1)$

$h'(3)=f(3)$

조건 (나)에서 $h'(1)\times h'(3)<0$이므로 $f(1)\times f(3)<0$

방정식 $f(x)=0$은 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 조건 (가)에서 방정식 $h(x)=0$의 모든 근은 정수이므로 $f(2)=0$이다.

즉, $f(x)=(x-2)(x-\alpha)$ (α는 정수)로 놓을 수 있다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로

$\alpha=0$

따라서 $f(x)=x(x-2)=x^2-2x$이고

$f'(x)=2x-2$이므로

$h'(4)=f(4)+f'(4)=8+6=14$

3 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x$에서

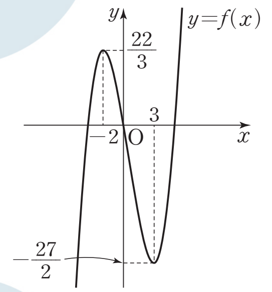
$f'(x)=x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$

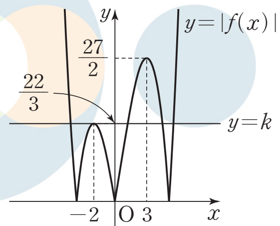
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{22}{3}$	↘	$-\frac{27}{2}$	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 x에 대한 방정식 $|f(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 5이어야 하므로

$k=\frac{22}{3}$

답 ①

4 조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $-k$와 $2k$뿐이므로

$f(x)=(x+k)^2(x-2k)$ 또는 $f(x)=(x+k)(x-2k)^2$

으로 놓을 수 있다.

(i) $f(x)=(x+k)^2(x-2k)$일 때

$f(x)=(x^2+2kx+k^2)(x-2k)$에서

$f'(x)=(2x+2k)(x-2k)+(x^2+2kx+k^2)$

$\quad\quad=(x+k)(3x-3k)$

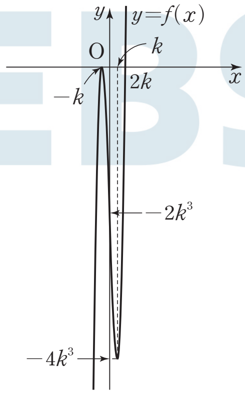
$f'(x)=0$에서

$x=-k$ 또는 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-4k^3$	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-35$의 교점의 개수가 3이 되려면

$-4k^3<-35$

즉, $k^3>\frac{35}{4}>8$이므로 자연수 k의 최솟값은 3이다.

(ii) $f(x)=(x+k)(x-2k)^2$일 때

$f(x)=(x+k)(x^2-4kx+4k^2)$에서

$f'(x)=(x^2-4kx+4k^2)+(x+k)(2x-4k)$

$\quad\quad =3x(x-2k)$

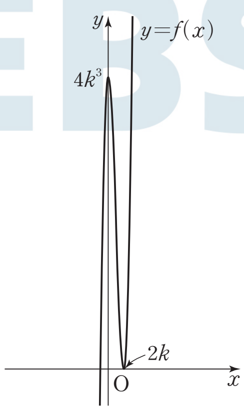
$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4k^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-35$의 교점의 개수가 1이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 3이다.

답 3

5 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)으로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서

$f'(-3)=0$

이때 조건 (나)에서 함수 $f'(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)-f'(-x)=0$이므로

$f'(3)-f'(-3)=0$

$f'(-3)=0$이므로

$f'(3)=0$

그러므로

$f'(x)=3a(x+3)(x-3)$

$\quad\quad =3ax^2-27a$

$f'(0)>0$이므로 $-27a>0$에서 $a<0$이고,

㉠에서 $b=0$, $c=-27a$이므로

$f(x)=ax^3-27ax+d$

$f(-3)=-27a+81a+d=54a+d$,

$f(3)=27a-81a+d=-54a+d$

$a<0$이므로

$f(-3)<f(3)$

조건 (다)에서 $f(3)-f(-3)=-108a=18$이므로

$a=-\frac{1}{6}$, $c=\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{9}{2}x+d$이므로

$f(1)-f(-1)=\left(-\frac{1}{6}+\frac{9}{2}+d\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{9}{2}+d\right)$

$\quad\quad =\frac{26}{3}$

답 ⑤

6 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$이므로

$\lim_{x\to3+}(x-3)(x-b)=\lim_{x\to3-}(-x^3-x^2+8x+a)=0$

$0=-12+a$

$a=12$

$x<3$일 때,

$f(x)=-x^3-x^2+8x+12$에서

$f'(x)=-3x^2-2x+8$

$=-(x+2)(3x-4)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

$x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(3)
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	(0)

그러므로 함수 $f(x)$는 $x<3$일 때, $x=-2$, $x=\frac{4}{3}$에서 극값을 갖는다.

$x\geq 3$일 때,

$f(x)=(x-3)(x-b)$이므로

$b\leq 3$이면

함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=\frac{4}{3}$, $x=3$에서 극값을 갖는다.

$-2+\frac{4}{3}+3=\frac{7}{3}\neq\frac{10}{3}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$b>3$이면

함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=\frac{4}{3}$, $x=\frac{3+b}{2}$에서 극값을 갖는다.

$-2+\frac{4}{3}+\frac{3+b}{2}=\frac{10}{3}$에서

$\frac{3+b}{2}=4$

$3+b=8$

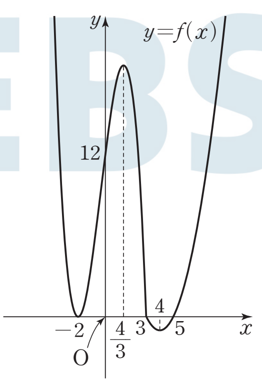
$b=5$

따라서 $a+b=12+5=17$

답 17

참고

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



7 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $2x^3-kx=-x^3+6$에서

$3x^3-kx-6=0$

$h(x)=3x^3-kx-6$이라 하면

$h'(x)=9x^2-k$

$k\leq 0$이면 $h'(x)\geq 0$이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 즉, 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $k>0$이고,

$h'(x)=9x^2-k=(3x+\sqrt{k})(3x-\sqrt{k})=0$에서

$x=-\frac{\sqrt{k}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{k}}{3}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{k}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{k}}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	$\frac{2k\sqrt{k}}{9}-6$	$\searrow$	$-\frac{2k\sqrt{k}}{9}-6$	$\nearrow$

방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면

$\frac{2k\sqrt{k}}{9}-6=0$ 또는 $-\frac{2k\sqrt{k}}{9}-6=0$

즉, $k\sqrt{k}=27$ 또는 $k\sqrt{k}=-27$

k는 양의 실수이므로

$k\sqrt{k}=27$

즉, $(\sqrt{k})^3=3^3$

$\sqrt{k}$는 실수이므로

$\sqrt{k}=3$

따라서 $k=9$

답 9

8 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|(t^3+2t^2-3t)-(t^2+5t)|=|t^3+t^2-8t|$

이므로

$|t^3+t^2-8t|=12$

(i) $t^3+t^2-8t=-12$일 때,

$t^3+t^2-8t+12=0$

$f(t)=t^3+t^2-8t+12$라 하면

$f'(t)=3t^2+2t-8$

$=(t+2)(3t-4)$

$f'(t)=0$에서 $t\geq 0$이므로

$t=\frac{4}{3}$

$t\geq 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	12	↘		↗

함수 $f(t)$는 $t=\frac{4}{3}$에서 최솟값을 갖는다.

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}+\frac{16}{9}-\frac{32}{3}+12=\frac{148}{27}>0$$

이므로 $t\geq 0$에서 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $t^3+t^2-8t=12$일 때,

$t^3+t^2-8t-12=0$

$(t+2)^2(t-3)=0$

$t\geq 0$이므로 $t=3$

이때 점 P의 시각 t에서의 속도 v_1는

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2+4t-3$$

점 Q의 시각 t에서의 속도 v_2는

$$v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t+5$$

이므로 $t=3$일 때 점 P의 속도는 36이고, 점 Q의 속도는 11이다.

따라서 $p=36$, $q=11$이므로

$p+q=36+11=47$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 66쪽

1 54 **2** ③ **3** ④

1 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$의 한 실근은 0이다.

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 다른 한 실근을 α라 하면 $f(x)=x^2(x-\alpha)$ 또는 $f(x)=x(x-\alpha)^2$으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $f(k)>0$인 음수 k가 존재하므로

$f(x)=x^2(x-\alpha)$이고, $\alpha<0$이다.

