수능특강

수학영역 | **기하**

정답과 풀이

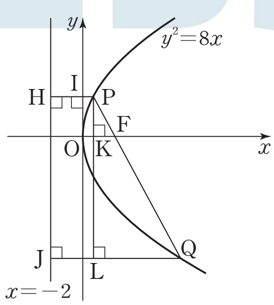
01 포물선

유제					본문 5~9쪽
1 ④	2 ②	3 ④	4 ③	5 ②	6 ②

1 포물선 $x^2=8y$의 초점은 $\mathrm{F}(0, 2)$이고 준선의 방정식은 $y=-2$이다.
점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}}=4$이므로 점 A의 y좌표는 2이다.
점 A가 포물선 $x^2=8y$ 위에 있으므로
$x^2=16$
$x=-4$ 또는 $x=4$
점 A가 제1사분면 위의 점이므로 점 A의 x좌표는 4이다.

답 ④

2 포물선 $y^2=8x$의 초점은 $\mathrm{F}(2, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
점 P에서 준선과 y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 J, 점 P에서 x축과 선분 QJ에 내린 수선의 발을 각각 K, L이라 하자.



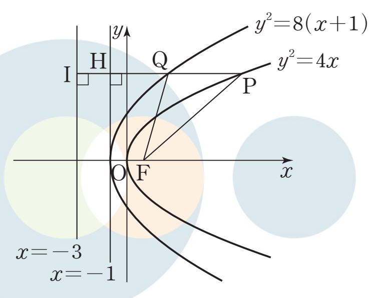
$\overline{\mathrm{PI}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=k+2$이므로 $\overline{\mathrm{LJ}}=\overline{\mathrm{PH}}=k+2$
포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{QJ}}=\overline{\mathrm{QF}}=8$이므로
$\overline{\mathrm{LQ}}=\overline{\mathrm{QJ}}-\overline{\mathrm{LJ}}=8-(k+2)=6-k$
포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=k+2$
$\overline{\mathrm{KF}}=4-(k+2)=2-k$이고 두 삼각형 PKF, PLQ가 서로 닮은 도형이므로
$\overline{\mathrm{PF}} : \overline{\mathrm{KF}}=\overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{LQ}}$
$(k+2) : (2-k)=(k+10) : (6-k)$
$(k+2)(6-k)=(2-k)(k+10)$
$6k-k^2+12-2k=2k+20-k^2-10k$
$12k=8$, $k=\dfrac{2}{3}$
따라서 선분 PF의 길이는
$\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{8}{3}$

답 ②

3 포물선 $y^2=ax$의 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{a}{4}$이다.
포물선 $y^2=a(x+2)$는 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 준선의 방정식은
$x=-\dfrac{a}{4}-2$이다.
$-\dfrac{a}{4}-2=-3$이므로 $a=4$
포물선 $y^2=4(x+2)$가 점 $(b, 8)$을 지나므로
$4(b+2)=64$, $b=14$
따라서 $a+b=4+14=18$

답 ④

4 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.
포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
포물선 $y^2=8(x+1)$은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 초점은 F이고 준선의 방정식은 $x=-3$이다.
점 Q의 x좌표를 k라 하면
$8(k+1)=4x$에서 $x=2k+2$이므로
점 P의 x좌표는 $2k+2$이다.



직선 PQ가 두 직선 $x=-1$, $x=-3$과 만나는 점을 각각 H, I라 하면
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=(2k+2)+1=2k+3$
$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QI}}=k+3$
$\overline{\mathrm{PQ}}=(2k+2)-k=k+2$
삼각형 FPQ의 둘레의 길이가 14이므로

$(2k+3)+(k+3)+(k+2)=14$

$k=\frac{3}{2}$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$

답 ③

5 포물선 $y^2=4x-12=4(x-3)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$2y=2(x+1)$

$y=x+1$

이 직선을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=x-3+1$

$y=x-2$

직선 $y=x-2$가 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(2,\ 0)$, $(0,\ -2)$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

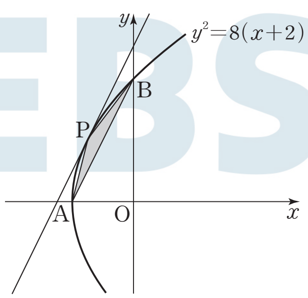
$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

답 ②

6 포물선 $y^2=8(x+2)$의 꼭짓점은 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$이고, 포물선 $y^2=8(x+2)$가 y축의 양의 부분과 만나는 점이 B이므로 $\mathrm{B}(0,\ 4)$이다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{4-0}{0-(-2)}=2$

포물선 $y^2=8(x+2)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기와 같으므로 접선의 기울기는 2이다.



포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x+\frac{2}{2}$

$y=2x+1$

포물선 $y^2=8(x+2)$가 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2(x+2)+1$

$2x-y+5=0$

점 A와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times(-2)-0+5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=1$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 10~11쪽

1 ⑤	**2** ①	**3** ⑤	**4** ④	**5** ③	**6** ①
7 ②	**8** ①				

1 포물선 $y^2=10x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{5}{2}$이다.

따라서 초점과 준선 사이의 거리는

$\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)=5$

답 ⑤

2 꼭짓점이 점 $(2,\ 0)$이고 준선이 y축인 포물선의 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로 구하는 포물선은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$y^2=8(x-2)$

$y^2=8x-16$

따라서 $a=8$, $b=-16$이므로

$a+b=8+(-16)=-8$

답 ①

3 $x^2+4x-6y+10=0$에서

$(x+2)^2=6(y-1)$

포물선 $(x+2)^2=6(y-1)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$(x-m+2)^2=6(y-n-1)$

포물선 $x^2=6y$의 초점의 좌표는 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$이다.

포물선 $(x-m+2)^2=6(y-n-1)$은 포물선 $x^2=6y$를 x축의 방향으로 $(m-2)$만큼, y축의 방향으로 $(n+1)$만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $\left(m-2, \frac{3}{2}+n+1\right)$이다.

초점이 원점이므로

$m-2=0$, $\frac{3}{2}+n+1=0$

따라서 $m=2$, $n=-\frac{5}{2}$이므로

$m+n=2+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

답 ⑤

4 꼭짓점이 점 A$(1, 3)$이고 준선이 x축에 수직인 포물선의 방정식은

$(y-3)^2=4p(x-1)$ (p는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

꼭짓점 A와 준선 $x=-2$ 사이의 거리가 3이므로

$p=3$

포물선 $(y-3)^2=12(x-1)$이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$9=12(x-1)$에서

$x=\frac{7}{4}$

포물선의 초점과 점 B 사이의 거리는 점 B와 준선 사이의 거리와 같으므로

$\frac{7}{4}-(-2)=\frac{15}{4}$

답 ④

5 포물선 $y^2=8x$의 초점은 F$(2, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=10$

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=a-(-2)=10$이므로 $a=8$

점 P가 포물선 $y^2=8x$ 위에 있으므로 $b^2=64$

$b>0$이므로 $b=8$

따라서 직선 PF의 기울기는

$\frac{8-0}{8-2}=\frac{4}{3}$

답 ③

6 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=4(x+2)$

$y=x+2$

포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

두 직선 $y=x+2$, $x=-2$의 교점의 y좌표는

$y=-2+2=0$

따라서 $a=-2$, $b=0$이므로

$a+b=-2+0=-2$

답 ①

7 $y=2x+k$를 $(y-2)^2=4(x-2)$에 대입하여 정리하면

$(y-2)^2=2(y-k)-8$

$y^2-6y+2k+12=0$

이차방정식 $y^2-6y+2k+12=0$의 판별식을 D라 하면

직선 $y=2x+k$가 포물선 $(y-2)^2=4(x-2)$와 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=9-(2k+12)<0$

즉, $k>-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 -1이다.

답 ②

다른 풀이

포물선 $(y-2)^2=4(x-2)$는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=4x$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x+\frac{1}{2}$이므로 포물선 $(y-2)^2=4(x-2)$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-2=2(x-2)+\frac{1}{2}$

$y=2x-\frac{3}{2}$

직선 $y=2x+k$가 포물선 $(y-2)^2=4(x-2)$와 만나지 않으려면 $k>-\frac{3}{2}$이어야 한다.

8 원 $(x-k)^2+y^2=4$가 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(x-k)^2=4$, 즉 $x-k=\pm2$에서

$(k-2, 0)$, $(k+2, 0)$

$k>2$이고 y축이 준선이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(k-2, 0)$이고 초점의 좌표는 $(k+2, 0)$이다.

이때 $k+2=2(k-2)$에서

$k=6$

꼭짓점의 좌표가 $(4, 0)$이므로 구하는 포물선의 방정식을 $y^2=4p(x-4)$ $(p>0)$으로 놓을 수 있다.
꼭짓점과 초점 사이의 거리가 4이므로
$p=4$
즉, 포물선의 방정식은
$y^2=16(x-4)$
$y^2=16x-64$
따라서 $a=16$, $b=-64$이므로
$a+b=16+(-64)=-48$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 12~13쪽

1 ② **2** ④ **3** ① **4** 6 **5** ② **6** ③
7 13

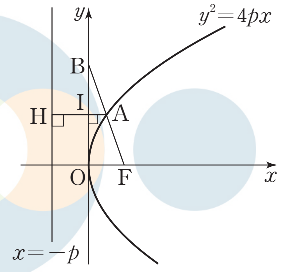
1 초점의 좌표가 $F(4, 2)$이고 준선의 방정식이 $x=0$인 포물선은 초점의 좌표가 $(2, 0)$이고 준선의 방정식이 $x=-2$인 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 포물선의 방정식은
$(y-2)^2=8(x-2)$이다.
포물선 $(y-2)^2=8(x-2)$가 점 $(a, 0)$을 지나므로
$4=8(a-2)$에서 $a=\frac{5}{2}$

답 ②

2 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이다.
두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{BF}=\overline{BI}$
두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면
$\overline{AF}=\overline{AH}=a+1$, $\overline{BF}=\overline{BI}=b+1$
$\overline{AF}+\overline{BF}=(a+1)+(b+1)=7$이므로
$a+b=5$
포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=2x-k$의 교점의 x좌표는
방정식 $(2x-k)^2=4x$, 즉
$4x^2-4(k+1)x+k^2=0$의 두 실근이다.
이차방정식 $4x^2-4(k+1)x+k^2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=\frac{4(k+1)}{4}=5$
따라서 $k=4$

답 ④

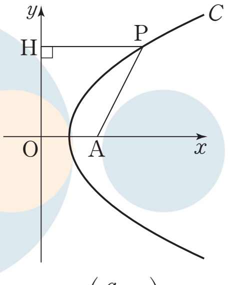
3 포물선 $y^2=4px$의 초점은 $F(p, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다.
점 A에서 준선과 y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 점 A가 선분 BF의 중점이므로 두 삼각형 BIA, BOF는 닮음비가 1 : 2인 서로 닮은 도형이다.



$\overline{OF}=p$이므로 $\overline{IA}=\frac{p}{2}$이고
$\overline{OB}=8\sqrt{2}$이므로 $\overline{OI}=4\sqrt{2}$
즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{p}{2}, 4\sqrt{2}\right)$이므로
$(4\sqrt{2})^2=4p\times\frac{p}{2}$, $p^2=16$
$p>0$이므로 $p=4$
따라서 $\overline{AF}=\overline{AH}=\frac{p}{2}-(-p)=\frac{3}{2}p=\frac{3}{2}\times4=6$

답 ①

4 선분 PA의 길이가 점 P의 x좌표와 같으므로 점 P의 x좌표는 양수이다.
점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P의 x좌표는 선분 PH의 길이와 같다.
선분 PA의 길이가 선분 PH의 길이와 같으므로 도형 C는 초점이 A이고 준선이 y축인 포물선이다.



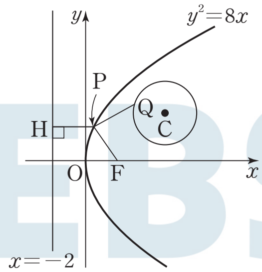
포물선의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$이고 초점과 꼭짓점 사이의 거리가 3이므로
$a-\frac{a}{2}=3$, $a=6$
따라서 초점의 x좌표는 6이다.

답 6

5 포물선 $y^2=8x$의 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$



원 $(x-5)^2+(y-3)^2=4$의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(5,\ 3)$이고 반지름의 길이는 2이다.

점 C와 준선 사이의 거리가 7이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}&=\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PQ}}\\&\geq 7-2=5\end{aligned}$$

따라서 점 C에서 준선에 내린 수선 위에 두 점 P, Q가 있을 때 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}$는 최솟값 5를 갖는다.

답 ②

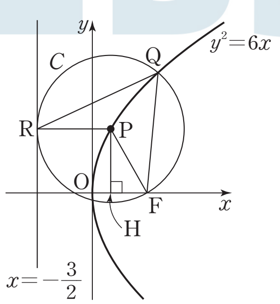
6 포물선 $y^2=6x$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이다.

원 C 위의 점 중 x좌표가 가장 작은 점이 R이므로 직선 PR은 x축에 평행하다. 즉, $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PR}}$이므로 점 R은 준선 $x=-\frac{3}{2}$ 위에 있다.

$\angle\mathrm{FQR}=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle\mathrm{FPR}=\frac{2}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{FPH}=\frac{\pi}{6}$



점 P의 x좌표를 k라 하면 $\overline{\mathrm{PR}}=k+\frac{3}{2}$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PR}}=k+\frac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{HF}}=\frac{3}{2}-k$이므로

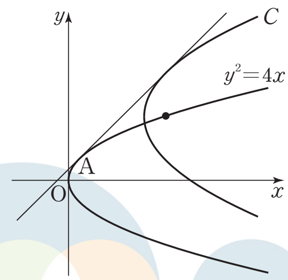
$\frac{3}{2}-k=\left(k+\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}k=\frac{3}{4},\ k=\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=2$이므로 원 C의 반지름의 길이는 2이다.

답 ③

7



포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

포물선 C는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $(2+a,\ b)$이다.

조건 (가)에서 $b^2=4(2+a)$ ······ ㉠

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$2y=2(x+1)$

$y=x+1$

조건 (나)에서 직선 $y=x+1$은 포물선 C의 접선이다.

포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x+\frac{2}{1}$

$y=x+2$

포물선 C에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y-b=x-a+2$

$y=x-a+b+2$

두 직선 $y=x+1$, $y=x-a+b+2$가 서로 같으므로

$-a+b+2=1$

$a=b+1$

$a=b+1$을 ㉠에 대입하면

$b^2=4(2+b+1)$

$b^2-4b-12=0$

$(b-6)(b+2)=0$

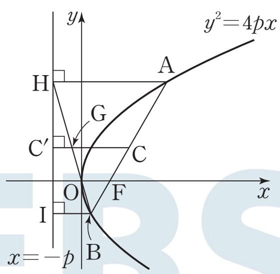
$b>0$이므로 $b=6$
따라서 $a=7$이므로
$a+b=7+6=13$

답 13

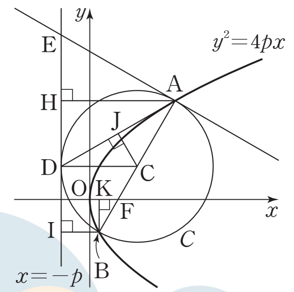
Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ③ 2 ④ 3 ③

1 포물선 $y^2=4px$의 초점은 $F(p, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다.
두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 선분 AB의 중점을 C, 점 C에서 준선에 내린 수선의 발을 C′, 두 직선 CC′, HB의 교점을 G라 하자.



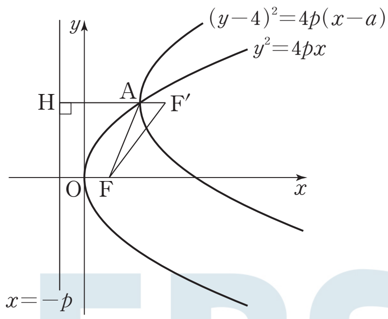
두 삼각형 BCG, BAH는 닮음비가 1 : 2인 서로 닮은 도형이므로 $\overline{CG}=\frac{1}{2}\overline{AH}$
두 삼각형 HC′G, HIB는 닮음비가 1 : 2인 서로 닮은 도형이므로 $\overline{GC'}=\frac{1}{2}\overline{BI}$
그러므로 $\overline{CC'}=\overline{CG}+\overline{GC'}=\frac{1}{2}(\overline{AH}+\overline{BI})$
포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{BF}=\overline{BI}$이므로
$\overline{CC'}=\frac{1}{2}(\overline{AF}+\overline{BF})=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$
점 C는 세 점 A, B, C′을 지나는 원의 중심이고, 이 원은 준선 $x=-p$에 접한다.
즉, 점 C′은 점 D이고 직선 ED는 포물선 $y^2=4px$의 준선이다.
이때 삼각형 AED는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로
$\overline{HD}=3$, $\overline{AH}=3\sqrt{3}$
점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 J라 하면
$\overline{JD}=3$이므로 $\overline{DC}=2\sqrt{3}$
즉, 원 C의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$
한편, $\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{BF}=\overline{BI}$이므로
$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AH}+\overline{BI}=4\sqrt{3}$
$\overline{BI}=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$



$\angle ADC=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$이므로 $\angle BCD=\frac{\pi}{3}$
점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 K라 하면
$\overline{BF}=\overline{BI}=\sqrt{3}$이므로
$\overline{KF}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=2p$이므로
$p=\frac{3\sqrt{3}}{4}$
점 B의 x좌표는 $\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$이고
$\overline{KB}=\frac{3}{2}$이므로
$B\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{2}\right)$
포물선 $y^2=3\sqrt{3}x$ 위의 점 B에서의 접선의 방정식은
$-\frac{3}{2}y=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$
$y=-\sqrt{3}x-\frac{3}{4}$
따라서 포물선 위의 점 B에서의 접선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 $-\frac{3}{4}$이다.