$f(x)=x^3-\alpha x^2$에서

$f'(x)=3x^2-2\alpha x$

$$\begin{aligned}f'(a)-f'(b)&=3a^2-2\alpha a-(3b^2-2\alpha b)\\&=(a-b)(3a+3b-2\alpha)=0\end{aligned}$$

$a\neq b$이므로 $3a+3b-2\alpha=0$

즉, $a+b=\frac{2\alpha}{3}$이고 $(a+b)^2=4$이므로

$\frac{4\alpha^2}{9}=4$

$\alpha^2=9$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-3$

따라서 $f(x)=x^2(x+3)$이므로

$f(3)=9\times 6=54$

답 54

2 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 사차함수 $f(x)$가 $f'(0)=0$이므로

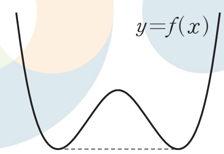
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$$g(x)=|t-f(x)|=\begin{cases}t-f(x) & (t\geq f(x))\\ f(x)-t & (t<f(x))\end{cases}$$

이므로 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 실수 x의 값은 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표 중에 존재한다.

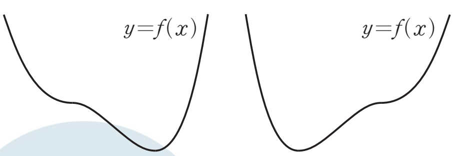
조건 (가)에서 함수 $h(t)$가 $t=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 2이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 생각할 수 있다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



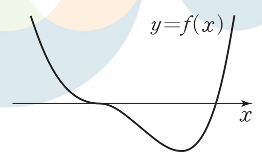
이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

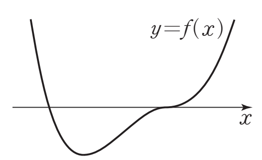
(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우



조건 (나)에서 $\lim_{t\to 0+}h(t)+\lim_{t\to 0-}h(t)+h(0)=5$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그림과 같이 생각할 수 있다.





이 경우

$\lim_{t\to0+} h(t)+\lim_{t\to0-} h(t)+h(0)=2+2+1=5$

이므로 조건 (나)를 만족시킴을 알 수 있다.

그래프의 개형으로부터 방정식 $f(x)=0$은 삼중근을 갖는데 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2=x^2(x^2+ax+b)$에서 $x=0$이 삼중근이 되어야 한다.

그러므로 $b=0$

$f(x)=x^3(x+a)$

$f(1)=1+a<1$이므로

$a<0$

$f'(x)=3x^2(x+a)+x^3$

$\quad =x^2(4x+3a)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\frac{3}{4}a$

조건 (가)에서 함수 $h(t)$는 $t=-27$에서 불연속이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 -27이다.

즉, $f\left(-\frac{3}{4}a\right)=-27$

$f\left(-\frac{3}{4}a\right)=-\frac{27}{64}a^3\times\frac{a}{4}$

$\quad =-\frac{27}{256}a^4$

$\quad =-27$

$a^4=256$에서 $a<0$이므로

$a=-4$

따라서 $f(x)=x^3(x-4)$이므로

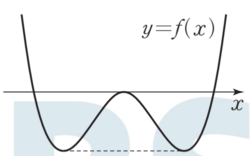
$f(1)=-3$

답 ③

참고

(i) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

ⓐ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같은 경우

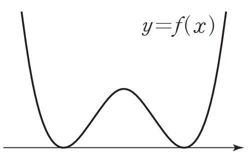


[그림 1]

$\lim_{t\to0+} h(t)+\lim_{t\to0-} h(t)+h(0)=2+4+2=8$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ⓑ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 [그림 2]와 같은 경우



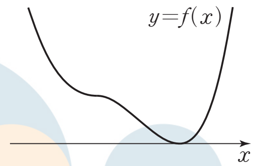
[그림 2]

$\lim_{t\to0+} h(t)+\lim_{t\to0-} h(t)+h(0)=4+0+0=4$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 [그림 3]과 같은 경우



[그림 3]

$\lim_{t\to0+} h(t)+\lim_{t\to0-} h(t)+h(0)=2+0+0=2$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

3 조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-2)(x-a)+q$ (p, q는 상수, $p\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

$f'(x)=p(x-2)(x-a)$

$\quad +p(x-1)(x-a)+p(x-1)(x-2)$

조건 (나)에서 $f'(1)=f'(a)$이므로

$-p(1-a)=p(a-1)(a-2)$

$p\neq0$, $a\neq1$이므로

$a-2=1$

즉, $a=3$

$f(x)=p(x-1)(x-2)(x-3)+q$

$f'(x)=p(x-2)(x-3)$

$\quad +p(x-1)(x-3)+p(x-1)(x-2)$

$\quad =p(3x^2-12x+11)$

$\quad =3p(x-2)^2-p$

함수 $f'(x)$의 최댓값이 1이므로

$p<0$이고 이때 $p=-1$이다.

$f(0)=-6p+q=6+q$, $f'(0)=11p=-11$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식은

$y-(6+q)=-11x$

즉, $y=-11x+6+q$

조건 (다)에서 접선 $y=-11x+6+q$가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$11+6+q=0$

$q=-17$

따라서 $f(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)-17$이므로

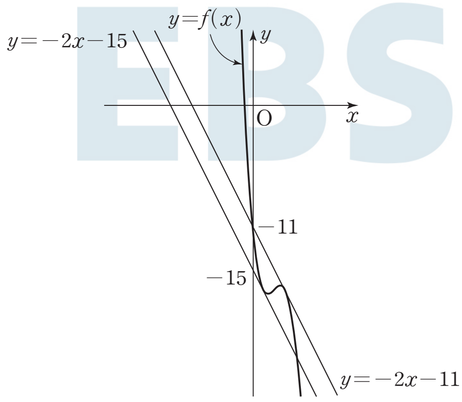
$f(-1)=7$

답 ④

참고

$f(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)-17$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은 $y=-2x-15$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 방정식은 $y=-2x-11$이다.

곡선 $y=-(x-1)(x-2)(x-3)-17$과 두 직선 $y=-2x-15$, $y=-2x-11$은 그림과 같다.



06 부정적분과 정적분

유제 본문 68~74쪽

1 ④	2 ③	3 ④	4 ①	5 ③
6 ④	7 11	8 ⑤		

1 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (x^2-5x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(6,\ 0)$을 지나므로

$f(6)=72-90+C=0$

$C=18$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+18$이므로

$f(0)=18$

답 ④

2 $F(x)=xf(x)-3x^4+x^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+2x$

$xf'(x)=12x^3-2x$

이때 함수 $f(x)$가 다항함수이므로

$f'(x)=12x^2-2$

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (12x^2-2)dx$

$=4x^3-2x+C$ (C는 적분상수)

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$F(1)=f(1)-3+1=f(1)-2$

이때 $F(1)=5,\ f(1)=4-2+C=2+C$이므로

$5=(2+C)-2$

$C=5$

따라서 $f(x)=4x^3-2x+5$이므로

$f(-1)=-4+2+5=3$

답 ③

3 $f(x)=\int_2^x (t^3-t^2+at)dt$에서

$f'(x)=x^3-x^2+ax$

다항함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극소이므로

$f'(2)=8-4+2a=0$

$a=-2$

$f'(x)=x^3-x^2-2x=x(x-2)(x+1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$$f(0)=\int_2^0 (t^3-t^2-2t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^0$$
$$=0-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 ④

4 $\int_1^x (t-1)f(t)dt=ax^4+bx^2+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_1^1 (t-1)f(t)dt=a+b+1$$

이때 $\int_1^1 (t-1)f(t)dt=0$이므로 $a+b+1=0$에서

$a+b=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(x-1)f(x)=4ax^3+2bx$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=4a+2b$

$2a+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-2$

$$(x-1)f(x)=4x^3-4x$$
$$=4x(x-1)(x+1)$$

함수 $f(x)$가 다항함수이므로

$$f(x)=4x(x+1)$$
$$=4x^2+4x$$
$$=(2x+1)^2-1$$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

답 ①

5 $\int_0^1 (x^2-x)dx+\int_1^0 (x+1)dx+\int_1^3 (x^2-2x-1)dx$

$$=\int_0^1 (x^2-x)dx-\int_0^1 (x+1)dx+\int_1^3 (x^2-2x-1)dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-2x-1)dx+\int_1^3 (x^2-2x-1)dx$$
$$=\int_0^3 (x^2-2x-1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-x\right]_0^3$$
$$=(9-9-3)-0$$
$$=-3$$

답 ③

6 함수 $f(x)=\begin{cases} x-4 & (x<2) \\ 3x^2+ax & (x\geq 2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} (x-4)=-2$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (3x^2+ax)=12+2a$

$f(2)=12+2a$

$12+2a=-2$에서

$a=-7$

따라서

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 (x-4)dx+\int_2^4 (3x^2-7x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_0^2+\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_2^4$$
$$=\{(2-8)-0\}+\{(64-56)-(8-14)\}$$
$$=8$$

답 ④

7 $f(x)=x^2+ax+b$에서

$$\int_{-3}^3 xf(x)dx=\int_{-3}^3 (x^3+ax^2+bx)dx$$
$$=2\int_0^3 ax^2dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^3$$
$$=18a$$
$$=36$$

이므로 $a=2$이고

$$\int_{-3}^3 f(x)dx=\int_{-3}^3 (x^2+ax+b)dx$$
$$=2\int_0^3 (x^2+b)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_0^3$$
$$=2(9+3b)$$
$$=36$$
이므로 $b=3$이다.

따라서 $f(x)=x^2+2x+3$이므로

$f(2)=4+4+3=11$

답 11

8 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x(3x-t)f(t)dt$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(x-2)}\left\{3x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{3x}{x+2}\times\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt-\frac{1}{x+2}\times\frac{1}{x-2}\int_2^x tf(t)dt\right\}$$
$$=\frac{6}{4}\times f(2)-\frac{1}{4}\times 2f(2)$$
$$=f(2)$$
$$=15+4a$$
즉, $15+4a=7$에서

$a=-2$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2-1$이므로

$f(1)=-1$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 75~76쪽

1 ②	**2** ③	**3** ④	**4** ②	**5** 49
6 ⑤	**7** ③	**8** ⑤		

1 $\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=f(2)=16-2+3=17$

답 ②

2 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 다항함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$G(x)=F(x)+C$ (C는 상수)

즉, $G(x)=x^3+x-5+C$

$G(0)=-5+C=3$에서 $C=8$이므로

$G(x)=x^3+x+3$

따라서 $G(2)=8+2+3=13$

답 ③

3 $\int_0^a(5x^3+3x^2-4x-13)dx-\int_0^{-a}(5t^3+3t^2-4t-13)dt$

$$=\int_0^a(5x^3+3x^2-4x-13)dx+\int_{-a}^0(5x^3+3x^2-4x-13)dx$$
$$=\int_{-a}^a(5x^3+3x^2-4x-13)dx$$
$$=2\int_0^a(3x^2-13)dx$$
$$=2\left[x^3-13x\right]_0^a$$
$$=2a^3-26a$$
즉, $2a^3-26a=24$에서

$a^3-13a-12=0$

$(a+1)(a+3)(a-4)=0$

$a=-1$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=4$

따라서 조건을 만족시키는 양수 a의 값은 4이다.

답 ④

4 $0\le x\le2$에서

$$|x^2-1|=\begin{cases}-x^2+1 & (0\le x\le1)\\ x^2-1 & (1\le x\le2)\end{cases}$$
따라서

$\int_0^2|x^2-1|dx$

$$=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^2(x^2-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2$$
$$=\left\{\left(-\frac{1}{3}+1\right)-0\right\}+\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$
$$=2$$
답 ②

5 $f(x)=x^4+3x-1$에서

$f'(x)=4x^3+3$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\{f'(t)\}^2dt=\{f'(1)\}^2$$

$$=(4+3)^2$$

$$=49$$

답 49

6 $\int_0^3 \{f(x)+g(x)\}dx=5$에서

$\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 g(x)dx=5$ ⋯⋯ ㉠

$\int_3^0 \{f(x)-2g(x)\}dx=4$에서

$-\int_0^3 \{f(x)-2g(x)\}dx=4$

$-\int_0^3 f(x)dx+2\int_0^3 g(x)dx=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\int_0^3 f(x)dx=2$, $\int_0^3 g(x)dx=3$

따라서

$$\int_0^3 \{4f(x)-g(x)\}dx=4\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx$$

$$=4\times2-3$$

$$=5$$

답 ⑤

7 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (x^3+ax)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$을 지나므로

$f(0)=C=1$

$f(2)=4+2a+C=3$

$a=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+1$이므로

$f(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

답 ③

8 $\int_1^x f(t)dt=2x^3+ax+b$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=2+a+b$

이때 $\int_1^1 f(t)dt=0$이므로 $2+a+b=0$에서

$a+b=-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2+a$

이때 $f(1)=7$이므로

$6+a=7$

$a=1$

㉡에 대입하면

$b=-3$

따라서 $f(x)=6x^2+1$이므로

$f(b)=f(-3)=54+1=55$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 77~78쪽

1 ②	**2** ②	**3** 36	**4** ②	**5** ⑤
6 ④	**7** ⑤	**8** ④		

1 $f'(0)=f'(6)=0$이고, 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 이차함수 $f'(x)$의 이차항의 계수가 양수이므로

$f'(x)=ax(x-6)=a(x^2-6x)$ ($a>0$, a는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=20$이고 극솟값은 $f(6)=2$이다.

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int a(x^2-6x)dx$

$=\frac{a}{3}x^3-3ax^2+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=C=20$

$f(6)=72a-108a+C=2$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+20$이므로

$f(2)=\frac{4}{3}-6+20=\frac{46}{3}$

답 ②

2 $\int_2^x f(t)dt=x^3+ax^2+x\int_1^2 f(t)dt$ ⋯⋯ ㉠

$\int_1^2 f(t)dt=k$ (k는 실수)라 하자.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_2^1 f(t)dt=1+a+\int_1^2 f(t)dt$

$-k=1+a+k$

$a+2k=-1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 f(t)dt=8+4a+2\int_1^2 f(t)dt$

$0=8+4a+2k$

$2a+k=-4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-\frac{7}{3},\ k=\frac{2}{3}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+2ax+k$

따라서 $f(x)=3x^2-\frac{14}{3}x+\frac{2}{3}$이므로

$f(-1)=3+\frac{14}{3}+\frac{2}{3}=\frac{25}{3}$

답 ②

3 조건 (가)에서

$f'(x)=x^2+a$

조건 (나)에 의하여

$f'(3)=0$ …… ㉠

$f(3)=0$ …… ㉡

㉠에 의하여 $f'(3)=9+a=0$이므로

$a=-9$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int (x^2-9)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-9x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

㉡에 의하여

$f(3)=9-27+C=0$

$C=18$

$f'(x)=(x+3)(x-3)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$$f(-3)=\frac{1}{3}\times(-3)^3-9\times(-3)+18$$
$$=-9+27+18$$
$$=36$$

답 36

4 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=x^2+a$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(x)=\int_1^x f(t)dt$에서 $g'(x)=f(x)$이고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극소이므로

$g'(2)=f(2)=4+a=0$

$a=-4$

$$g(x)=\int_1^x f(t)dt$$
$$=\int_1^x (t^2-4)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-4t\right]_1^x$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{11}{3}$$

따라서

$$\int_{-3}^3 g(x)dx=\int_{-3}^3\left(\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{11}{3}\right)dx$$
$$=2\int_0^3\frac{11}{3}dx=2\left[\frac{11}{3}x\right]_0^3$$
$$=2\times(11-0)$$
$$=22$$

답 ②

5 $\int_{x-1}^{x+1}\{f(t)+2t\}dt=6x^2+4$에서

$$\int_{x-1}^{x+1}\{f(t)+2t\}dt=\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt+\int_{x-1}^{x+1}2tdt$$
$$=\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt+\left[t^2\right]_{x-1}^{x+1}$$
$$=\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt+(x+1)^2-(x-1)^2$$
$$=\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt+4x$$

이므로

$\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt=6x^2-4x+4$

이 식의 양변에 $x=0,\ x=1,\ x=2$를 각각 대입하면

$\int_{-1}^1 f(t)dt=4,\ \int_0^2 f(t)dt=6,\ \int_1^3 f(t)dt=20$

$$\int_{-1}^3 f(t)dt=\int_{-1}^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$$
$$=\int_{-1}^0 f(t)dt+6+5\int_{-1}^0 f(t)dt$$
$$=6\int_{-1}^0 f(t)dt+6$$

이때 $\int_{-1}^{3} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{3} f(t)dt = 4 + 20 = 24$

이므로

$6\int_{-1}^{0} f(t)dt + 6 = 24$에서

$\int_{-1}^{0} f(t)dt = 3$

$\int_{2}^{3} f(t)dt = 5\int_{-1}^{0} f(t)dt = 15$

$\int_{1}^{3} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{3} f(t)dt = 20$

따라서 $\int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} f(t)dt = 5$

답 ⑤

6 $F(x) = x^2 f(x) + x^4 + kx$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 함수 $f(x)$를 최고차항의 계수가 a인 n차 다항함수라 하면 ㉠의 좌변은 $(n+1)$차 다항함수이므로 우변도 $(n+1)$차 다항함수이어야 한다.

이때 $x^2 f(x) + x^4 + kx$에서 $x^2 f(x)$는 $(n+2)$차 다항함수이므로 모든 실수 x에 대하여

$ax^{n+2} + x^4 = 0$

이어야 한다.