답 ③

2 포물선 $y^2=4px$의 초점은 $F(p, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다. 직선 AF′이 x축과 평행하므로 점 A는 포물선 $(y-4)^2=4p(x-a)$의 꼭짓점이다.
포물선 $(y-4)^2=4p(x-a)$는 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 $A(a, 4)$이다.
점 A에서 직선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AF}-\overline{AF'}=\overline{AH}-\overline{AF'}$
$=(a+p)-p=a$
이므로 $a=3$



점 A(3, 4)가 포물선 $y^2=4px$ 위에 있으므로

$16=12p$, $p=\frac{4}{3}$

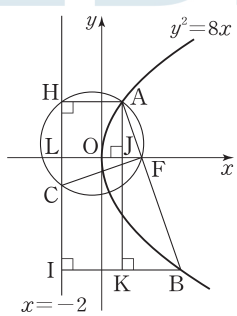
따라서 삼각형 AFF′의 둘레의 길이는

$$\overline{AF}+\overline{FF'}+\overline{AF'}=\overline{AH}+\overline{OA}+\overline{AF'}$$
$$=\left(3+\frac{4}{3}\right)+\sqrt{9+16}+\frac{4}{3}$$
$$=\frac{32}{3}$$

답 ④

3 포물선 $y^2=8x$에서 초점은 F(2, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 I라 하고, 점 A에서 x축과 직선 BI에 내린 수선의 발을 각각 J, K라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH}$, $\overline{BF}=\overline{BI}$

점 A의 x좌표를 k라 하면

$\overline{FJ}=2-k$

$\overline{BF}=2\overline{AF}$에서 $\overline{BI}=2\overline{AH}$이므로

$\overline{BK}=\overline{AH}=k+2$

두 삼각형 AJF, AKB는 닮음비가 1 : 3인 서로 닮은 도형이므로

$\overline{BK}=3\overline{FJ}$

즉, $k+2=3(2-k)$에서 $k=1$

$\angle AHC=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 AC는 원의 지름이다.

그러므로 $\angle CFA=\frac{\pi}{2}$

준선과 x축의 교점을 L이라 하고,

$\angle FAJ=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{JF}}{\overline{AF}}=\frac{1}{3}$이므로

$\overline{HL}=\overline{AJ}=\overline{AF}\cos\theta=3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

$\angle CFL=\angle FAJ$이므로

$\overline{LC}=\overline{LF}\tan\theta=4\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

따라서 선분 HC의 길이는

$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

답 ③

02 타원

유제 본문 16~20쪽

1 ④ 2 ② 3 ③ 4 ① 5 ⑤ 6 8

1 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는 $2\times3=6$이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6$, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=6$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}}&=(6-\overline{\mathrm{PF}})+(6-\overline{\mathrm{QF}})\\&=12-(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}})\\&=12-7=5\end{aligned}$$

답 ④

2 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F'}(-3, 0)$이고 장축의 길이는 $2\times4=8$이다.

두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{OF}}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}$

점 O는 네 점 P, Q, F, F′을 지나는 원의 중심이므로 두 선분 PQ, F′F는 원의 지름이다.

즉, $\angle\mathrm{PF'Q}=\angle\mathrm{QFP}=\angle\mathrm{FPF'}=\angle\mathrm{F'QF}=\frac{\pi}{2}$이므로

사각형 PF′QF는 직사각형이다.

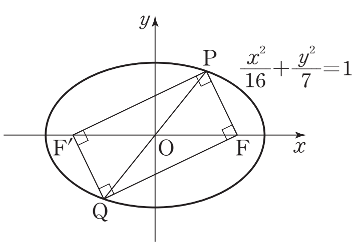
$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}+k=8$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=8-k$

직각삼각형 PF′F에서

$k^2+(8-k)^2=6^2$

$k^2-8k+14=0$



또한 $\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF'}}$이므로 삼각형 FPQ의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}&=\frac{1}{2}k(8-k)\\&=\frac{1}{2}(8k-k^2)\\&=\frac{1}{2}\times14=7\end{aligned}$$

답 ②

3 $3x^2+4y^2-6x-24y+27=0$에서

$3(x-1)^2+4(y-3)^2=12$

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표가 $(1, 0)$, $(-1, 0)$이다.

타원 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 두 초점의 좌표는 $(2, 3)$, $(0, 3)$이다.

따라서 $a>0$, $b>0$에서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=2+3=5$

답 ③

4 선분 PQ의 길이의 최댓값이 10이므로 장축의 길이가 10이다.

(i) 장축이 x축과 평행할 때

$2a=10$이므로 $a=5$

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{25-b^2}, 0)$, $(-\sqrt{25-b^2}, 0)$

타원 $\frac{(x-c)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$은 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 c만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{25-b^2}+c, 2)$, $(-\sqrt{25-b^2}+c, 2)$

한 초점의 좌표가 $(4, 6)$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 장축이 y축과 평행할 때

$2b=10$이므로 $b=5$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{25}=1$의 두 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{25-a^2})$, $(0, -\sqrt{25-a^2})$

타원 $\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{25}=1$을

x축의 방향으로 c만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이므로 두 초점의 좌표는

$(c, \sqrt{25-a^2}+2)$, $(c, -\sqrt{25-a^2}+2)$

한 초점의 좌표가 $(4, 6)$이므로

$c=4$, $\sqrt{25-a^2}+2=6$

$\sqrt{25-a^2}=4$에서 $a^2=25-16=9$이므로 $a=3$

(i), (ii)에서

$a+b+c=3+5+4=12$

답 ①

5 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면

점 $(2, 1)$이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로

$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ ...... ㉠

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$0+\frac{2}{b^2}=1$, $b^2=2$

㉠에서 $\frac{4}{a^2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로 $a^2=8$

$c^2=a^2-b^2=8-2=6$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{6}$

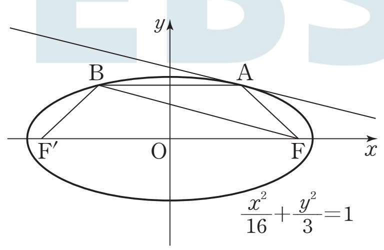
답 ⑤

6 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$의 장축의 길이는 $2\times4=8$이다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 중 F가 아닌 점을 F′이라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}}=8$

두 점 A, B가 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{BF'}}$

즉, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=8$



삼각형 FAB의 둘레의 길이가 12이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=4$

즉, 점 A의 x좌표가 2이므로 y좌표는

$\frac{4}{16}+\frac{y^2}{3}=1$에서 $y^2=\frac{9}{4}$, $y=\frac{3}{2}$

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(2, \frac{3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{16}+\frac{\frac{3}{2}y}{3}=1$

$\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$

이 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\frac{x}{8}+0=1$에서 $x=8$

답 8

Level 1 기초 연습

본문 21~22쪽

1 ①	**2** ②	**3** ②	**4** ④	**5** ⑤	**6** ①
7 ⑤	**8** ④				

1 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 장축의 길이는 $2\times3=6$이다.

점 A가 이 타원 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=6$

답 ①

2 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $b>a>0$이고 장축의 길이가 8이므로

$2b=8$, $b=4$

두 초점 사이의 거리가 6이므로 두 초점의 좌표는 $(0, 3)$, $(0, -3)$이다.

$16-a^2=9$이므로 $a^2=7$

따라서 $a^2+b^2=7+16=23$

답 ②

3 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$의 장축의 길이는 $2\times2=4$이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4$, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=4$

따라서

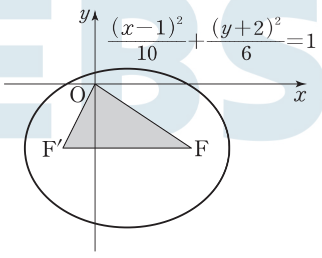
$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{PF'}}=(4-\overline{\mathrm{QF}})-(4-\overline{\mathrm{PF}})$

$=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{QF}}=2$

답 ②

4 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이다.

타원 $\frac{(x-1)^2}{10}+\frac{(y+2)^2}{6}=1$은 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 두 초점을 $\mathrm{F}(3,\ -2)$, $\mathrm{F}'(-1,\ -2)$로 놓을 수 있다.

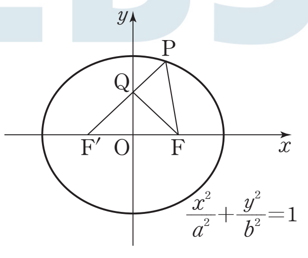


따라서 삼각형 $\mathrm{OF'F}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times2=4$

답 ④

5 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=4$ …… ㉠



삼각형 FPQ의 둘레의 길이가 8이므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}$

$=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$

$=2a=8$

즉, $a=4$

㉠에서 $b^2=a^2-4=12$

따라서 $a^2+b^2=16+12=28$

답 ⑤

6 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

점 A의 x좌표가 2이므로 점 A의 y좌표는

$\frac{4}{16}+\frac{y^2}{12}=1$에서 $y^2=9$이고 $y>0$이므로 $y=3$

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1$

$y=-\frac{x}{2}+4$

직선 $y=-\frac{x}{2}+4$가 y축과 만나는 점의 y좌표는 4이다.

답 ①

7 타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$에 접하고 기울기가 $m\ (m>0)$인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{32m^2+16}$

이 중 직선 $y=mx-\sqrt{32m^2+16}$의 x절편이 양수이고, 이 값이 6이므로

$6m-\sqrt{32m^2+16}=0$, $6m=\sqrt{32m^2+16}$

$36m^2=32m^2+16$, $m^2=4$

$m>0$이므로 $m=2$

x절편이 6이고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y=2x-12$이므로 y절편은 -12이다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times12=36$

답 ⑤

8 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{6}+\frac{y}{3}=1$

$y=-x+3$

타원 $\frac{x^2}{k}+y^2=1$의 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{k+1}$

따라서 $3=\sqrt{k+1}$이므로 $k=8$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 23~24쪽

1 ③	2 ④	3 15	4 ③	5 ②	6 ⑤
7 ③					

1 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{k}=1$의 장축의 길이는 $2\times6=12$이다.

두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{F'F}}=2c$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\frac{2c}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{AF'}}=\frac{4c}{\sqrt{3}}$

타원의 정의에 의하여

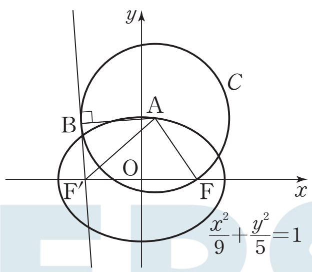
$\frac{2c}{\sqrt{3}}+\frac{4c}{\sqrt{3}}=12$이므로 $c=2\sqrt{3}$

따라서 $36-k=12$이므로 $k=24$

답 ③

2 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이고

장축의 길이는 $2\times3=6$이다.



$\overline{\mathrm{AF}}=k$라 하면 타원의 정의에 의하여 $k+\overline{\mathrm{AF'}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=6-k$

직선 $\mathrm{BF'}$이 원 C의 접선이므로 $\angle\mathrm{ABF'}=\frac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}=k$, $\overline{\mathrm{BF'}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{F'F}}=2$이므로

직각삼각형 $\mathrm{ABF'}$에서

$k^2+4=(6-k)^2$, $12k=32$, $k=\frac{8}{3}$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 $\frac{8}{3}$이다.

답 ④

3 타원 E의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면

조건 (가)에서 $2a-2b=6$이므로

$b=a-3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}\le\overline{\mathrm{FF'}}$이고, 등호는 점 P가 장축 위의 꼭짓점 중 점 F′에 가깝지 않은 점일 때 성립하므로 조건 (나)에 의하여

$\overline{\mathrm{FF'}}=12$, 즉 $c=6$

$a^2-b^2=36$이므로 ㉠을 대입하면

$a^2-(a-3)^2=36$

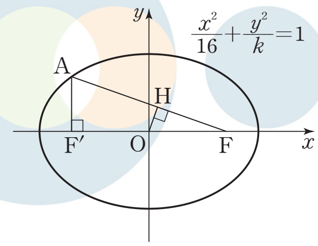
$6a-9=36$, $a=\frac{15}{2}$

따라서 타원 E의 장축의 길이는

$2a=2\times\frac{15}{2}=15$

답 15

4 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{k}=1$의 장축의 길이는 $2\times4=8$이다.



두 삼각형 $\mathrm{AF'F}$, OHF가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{OF}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OF}}:\overline{\mathrm{OF}}=1:3$

$\overline{\mathrm{AF}}=3\overline{\mathrm{AF'}}$

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}}=4\overline{\mathrm{AF'}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=2$

$\overline{\mathrm{AF}}=6$이므로 직각삼각형 $\mathrm{AF'F}$에서

$\overline{\mathrm{F'F}}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OF}}=2\sqrt{2}$이므로 $16-k=8$

따라서 $k=8$

답 ③

5 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DB}}=2$이므로 타원 E_1의 장축의 길이는 6이고, 타원 E_2의 장축의 길이는 8이다.

$\overline{\mathrm{PC}}=k$라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}+k=6$, $\overline{\mathrm{PB}}+k=8$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=6-k$, $\overline{\mathrm{PB}}=8-k$

두 삼각형 PAC, PCB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{ACP})=\frac{4+k^2-(6-k)^2}{2\times2\times k}=\frac{3k-8}{k}$

$\cos(\angle\mathrm{PCB})=\frac{16+k^2-(8-k)^2}{2\times4\times k}=\frac{2k-6}{k}$

$\cos(\angle\mathrm{PCB})=\cos(\pi-\angle\mathrm{ACP})=-\cos(\angle\mathrm{ACP})$

이므로

$\frac{2k-6}{k}=-\frac{3k-8}{k}$

$k>0$이므로 $2k-6=-3k+8$

따라서 $k=\frac{14}{5}$

답 ②

6 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{k}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{9}+\frac{y_1y}{k}=1$

점 A의 좌표가 $\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$이므로

$\frac{x_1\times\frac{9}{2}}{9}+0=1,\ x_1=2$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}$이므로 선분 FA의 중점의 x좌표는 2이다.

점 F의 x좌표를 $c\ (c<0)$이라 하면

$\frac{c+\frac{9}{2}}{2}=2$이므로 $c=-\frac{1}{2}$

따라서 $9-k=\frac{1}{4}$이므로

$k=\frac{35}{4}$

답 ⑤

7 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이다.

점 F를 지나고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}(x-1)$

직선 $y=-\frac{3}{4}(x-1)$과 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 교점 A의 x좌표는

$\frac{x^2}{4}+\frac{\frac{9}{16}(x-1)^2}{3}=1$에서

$7x^2-6x-13=0$

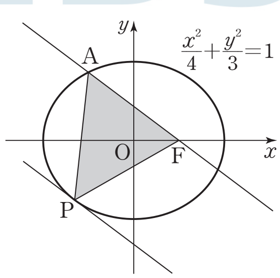
$(7x-13)(x+1)=0$

$x<0$이므로 $x=-1$

점 A의 y좌표는

$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에서 $y^2=\frac{9}{4}$이고 $y>0$이므로 $y=\frac{3}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}$



타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x\pm\sqrt{4\times\frac{9}{16}+3}$

$y=-\frac{3}{4}x\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

직선 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{\sqrt{21}}{2}$, 즉 $3x+4y+2\sqrt{21}=0$과 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$이 접하는 점이 P일 때 삼각형 PFA의 넓이가 최대이다.