즉, $a = -1$, $n = 2$이므로 다항함수 $f(x)$는

$f(x) = -x^2 + px + q$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int (-x^2 + px + q)dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{p}{2}x^2 + qx + C \ (C\text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

㉠의 좌변은

$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{p}{2}x^2 + qx + C$

이고, 우변은

$x^2(-x^2 + px + q) + x^4 + kx = px^3 + qx^2 + kx$

이므로

$p = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{p}{2} = -\frac{1}{6}$, $k = q = -\frac{1}{6}$, $C = 0$

따라서 $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$이므로

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{k}\right) &= F(-6) \\ &= 72 - 6 + 1 \\ &= 67 \end{aligned}$$

답 ④

7 조건 (가)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)dt = f(0) = 0$이므로

$f(x) = mx$ ($m \neq 0$, m은 상수)

로 놓을 수 있다. 또 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$는

$g(x) = x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx &= \int_{-1}^{1} \{mx(x^2 + ax + b)\}dx \\ &= m\int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx)dx \\ &= 2m\int_{0}^{1} ax^2 dx \\ &= 2m\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{2am}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$m \neq 0$이므로 $a = 0$

따라서 $g'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)g'(x)dx &= \int_{-1}^{1} (mx \times 2x)dx \\ &= 2\int_{0}^{1} 2mx^2 dx \\ &= \left[\frac{4m}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{4m}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$m = 6$

따라서 $f(x) = 6x$이고, $g'(1) = 2$이므로

$f(g'(1)) = f(2) = 12$

답 ⑤

8 조건 (가)에서 $g(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$라 하면

$g'(x) = f(x)$

함수 $g(x)$가 $x = -2$에서 극소이고, $x = 2$에서 극대이므로

$g'(-2) = g'(2) = 0$

즉, $f(-2) = f(2) = 0$이므로

$f(x) = a(x-2)(x+2) = a(x^2 - 4)$ ($a < 0$, a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \int_{0}^{3} |f(x)|dx &= \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} \{-f(x)\}dx \\ &= \int_{0}^{2} a(x^2 - 4)dx + \int_{2}^{3} \{-a(x^2 - 4)\}dx \end{aligned}$$

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_0^2+a\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_2^3$$
$$=a\left\{\left(\frac{8}{3}-8\right)-0\right\}$$
$$+a\left\{(-9+12)-\left(-\frac{8}{3}+8\right)\right\}$$
$$=-\frac{23}{3}a$$

즉, $-\frac{23}{3}a=23$에서

$a=-3$

따라서 $f(x)=-3(x^2-4)$이므로

$f(1)=9$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 79~80쪽

1 ① **2** ③ **3** ④ **4** 140 **5** ④

6 ④

1 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$를 만족시키므로

$g(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f(x)+\int_0^x (x-t)f'(t)dt=x^4+ax^2+b$에서

$$f(x)+x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^4+ax^2+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=b=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3+2ax$$

$f'(x)+f(x)-f(0)=4x^3+2ax$

$f'(x)+f(x)=4x^3+2ax \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 만족시키는 함수 $f(x)$를 최고차항의 계수가 k인 n차 다항함수라 하면 $f'(x)$는 $(n-1)$차 다항함수이므로 ㉡의 좌변은 최고차항의 계수가 k인 n차 다항함수이다.

즉, $k=4$, $n=3$이므로 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=4x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있고

$f'(x)=12x^2+2px+q$

또 ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0$이므로

$q=0$

$f(x)+f'(x)=(4x^3+px^2)+(12x^2+2px)$

$=4x^3+(p+12)x^2+2px$

㉡은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$p+12=0$, $2p=2a$

$p=-12$, $a=-12$

따라서 $f(x)=4x^3-12x^2$, $g(x)=x^4-12x^2$이므로

$f(1)+g(1)=(4-12)+(1-12)$

$=-19$

답 ①

2 $g(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하자.

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(x^2-3x)(ax+b) & (x\le0)\\(x-1)(ax+b) & (x>0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

즉,

$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=f(0)g(0)$

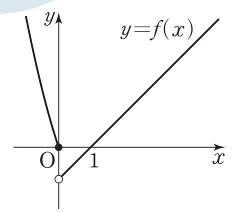
$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}(x^2-3x)(ax+b)=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}(x-1)(ax+b)=-b$

$f(0)g(0)=0\times b=0$

따라서 $b=0$

$f(0)=0$, $g(0)=a\times0=0$이므로 조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$는 원점에서만 만나야 한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=g(x)=ax$에서 $a<1$이면 $x>0$에서 함수 $f(x)=x-1$의 그래프가 직선 $y=g(x)$와 항상 만나므로

$a\ge1$

$$f(x)g(x)=\begin{cases}a(x^3-3x^2) & (x\le0)\\a(x^2-x) & (x>0)\end{cases}$$

$$\int_{-2}^3 f(x)g(x)dx=\int_{-2}^0 f(x)g(x)dx+\int_0^3 f(x)g(x)dx$$
$$=\int_{-2}^0 a(x^3-3x^2)dx+\int_0^3 a(x^2-x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-2}^0+a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=a\{0-(4+8)\}+a\left\{\left(9-\frac{9}{2}\right)-0\right\}$$
$$=-\frac{15}{2}a\le-\frac{15}{2}$$

따라서 $\int_{-2}^{3} f(x)g(x)dx$의 최댓값은 $-\frac{15}{2}$이다.

답 ③

3 조건 (가)에서

$$\int_{t}^{t+2} f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{t}^{t+2}=f(t+2)-f(t)$$

이므로

$$4\le\int_{t}^{t+2} f'(x)dx\le 10$$

$$2\le\frac{f(t+2)-f(t)}{2}\le 5$$

모든 실수 t에 대하여 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 연속이고, 열린구간 $(t, t+2)$에서 미분가능하므로

$$\frac{f(t+2)-f(t)}{2}=f'(c)$$

를 만족시키는 상수 c가 열린구간 $(t, t+2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 모든 실수 t에 대하여 $t<c<t+2$인 상수 c가 $2\le f'(c)\le 5$를 만족시킨다. 만약 $f'(x)$가 상수함수가 아니면 $x\to\infty$일 때 $f'(x)\to\infty$ 또는 $f'(x)\to-\infty$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f'(x)$는 상수함수이므로

$f'(x)=a$ (a는 상수, $2\le a\le 5$)라 할 수 있다.

즉, $f(x)=ax+b$ ($2\le a\le 5$, a, b는 상수)

함수 $g(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$라 하면 $g(x)$는 이차함수이고 $x=3$에서 최소이므로

$g'(3)=f(3)=0$

즉, $f(3)=3a+b=0$, $b=-3a$

$f(x)=ax-3a$이고, $f(6)=3a$이므로 $2\le a\le 5$에서

$6\le 3a\le 15$

따라서 $f(6)$의 최댓값은 15, 최솟값은 6이므로 그 합은

$15+6=21$

답 ④

참고

함수 $f(x)$가 $f(x)=5x-15$일 때 $f(6)$의 값이 최대이고, $f(x)=2x-6$일 때 $f(6)$의 값이 최소이다.

4 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

라 하자.

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{x}(t^3+at^2+bt+c)dt$$

$$=2\int_{0}^{x}(at^2+c)dt$$

$$=2\Big[\frac{a}{3}t^3+ct\Big]_{0}^{x}$$

$$=2\Big(\frac{a}{3}x^3+cx\Big)$$

모든 실수 x에 대하여 $2\Big(\frac{a}{3}x^3+cx\Big)=0$이므로

$a=0$, $c=0$

$f(x)=x^3+bx$에서

$f'(x)=3x^2+b$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} f'(t)dt=f'(0)=b$$

즉, $b=-n$

따라서 $f(x)=x^3-nx$

x에 대한 방정식 $f(x)=nx$에서

$x^3-nx=nx$

$x(x+\sqrt{2n})(x-\sqrt{2n})=0$

$x=-\sqrt{2n}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2n}$

즉, $a_n=\sqrt{2n}$, $b_n=-\sqrt{2n}$

$f(x)=x^3-nx$에서

$f(-x)=-f(x)$이므로

$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

즉,

$$S_n=\int_{b_n}^{a_n}|f(x)|dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2n}}^{\sqrt{2n}}|f(x)|dx$$

$$=2\int_{0}^{\sqrt{2n}}|f(x)|dx$$

$f(x)=x^3-nx=x(x-\sqrt{n})(x+\sqrt{n})$에서

$0\le x\le\sqrt{n}$이면 $f(x)\le 0$

$x\ge\sqrt{n}$이면 $f(x)\ge 0$

따라서

$$S_n=2\int_{0}^{\sqrt{2n}}|f(x)|dx$$

$$=2\Big\{-\int_{0}^{\sqrt{n}} f(x)dx+\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} f(x)dx\Big\}$$

$$=2\Big\{-\int_{0}^{\sqrt{n}}(x^3-nx)dx+\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}}(x^3-nx)dx\Big\}$$

$$=2\Big\{-\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{n}{2}x^2\Big]_{0}^{\sqrt{n}}+\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{n}{2}x^2\Big]_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}}\Big\}$$

$$=2\Big[-\Big\{\Big(-\frac{n^2}{4}\Big)-0\Big\}+\Big\{0-\Big(-\frac{n^2}{4}\Big)\Big\}\Big]$$

$$=n^2$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{7}S_n=\sum_{n=1}^{7}n^2$$

$$=\frac{7\times 8\times 15}{6}$$

$$=140$$

답 140

5 함수 $f(x)$가 이차함수이고, $0\in(A\cap B)$이므로

$n(A)=n(B)=1$ 또는 $n(A)=n(B)=2$

이때 $n(A)=n(B)=1$이면 $F(x)=0$인 실수 x가 0뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $n(A)=n(B)=2$이고, $0\in(A\cap B)$이므로

$A=\{0,\ a\}$ (a는 0이 아닌 정수)

즉, $f(x)=x^2-ax$

$$F(x)=\int f(x)dx$$
$$=\int (x^2-ax)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

이때 $0\in(A\cap B)$에서 $F(0)=0$이므로

$C=0$

즉, $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2$이므로

$\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2=x^2\left(\frac{1}{3}x-\frac{a}{2}\right)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{3a}{2}$

이므로

$B=\left\{0,\ \frac{3a}{2}\right\}$

조건 (나)에 의하여 $\frac{3a}{2}$가 50 이하의 자연수이므로

$a=2k$ (k는 16 이하의 자연수)

따라서 $f(10)=100-10a=100-20k$의 최댓값은 $k=1$일 때 80, 최솟값은 $k=16$일 때 -220이므로 $f(10)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$80-(-220)=300$

답 ④

6 $g(x)=\int_t^x f(s)ds$에서

$x<0$이고, $t>0$이므로

$$g(x)=\int_t^x f(s)ds$$
$$=\int_t^0 (2s-4)ds+\int_0^x (as-2)(s+2)ds$$
$$=\Big[s^2-4s\Big]_t^0+\Big[\frac{a}{3}s^3+(a-1)s^2-4s\Big]_0^x$$
$$=\{0-(t^2-4t)\}+\left\{\frac{a}{3}x^3+(a-1)x^2-4x-0\right\}$$
$$=\frac{a}{3}x^3+(a-1)x^2-4x-(t^2-4t)$$

모든 양수 t에 대하여 곡선 $y=g(x)$가 x축과 적어도 한 점에서 만나려면 $x<0$이므로 x에 대한 방정식

$g(x)=\frac{a}{3}x^3+(a-1)x^2-4x-(t^2-4t)=0$

이 적어도 하나의 음의 실근을 가져야 한다.

이때 모든 양수 t에 대하여

$t^2-4t=(t-2)^2-4\geq-4$

이므로 -4 이상의 모든 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식

$\frac{a}{3}x^3+(a-1)x^2-4x=k$ …… ㉠

가 음의 실근을 가져야 한다.

$h(x)=\frac{a}{3}x^3+(a-1)x^2-4x$라 하자.

$a>0$이면 $x\to\infty$일 때 $h(x)\to\infty$이므로 -4 이상의 어떤 실수 k에 대하여 ㉠은 하나의 양의 실근만 갖는다.

또 $a=0$이면 $h(x)=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$이므로 4보다 큰 실수 k에 대하여 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

따라서 조건을 만족시키지 않으므로 a는 $a<0$인 정수이다.

$h'(x)=(ax-2)(x+2)=0$에서

$x=\frac{2}{a}$ 또는 $x=-2$

이때 $\frac{2}{a}=-2$이면 함수 $h(x)$는 감소하는 함수이고 $h(0)=0$이므로 $-4\leq k<0$인 실수 k에 대하여 ㉠은 하나의 양의 실근만 갖는다.

따라서 조건을 만족시키지 않으므로 $\frac{2}{a}\neq-2$에서 a는 $a\neq-1$인 음의 정수이다.

즉, $a<-1$이므로

$\frac{2}{a}>-2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{2}{a}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이므로 $h(-2)\leq-4$이어야 한다.

$$h(-2)=\frac{a}{3}\times(-2)^3+(a-1)\times(-2)^2-4\times(-2)$$
$$=\frac{4}{3}a+4\leq-4$$

이므로

$a\leq-6$

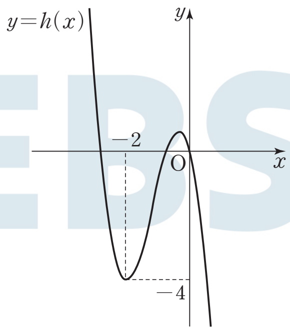
따라서 정수 a의 최댓값이 $M=-6$이므로

$$f(-M)=f(6)$$
$$=2\times6-4$$
$$=8$$

답 ④

참고

$a=-6$일 때, $h(x)=-2x^3-7x^2-4x$이고, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 -4 이상의 모든 실수 k에 대하여 직선 $y=k$가 곡선 $y=h(x)$와 만나는 점의 x좌표 중 음수인 것이 적어도 하나 존재한다.



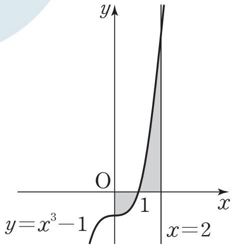
07 정적분의 활용

유제			본문 82~88쪽
1 ①	2 ④	3 ④	4 ③

1 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$x=1$

곡선 $y=x^3-1$은 x축과 점 $(1, 0)$에서만 만나고, $0\le x\le 1$에서 $x^3-1\le 0$이고 $1\le x\le 2$에서 $x^3-1\ge 0$이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |x^3-1|dx$$
$$=\int_0^1(-x^3+1)dx+\int_1^2(x^3-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_1^2$$
$$=\left\{\left(-\frac{1}{4}+1\right)-0\right\}+\left\{(4-2)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{4}+\left(2+\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{7}{2}$$

답 ①

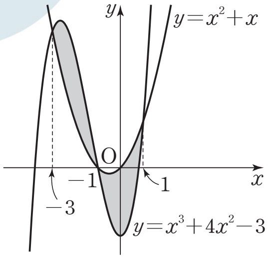
2 두 곡선 $y=x^3+4x^2-3$, $y=x^2+x$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+4x^2-3=x^2+x$에서

$x^3+3x^2-x-3=0$

$(x+3)(x+1)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$



즉, 두 곡선 $y=x^3+4x^2-3$, $y=x^2+x$는 세 점 $(-3,\ 6)$, $(-1,\ 0)$, $(1,\ 2)$에서만 만나고
$-3\le x\le -1$에서 $x^3+4x^2-3\ge x^2+x$,
$-1\le x\le 1$에서 $x^3+4x^2-3\le x^2+x$이다.
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-3}^{1}|(x^3+4x^2-3)-(x^2+x)|dx\\&=\int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)dx+\int_{-1}^{1}(-x^3-3x^2+x+3)dx\\&=\int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)dx+2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{-3}^{-1}+2\left[-x^3+3x\right]_0^1\\&=\left\{\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right)\right\}\\&\qquad+2\{(-1+3)-0\}\\&=4+4\\&=8\end{aligned}$$

답 ④

3 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$에서 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다. 즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 좌표는 모두 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 좌표와 같다.

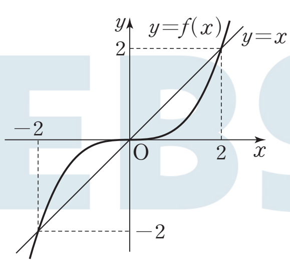
$f(x)=x$에서

$\frac{1}{4}x^3=x$

$x(x+2)(x-2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 다음 그림과 같이 세 점 $(-2,\ -2)$, $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$에서만 만나고 $-2\le x\le 0$에서 $f(x)\ge x$, $0\le x\le 2$에서 $f(x)\le x$이다.



함수 $g(x)$가 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^3$의 역함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다. 이때

$|(-x)-f(-x)|=|-x+f(x)|=|x-f(x)|$이므로
구하는 넓이는

$$\begin{aligned}2\int_{-2}^{2}|x-f(x)|dx&=2\times 2\int_0^2|x-f(x)|dx\\&=4\int_0^2\{x-f(x)\}dx\\&=4\int_0^2\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx\\&=4\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}x^4\right]_0^2\\&=4\{(2-1)-0\}\\&=4\end{aligned}$$

답 ④

4 시각 $t=5$에서 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}0+\int_0^5 v(t)dt&=\int_0^5(t^4-50t+a)dt\\&=\left[\frac{1}{5}t^5-25t^2+at\right]_0^5\\&=(5^4-25\times 5^2+5a)-0\\&=5a\end{aligned}$$

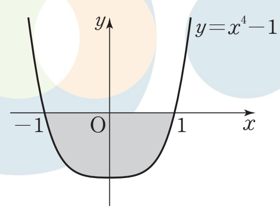
따라서 $5a=15$이므로
$a=3$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 89~90쪽

1 ② **2** ② **3** ⑤ **4** ③ **5** ④
6 ④ **7** ③

1 $x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$이므로 곡선 $y=x^4-1$은 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서만 만나고, $-1\le x\le 1$에서 $x^4-1\le 0$이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|x^4-1|dx&=\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx\\&=2\int_0^1(1-x^4)dx\end{aligned}$$

$=2\left[x-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{5}\right)-0\right\}$

$=2\times\frac{4}{5}$

$=\frac{8}{5}$

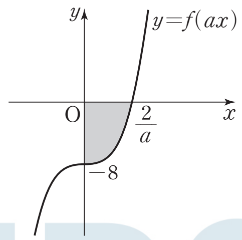
답 ②

2 $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$에서

$f(ax)=(ax-2)(a^2x^2+2ax+4)$이므로

곡선 $y=f(ax)$는 x축과 점 $\left(\frac{2}{a},\ 0\right)$에서만 만나고,

$0\le x\le\frac{2}{a}$에서 $f(ax)\le 0$이다.