점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$과 직선 $3x+4y+2\sqrt{21}=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+0+2\sqrt{21}|}{\sqrt{9+16}}=\frac{3+2\sqrt{21}}{5}$

따라서 삼각형 PFA의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3+2\sqrt{21}}{5}=\frac{3+2\sqrt{21}}{4}$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 25쪽

1 ① **2** ③ **3** 8

1 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$은 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이고, 점 A가 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$의 한 꼭짓점이므로 점 A의 좌표는 $(4,\ b)$이다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

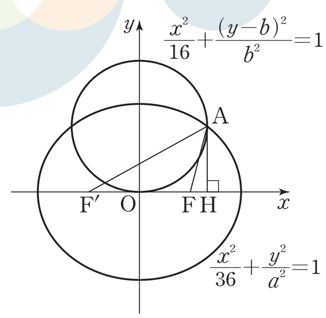
$\cos(\angle\mathrm{OFA})=-\frac{1}{4}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{AFH})=\cos(\pi-\angle\mathrm{OFA})=-\cos(\angle\mathrm{OFA})$

$=\frac{1}{4}$

$\overline{\mathrm{FH}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{OF}}=4-k$이고

$\overline{\mathrm{AF}}=\frac{\overline{\mathrm{FH}}}{\cos(\angle\mathrm{AFH})}=4k$



타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점 중 F가 아닌 점을 F′이라 하면 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{a^2}=1$의 장축의 길이가 $2\times6=12$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{AF'}+4k=12$, 즉 $\overline{AF'}=12-4k$

삼각형 AF′F에서 코사인법칙에 의하여

$(12-4k)^2$

$=(4k)^2+\{2(4-k)\}^2-2\times4k\times2(4-k)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

즉, $k=1$

직각삼각형 AFH에서

$b^2=16-1=15$

$\overline{OF}=3$이므로

$36-a^2=9$, $a^2=27$

따라서 $a^2+b^2=27+15=42$

답 ①

2 타원 $\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 y좌표가 음수인 점을 F′이라 하면 두 초점은 $\mathrm{F}(0,\ \sqrt{4-k})$, $\mathrm{F'}(0,\ -\sqrt{4-k})$이고 장축의 길이는 $2\times2=4$이다.

직선 AC가 y축과 평행하므로

$\angle\mathrm{CFO}=\angle\mathrm{FCD}$ (단, O는 원점)

$\overline{OF}=\overline{OC}$이므로 $\angle\mathrm{FCO}=\angle\mathrm{CFO}$

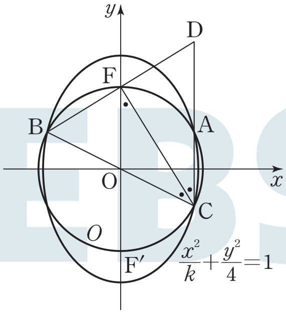
즉, $\angle\mathrm{FCB}=\angle\mathrm{FCD}$

선분 BC가 원 O의 지름이므로 $\angle\mathrm{CFB}=\frac{\pi}{2}$

두 삼각형 CFB, CFD가 서로 합동이므로

$\overline{BC}=\overline{DC}$

그런데 $\overline{BD}=\overline{CD}$이므로 삼각형 BCD는 정삼각형이다.



$\overline{BF}=a$라 하면

$\overline{CF'}=a$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{CF}+a=4$, $\overline{CF}=4-a$

직각삼각형 CFB에서 $\angle\mathrm{FBC}=\frac{\pi}{3}$이므로

$4-a=\sqrt{3}a$

$a=\frac{4}{\sqrt{3}+1}=2(\sqrt{3}-1)$

$\overline{BC}=2a$, $\overline{FF'}=2\sqrt{4-k}$이고 $\overline{BC}=\overline{FF'}$이므로

$2a=2\sqrt{4-k}$

따라서

$k=4-a^2$

$\quad=4-\{2(\sqrt{3}-1)\}^2=4(2\sqrt{3}-3)$

답 ③

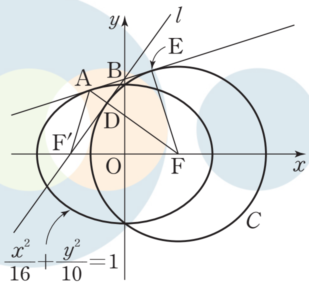
3 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(\sqrt{6},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{6},\ 0)$이고 장축의 길이는 $2\times4=8$이다.

직선 l이 원 C와 만나는 점을 D라 하고, 직선 AB가 원 C와 만나는 점을 E라 하면 삼각형 AF′B의 둘레의 길이는

$\overline{AF'}+\overline{F'B}+\overline{BA}=\overline{AF'}+\overline{F'D}+\overline{DB}+\overline{BA}$

$\qquad=\overline{AF'}+\overline{F'D}+\overline{BE}+\overline{BA}$

$\qquad=\overline{AF'}+\overline{F'D}+\overline{AE}$



원 C의 반지름의 길이가 4이므로 $\overline{DF}=\overline{EF}=4$

$\overline{F'F}=2\sqrt{6}$이고 $\angle\mathrm{FDF'}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{F'D}=\sqrt{24-16}=2\sqrt{2}$

$\overline{AD}=k$라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{AF'}+(k+4)=8$이므로 $\overline{AF'}=4-k$

직각삼각형 AF′D에서

$(4-k)^2=8+k^2$

즉, $k=1$

$\angle\mathrm{FEA}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AE}=\sqrt{25-16}=3$

삼각형 AF′B의 둘레의 길이는

$\overline{AF'}+\overline{F'D}+\overline{AE}=3+2\sqrt{2}+3=6+2\sqrt{2}$

따라서 $a=6$, $b=2$이므로

$a+b=6+2=8$

답 8

03 쌍곡선

유제					본문 27~31쪽
1 4	**2** ②	**3** ①	**4** 32	**5** ③	**6** ②

1 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{5},\ 0)$이고 주축의 길이는 $2\times1=2$이다.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2$

$\overline{\mathrm{FF}'}=2\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 PF′F에서

$\overline{\mathrm{PF}'}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=20$

$\overline{\mathrm{PF}'}^2+(\overline{\mathrm{PF}'}-2)^2=20$

$\overline{\mathrm{PF}'}^2-2\overline{\mathrm{PF}'}-8=0$

$(\overline{\mathrm{PF}'}+2)(\overline{\mathrm{PF}'}-4)=0$

$\overline{\mathrm{PF}'}=4$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF}'}-2=2$이므로 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times2=4$

답 4

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점 중 x좌표가 음수인 점을 F′이라 하면 두 초점은 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이고 주축의 길이는 $2\times2=4$이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF}'}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}=4$

삼각형 PFA의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}=5+\overline{\mathrm{AP}}+(\overline{\mathrm{PF}'}+4)$

$\geq\overline{\mathrm{AF}'}+9=5+9=14$

(단, 등호는 세 점 A, P, F′이 한 직선 위에 있을 때 성립한다.)

따라서 삼각형 PFA의 둘레의 길이의 최솟값은 14이다.

답 ②

3 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 두 초점이 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=16$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직이므로

$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1,\ \frac{b^2}{a^2}=1$

$a^2=b^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2a^2=16$이므로 $a=2\sqrt{2}$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

답 ①

4 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=4$ …… ㉠

조건을 만족시키는 양수 m의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 점근선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$에서 $b=\frac{1}{2}a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+\frac{1}{4}a^2=4,\ \frac{5}{4}a^2=4,\ a^2=\frac{16}{5}$

따라서 $20ab=20\times\frac{1}{2}a^2=20\times\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}=32$

답 32

5 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(6,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{6x}{9}-\frac{3y}{3}=1$

$y=\frac{2}{3}x-1$

$y=0$을 대입하면

$\frac{2}{3}x-1=0,\ x=\frac{3}{2}$

따라서 직선 $y=\frac{2}{3}x-1$이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{3}{2}$이다.

답 ③

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=4$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$이다.

두 직선 $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$와 수직인 직선의 기울기는 각각 $-\frac{a}{b},\ \frac{a}{b}$이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{a}{b}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{a}{b}x-\sqrt{a^2\times\frac{a^2}{b^2}-b^2}$, $y=\frac{a}{b}x+\sqrt{a^2\times\frac{a^2}{b^2}-b^2}$

이 직선이 점 (0, 1)을 지나므로

$\sqrt{\frac{a^4}{b^2}-b^2}=1$, $\frac{a^4}{b^2}-b^2=1$

$a^4-b^4=b^2$

$(a^2+b^2)(a^2-b^2)=b^2$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(4-b^2-b^2)=b^2$

즉, $b^2=\frac{16}{9}$

따라서 $a^2=4-\frac{16}{9}=\frac{20}{9}$이므로

$a^2-b^2=\frac{20}{9}-\frac{16}{9}=\frac{4}{9}$

답 ②

Level 1 기초 연습 본문 32~33쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ③ **4** ① **5** ③ **6** ⑤
7 ① **8** ②

1 두 꼭짓점의 좌표가 (0, 4), (0, −4)이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=-1$ $(a>0)$으로 놓을 수 있다.

두 초점의 좌표가 $(0, \sqrt{a^2+16})$, $(0, -\sqrt{a^2+16})$이고 두 초점 사이의 거리가 10이므로

$2\sqrt{a^2+16}=10$, $a^2+16=25$, $a^2=9$

점 A$(3, k)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ 위에 있으므로

$\frac{9}{9}-\frac{k^2}{16}=-1$, $k^2=32$

$k>0$이므로 $k=4\sqrt{2}$

답 ③

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 한 점근선의 기울기가 1이므로

$\frac{b}{2}=1$, $b=2$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1$의 두 초점의 좌표가 $(0, 2\sqrt{2})$, $(0, -2\sqrt{2})$이므로

$p^2+10q^2=0+80=80$

답 ⑤

3 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}}=12$이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=12-\overline{\mathrm{AF}}=12-4=8$

쌍곡선의 정의에 의하여

(주축의 길이)$=\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=8-4=4$

답 ③

4 $4x^2-16x-y^2-2y+11=0$에서

$4(x-2)^2-(y+1)^2=4$

$(x-2)^2-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

쌍곡선 $(x-2)^2-\frac{(y+1)^2}{4}=1$은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 것이므로 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$y-(-1)=2(x-2)$

$y=2x-5$

따라서 직선 $y=2x-5$가 y축과 만나는 점의 y좌표는 −5이다.

답 ①

5 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하면 두 초점이 F$(c, 0)$, F'$(-c, 0)$이므로

$a^2+b^2=c^2$ ······ ㉠

쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이고

점 A(1, 2)가 점근선 위에 있으므로

$\frac{b}{a}=2$, 즉 $b=2a$ ······ ㉡

삼각형 AF'F의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}\times 2c\times 2=10$, $c=5$

㉠에서 $a^2+b^2=25$이고 이 식에 ㉡을 대입하면

$a^2+4a^2=25$, $a^2=5$, $a=\sqrt{5}$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

답 ③

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점의 좌표는 $(-4, 0)$, $(4, 0)$이다.

쌍곡선 $\dfrac{(x-4)^2}{4}-\dfrac{(y-6)^2}{12}=1$은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로 $\mathrm{F}(0, 6)$, $\mathrm{F'}(8, 6)$ 또는 $\mathrm{F}(8, 6)$, $\mathrm{F'}(0, 6)$이다.

따라서 삼각형 OFF′의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{OF'}}=8+6+\sqrt{64+36}=24$

답 ⑤

7 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{k}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{9\times4-k}$

즉, $\sqrt{36-k}=5$이므로 $k=11$

답 ①

8 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=-1$ 위의 점 $\left(\dfrac{4}{3}a, 5\right)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{\frac{4}{3}ax}{a^2}-\dfrac{5y}{9}=-1$

$y=\dfrac{12}{5a}x+\dfrac{9}{5}$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=-1$의 점근선의 방정식은 $y=-\dfrac{3}{a}x$, $y=\dfrac{3}{a}x$이다.

직선 $y=\dfrac{12}{5a}x+\dfrac{9}{5}$가 한 점근선과 서로 수직이므로

$\dfrac{12}{5a}\times\left(-\dfrac{3}{a}\right)=-1$, $a^2=\dfrac{36}{5}$

$a>0$이므로 $a=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

답 ②

Level 2 기본 연습

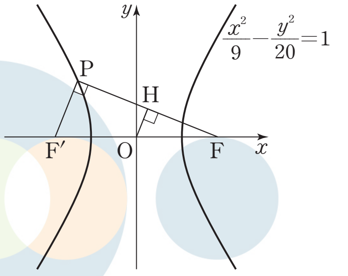
본문 34~35쪽

1 ⑤	**2** ④	**3** ①	**4** 3	**5** ④	**6** 8
7 ②					

1 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{20}=1$의 두 초점 중 x좌표가 음수인 점을 F′이라 하면 두 초점은 $\mathrm{F}(\sqrt{29}, 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{29}, 0)$이고 주축의 길이는 $2\times3=6$이다.

점 O에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 F′F의 중점이 O이고, 선분 PF의 중점이 H이므로

$\angle\mathrm{FPF'}=\dfrac{\pi}{2}$



$\overline{\mathrm{PF'}}=k\ (k>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-k=6$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=k+6$

직각삼각형 PF′F에서

$k^2+(k+6)^2=(2\sqrt{29})^2$

$k^2+6k-40=0$, $(k-4)(k+10)=0$

$k>0$이므로 $k=4$

$\overline{\mathrm{PF}}=10$, $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF'}}=2$이므로 삼각형 POF의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times10\times2=10$

답 ⑤

2 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F'}(-3, 0)$이고 주축의 길이는 $2\times2=4$이다.

∠FPF′을 이등분하는 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하면 $\overline{\mathrm{F'Q}}=4$, $\overline{\mathrm{QF}}=2$이므로 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}} : \overline{\mathrm{PF}}=4 : 2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{PF'}}=2k$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$2k-k=4$

즉, $k=4$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

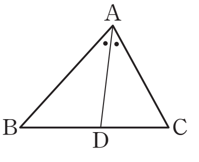
$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{F'F}}=8+4+6=18$

답 ④

참고 삼각형의 내각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}}$



3 쌍곡선 $\dfrac{(x-k)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로

$2a=4\sqrt{3}$, 즉 $a=2\sqrt{3}$

점 A가 쌍곡선 $\dfrac{(x-k)^2}{12}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로

$\dfrac{(4-k)^2}{12}-\dfrac{4}{b^2}=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

쌍곡선 $\dfrac{(x-k)^2}{12}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{A}'(4-k,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{(4-k)x}{12}-\dfrac{2y}{b^2}=1$이므로 쌍곡선 $\dfrac{(x-k)^2}{12}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{(4-k)(x-k)}{12}-\dfrac{2y}{b^2}=1$이다.

이 직선이 원점을 지나므로

$\dfrac{k^2-4k}{12}-0=1$

$k^2-4k-12=0$, $(k-6)(k+2)=0$

$k=6$ 또는 $k=-2$

(i) $k=6$일 때

㉠에서 $\dfrac{4}{12}-\dfrac{4}{b^2}=1$이므로 $b^2=-6$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=-2$일 때

㉠에서 $\dfrac{36}{12}-\dfrac{4}{b^2}=1$이므로 $b^2=2$

따라서 $a^2+b^2+k=12+2+(-2)=12$

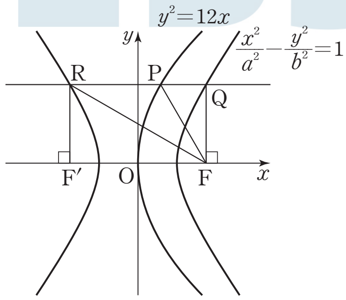
답 ①

4 포물선 $y^2=12x$의 초점은 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 중 x좌표가 음수인 점을 F'이라 하면 두 초점은 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=9$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PR}}$이므로 점 R은 포물선 $y^2=12x$의 준선 위의 점이다.



$\overline{\mathrm{F'F}}=6$, $\overline{\mathrm{PQ}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{PR}}=4$

즉, $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PR}}=4$

직각삼각형 FQP에서 $\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 FQR에서 $\overline{\mathrm{RF}}=\sqrt{36+12}=4\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{RF'}}=\overline{\mathrm{QF}}=2\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{RF}}-\overline{\mathrm{RF'}}=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}=2a$

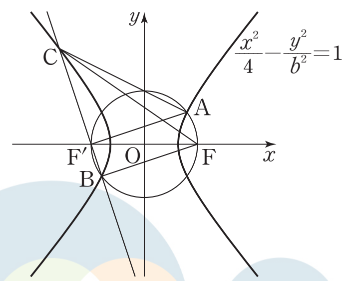
즉, $a=\sqrt{3}$

㉠에서 $3+b^2=9$이므로 $b^2=6$

따라서 $b^2-a^2=6-3=3$

답 3

5 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이는 $2\times2=4$이다.



$\overline{\mathrm{F'B}}=2$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}-2=4$, $\overline{\mathrm{BF}}=6$

$\overline{\mathrm{CF'}}=k$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{CF}}-k=4$이므로

$\overline{\mathrm{CF}}=k+4$

선분 F′F가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{F'BF}=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 CBF에서 $(k+2)^2+6^2=(k+4)^2$이므로

$k=6$

두 점 A, B가 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{BF}}=6$

직각삼각형 CF′A에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$

답 ④

6 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{k}=1$의 주축의 길이는 $2\times2=4$이다.

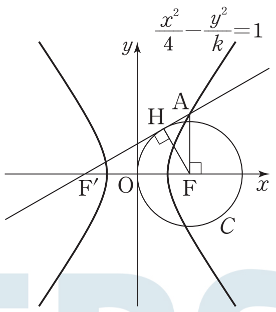
직선 AF′이 원 C와 만나는 점을 H라 하면

원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{F'F}}=2\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{HF}}$이므로

$\overline{\mathrm{F'F}}=2\overline{\mathrm{HF}}$

$\angle\mathrm{FHF'}=\angle\mathrm{F'FA}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 두 삼각형 AF′F, FF′H가 서로 닮은 도형이다.

$\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{FH}}=2:1$



$\overline{\mathrm{AF}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{AF'}}=2a$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$2a-a=4$, $a=4$

즉, $\overline{\mathrm{AF'}}=8$, $\overline{\mathrm{AF}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{F'F}}=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$

따라서 $\mathrm{F}(2\sqrt{3},\ 0)$이므로

$4+k=12$에서 $k=8$

답 8

7 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식이 $y=-\frac{b}{a}x$,

$y=\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, 즉 $a=2b$

점 P의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 점 P가 쌍곡선

$\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{p^2}{4b^2}-\frac{q^2}{b^2}=1$ ······ ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{px}{4b^2}-\frac{qy}{b^2}=1$

$y=\frac{p}{4q}x-\frac{b^2}{q}$

직선 $y=\frac{p}{4q}x-\frac{b^2}{q}$의 기울기가 1이므로

$\frac{p}{4q}=1$

즉, $p=4q$

㉠에서 $\frac{16q^2}{4b^2}-\frac{q^2}{b^2}=1$이므로 $q^2=\frac{b^2}{3}$

즉, $q=-\frac{b}{\sqrt{3}}$ 또는 $q=\frac{b}{\sqrt{3}}$

두 점 P, Q의 좌표는

$\left(-\frac{4b}{\sqrt{3}},\ -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{4b}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{8b}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2b}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{68b^2}{3}}=\sqrt{17}$

즉, $b^2=\frac{3}{4}$

쌍곡선의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=a^2+b^2=4b^2+b^2=4\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

따라서 $c=\frac{\sqrt{15}}{2}$이므로 두 초점 사이의 거리는

$2\times\frac{\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 36쪽

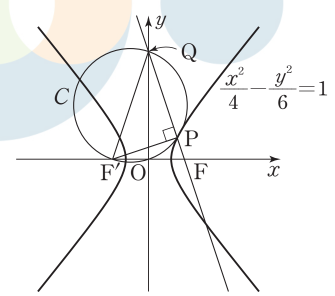
1 8 **2** ④ **3** ③

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(\sqrt{10},\ 0)$,

$\mathrm{F'}(-\sqrt{10},\ 0)$이고 주축의 길이는 $2\times2=4$이다.

$\angle\mathrm{F'OQ}=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 QF′은 원 C의 지름이다.

즉, $\angle\mathrm{F'PQ}=\frac{\pi}{2}$



$\overline{\mathrm{PF}}=k$ $(k>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-k=4$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=k+4$

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 PF′F에서

$(k+4)^2+k^2=40$

$k^2+4k-12=0$

$(k+6)(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$

두 삼각형 F′FP, QFO가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{F'F}}:\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{FO}}$, $2\sqrt{10}:2=\overline{\mathrm{QF}}:\sqrt{10}$

즉, $\overline{\mathrm{QF}}=10$

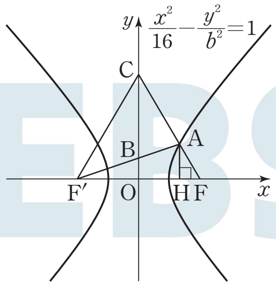
따라서 선분 PQ의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=10-2=8$

답 8

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이는 $2\times4=8$이다.

직선 AF가 y축과 만나는 점을 C라 하면 두 삼각형 AHF, COF가 서로 닮은 도형이고 $\overline{\mathrm{OH}}=2\overline{\mathrm{HF}}$이므로
$\overline{\mathrm{CA}}=2\overline{\mathrm{AF}}$



$\overline{\mathrm{AF}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{CA}}=2\overline{\mathrm{AF}}=2k$, $\overline{\mathrm{CF'}}=\overline{\mathrm{CF}}=3k$

이고, $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{BCF'}$이므로 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{CF'}}:\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{F'B}}:\overline{\mathrm{AB}}$

$3k:2k=\overline{\mathrm{F'B}}:\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{F'B}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AF}}=\frac{3}{2}k$

$\overline{\mathrm{AF'}}=\frac{3}{2}k+k=\frac{5}{2}k$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\frac{5}{2}k-k=8$

즉, $k=\frac{16}{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=\frac{16}{3}+\frac{5}{2}\times\frac{16}{3}=\frac{56}{3}$

답 ④

3 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{11}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(\sqrt{15},\ 0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{15},\ 0)$이고 주축의 길이는 $2\times2=4$이다.

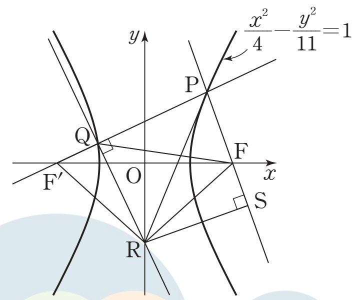
점 R이 y축 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{RF'}}$

$\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{QR}}$이고 $\angle\mathrm{RSF}=\angle\mathrm{RQF'}=\frac{\pi}{2}$이므로 두 삼각형 RSF, RQF′은 서로 합동이다.

즉, $\overline{\mathrm{SF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$

선분 RP가 공통이므로 두 직각삼각형 RSP, RQP는 서로 합동이다.

즉, $\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{PQ}}$



$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PS}}-\overline{\mathrm{SF}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{QF'}}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}})-(\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{QF'}})$
$=2\overline{\mathrm{QF'}}=4$

즉, $\overline{\mathrm{QF'}}=2$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FQ}}-\overline{\mathrm{QF'}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{FQ}}=6$

$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}-2$이므로 두 삼각형 F′FQ, F′FP에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{PF'F})=\frac{60+4-36}{2\times2\sqrt{15}\times2}$$
$$=\frac{60+(\overline{\mathrm{PQ}}+2)^2-(\overline{\mathrm{PQ}}-2)^2}{2\times2\sqrt{15}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+2)}$$

$14(\overline{\mathrm{PQ}}+2)=60+8\overline{\mathrm{PQ}}$

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{16}{3}$

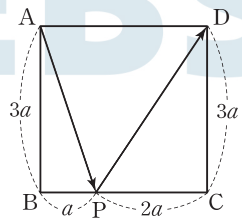
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PS}}=\frac{16}{3}+\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$

답 ③

04 벡터의 연산

유제					본문 38~46쪽
1 ③	**2** 6	**3** ④	**4** 10	**5** ①	**6** ②
7 ⑤	**8** ②	**9** ①			

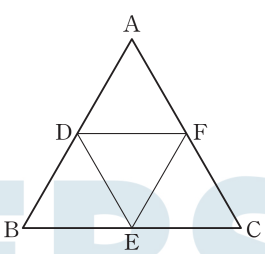
1 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3a$라 하자.



$|\overrightarrow{AP}|=2\sqrt{10}$에서 $\overline{AP}=2\sqrt{10}$이고,
삼각형 ABP는 $\overline{AB}=3a$, $\overline{BP}=a$, $\angle ABP=90°$인 직각 삼각형이므로
$(3a)^2+a^2=(2\sqrt{10})^2$
$10a^2=40$, $a^2=4$
한편, $|\overrightarrow{PQ}|$의 값은 점 Q가 점 D에 있을 때 최대가 되고, 삼각형 DPC는 $\overline{PC}=2a$, $\overline{CD}=3a$, $\angle PCD=90°$인 직각 삼각형이므로 구하는 최댓값은
$\overline{PD}=\sqrt{(2a)^2+(3a)^2}$
$=\sqrt{13a^2}=\sqrt{13\times4}=2\sqrt{13}$

답 ③

2



단위벡터는 크기가 1인 벡터이므로 조건을 만족시키는 단위벡터는 삼각형 ADF, DBE, FEC의 각 변의 양 끝점을 시점과 종점으로 하는 벡터이다.
이때
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{FE}$,
$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EF}$,
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{DE}$,
$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{ED}$,
$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$,
$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CE}$
이므로 서로 다른 단위벡터의 개수는 6이다.

답 6

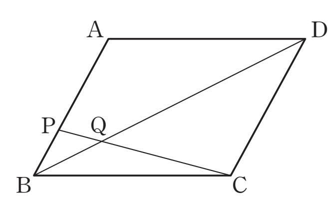
3 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$라 하면
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$
이때
$|\vec{a}|=\overline{AB}=13$, $|\vec{b}|=\overline{AC}=7$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\overline{BC}$
이므로
$6=\overline{AB}-\overline{AC}\le\overline{BC}\le\overline{AB}+\overline{AC}=20$
(단, 오른쪽 등호는 점 A가 선분 BC 위에 있을 때 성립하고, 왼쪽 등호는 점 C가 선분 AB 위에 있을 때 성립한다.)
즉, $|\vec{a}-\vec{b}|$는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 반대 방향일 때 최댓값 20을 갖고, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 같은 방향일 때 최솟값 6을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$20+6=26$

답 ④

4 같은 평면 위의 임의의 점 O에 대하여
$\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{QS}=(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP})-(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ})$
$=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OS})$
$=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}$
이다.
이때 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}|$의 값은 두 선분 PQ, RS가 각각 원 C_1, C_2의 지름이고, 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{SR}$이 같은 방향일 때 최대가 된다.
따라서 구하는 최댓값은 두 원의 지름의 길이의 합과 같으므로
$4+6=10$

답 10

5 실수 k에 대하여 $\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{PQ}$이므로 세 점 P, Q, C는 한 직선 위에 있다.
이때 점 Q가 선분 BD 위에 있으므로 점 Q는 선분 BD와 선분 PC의 교점이다.



이때 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$에서
$\overline{PB}:\overline{AB}=1:3$이므로 $\overline{PB}:\overline{CD}=1:3$이고,
$\triangle PBQ \backsim \triangle CDQ$이므로 $\overline{PQ}:\overline{CQ}=1:3$
따라서
(삼각형 PBQ의 넓이)
$=\frac{1}{4}\times$(삼각형 PBC의 넓이)
$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times$(삼각형 ABC의 넓이)
$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times$(사각형 ABCD의 넓이)
$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 40$
$=\frac{5}{3}$

답 ①

6 $\vec{p}+\vec{q}=(3\vec{a}+\vec{b})+(2\vec{a}+k\vec{b})$
$=5\vec{a}+(1+k)\vec{b}$
$2\vec{p}-\vec{q}=2(3\vec{a}+\vec{b})-(2\vec{a}+k\vec{b})$
$=4\vec{a}+(2-k)\vec{b}$
이때 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $2\vec{p}-\vec{q}$는 영벡터가 아니므로 이 두 벡터가 서로 평행하려면
$t(\vec{p}+\vec{q})=2\vec{p}-\vec{q}$
를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재해야 한다. 즉,
$t\{5\vec{a}+(1+k)\vec{b}\}=4\vec{a}+(2-k)\vec{b}$
$5t\vec{a}+t(1+k)\vec{b}=4\vec{a}+(2-k)\vec{b}$ …… ㉠
㉠에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
$5t=4$, $t(1+k)=2-k$
즉, $t=\frac{4}{5}$이므로
$\frac{4}{5}(1+k)=2-k$, $4+4k=10-5k$
$9k=6$
따라서 $k=\frac{2}{3}$

답 ②

7 $2\vec{a}=6\vec{b}-4\vec{c}$에서
$\vec{b}=\frac{\vec{a}+2\vec{c}}{3}=\frac{2\vec{c}+\vec{a}}{2+1}$
이므로 점 B는 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이다.
또 $2\vec{a}=5\vec{c}-3\vec{d}$에서
$\vec{c}=\frac{2\vec{a}+3\vec{d}}{5}=\frac{3\vec{d}+2\vec{a}}{3+2}$
이므로 점 C는 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점이다.
즉, 네 점 A, B, C, D는 한 직선 위에 있고
$\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$
$\overline{AC}:\overline{CD}=3:2$
이므로 네 점 A, B, C, D의 위치 관계는 그림과 같다.

이때 $\overline{BC}=2$이므로
$\overline{AB}=2\overline{BC}=2\times 2=4$
$\overline{CD}=\frac{2}{3}\overline{AC}=\frac{2}{3}\times 6=4$
따라서
$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=4+2+4=10$

답 ⑤

다른 풀이
$2\vec{a}=6\vec{b}-4\vec{c}$에서
$\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{c}$ …… ㉠
$6\vec{b}-4\vec{c}=5\vec{c}-3\vec{d}$에서 $3\vec{d}=-6\vec{b}+9\vec{c}$
$\vec{d}=-2\vec{b}+3\vec{c}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$\vec{d}-\vec{a}=(-2\vec{b}+3\vec{c})-(3\vec{b}-2\vec{c})$
$=5(\vec{c}-\vec{b})$
따라서 $\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{BC}$이므로
$\overline{AD}=|5\overrightarrow{BC}|=5\overline{BC}=5\times 2=10$

8 좌표평면의 원점 O에 대하여
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(-1, 3)-(2, 1)=(-3, 2)$
$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$
$=(-1, 3)-(1, 0)=(-2, 3)$
이므로
$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=2(-3, 2)+(-2, 3)=(-8, 7)$
따라서
$|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|^2=(-8)^2+7^2=113$

답 ②

9 $\vec{a}-\vec{b}=(-1, 2)-(x, 3)=(-1-x, -1)$
$\vec{b}-\vec{c}=(x, 3)-(4, x-1)=(x-4, 4-x)$
두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 k에 대하여 $k(\vec{a}-\vec{b})=\vec{b}-\vec{c}$가 성립한다.
즉, $k(-1-x, -1)=(x-4, 4-x)$이므로
$-k(1+x)=x-4$ …… ㉠
$-k=4-x$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면

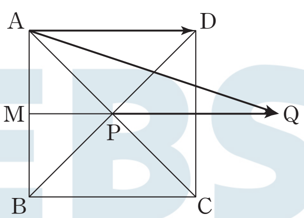
$(4-x)(1+x)=(x-4)$
$(x-4)(x+2)=0$
$x=4$ 또는 $x=-2$
이때 $x=4$이면 $\vec{b}=\vec{c}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $x=-2$

답 ①

Level **1** **기초 연습** 본문 47~48쪽

1 ④	**2** ③	**3** ②	**4** ④	**5** ③	**6** ④
7 ③	**8** ③				

1 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PQ}$이므로 $\overline{PQ}=\overline{AD}=2$이고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면 세 점 M, P, Q는 한 직선 위에 있다.