따라서 곡선 $y=f(ax)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{\frac{2}{a}}|(ax)^3-8|dx=\int_0^{\frac{2}{a}}(-a^3x^3+8)dx$

$=\left[-\frac{a^3}{4}x^4+8x\right]_0^{\frac{2}{a}}$

$=\left(-\frac{4}{a}+\frac{16}{a}\right)-0$

$=\frac{12}{a}$

이때 $\frac{12}{a}=36$이므로

$a=\frac{1}{3}$

답 ②

3 점 P의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서 위치를 $x(t)$라 하자.

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(s)ds$

$=x(0)+\int_0^t(s^3-as)ds$

$=x(0)+\left[\frac{1}{4}s^4-\frac{a}{2}s^2\right]_0^t$

$=x(0)+\frac{1}{4}t^4-\frac{a}{2}t^2$

시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$x(2)=x(0)+4-2a$

시각 $t=4$에서 점 P의 위치는

$x(4)=x(0)+64-8a$

시각 $t=2$에서 점 P의 위치가 시각 $t=4$에서 점 P의 위치와 같으므로

$x(0)+4-2a=x(0)+64-8a$

$6a=60$

따라서 $a=10$

답 ⑤

다른 풀이

시각 $t=2$에서 점 P의 위치가 시각 $t=4$에서 점 P의 위치와 같으므로 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다.

즉, $\int_2^4 v(t)dt=0$

$\int_2^4 v(t)dt=\int_2^4(t^3-at)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a}{2}t^2\right]_2^4$

$=(64-8a)-(4-2a)$

$=60-6a$

따라서 $60-6a=0$이므로

$a=10$

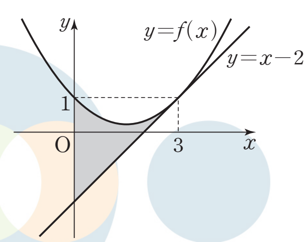
4 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-x+1$에서

$f'(x)=\frac{2}{3}x-1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선 l의 방정식은

$y=f'(3)(x-3)+f(3)$

이때 $f'(3)=1,\ f(3)=1$이므로 $y=x-2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_0^3|f(x)-(x-2)|dx=\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^2-2x+3\right)dx$

$=\left[\frac{1}{9}x^3-x^2+3x\right]_0^3$

$=(3-9+9)-0$

$=3$

답 ③

5 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$와 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^4 |g(x)-h(x)|dx=\int_1^4 |\{f(x)+2\}-\{-f(x)\}|dx$$
$$=\int_1^4 |2f(x)+2|dx$$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로 $2f(x)+2\ge 0$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_1^4 |2f(x)+2|dx=\int_1^4 \{2f(x)+2\}dx$$
$$=2\int_1^4 f(x)dx+\int_1^4 2\,dx$$
$$=2\times 5+\Big[2x\Big]_1^4$$
$$=10+(8-2)$$
$$=16$$

답 ④

다른 풀이

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_1^4 |f(x)|dx=\int_1^4 f(x)dx=5$$

함수 $g(x)=f(x)+2$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S+2\times(4-1)=5+6=11$

함수 $h(x)=-f(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하므로 곡선 $y=h(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 S와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$11+5=16$

6 $v(t)=t^2+t-2=(t+2)(t-1)$이므로

$0\le t\le 1$일 때 $v(t)\le 0$, $1\le t\le 2$일 때 $v(t)\ge 0$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^1 \{-v(t)\}dt+\int_1^2 v(t)dt$$
$$=\int_0^1 (-t^2-t+2)dt+\int_1^2 (t^2+t-2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^2$$
$$=\left\{\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-0\right\}+\left\{\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\right\}$$
$$=3$$

답 ④

7 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

방정식 $f(x)=x$를 만족시키는 실수 x는 -7과 9뿐이고, $\int_{-7}^9 \{x-f(x)\}dx=-8$이므로 $-7\le x\le 9$인 모든 실수 x에 대하여 $x-f(x)\le 0$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{-7}^9 |x-f(x)|dx=-2\int_{-7}^9 \{x-f(x)\}dx$$
$$=-2\times(-8)$$
$$=16$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 91~92쪽

1 ③	**2** ④	**3** ③	**4** 6	**5** ⑤
6 ⑤	**7** ⑤			

1 $\int_b^c f(x)dx=2\int_b^a f(x)dx$에서

$$\int_b^c f(x)dx-\int_b^a f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_b^c f(x)dx+\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^c f(x)dx=\int_b^a f(x)dx$$

이때 $\int_a^c f(x)dx=3$이므로

$\int_b^a f(x)dx=3$, $\int_b^c f(x)dx=6$

곡선 $y=f(x)$와 x축은 세 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$, $(c,\ 0)$ $(a<b<c)$에서만 만난다.

$\int_b^a f(x)dx=3$에서 $\int_a^b f(x)dx=-3$이므로 $a\le x\le b$에서 $f(x)\le 0$

$\int_b^c f(x)dx=6$이므로 $b\le x\le c$에서 $f(x)\ge 0$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_a^c |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx+\int_b^c |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b \{-f(x)\}dx+\int_b^c f(x)dx$$
$$=-(-3)+6$$
$$=9$$

답 ③

2 시각 $t=4$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4 (t+a)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+at\right]_0^4$$
$$=(8+4a)-0$$
$$=8+4a$$

즉, $8+4a=0$에서

$a=-2$

$v(t)=t-2$이므로

$0\le t\le 2$일 때 $v(t)\le 0$, $2\le t\le 4$일 때 $v(t)\ge 0$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^2 \{-v(t)\}dt+\int_2^4 v(t)dt$$
$$=\int_0^2 (-t+2)dt+\int_2^4 (t-2)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}t^2-2t\right]_2^4$$
$$=\{(-2+4)-0\}+\{(8-8)-(2-4)\}$$
$$=2+2$$
$$=4$$

답 ④

3 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점이 점 O$(0, 0)$이므로

$f(x)=ax^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

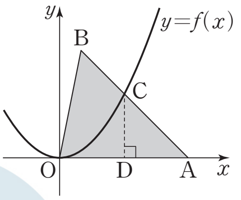
직선 AB의 방정식은 $y=-x+4$이므로 곡선 $y=f(x)$가 선분 AB와 만나는 점을 C$(k, -k+4)$ $\left(\frac{2}{3}\le k\le 4\right)$라 하면

$f(k)=-k+4$

$ak^2=-k+4$ ...... ㉠

$\overline{\text{OA}}=4$, 점 B$\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\times\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$$



점 D$(k, 0)$에 대하여 $\overline{\text{DA}}=4-k$, 점 C$(k, -k+4)$이므로

삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(4-k)\times(-k+4)=\frac{(4-k)^2}{2}$$

곡선 $y=f(x)$가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로

$$\int_0^k ax^2dx+\frac{(4-k)^2}{2}=\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^k+\frac{(4-k)^2}{2}$$
$$=\frac{1}{3}ak^3+\frac{(4-k)^2}{2}$$
$$=\frac{10}{3}$$

㉠에 의하여

$$\frac{1}{3}k(-k+4)+\frac{(4-k)^2}{2}=\frac{10}{3}$$

$k^2-16k+28=0$

$(k-2)(k-14)=0$

$k=2$ 또는 $k=14$

이때 $\frac{2}{3}\le k\le 4$이므로

$k=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$f(6)=18$

답 ③

4 함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 $f'(x)$는 이차함수이고, 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

삼차함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극댓값을 갖고, $x=q$에서 극솟값을 갖는다고 하면

$f'(p)=f'(q)=0$, $f(p)>f(q)$

함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 4이므로

$$f(p)-f(q)=\Big[f(x)\Big]_q^p=\int_q^p f'(x)dx=4$$

이때 $f(q)=2$이므로

$f(p)=6$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 6이다.

답 6

참고

$f'(x)=k(x-p)(x-q)$ (k, p, q는 상수, $k\neq0$)이라 하자.

(ⅰ) $k>0$인 경우

$p<q$이고 $p\le x\le q$에서 $f'(x)\le0$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_p^q |f'(x)|dx=\int_p^q \{-f'(x)\}dx=\int_q^p f'(x)dx$$

(ⅱ) $k<0$인 경우

$p>q$이고 $q\le x\le p$에서 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_q^p |f'(x)|dx=\int_q^p f'(x)dx$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 k ($k\neq0$)의 값에 관계없이 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_q^p f'(x)dx$이다.