이때 $\overline{AM}=1$, $\overline{MQ}=\overline{MP}+\overline{PQ}=1+2=3$이고,
$\angle AMQ=90^\circ$이므로
$\overline{AQ}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$
따라서 $|\overrightarrow{AQ}|=\overline{AQ}=\sqrt{10}$

답 ④

2 정육각형 ABCDEF에서 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}\\&=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

따라서
$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=2$

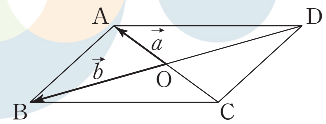
답 ③

3 $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$
이므로

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|&=|\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})|\\&=|\vec{a}-(-\vec{a})|\\&=|2\vec{a}|\\&=2|\vec{a}|=2\overline{AB}\\&=2\times2=4\end{aligned}$$

답 ②

4



$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}\\&=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}\\&=\overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

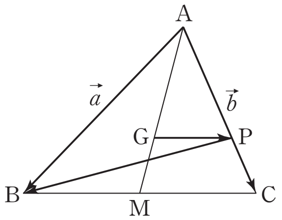
이므로
$\overline{AD}=|\overrightarrow{DA}|=|\vec{a}+\vec{b}|=5$
또
$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$
이므로
$\overline{AB}=|\overrightarrow{BA}|=|\vec{a}-\vec{b}|=3$
이때 평행사변형 ABCD의 넓이가 10이므로
$\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD)=10$
즉, $3\times5\times\sin(\angle BAD)=10$
따라서
$\sin(\angle BAD)=\frac{2}{3}$

답 ④

5 두 벡터 $2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{a}+k\vec{b}$는 영벡터가 아니므로 이 두 벡터가 서로 평행하려면
$t(2\vec{a}+3\vec{b})=\vec{a}+k\vec{b}$
를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재해야 한다.
즉, $2t\vec{a}+3t\vec{b}=\vec{a}+k\vec{b}$
이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
$2t=1$, $3t=k$
$t=\frac{1}{2}$이므로 $k=3t=\frac{3}{2}$

답 ③

6



선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{AG}} : \overline{\mathrm{GM}} = 2 : 1$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{GP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PC}} = 2 : 1$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2}{3}\vec{b}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $m=1$, $n=-\frac{2}{3}$이므로

$m+n = 1+\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$

답 ④

7 $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b} &= \frac{1}{2}(4,\ -2)+2(1,\ 5) \\ &= (2,\ -1)+(2,\ 10) \\ &= (4,\ 9)\end{aligned}$$

따라서 벡터 $\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$4+9=13$

답 ③

8 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CG}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\ &= \frac{1}{3}(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\ &= \frac{1}{3}\{(-2,\ 1)+(4,\ -6)\} \\ &= \frac{1}{3}(2,\ -5) \\ &= \left(\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

따라서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$의 모든 성분의 합은

$\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right) = -1$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 49~50쪽

1 ⑤ **2** 36 **3** ⑤ **4** ③ **5** 34 **6** ②
7 ③ **8** ③

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{5}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

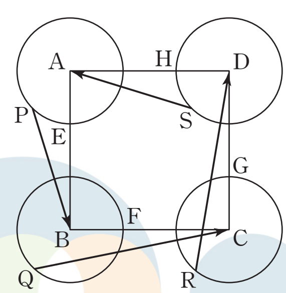
$$R = \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

한편, 원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}$이고, $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\overline{\mathrm{PQ}}$이다. 이때 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은 원의 지름의 길이와 같으므로 구하는 최댓값은

$(2R)^2 = 4R^2 = 4\times\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{100}{3}$

답 ⑤

2 점 P는 점 A를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원 위를, 점 Q는 점 B를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원 위를, 점 R은 점 C를 중심으로 하고 점 G를 지나는 원 위를, 점 S는 점 D를 중심으로 하고 점 H를 지나는 원 위를 움직인다.



이때

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{RD}}+\overrightarrow{\mathrm{SA}} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BQ}})+(\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CR}})+(\overrightarrow{\mathrm{DA}}-\overrightarrow{\mathrm{DS}}) \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}+\overrightarrow{\mathrm{DS}}) \\ &= -(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}+\overrightarrow{\mathrm{DS}})\end{aligned}$$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{RD}}+\overrightarrow{\mathrm{SA}}|$의 값은 네 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DS}}$가 모두 같은 방향일 때 최대가 되고, 최댓값은

$4|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 4\overline{\mathrm{AP}} = 4\overline{\mathrm{AE}}$

이다.

즉, $4\overline{\mathrm{AE}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=2$

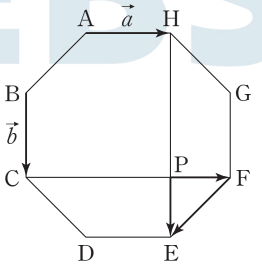
따라서 구하는 정사각형 ABCD의 넓이는

$(3\overline{\mathrm{AE}})^2=(3\times2)^2=36$

답 36

3 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{HE}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\overrightarrow{\mathrm{HE}}-\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}$



그림과 같이 선분 CF와 선분 EH의 교점을 P라 하면 삼각형 EFP는 직각이등변삼각형이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PF}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}$

이때

$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\overrightarrow{\mathrm{PE}}-\overrightarrow{\mathrm{PF}}$

이므로

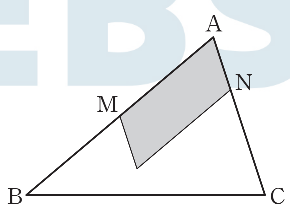
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\overrightarrow{\mathrm{PE}}-\overrightarrow{\mathrm{PF}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$

따라서 $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $l=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$k+2l=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 ⑤

4 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점을 N이라 하자.



$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP'}}$, $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}$

이라 하면 점 P′은 선분 AM 위를, 점 Q′은 선분 AN 위를 움직인다.

이때 $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{AP'}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}$이므로 점 X는 두 선분 AM, AN을 두 변으로 하는 평행사변형의 둘레 및 내부에 있다.

$\overline{\mathrm{AM}}=a$, $\overline{\mathrm{AN}}=b$라 하면 주어진 조건에 의하여

$ab\sin A=6$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

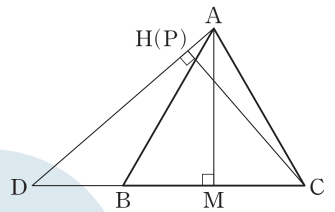
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times2a\times3b\times\sin A&=3ab\sin A\\&=3\times6=18\end{aligned}$$

답 ③

5 $2\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3-1}$

이므로 점 D는 선분 CB를 3 : 1로 외분하는 점이다.



이때 $\overline{\mathrm{AC}}=2$, $\overline{\mathrm{DC}}=3$, $\angle\mathrm{ACD}=60°$이므로 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AD}}^2&=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{DC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{DC}}\times\cos60°\\&=2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{1}{2}\\&=7\end{aligned}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{7}$

즉, $\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{AD}}<\overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2=4+7>\overline{\mathrm{DC}}^2=9$이므로 삼각형 ADC는 예각삼각형이고, 선분 CP의 길이는 그림과 같이 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발 H와 점 P가 일치할 때 최소가 된다.

이때 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 ADC의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DC}}\times\overline{\mathrm{AM}}$

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{DC}}=3$, $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{CH}}=3\times\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$의 최솟값은

$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2=\dfrac{27}{7}$

따라서 $p=7$, $q=27$이므로

$p+q=7+27=34$

답 34

6 $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$\dfrac{\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PA}}{1+2}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{PC}$

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하면

$\overrightarrow{PD}=\dfrac{\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PA}}{1+2}$

이므로 $\overrightarrow{PD}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{PC}$

즉, $3\overrightarrow{PD}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$이므로

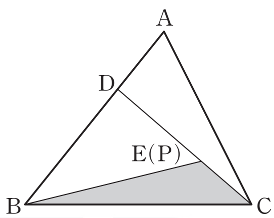
$\dfrac{3\overrightarrow{PD}+5\overrightarrow{PC}}{3+5}=\vec{0}$

선분 CD를 $3:5$로 내분하는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{PE}=\dfrac{3\overrightarrow{PD}+5\overrightarrow{PC}}{3+5}$

이므로 $\overrightarrow{PE}=\vec{0}$

즉, 점 P는 점 E와 일치한다.



따라서 삼각형 PBC의 넓이를 S라 하면

$S=20\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{8}=5$

답 ②

다른 풀이

$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$-2\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+5(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

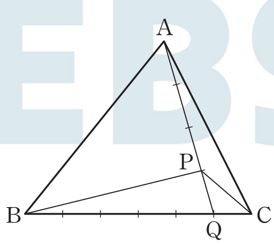
$8\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$

즉, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{5\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{5+1}\right)$이므로

선분 BC를 $5:1$로 내분하는 점을 Q라 하면

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AQ}$

그러므로 점 P는 선분 AQ를 $3:1$로 내분하는 점이다.



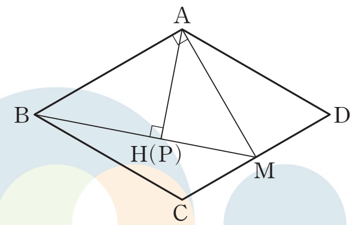
따라서 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$이므로

$20\times\dfrac{1}{4}=5$

7 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BP}$이므로 주어진 조건에 의하여

$\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BM}$

즉, 점 P는 직선 BM 위에 있다.



이때 점 A에서 선분 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P가 점 H와 일치할 때, $|\overrightarrow{AP}|^2$의 값이 최소가 된다.

한편, $\angle BAD=120^\circ$, $\angle DAM=30^\circ$이므로 삼각형 ABM은 $\angle BAM=90^\circ$인 직각삼각형이고, $\overline{AB}=2$, $\overline{AM}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{BM}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$

삼각형 ABM의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\overline{AH}$

즉, $\overline{AH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$이므로

$p=|\overrightarrow{AH}|^2=\overline{AH}^2=\dfrac{12}{7}$

이때 직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{4-\dfrac{12}{7}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}=\dfrac{4}{7}\overline{BM}$

즉, $\overrightarrow{BH}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BM}$이므로 $q=\dfrac{4}{7}$

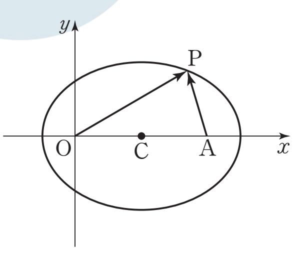
따라서 $\dfrac{p}{q}=p\times\dfrac{1}{q}=\dfrac{12}{7}\times\dfrac{7}{4}=3$

답 ③

8 $|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{AP}|=6$

에서 $\overline{OP}+\overline{AP}=6$

즉, 점 P는 두 점 O, A를 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원 위를 움직인다.



이때 좌표가 $(2,\ 0)$인 점을 C라 하면 점 C는 선분 OA의 중점이므로

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{AP}=-(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA})=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$

한편, 점 C가 타원의 중심이므로 선분 CP의 길이는 점 P가 타원의 장축의 양 끝점 중 하나일 때 최대가 되고, 단축의 양 끝점 중 하나일 때 최소가 된다.

즉, $2\overline{CP}$의 최댓값은 타원의 장축의 길이이고, 최솟값은 타원의 단축의 길이이다.

그러므로

$M=6^2=36$

이고, 타원의 단축의 길이를 $2b$라 하면

$b^2=3^2-2^2=5$

이므로

$m=(2b)^2=4\times5=20$

따라서 $M+m=36+20=56$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 51쪽

1 ③　**2** ①　**3** ④

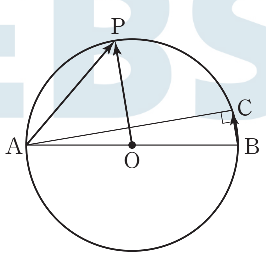
1 선분 AB의 중점, 즉 외접원의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{BC}$

이므로 $3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OP}$

이때 점 P가 외접원 위에 있으므로 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 $|\overrightarrow{OP}|=r$

즉, $|\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{3}r$



이때 $\overline{OP}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{AOP})=\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{\frac{1}{3}r}{2r}=\dfrac{1}{6}$

삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

$|\overrightarrow{AP}|^2=r^2+r^2-2\times r\times r\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}r^2$

이므로 $\frac{5}{3}r^2=5,\ r^2=3$

따라서 구하는 외접원의 넓이는 3π이다.

답 ③

2 $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{BC}$

이므로

$\overrightarrow{BA}+3(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})=k\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{3-k}{3}\overrightarrow{BC}$

선분 BA를 $1:2$로 내분하는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{BP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EP}$

이고, 선분 CD를 $1:2$로 내분하는 점을 F라 하면

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}$이므로

$\overrightarrow{EP}=\frac{3-k}{3}\overrightarrow{EF}$

즉, 세 점 E, P, F가 한 직선 위에 있으므로 점 P는 직선 EF 위에 있다. …… ㉠

또 $\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=l\overrightarrow{CD}$이므로

$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}-5\overrightarrow{CP}=l\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CP}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=\frac{l}{6}\overrightarrow{DC}$

선분 CB를 $1:5$로 내분하는 점을 G라 하면

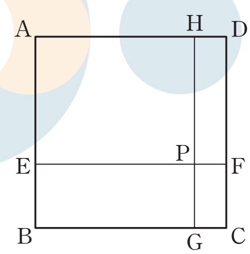
$\overrightarrow{CP}-\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GP}$

이고, 선분 DA를 $1:5$로 내분하는 점을 H라 하면

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HG}$이므로 $\overrightarrow{GP}=\frac{l}{6}\overrightarrow{HG}$

즉, 세 점 G, P, H가 한 직선 위에 있으므로 점 P는 직선 HG 위에 있다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 점 P는 선분 EF와 선분 GH의 교점이다.



그림에서 점 Q가 점 A에 있을 때 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최대가 되고, 점 Q가 점 F에 있을 때 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소가 됨을 알 수 있다.

이때 $\overline{PE}=5$, $\overline{PH}=4$, $\overline{PF}=1$이므로

$M=\overline{PA}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

$m=\overline{PF}=1$

따라서 $M^2+m^2=41+1=42$

답 ①

3 $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AC}$에서

$\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}}{3+4}=\dfrac{k}{7}\overrightarrow{AC}$

이므로 선분 DB를 3 : 4로 내분하는 점은 직선 AC 위에 있다.

또 $2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=l\overrightarrow{BD}$에서

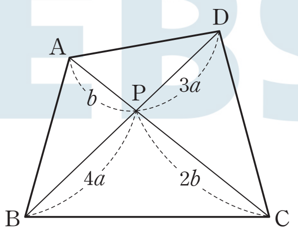
$\dfrac{2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2+1}=\dfrac{l}{3}\overrightarrow{BD}$

이므로 선분 CA를 2 : 1로 내분하는 점은 직선 BD 위에 있다.

즉, 사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점 P에 대하여

$\overline{PD} : \overline{PB}=3 : 4$, $\overline{PC} : \overline{PA}=2 : 1$

이므로 두 양수 a, b에 대하여 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이때 삼각형 PAB의 넓이가 12이므로

(삼각형 PBC의 넓이)$=2\times$(삼각형 PAB의 넓이)

$=2\times12=24$

(삼각형 PCD의 넓이)$=\dfrac{3}{4}\times$(삼각형 PBC의 넓이)

$=\dfrac{3}{4}\times24=18$

(삼각형 PDA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times$(삼각형 PCD의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times18=9$

따라서 구하는 사각형 ABCD의 넓이는

$12+24+18+9=63$

답 ④

05 벡터의 내적

유제 본문 53~59쪽

1 ① **2** ② **3** ③ **4** ③ **5** ⑤ **6** ⑤ **7** ④ **8** ⑤

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(x, 2)\cdot(-1, x+3)$

$=x\times(-1)+2\times(x+3)$

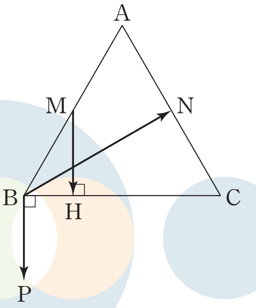
$=x+6$

따라서 $x+6=7$이므로

$x=1$

답 ①

2



그림과 같이 $\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{BP}$가 되도록 점 P를 잡으면 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 4이므로

$|\overrightarrow{BN}|=2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{MH}|=\sqrt{3}$

$\angle PBN=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$

따라서

$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=|\overrightarrow{BN}||\overrightarrow{BP}|\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-3$

답 ②

3 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=7-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4$

$=11-2\vec{a}\cdot\vec{b}=5$

이므로

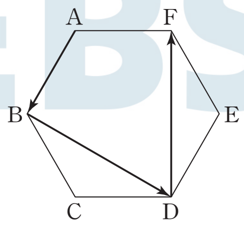
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

따라서

$$\begin{aligned}|\vec{a}+2\vec{b}|^2&=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\\&=7+4\times3+4\times4\\&=35\end{aligned}$$

답 ③

4



$(k\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF})\cdot(\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{BD})$

$=k|\overrightarrow{AB}|^2-k^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BD}$

위의 그림에서 $\overline{AB}\perp\overline{BD}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}&=|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{5}{6}\pi\\&=\sqrt{3}\times1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BD}&=|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{BD}|\cos\frac{2}{3}\pi\\&=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}(k\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF})\cdot(\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{BD})&=k-0-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}k\\&=\frac{5}{2}k-\frac{3}{2}=0\end{aligned}$$

이므로 $k=\frac{3}{5}$

답 ③

5 직선 $y=3x-1$에서

$3x=y+1$, 즉 $x=\frac{y+1}{3}$

이므로 이 직선의 방향벡터를 $\vec{d}=(1, 3)$으로 놓을 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{d}|}{|\vec{u}||\vec{d}|}\\&=\frac{|3\times1+1\times3|}{\sqrt{3^2+1^2}\times\sqrt{1^2+3^2}}\\&=\frac{6}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ⑤

6 $\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$에서

$(x, y)\cdot(3, 4)=(3, 4)\cdot(5, 0)$

이므로

$3x+4y=15$ …… ㉠

㉠은 직선의 방정식이고 $x=0$일 때 $y=\frac{15}{4}$, $y=0$일 때 $x=5$이므로 구하는 도형은 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 $\frac{15}{4}$, 5인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

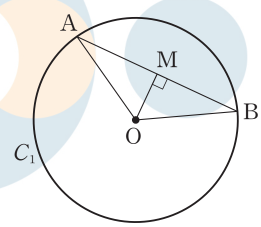
$\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}\times5=\frac{75}{8}$

답 ⑤

7 $|\overrightarrow{OP}|=3$이므로 점 P가 나타내는 도형은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이다.

또 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{BA}$이므로 점 Q가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지나는 직선이다.

이때 도형 C_2가 도형 C_1의 둘레의 길이를 2 : 1로 나누므로 $\angle AOB=\frac{2}{3}\pi$이다.



위의 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{OA}=3$, $\angle OAM=\frac{\pi}{6}$이므로 직각삼각형 AOM에서

$\overline{AM}=\overline{OA}\cos\frac{\pi}{6}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서

$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=2\overline{AM}=2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

답 ④

8 $$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})\\&=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AP}$가 같은 방향일 때 최대가 된다. 따라서 구하는 최댓값은

$|\overrightarrow{OB}|\times|\overrightarrow{AP}|=5\times3=15$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 60~61쪽

1 ④	2 ④	3 ②	4 ③	5 ②	6 ③
7 ④	8 ④				

1 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3, 2)-(2, -1)=(1, 3)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(1, a)-(3, 2)=(-2, a-2)$

이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(1, 3)\cdot(-2, a-2)$

$=1\times(-2)+3\times(a-2)$

$=3a-8$

따라서 $3a-8=4$이므로

$a=4$

답 ④

2 $|\overrightarrow{u_1}|=|\overrightarrow{u_2}|=1$에서 $|2\overrightarrow{u_1}|=2$, $|3\overrightarrow{u_2}|=3$

이므로 $2\overrightarrow{u_1}\cdot3\overrightarrow{u_2}=2\times3\times\cos\theta$

따라서 $6\cos\theta=4$이므로

$\cos\theta=\frac{2}{3}$

답 ④

3 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(k+2, 4)\cdot(3, k-5)$

$=3(k+2)+4(k-5)$

$=7k-14=0$

따라서 $k=2$

답 ②

4 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

$\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$

$\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}$

이므로 주어진 조건에서

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}=7$, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=-10$

이때

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$

$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}$

$=-|\overrightarrow{BC}|^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=-|\overrightarrow{BC}|^2-7$

이므로

$-|\overrightarrow{BC}|^2-7=-10$, $|\overrightarrow{BC}|^2=3$

따라서 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$

답 ③

다른 풀이

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}=7$, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=-10$의 양변을 각각 더하면

$\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{BC}|^2=-3$

따라서 $|\overrightarrow{BC}|^2=3$이므로 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$

5 두 직선 $\frac{x-2}{3}=y+1$, $x+3=\frac{4-y}{2}$의 방향벡터를 각각

$\overrightarrow{u_1}=(3, 1)$, $\overrightarrow{u_2}=(1, -2)$라 하면

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|3\times1+1\times(-2)|}{\sqrt{3^2+1^2}\times\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

답 ②

6 $\vec{u}\,/\!/\,\vec{n}$이어야 하므로 $t\vec{u}=\vec{n}$인 0이 아닌 실수 t가 존재해야 한다.

즉, $t(1, 2)=(k, 3)$에서 $t=k$, $2t=3$이므로

$k=t=\frac{3}{2}$

답 ③

7 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x, y)-(2, 4)=(x-2, y-4)$

이때

$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=(x, y)\cdot(x-2, y-4)$

$=x(x-2)+y(y-4)$

$=x^2+y^2-2x-4y$

이므로

$x^2+y^2-2x-4y=4$

$(x-1)^2+(y-2)^2=9$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(1, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 $2\pi\times3=6\pi$

답 ④

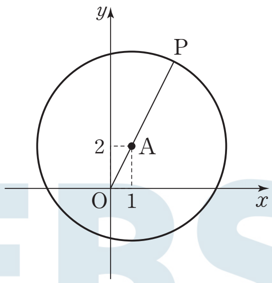
8 두 벡터 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(3, 0)$에 대하여

$|\vec{a}+\vec{b}|=|(1, 2)+(3, 0)|=|(4, 2)|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

이므로 $|\vec{p}-\vec{a}|=2\sqrt{5}$

즉, 원점 O에 대하여 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$인 점 P는 점 $(1, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원 위의 점이다.

이때 A(1, 2)라 하면 반직선 OA가 원과 만나는 점이 P일 때 $|\vec{p}|$의 값, 즉 선분 OP의 길이가 최대가 된다.



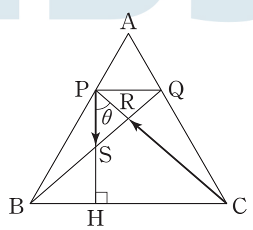
따라서 구하는 최댓값은
$\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}=\sqrt{1^2+2^2}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 62~63쪽

1 ①	2 ⑤	3 17	4 ⑤	5 ②	6 ④
7 ⑤	8 ④				

1



직각삼각형 PBH에서 $\overline{PB}=4$, $\angle PBH=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{PH}=\overline{PB}\sin\frac{\pi}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{BH}=\overline{PB}\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$

이때 두 삼각형 PQS, HBS가 서로 합동이므로
$\overline{PS}=\overline{HS}$

즉, $\overline{PS}=\frac{1}{2}\overline{PH}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

또 직각삼각형 PHC에서 $\overline{PH}=2\sqrt{3}$, $\overline{CH}=4$이므로
$\overline{PC}=\sqrt{12+16}=2\sqrt{7}$

이때 두 삼각형 PRQ와 CRB는 서로 닮음이고,
$\overline{PQ}:\overline{CB}=1:3$이므로

$\overline{CR}=\frac{3}{4}\overline{PC}=\frac{3}{4}\times2\sqrt{7}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

한편, $\angle CPH=\theta$라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{CR}$이 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이고

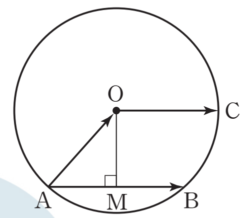
$\cos\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{PC}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{CR}&=|\overrightarrow{PS}||\overrightarrow{CR}|\cos(\pi-\theta)\\&=-|\overrightarrow{PS}||\overrightarrow{CR}|\cos\theta\\&=-\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{7}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

답 ①

2



그림과 같이 원의 중심을 O라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

이때 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overline{AM}\times\overline{AB}=2\times4=8$

한편, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$가 같은 방향일 때 최대가 되고 최댓값은
$|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{OC}|=4\times3=12$
이다.

따라서 구하는 최댓값은
$8+12=20$

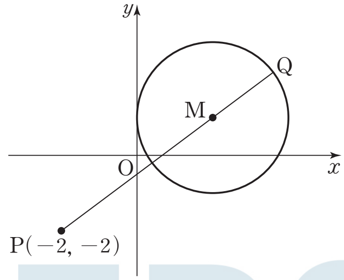
답 ⑤

3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$

즉, $\angle ABC=90^\circ$이므로 선분 AC는 원의 지름이다.

이때 선분 AC의 중점, 즉 원의 중심을 M이라 하면
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$이므로
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PM}$

그림과 같이 직선 PM이 원과 만나는 두 점 중 점 P에서 멀리 있는 점을 Q라 하면 벡터 $\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PM}$의 크기는 점 B가 점 Q와 일치할 때 최대가 된다.



이때 P$(-2,\ -2)$, M$(2,\ 1)$이므로

$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{16+9}=5$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PM}}+\overline{\mathrm{MQ}}=5+2=7$

따라서 구하는 최댓값은

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=\overline{\mathrm{PQ}}+2\overline{\mathrm{PM}}$

$=7+2\times5=17$

답 17

4 $p^2+4q^2+9r^2=12qr$에서

$p^2+(2q-3r)^2=0$이므로

$p=0,\ 2q=3r$

$p=0$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

즉, $\angle\mathrm{B}=90^\circ$

$2q=3r$에서

$2\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=3\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$(2\overrightarrow{\mathrm{BC}}-3\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$

$(2\overrightarrow{\mathrm{BC}}+3\overrightarrow{\mathrm{BA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}})=0$

$3|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}-2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=0$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$이므로

$3|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$

즉, $\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}k,\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}k\ (k>0)$

으로 놓을 수 있다.

이때

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\overline{\mathrm{AC}}$

$=\sqrt{2k^2+3k^2}=\sqrt{5}k=\sqrt{10}$

이므로 $k=\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{6}=\sqrt{6}$

답 ⑤

5 두 벡터 $\vec{u}=(1,\ -1)$, $\vec{n}=(3,\ -4)$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{1\times3+(-1)\times(-4)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\times\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}\times5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기 θ는 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{98}{100}}=\sqrt{\frac{2}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

답 ②

6 직선 l의 방향벡터가 $\vec{u}=(2,\ -1)$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉, 직선 l의 방정식을

$y=-\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$ (k는 실수)

로 놓을 수 있다.

한편, 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=2\overline{\mathrm{OM}}$

이고 이 값은 점 M이 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발일 때 최소가 된다.

이때 원점과 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2|k|}{\sqrt{5}}$이므로

$2\times\frac{2|k|}{\sqrt{5}}=12$에서 $|k|=3\sqrt{5}$

또 $x+2y-2k=0$에 $x=0$을 대입하면 $y=k$, $y=0$을 대입하면 $x=2k$이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|k|\times|2k|=k^2=(3\sqrt{5})^2=45$

답 ④

7 A$(-2,\ -1)$, B$(-1,\ 1)$, C$(1,\ 5)$라 하자.

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이고,

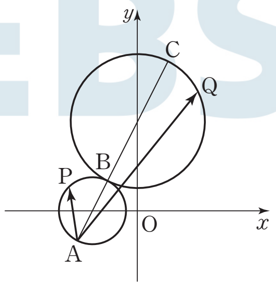
$(\vec{q}-\vec{b})\cdot(\vec{q}-\vec{c})=0$이므로 점 Q는 선분 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

한편, 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$
$\quad=(1,\ 5)-(-1,\ 1)=(2,\ 4)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$\quad=(-1,\ 1)-(-2,\ -1)=(1,\ 2)$

에서 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



이때

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{q}-\vec{a})=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

이고, 이 값은 점 P가 점 B에 있고, 점 Q가 점 C에 있을 때 최대가 된다.

따라서 구하는 최댓값은

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}$
$\quad=\sqrt{(-1+2)^2+(1+1)^2}\times\sqrt{(1+2)^2+(5+1)^2}$
$\quad=\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=15$

답 ⑤

8 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$이고,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(5,\ 2)-(1,\ -2)=(4,\ 4)$

이므로

$(x,\ y)\cdot(4,\ 4)=0$

$4x+4y=0$

즉, $x+y=0$ …… ㉠

또 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$

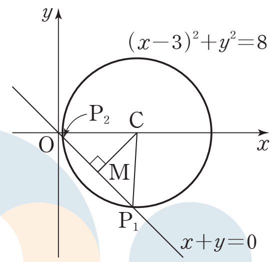
이고 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 0)$

이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 점 P는 직선 $x+y=0$과 원 $(x-3)^2+y^2=8$의 교점이다.



위의 그림과 같이 원의 중심을 C, 원과 직선이 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2, 선분 P_1P_2의 중점을 M이라 하면 선분 CM의 길이는 점 C(3, 0)과 직선 $x+y=0$ 사이의 거리이므로

$\overline{CM}=\frac{|3+0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

또 선분 CP_1의 길이는 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 CMP_1에서

$\overline{MP_1}=\sqrt{\overline{CP_1}^2-\overline{CM}^2}=\sqrt{8-\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

따라서 구하는 선분 P_1P_2의 길이는

$\overline{P_1P_2}=2\overline{MP_1}=2\times\frac{\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 64쪽

1 ② **2** 8 **3** ③

1 조건 (가)에서

$4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$

이므로 점 P는 선분 AB를 1 : 5로 외분하는 점이다.

즉, $\overline{BP}=\frac{5}{4}\overline{AB}=\frac{5}{4}\times4=5$

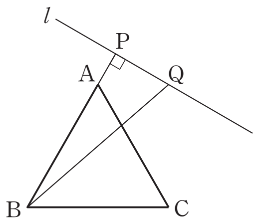
조건 (나)에서

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}$

이므로

$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

즉, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BA}$이므로 점 Q는 점 P를 지나고 직선 BA에 수직인 직선 위에 있다. 이 직선을 l이라 하자.



이때 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이고

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$이므로

$|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PQ}|\cos\frac{\pi}{6}=6$

$4\times\overline{PQ}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

즉, $\overline{PQ}=\sqrt{3}$

따라서

$$|\overrightarrow{BQ}|=\overline{BQ}=\sqrt{\overline{BP}^2+\overline{PQ}^2}$$
$$=\sqrt{25+3}=2\sqrt{7}$$

답 ②

2 조건 (가)에서

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2$

즉, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하고 방향이 반대이다.

그러므로 점 O가 선분 AB 위에 있다.

조건 (나)에서

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

이므로 $\angle BCA=90^\circ$

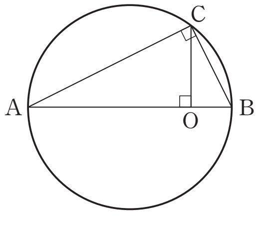
즉, 점 C는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.

또 조건 (다)에서 $|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{c}|^2$, 즉 $\angle BCA=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OC}^2$ …… ㉠

이므로 점 O는 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발이다.

이때 조건 (가)에서 $|\vec{a}|>|\vec{b}|$, 즉 $\overline{OA}>\overline{OB}$이므로 세 점 A, B, C와 점 O의 위치는 다음과 같다.



한편, $|\overrightarrow{AB}|=10$이고 삼각형 ABC의 넓이가 20이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times10\times\overline{OC}=20$

즉, $\overline{OC}=4$이므로 $\overline{OA}=x$라 하면 ㉠에서

$x(10-x)=4^2$

$x^2-10x+16=0$

$(x-2)(x-8)=0$

$x>10-x$, 즉 $x>5$이어야 하므로 $x=8$

따라서 $|\vec{a}|=\overline{OA}=8$

답 8

3 $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$를 만족시키는 점 C와 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$를 만족시키는 점 D를 잡으면 조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OADC의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

한편, 조건 (나)에서

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\cos\frac{\pi}{3}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}$

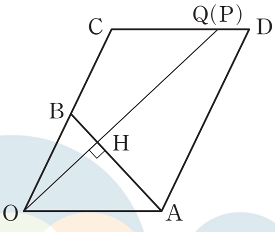
$=3\times4\times\frac{1}{2}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}$

$=6-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}=6$

이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

즉, $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BA}$이므로 점 P는 점 O를 지나고 직선 AB에 수직인 직선 위에 있는 점이다.

그러므로 다음 그림과 같이 점 O를 지나고 직선 AB에 수직인 직선과 직선 CD의 교점을 Q라 하면 점 P가 점 Q와 일치할 때 $|\overrightarrow{OP}|$의 값이 최대가 된다.



이때

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CD}$

$=k\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ (k는 실수)

로 놓으면

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{BA}=0$이므로

$(k\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=0$

$k|\overrightarrow{OA}|^2+(2-k)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-2|\overrightarrow{OB}|^2=0$

$k\times4^2+(2-k)\times4\times3\times\frac{1}{2}-2\times3^2=0$

$k=\frac{3}{5}$

따라서

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=\left|\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\right|^2$$

$$=\frac{9}{25}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{12}{5}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$=\frac{9}{25}\times16+\frac{12}{5}\times6+4\times9=\frac{1404}{25}$$

이므로 구하는 $|\overrightarrow{OP}|$의 최댓값은 $\sqrt{\frac{1404}{25}}=\frac{6\sqrt{39}}{5}$

답 ③

참고

$O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이 되도록 좌표평면을 잡은 후, 직선 CD의 방정식이 $y=3\sqrt{3}$, 직선 OH의 방정식이 $y=\frac{5\sqrt{3}}{9}x$임을 이용하여 점 Q의 좌표를 찾아 문제를 해결할 수도 있다.