5 조건 (나)에서 $\int_{-5}^{7} f(x)dx=3$이고 조건 (가)에 의하여

$\int_{-5}^{5} f(x)dx=0$이므로

$$\int_{-5}^{7} f(x)dx=\int_{-5}^{5} f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$$
$$=\int_5^7 f(x)dx=3$$

조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-7}^{-5} f(x)dx=-\int_5^7 f(x)dx=-3$$

조건 (나)에서 $\int_{-7}^{0} f(x)dx=5$이므로

$$\int_{-7}^{0} f(x)dx=\int_{-7}^{-5} f(x)dx+\int_{-5}^{0} f(x)dx$$
$$=-3+\int_{-5}^{0} f(x)dx=5$$

에서 $\int_{-5}^{0} f(x)dx=8$

조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^5 f(x)dx=-\int_{-5}^{0} f(x)dx=-8$$

조건 (가)에 의하여 $f(0)=0$이고, 조건 (다)에 의하여 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 음수 x는 -5와 -7뿐이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 다섯 개의 점 $(-7, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(7, 0)$에서만 만나고

$-7<x<-5$일 때 $f(x)<0$

$-5<x<0$일 때 $f(x)>0$

$0<x<5$일 때 $f(x)<0$

$5<x<7$일 때 $f(x)>0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-7}^{7} |f(x)|dx$$
$$=\int_{-7}^{-5}|f(x)|dx+\int_{-5}^{0} |f(x)|dx+\int_0^5 |f(x)|dx+\int_5^7 |f(x)|dx$$
$$=\int_{-7}^{-5}\{-f(x)\}dx+\int_{-5}^{0}f(x)dx+\int_0^5\{-f(x)\}dx+\int_5^7 f(x)dx$$
$$=-(-3)+8-(-8)+3$$
$$=22$$

답 ⑤

6 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이 a_n은

$$a_n=\int_0^n |f(x)|dx$$
$$=\int_0^n \left(\frac{1}{4}x^2+n\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^3+nx\right]_0^n$$
$$=\frac{1}{12}n^3+n^2$$

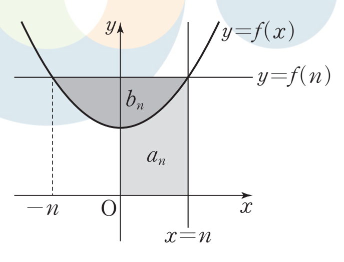
$f(x)=f(n)$에서

$\frac{1}{4}x^2+n=\frac{1}{4}n^2+n$

$x^2-n^2=0$

$(x+n)(x-n)=0$

$x=-n$ 또는 $x=n$



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(n)$으로 둘러싸인 부분의 넓이 b_n은

$b_n=\int_{-n}^{n}|f(n)-f(x)|dx$

$=\int_{-n}^{n}\left\{\left(\frac{1}{4}n^2+n\right)-\left(\frac{1}{4}x^2+n\right)\right\}dx$

$=\int_{-n}^{n}\left(\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_{0}^{n}(n^2-x^2)dx$

$=\frac{1}{2}\left[n^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^n$

$=\frac{1}{2}\left(n^3-\frac{1}{3}n^3\right)$

$=\frac{1}{3}n^3$

$a_n\ge b_n$이려면

$\frac{1}{12}n^3+n^2\ge\frac{1}{3}n^3$

$\frac{1}{4}n^3\le n^2$

이때 $n^2>0$이므로

$n\le 4$

따라서 $m=4$이므로

$\sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{4}\left\{\left(\frac{1}{12}k^3+k^2\right)-\frac{1}{3}k^3\right\}$

$=\sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{1}{4}k^3+k^2\right)$

$=-\frac{1}{4}\times\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2+\frac{4\times5\times9}{6}$

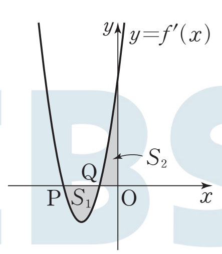
$=-25+30$

$=5$

답 ⑤

7 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 두 점 P$(-2,\ 0)$, Q$(k,\ 0)$ $(-2<k<0)$을 지나므로

$f'(-2)=0,\ f'(k)=0$



$S_1=\int_{-2}^{k}|f'(x)|dx$

$=-\int_{-2}^{k}f'(x)dx$

$S_2=\int_{k}^{0}|f'(x)|dx$

$=\int_{k}^{0}f'(x)dx$

$S_1=S_2$이므로

$-\int_{-2}^{k}f'(x)dx=\int_{k}^{0}f'(x)dx$

$\int_{-2}^{k}f'(x)dx+\int_{k}^{0}f'(x)dx=0$

$\int_{-2}^{0}f'(x)dx=0$

$f(0)-f(-2)=0$ …… ㉠

이때 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 2를 가지므로

$f(-2)=2$

㉠에서 $f(0)=2$

즉, $f(x)-2=x(x+2)^2$

$f(x)=x^3+4x^2+4x+2$

$f'(x)=3x^2+8x+4$

$f'(x)=0$에서

$(x+2)(3x+2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}$에서 극소이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}+\frac{16}{9}-\frac{8}{3}+2$

$=\frac{22}{27}$

답 ⑤

다른 풀이

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

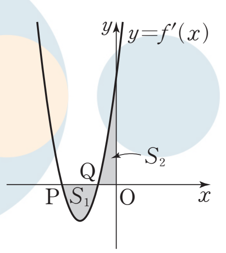
또 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 두 점 P$(-2,\ 0)$, Q$(k,\ 0)$ $(-2<k<0)$을 지나므로

$f'(-2)=0,\ f'(k)=0$

즉,

$f'(x)=3(x+2)(x-k)$

$=3x^2+(6-3k)x-6k$



$S_1=\int_{-2}^{k}|f'(x)|dx$

$=-\int_{-2}^{k}f'(x)dx$

$S_2=\int_{k}^{0}|f'(x)|dx$

$$=\int_k^0 f'(x)dx$$

$S_1=S_2$이므로

$$-\int_{-2}^k f'(x)dx=\int_k^0 f'(x)dx$$

$$\int_{-2}^k f'(x)dx+\int_k^0 f'(x)dx=0$$

$$\int_{-2}^0 f'(x)dx=0$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 f'(x)dx&=\int_{-2}^0 \{3x^2+(6-3k)x-6k\}dx\\&=\left[x^3+\frac{6-3k}{2}x^2-6kx\right]_{-2}^0\\&=0-\left(-8+\frac{6-3k}{2}\times 4+12k\right)\\&=-6k-4\end{aligned}$$

$-6k-4=0$에서

$k=-\frac{2}{3}$

즉, $f'(x)=3x^2+8x+4$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx\\&=\int (3x^2+8x+4)dx\\&=x^3+4x^2+4x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=-\frac{2}{3}$에서 극소이므로

$f(-2)=2$

즉, $-8+16-8+C=2$에서

$C=2$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2+4x+2$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{2}{3}\right)&=-\frac{8}{27}+\frac{16}{9}-\frac{8}{3}+2\\&=\frac{22}{27}\end{aligned}$$

Level 3 실력 완성

본문 93~94쪽

1 ④	**2** ②	**3** ②	**4** ①	**5** ②
6 ④				

1 $a>1$이므로 함수 $f(x)=a^{x-1}+1$은 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고, $f(p)=p$, $f(q)=q$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 두 점 (p, p), (q, q)에서만 만나고, $p\le x\le q$에서 $f(x)\le x$이다.

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이므로

$$\int_p^q |f(x)-x|dx=\int_p^q \{x-f(x)\}dx=6$$

$\int_p^q \{\log_a(x-1)-a^{x-1}\}dx$에서

$\log_a(x-1)-a^{x-1}=\log_a(x-1)+1-(a^{x-1}+1)$

함수 $g(x)=\log_a(x-1)+1$이라 하면 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, $\int_p^q |g(x)-x|dx=\int_p^q |f(x)-x|dx=6$

이때 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$도 두 점 (p, p), (q, q)에서만 만나고, $p\le x\le q$에서 $g(x)\ge x$이므로

$$\int_p^q |g(x)-x|dx=\int_p^q \{g(x)-x\}dx=6$$

따라서

$$\begin{aligned}&\int_p^q \{\log_a(x-1)-a^{x-1}\}dx\\&=\int_p^q \{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_p^q \{g(x)-x+x-f(x)\}dx\\&=\int_p^q \{g(x)-x\}dx+\int_p^q \{x-f(x)\}dx\\&=6+6\\&=12\end{aligned}$$

답 ④

2 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이므로

$f(0)=0$이고, $f(3)=-3$이므로

$f(-3)=-f(3)=-(-3)=3$

조건 (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 세 점 $A(-3, 3)$, $O(0, 0)$, $B(3, -3)$에서만 만난다.