06 공간도형

유제 본문 66~74쪽

1 4 **2** 28 **3** ③ **4** ① **5** ② **6** ⑤
7 ①

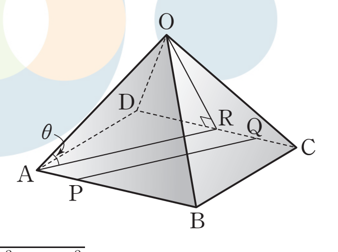
1 직선 AB와 평행한 직선은 직선 DE이므로 $a=1$
직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 CF, 직선 DF, 직선 EF이므로 $b=3$
따라서 $a+b=1+3=4$

답 4

2 평면 AIJF와 한 점에서 만나는 직선은
직선 AB, 직선 BC, 직선 DE, 직선 EF, 직선 GH,
직선 HI, 직선 JK, 직선 KL, 직선 AG, 직선 BH,
직선 CI, 직선 DJ, 직선 EK, 직선 FL
이므로 $a=14$
평면 AIJF와 평행한 직선은
직선 CD, 직선 GL
이므로 $b=2$
따라서 $a\times b=14\times2=28$

답 28

3 선분 CD의 중점을 R이라 하면 $\overline{AR}/\!/\overline{PQ}$이므로 꼬인 위치에 있는 두 직선 OA, PQ가 이루는 예각의 크기는 두 직선 OA, AR이 이루는 예각의 크기와 같다.
즉, $\angle OAR=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$
삼각형 ODC가 정삼각형이고 점 R이 선분 CD의 중점이므로
$\angle ORD=\frac{\pi}{2}$



$\overline{OR}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{DR}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
$\overline{AR}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DR}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
따라서 삼각형 OAR에서 코사인법칙에 의하여

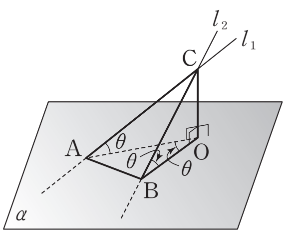
$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{5}\times2}$$
$$=\frac{6}{2\times\sqrt{5}\times2}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

답 ③

4 $\overline{CO}\perp\alpha$이므로 $\overline{CO}\perp\overline{AO}$, $\overline{CO}\perp\overline{BO}$

직각삼각형 AOC에서 $\angle CAO=\theta$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{CO}}{\overline{AC}}=\frac{3}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$에서 $\overline{AC}=5$



$\overline{AO}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

같은 방법으로 직각삼각형 BOC에서 $\overline{BO}=4$

그러므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BO}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{3}{5}=\frac{24}{5}$

따라서 사면체 CABO의 부피는

$\frac{1}{3}\times\frac{24}{5}\times3=\frac{24}{5}$

답 ①

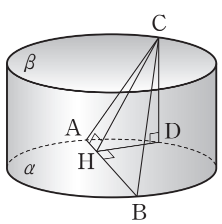
5 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times2\times\overline{CH}=\frac{\sqrt{5}}{2}$에서

$\overline{CH}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\overline{CD}\perp\alpha$, $\overline{CH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DH}\perp\overline{AB}$



그러므로 점 D와 직선 AB 사이의 거리는 선분 DH의 길이와 같다.

직각삼각형 CHD에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{CH}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1^2}=\frac{1}{2}$

따라서 점 D와 직선 AB 사이의 거리는 $\frac{1}{2}$이다.

답 ②

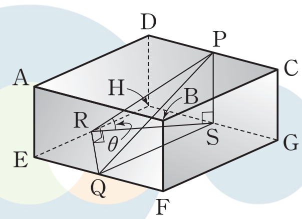
6 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 S라 하면 점 S는 선분 GH의 중점이므로

$\overline{SH}=\overline{HR}=\overline{RE}=\overline{EQ}$에서 삼각형 SRQ는

$\overline{SR}=\overline{RQ}$, $\angle SRQ=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

또한 $\overline{PS}\perp$(평면 EFGH), $\overline{SR}\perp\overline{RQ}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PR}\perp\overline{RQ}$



그러므로 이면각의 정의에 의하여

$\angle PRS=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\overline{SR}=\sqrt{\overline{SH}^2+\overline{HR}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PS}^2+\overline{SR}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

이므로 직각삼각형 PRS에서

$\cos\theta=\frac{\overline{SR}}{\overline{PR}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

7 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

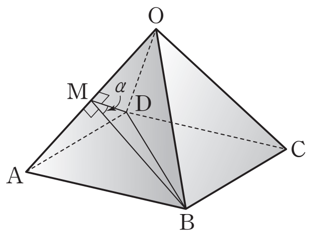
선분 OA의 중점을 M이라 하면

$\overline{BM}\perp\overline{OA}$, $\overline{DM}\perp\overline{OA}$

삼각형 MBD에서 $\overline{BM}=\overline{DM}=\sqrt{3}$, $\overline{BD}=2\sqrt{2}$이므로

$\angle BMD=\alpha$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\alpha=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$



두 평면 OAB, OAD가 이루는 예각의 크기를

$\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 이면각의 정의에 의하여

$\theta=\pi-\alpha$

그러므로

$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

따라서 삼각형 OAB의 평면 OAD 위로의 정사영의 넓이는

$\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

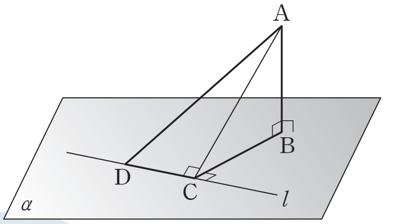
답 ①

Level 1 기초 연습					본문 75~76쪽
1 ③	**2** 2	**3** ⑤	**4** 5	**5** ④	**6** ⑤
7 17	**8** ①				

1 주어진 모서리와 같은 밑면에 있는 모서리를 연장한 직선은 모두 직선 l과 꼬인 위치에 있지 않다.
밑면과 수직인 모서리 중 주어진 모서리와 만나는 2개의 모서리를 제외한 10개의 모서리를 연장한 직선은 모두 직선 l과 꼬인 위치에 있다.
주어진 모서리와 다른 밑면에 있는 모서리 중 주어진 모서리와 평행한 2개의 모서리를 제외한 10개의 모서리를 연장한 직선은 모두 직선 l과 꼬인 위치에 있다.
따라서 구하는 개수는
$10+10=20$

답 ③

2 $\overline{AB}\perp\alpha$, $\overline{BC}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC}\perp l$이고, $\overline{AB}\perp\alpha$이므로 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이다.



직각삼각형 ACB에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 직각삼각형 ADC에서

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{(\sqrt{29})^2-5^2}=2$

답 2

3 선분 AE의 중점을 R이라 하면 $\overline{AC}/\!/\overline{RQ}$이므로 꼬인 위치에 있는 두 직선 AC, PQ가 이루는 예각의 크기는 두 직선 RQ, PQ가 이루는 예각의 크기와 같다.

즉, $\angle PQR=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\overline{PG}=\sqrt{\overline{PF}^2+\overline{FG}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{GQ}^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PE}^2+\overline{ER}^2}$
$=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

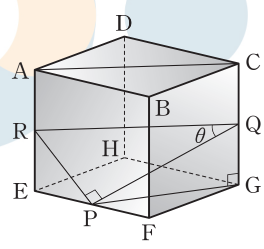
$\overline{RQ}=\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$
$=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

이때

$\overline{RQ}^2=(2\sqrt{2})^2=8$

$\overline{PQ}^2+\overline{PR}^2=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2=8$

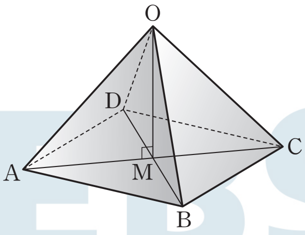
이므로 $\overline{RQ}^2=\overline{PQ}^2+\overline{PR}^2$에서 삼각형 PQR은 $\angle RPQ=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.



따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{RQ}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

4 밑면의 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발은 M과 일치하므로 삼각형 OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 MAB이다.



삼각형 MAB의 넓이는 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{4}\times 1^2=\frac{1}{4}$

삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면

$S\times\cos\theta=S\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

$S=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

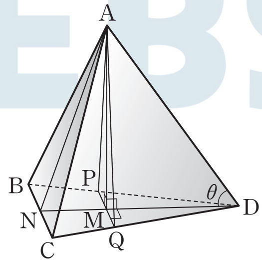
따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=2+3=5$

답 5

5 $\overline{\text{DP}}=\overline{\text{DQ}}$에서 $\overline{\text{AP}}=\overline{\text{AQ}}$이므로 두 삼각형 APQ, DPQ는 모두 이등변삼각형이다.
두 선분 PQ, BC의 중점을 각각 M, N이라 하자.
$\overline{\text{AM}}\perp\overline{\text{PQ}}$, $\overline{\text{DM}}\perp\overline{\text{PQ}}$이고 두 평면 APQ, BCD가 서로 수직이므로 $\overline{\text{AM}}\perp\overline{\text{DM}}$
한편, 삼각형 AND에서 $\overline{\text{AN}}=\overline{\text{DN}}=\sqrt{3}$, $\overline{\text{AD}}=2$이므로
$\angle\text{ADM}=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{3}\times 2}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



직각삼각형 AMD에서

$\overline{\text{DM}}=\overline{\text{AD}}\times\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서

$$\frac{\overline{\text{DP}}}{\overline{\text{DB}}}=\frac{\overline{\text{DM}}}{\overline{\text{DN}}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$$

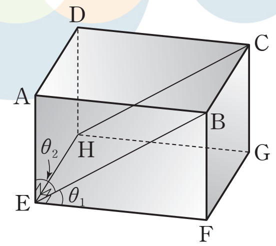
이므로

$\overline{\text{DP}}=\frac{2}{3}\times\overline{\text{DB}}=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$

답 ④

참고
점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 삼각형 BCD의 무게중심이고 이는 선분 PQ 위에 있다. 그러므로 두 삼각형 BCD, PQD는 서로 닮음이고, 닮음비는 3 : 2이다.
따라서 $\overline{\text{DP}}=\frac{2}{3}\times\overline{\text{DB}}=\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$

6 두 평면 BCHE, EFGH가 이루는 예각의 크기를 $\theta_1\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$, 두 평면 BCHE, AEHD가 이루는 예각의 크기를 $\theta_2\left(0<\theta_2<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자.
$\overline{\text{HE}}\perp$(평면 AEFB)이므로 $\overline{\text{HE}}\perp\overline{\text{BE}}$
이면각의 정의에 의하여
$\theta_1=\angle\text{BEF}$, $\theta_2=\angle\text{AEB}$



이때 $\theta_1+\theta_2=\angle\text{AEF}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta_2=\frac{\pi}{2}-\theta_1$

$S_1=2\cos\theta_1$

$S_2=2\cos\theta_2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=2\sin\theta_1$

이므로

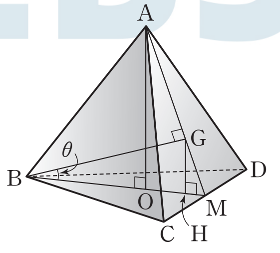
$$\begin{aligned}S_1^2+S_2^2&=(2\cos\theta_1)^2+(2\sin\theta_1)^2\\&=4(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)\\&=4\times 1=4\end{aligned}$$

답 ⑤

7 선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 G는 선분 AM 위의 점이다.

삼각형 BCD의 무게중심을 O라 하면 점 O는 선분 BM 위의 점이고, $\overline{AO}\perp$(평면 BCD)이다.
점 G에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AO}/\!/\overline{GH}$이므로
$\overline{GH}\perp$(평면 BCD)
즉, $\angle GBH=\theta$
$\angle BGM=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 BMG에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{GM}}{\overline{BM}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$



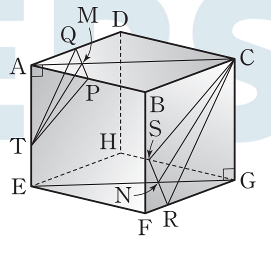
그러므로

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로
$p+q=9+8=17$

답 17

8 선분 PQ의 중점을 M, 선분 RS의 중점을 N이라 하자. $\overline{TP}=\overline{TQ}$, $\overline{CR}=\overline{CS}$이므로 평면 AEGC와 두 직선 PQ, RS의 교점은 각각 M, N이다. 또한 두 평면 TPQ, CSR이 서로 평행하고 두 직선 TM, CN은 한 평면 위에 있으므로 두 직선 TM, CN은 서로 평행하다.



$$\overline{MA}=\frac{1}{4}\times\overline{AC}=\frac{1}{4}\times8\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{NG}=\frac{3}{8}\times\overline{EG}=\frac{3}{8}\times8\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

이므로

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{GC}}{\overline{NG}}$$

에서

$$\frac{\overline{AT}}{2\sqrt{2}}=\frac{8}{3\sqrt{2}}$$

따라서 $\overline{AT}=\frac{8}{3\sqrt{2}}\times2\sqrt{2}=\frac{16}{3}$

답 ①

참고
두 삼각형 ATP, GCR은 서로 닮음이므로

$$\overline{AT}=\frac{\overline{AP}}{\overline{GR}}\times\overline{GC}=\frac{4}{6}\times8=\frac{16}{3}$$

Level 2 기본 연습 본문 77~78쪽

1 ③ **2** ③ **3** ② **4** ① **5** ① **6** 5
7 ⑤

1 $\overline{PB}\perp$(평면 ABCD)이므로 $\overline{PB}\perp\overline{BD}$
직각삼각형 PBD에서

$$\overline{PB}=\frac{1}{2}\times\overline{BF}=\frac{1}{2}\times4=2$$

$$\overline{BD}=\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{PD}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$$

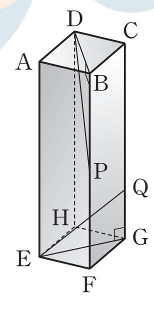
$\overline{QG}\perp$(평면 EFGH)이므로 $\overline{QG}\perp\overline{EG}$
직각삼각형 QGE에서

$$\overline{QG}=\frac{1}{4}\times\overline{CG}=\frac{1}{4}\times4=1$$

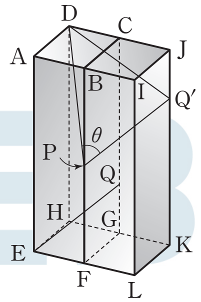
$$\overline{EG}=\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{EQ}=\sqrt{\overline{QG}^2+\overline{EG}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$



그림과 같이 직육면체 ABCD−EFGH와 합동인 직육면체 BIJC−FLKG에 대하여 선분 JK를 1 : 3으로 내분하는 점을 Q′이라 하면 $\overline{PQ'}=\overline{EQ}$이고, $\overline{PQ'}\,/\!/\,\overline{EQ}$이므로 $\angle \mathrm{DPQ'}=\theta$이다.



직각삼각형 Q′JD에서

$\overline{Q'J}=\frac{1}{4}\times\overline{JK}=\frac{1}{4}\times4=1$

$\overline{JD}=2$

이므로

$\overline{Q'D}=\sqrt{\overline{Q'J}^2+\overline{JD}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PQ′D에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\frac{4}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

답 ③

2 삼각형 BEG에서

$\overline{BE}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{FE}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\overline{BG}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{FG}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

이므로 $\overline{BE}=\overline{BG}$

삼각형 DEG에서

$\overline{DE}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HE}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\overline{DG}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HG}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

이므로 $\overline{DE}=\overline{DG}$

그러므로 선분 EG의 중점을 M이라 하면

$\overline{BM}\perp\overline{EG}$, $\overline{DM}\perp\overline{EG}$

즉, 삼수선의 정리에 의하여 점 B에서 평면 DEG에 내린 수선의 발 O는 점 B에서 직선 DM에 내린 수선의 발과 같다.

삼각형 BDM에서

$\overline{BD}=2\sqrt{2}$

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{BF}^2+\overline{FM}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$

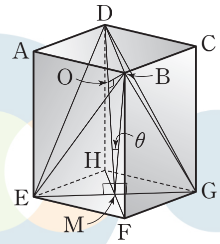
$\overline{DM}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HM}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$

이므로 $\angle\mathrm{BMD}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{11})^2+(\sqrt{11})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{11}\times\sqrt{11}}=\frac{7}{11}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{7}{11}\right)^2}=\frac{6\sqrt{2}}{11}$



따라서 $\overline{BO}=\overline{BM}\times\sin\theta=\sqrt{11}\times\frac{6\sqrt{2}}{11}=\frac{6\sqrt{22}}{11}$

답 ③

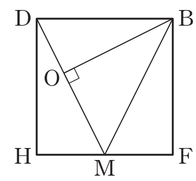
참고

삼각형 BDM에서

$\overline{DM}\times\overline{BO}=\overline{BD}\times\overline{DH}$이므로

$\sqrt{11}\times\overline{BO}=2\sqrt{2}\times3$

따라서 $\overline{BO}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}}=\frac{6\sqrt{22}}{11}$



3 $\overline{AD}=a$, $\overline{BD}=b$, $\overline{CD}=c$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$이라 하자.

직각삼각형 ABD에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$이므로

$10^2=a^2+b^2$

즉, $a^2+b^2=100$ …… ㉠

점 M은 직각삼각형 ABD의 외심이므로

$\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MD}$이다.