곡선 $y=f(x)$와 선분 AO로 둘러싸인 영역을 S라 하면 S의 넓이는

$$\int_{-3}^0 |-x-f(x)|dx$$

이때 $\int_{-3}^0 (-x)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^0=\frac{9}{2}$이고,

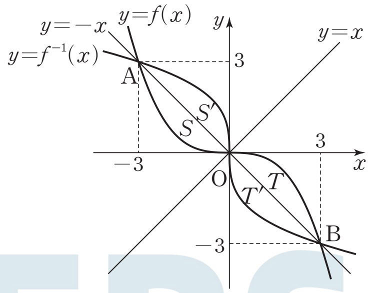
$\int_{-3}^0 f(x)dx=2$이므로

$-3\le x\le 0$에서 $-x\ge f(x)$

즉,

$$\int_{-3}^{0}|-x-f(x)|dx=\int_{-3}^{0}\{-x-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(-x)dx-\int_{-3}^{0}f(x)dx$$
$$=\frac{9}{2}-2$$
$$=\frac{5}{2}$$

또 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이므로 $0\le x\le 3$에서 $f(x)\ge -x$이고, 곡선 $y=f(x)$와 선분 OB로 둘러싸인 영역을 T라 하면 T의 넓이는 S의 넓이와 같다.
곡선 $y=f^{-1}(x)$와 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

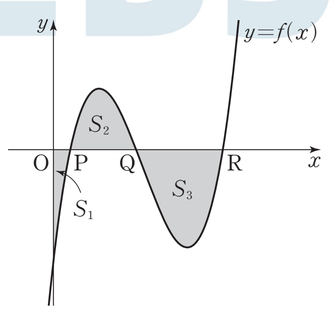


곡선 $y=f^{-1}(x)$와 선분 AO로 둘러싸인 영역 S'은 T를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 일치하고, 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 선분 OB로 둘러싸인 영역 T'은 S를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 일치한다.
즉, 두 영역 S', T'의 넓이는 모두 S의 넓이와 같다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 부분은 네 영역 S, T, S', T'을 합한 것이므로 구하는 넓이는

$4\times(S\text{의 넓이})=4\times\frac{5}{2}=10$

답 ②

3 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 세 점 P$(1, 0)$, Q$(5, 0)$, R$(a, 0)$을 지나므로
$f(x)=(x-1)(x-5)(x-a)$



$0\le x\le 1$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$$S_1=\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=-\int_0^1 f(x)dx$$

$1\le x\le 5$일 때 $f(x)\ge 0$이므로

$$S_2=\int_1^5|f(x)|dx$$
$$=\int_1^5 f(x)dx$$

$5\le x\le a$일 때 $f(x)\le 0$이므로

$$S_3=\int_5^a|f(x)|dx=-\int_5^a f(x)dx$$

$2S_1$, S_2+a^2, $2S_3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\times(S_2+a^2)=2S_1+2S_3$
$S_2+a^2=S_1+S_3$

$$\int_1^5 f(x)dx+a^2=-\int_0^1 f(x)dx+\left\{-\int_5^a f(x)dx\right\}$$
$$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx+\int_5^a f(x)dx+a^2=0$$
$$\int_0^a f(x)dx+a^2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(x)=(x-1)(x-5)(x-a)$$
$$=x^3-(a+6)x^2+(6a+5)x-5a$$

이므로

$$\int_0^a f(x)dx$$
$$=\int_0^a\{x^3-(a+6)x^2+(6a+5)x-5a\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+6}{3}x^3+\frac{6a+5}{2}x^2-5ax\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a+6}{3}a^3+\frac{6a+5}{2}a^2-5a^2$$
$$=a^2\times\frac{-a^2+12a-30}{12}$$

㉠에서

$$a^2\times\frac{-a^2+12a-30}{12}+a^2=0$$
$a^2(a^2-12a+18)=0$
$a=0$ 또는 $a=6\pm3\sqrt{2}$
이때 $a>5$이므로 $a=6+3\sqrt{2}$
따라서 $f(x)=(x-1)(x-5)(x-6-3\sqrt{2})$이므로
$f(6)=-15\sqrt{2}$

답 ②

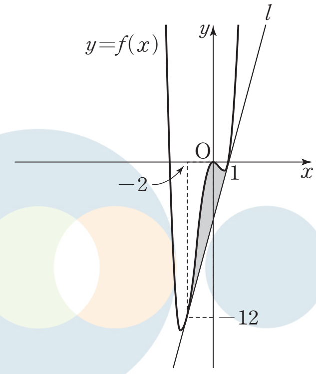
4 점 $(1, 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=0$이고, 조건 (가)에 의하여 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는

$f(x)=x^2(x-1)(x-a)$ (a는 상수)
로 놓을 수 있다.
$f(x)=(x^3-x^2)(x-a)$에서
$f'(x)=(3x^2-2x)(x-a)+(x^3-x^2)$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선 l의 방정식은
$y=(1-a)(x-1)$
조건 (나)에 의하여 x에 대한 방정식
$f(x)=(1-a)(x-1)$
의 서로 다른 실근의 개수는 2이어야 한다.
$x^2(x-1)(x-a)=(1-a)(x-1)$
$(x-1)(x^3-ax^2-1+a)=0$
$(x-1)^2\{x^2+(1-a)x+1-a\}=0$ …… ㉠
이때 직선 $y=(1-a)(x-1)$의 기울기가 $1-a>0$이므로 이차방정식 $x^2+(1-a)x+1-a=0$은 $x=1$을 근으로 가질 수 없다.
조건 (나)를 만족시키려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D=(1-a)^2-4(1-a)$
$\quad=(a+3)(a-1)=0$
$a=-3$ 또는 $a=1$
이때 $1-a>0$이므로
$a=-3$
이것을 ㉠에 대입하면
$(x-1)^2(x^2+4x+4)=0$
$(x-1)^2(x+2)^2=0$
$x=-2$ 또는 $x=1$
즉, 함수 $f(x)=x^4+2x^3-3x^2$의 그래프와 직선 $y=4x-4$는 두 점 $(-2, -12)$, $(1, 0)$에서만 만나고 $-2\le x\le 1$에서
$x^4+2x^3-3x^2\ge 4x-4$
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}|(x^4+2x^3-3x^2)-(4x-4)|dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1-2+4\right)-\left(-\frac{32}{5}+8+8-8-8\right)$$
$$=\frac{81}{10}$$

답 ①

참고
곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



5 두 점 P, Q의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자.

$$x_1(t)=x_1(0)+\int_0^t v_1(s)ds$$
$$=0+\int_0^t (s^2-2s)ds$$
$$=\left[\frac{1}{3}s^3-s^2\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{3}t^3-t^2$$
$$x_2(t)=x_2(0)+\int_0^t v_2(s)ds$$
$$=0+\int_0^t (2s-a)ds$$
$$=\left[s^2-as\right]_0^t$$
$$=t^2-at$$

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로
$x_1(t)=x_2(t)$
$\frac{1}{3}t^3-t^2=t^2-at$에서
$t(t^2-6t+3a)=0$
두 점 P, Q가 출발한 후 시각 $t=k$일 때만 만나고, $a>0$이므로 k는 이차방정식 $t^2-6t+3a=0$의 중근이다.
즉, $k=3$, $a=3$
$t>0$인 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$$
$$=\left|\frac{1}{3}t(t-3)^2\right|$$
$$=\frac{1}{3}t(t-3)^2$$

즉, $f(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$에서
$f'(t)=t^2-4t+3$이므로

$f'(t)=(t-1)(t-3)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=3$

$0<t<3$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $t=1$일 때 함수 $f(t)$는 극대이면서 최대이므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은

$$f(1)=\frac{1}{3}-2+3$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 ②

6 최고차항의 계수가 5이고, $f(0)<0$인 사차함수 $f(x)$를

$f(x)=5x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $d<0$)

이라 하면 조건 (나)에 의하여

$g(x)=-f(-x)=-5x^4+ax^3-bx^2+cx-d$

조건 (가)에서 $f(1)=g(1)$이므로

$5+a+b+c+d=-5+a-b+c-d$

$b=-5-d$ …… ㉠

$f(x)=g(x)$에서

$5x^4+ax^3+bx^2+cx+d=-5x^4+ax^3-bx^2+cx-d$

$5x^4+bx^2+d=0$

㉠을 대입하면

$5x^4-(5+d)x^2+d=0$

$(x+1)(x-1)(5x^2-d)=0$

이때 $d<0$에서 $5x^2-d>0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$에서만 만나고

$-1\le x\le 1$에서 $f(x)\le g(x)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-10x^4-2bx^2-2d)dx$$
$$=-4\int_{0}^{1}(5x^4+bx^2+d)dx$$
$$=-4\left[x^5+\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^1$$
$$=-4\left(1+\frac{b}{3}+d\right)$$

조건 (다)에 의하여

$$-4\left(1+\frac{b}{3}+d\right)=24$$

$\dfrac{b}{3}+d=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=3$, $d=-8$

따라서 $g(x)=-5x^4+ax^3-3x^2+cx+8$이므로

$g(0)=8$

답 ④

memo