$\angle\mathrm{MDA}=\theta$라 하면

$\angle\mathrm{MAD}=\theta$,

$\angle\mathrm{MBD}=\angle\mathrm{MDB}=\frac{\pi}{2}-\theta$

이고 직각삼각형 ABD에서

$\sin\theta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{b}{10}$

$\cos\theta=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{a}{10}$

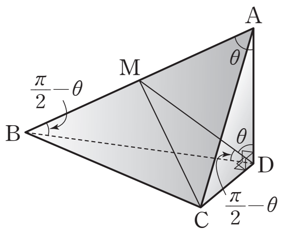
$\overline{CD}\perp\overline{AD}$, $\overline{CD}\perp\overline{BD}$에서 $\overline{CD}\perp$(평면 ABD)이므로

$\overline{CD}\perp\overline{MD}$

그러므로 이면각의 정의에 의하여

두 평면 ACD, MCD가 이루는 예각의 크기는 θ,

두 평면 BCD, MCD가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$



$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\times a\times c\times\frac{a}{10}=\frac{a^2c}{20}$

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times b\times c\times\frac{b}{10}=\frac{b^2c}{20}$

$S_2=3S_1$에서

$\frac{b^2c}{20}=3\times\frac{a^2c}{20}$

즉, $b^2=3a^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$4a^2=100$, $a=5$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=5$

답 ②

4 삼각형 PAB에서 직선 PM은 선분 AB의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$

삼각형 PCA에서 같은 방법으로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$

즉, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}$

그러므로 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\overline{\mathrm{GA}}=\overline{\mathrm{GB}}=\overline{\mathrm{GC}}$

즉, 점 G는 정삼각형 ABC의 무게중심이다.

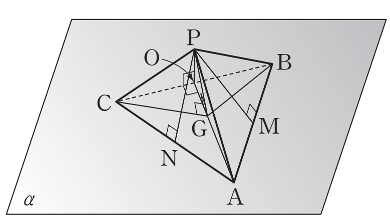
사면체 PABC의 부피는

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2\right)\times\overline{\mathrm{PG}}=3\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{PG}}$

이므로 $3\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{PG}}=9\sqrt{2}$에서

$\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{6}$

선분 BC의 중점을 O라 하면 $\overline{\mathrm{PG}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{GO}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$



직각삼각형 PGO에서

$\overline{\mathrm{PG}}=\sqrt{6}$,

$\overline{\mathrm{GO}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AO}}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

이므로

$\overline{\mathrm{PO}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PG}}^2+\overline{\mathrm{GO}}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}=3$

따라서 삼각형 PCB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{PO}}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$

답 ①

5 $\overline{\mathrm{AB}}=x$, $\overline{\mathrm{AC}}=y$ $(x>0,\ y>0)$이라 하면

직각삼각형 BAD에서

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

직각삼각형 CAE에서

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}y$

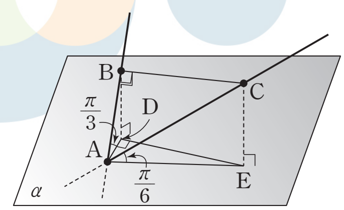
$\overline{\mathrm{BD}}\perp\alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이고, $\angle\mathrm{ADE}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}\perp$(평면 BDEC)

$\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

그러므로 사각형 BDEC는 직사각형이다.



$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CE}}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{2}y$, $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

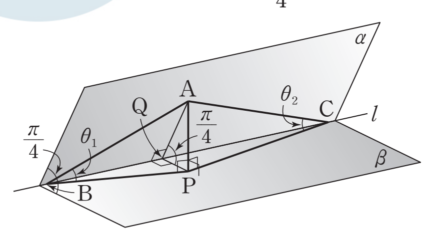
따라서 직각삼각형 CAB에서

$\cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ①

6 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 P, 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp l$이므로

이면각의 정의에 의하여 $\angle\mathrm{AQP}=\frac{\pi}{4}$이다.



$\overline{AP}=\overline{PQ}=x\ (x>0)$이라 하면 $\overline{AQ}=\sqrt{2}x$

직각삼각형 APB에서 $\angle ABP=\theta_1$이므로

$\tan\theta_1=\frac{1}{3}$에서

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{x}{\overline{BP}}=\frac{1}{3}$

$\overline{BP}=3x$

$\overline{BQ}=\sqrt{\overline{BP}^2-\overline{PQ}^2}$

$=\sqrt{(3x)^2-x^2}=2\sqrt{2}x$

직각삼각형 APC에서 $\angle ACP=\theta_2$이므로

$\tan\theta_2=\frac{\sqrt{19}}{19}$에서

$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{x}{\overline{CP}}=\frac{\sqrt{19}}{19}$

$\overline{CP}=\sqrt{19}x$

$\overline{CQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{PQ}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{19}x)^2-x^2}=3\sqrt{2}x$

한편, 직각삼각형 AQB에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+(2\sqrt{2}x)^2}=\sqrt{10}x$

이므로 $\overline{AB}=\sqrt{10}$에서

$\sqrt{10}x=\sqrt{10}$, $x=1$

즉, $\overline{AQ}=\sqrt{2}$, $\overline{BQ}=2\sqrt{2}$, $\overline{CQ}=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AQ}=\frac{1}{2}\times(\overline{BQ}+\overline{CQ})\times\overline{AQ}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})\times\sqrt{2}=5$

답 5

7 (i) 점 H_2가 직선 l 위에 있지 않는 경우

$\overline{PH_1}\perp l$, $\overline{PH_2}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여

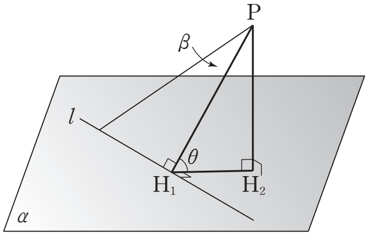
$\overline{H_2H_1}\perp l$

그러므로 이면각의 정의에 의하여

$\angle PH_1H_2=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

직각삼각형 PH_1H_2에서 $\cos\theta=\frac{\overline{H_1H_2}}{\overline{PH_1}}$

또한 $\overline{PH_1}>\overline{PH_2}$이므로 $\overline{PH_1}\neq\overline{PH_2}$



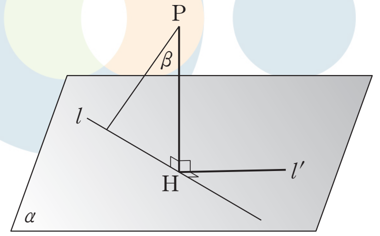
(ii) 점 H_2가 직선 l 위에 있는 경우

$\overline{PH_2}\perp l$이므로 두 점 H_1, H_2가 일치한다.

그 점을 H라 하면 $\overline{PH}\perp\alpha$이므로 직선 PH는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

평면 α 위의 직선 중 점 H를 지나고 직선 l과 수직인 직선을 l'이라 하면 $\overline{PH}\perp l'$이므로 이면각의 정의에 의하여 $\theta=\frac{\pi}{2}$

또한 $\overline{PH_1}=\overline{PH_2}$



ㄱ. $\overline{PH_1}\neq\overline{PH_2}$이므로 점 H_2는 직선 l 위에 있지 않다.

직각삼각형 PH_1H_2에서

$\overline{H_1H_2}=\sqrt{\overline{PH_1}^2-\overline{PH_2}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

(i)에서 $\cos\theta=\frac{\overline{H_1H_2}}{\overline{PH_1}}$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

그러므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$ (참)

ㄴ. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 (i)에서 $\cos\theta=\frac{\overline{H_1H_2}}{\overline{PH_1}}$ (참)

ㄷ. $\overline{PH_2}\perp\alpha$이므로 사면체 PABC의 부피는

$\frac{1}{3}\times3\times\overline{PH_2}=k$

즉, $\overline{PH_2}=k$

이때 $\overline{PH_1}=k$이면

$\overline{PH_1}=\overline{PH_2}$

이므로 (i), (ii)에서 $\theta=\frac{\pi}{2}$ (참)

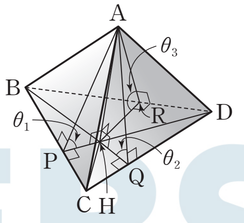
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 79쪽

1 19 **2** 47 **3** ④

1 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 H에서 세 직선 BC, CD, DB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라 하자.



$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DB}$이므로 $S_1 : S_2 : S_3=1 : 2 : 3$에서

$\overline{HP} : \overline{HQ} : \overline{HR}=1 : 2 : 3$

즉, $\overline{HP}=k$, $\overline{HQ}=2k$, $\overline{HR}=3k$ $(k>0)$

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{HP}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AP}\perp\overline{BC}$

그러므로 이면각의 정의에 의하여 직각삼각형 APH에서

$$\cos\theta_1=\frac{\overline{HP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{HP}}{\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HP}^2}}$$

$\overline{AH}=h$ $(h>0)$이라 하면

$$\cos\theta_1=\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

같은 방법으로

$$\cos\theta_2=\frac{\overline{HQ}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{HQ}}{\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HQ}^2}}=\frac{2k}{\sqrt{h^2+(2k)^2}}=\frac{2k}{\sqrt{h^2+4k^2}}$$

$$\cos\theta_3=\frac{\overline{HR}}{\overline{AR}}=\frac{\overline{HR}}{\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HR}^2}}=\frac{3k}{\sqrt{h^2+(3k)^2}}=\frac{3k}{\sqrt{h^2+9k^2}}$$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta_1}+\dfrac{1}{\cos^2\theta_2}=\dfrac{13}{4}$에서

$$\left(\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{k}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{h^2+4k^2}}{2k}\right)^2=\left(\frac{h^2}{k^2}+1\right)+\left(\frac{h^2}{4k^2}+1\right)=\frac{5h^2}{4k^2}+2=\frac{13}{4}$$

$\dfrac{5h^2}{4k^2}=\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{h^2}{k^2}=1$, 즉 $h=k$

$$\cos\theta_3=\frac{3k}{\sqrt{h^2+9k^2}}=\frac{3k}{\sqrt{k^2+9k^2}}=\frac{3k}{\sqrt{10}k}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

이므로

$$\cos^2\theta_3=\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2=\frac{9}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=9$이므로

$p+q=10+9=19$

답 19

2 $\overline{IF}=x$ $(x\geq 0)$이라 하자.

두 직선 EI와 JP는 같은 평면 위에 있고 서로 만나지 않으므로 서로 평행하다.

같은 방법으로 두 직선 EJ와 IP는 서로 평행하다.

즉, 사각형 EIPJ는 평행사변형이므로

$\overline{PG}=\overline{IF}+\overline{JH}=x+1$

또한 $\angle EIP=\frac{\pi}{2}$이므로 사각형 EIPJ는 직사각형이다.

직각삼각형 PIE에서

$\overline{PE}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{GE}^2}=\sqrt{(x+1)^2+2^2}=\sqrt{x^2+2x+5}$

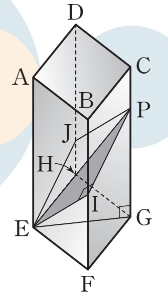
$\overline{PI}=\overline{JE}=\sqrt{\overline{JH}^2+\overline{HE}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{IE}=\sqrt{\overline{IF}^2+\overline{FE}^2}=\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}$

이므로 $\overline{PE}^2=\overline{PI}^2+\overline{IE}^2$에서

$x^2+2x+5=5+(x^2+4)$, $x=2$

즉, $\overline{IF}=2$, $\overline{IE}=2\sqrt{2}$



두 평면 EIJ와 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

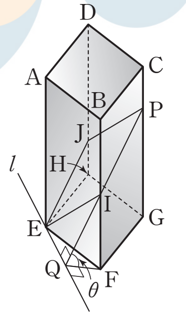
$\overline{IQ}\perp l$, $\overline{IF}\perp$(평면 EFGH)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{FQ}\perp l$

그러므로 이면각의 정의에 의하여 $\angle IQF=\theta$

$$\sin\theta=\frac{\overline{IF}}{\overline{IQ}}=\frac{2}{\overline{IQ}}$$

$$\overline{IQ}=\frac{2}{\sin\theta} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$



직사각형 EIPJ의 평면 EFGH 위로의 정사영은 마름모 EFGH이고 직사각형 EIPJ의 넓이를 S, 마름모 EFGH의 넓이를 S'이라 하면

$$\cos\theta=\frac{S'}{S}$$

이때

$$S=\overline{\mathrm{IE}}\times\overline{\mathrm{JE}}=2\sqrt{2}\times\sqrt{5}=2\sqrt{10}$$

$$S'=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)=2\sqrt{3}$$

이므로

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{30}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{70}}{10}$$

그러므로 ㉠에 의하여

$$\overline{\mathrm{IQ}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{70}}{10}}=\frac{2\sqrt{70}}{7}$$

$$\overline{\mathrm{IQ}}^2=\left(\frac{2\sqrt{70}}{7}\right)^2=\frac{40}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=40$이므로

$p+q=7+40=47$

답 47

다른 풀이

$\overline{\mathrm{IF}}=x\ (x\geq0)$이라 하자.

두 직선 EI와 JP는 같은 평면 위에 있고 서로 만나지 않으므로 서로 평행하다.

같은 방법으로 두 직선 EJ와 IP는 서로 평행하다.

즉, 사각형 EIPJ는 평행사변형이므로

$\overline{\mathrm{PG}}=\overline{\mathrm{IF}}+\overline{\mathrm{JH}}=x+1$

직각삼각형 PIE에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PE}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{PG}}^2+\overline{\mathrm{GE}}^2}\\&=\sqrt{(x+1)^2+2^2}=\sqrt{x^2+2x+5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PI}}&=\overline{\mathrm{JE}}\\&=\sqrt{\overline{\mathrm{JH}}^2+\overline{\mathrm{HE}}^2}\\&=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{IE}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{IF}}^2+\overline{\mathrm{FE}}^2}\\&=\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}\end{aligned}$$

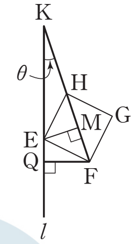
이므로 $\overline{\mathrm{PE}}^2=\overline{\mathrm{PI}}^2+\overline{\mathrm{IE}}^2$에서

$x^2+2x+5=5+(x^2+4)$

$x=2$

즉, $\overline{\mathrm{IF}}=2$

직선 IJ와 평면 EFGH의 교점을 K라 하면 평면 EIJ와 평면 EFGH의 교선 l은 두 점 K, E를 지난다.



직각삼각형 JHK와 직각삼각형 IFK는 서로 닮음이고, 닮음비는 1 : 2이다.

$\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{DB}}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{KH}}=2\sqrt{3}$이다.

선분 HF의 중점을 M이라 하면 선분 EM과 선분 HF는 서로 수직이다.

$\overline{\mathrm{EM}}=1$, $\overline{\mathrm{KM}}=3\sqrt{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{EK}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EM}}^2+\overline{\mathrm{KM}}^2}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$$

$\angle\mathrm{EKM}=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{EM}}}{\overline{\mathrm{EK}}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$\overline{\mathrm{IQ}}\perp l$, $\overline{\mathrm{IF}}\perp$(평면 EFGH)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FQ}}\perp l$

$\overline{\mathrm{KF}}=4\sqrt{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{KF}}\times\sin\theta=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$$

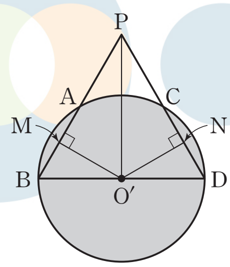
$\overline{\mathrm{IQ}}^2=\overline{\mathrm{IF}}^2+\overline{\mathrm{FQ}}^2$이므로

$$\overline{\mathrm{IQ}}^2=2^2+\left(\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2=4+\frac{12}{7}=\frac{40}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=40$이므로

$p+q=7+40=47$

3 네 점 A, B, C, D를 포함하는 밑면의 중심을 O′, 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 직선 AB, CD의 교점을 P라 하자. (단, $\overline{\mathrm{PA}}<\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{PC}}<\overline{\mathrm{PD}}$)



직각삼각형 O′MB에서

$\overline{\mathrm{O'B}}=2$

$$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times2=1$$

이므로

$\overline{O'M}=\sqrt{\overline{O'B}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

두 직각삼각형 O′MP, O′NP는 서로 합동이고

$\angle MPN=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle O'PM=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

직각삼각형 O′MP에서

$\overline{PM}=\sqrt{3}\times\overline{O'M}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$

$\overline{PO'}=2\times\overline{O'M}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

이므로

$\overline{PB}=\overline{PM}+\overline{BM}=3+1=4$

같은 방법으로 $\overline{PD}=4$

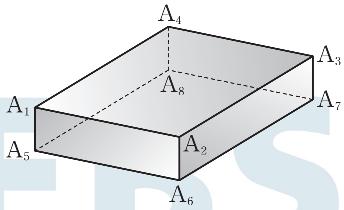
삼각형 PBD에서

$\overline{PB}=\overline{PD}=4,\ \angle BPD=\frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 PBD는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

그러므로 $\overline{BD}=4$이고, 세 점 B, O′, D는 한 직선 위에 있다.

그림과 같이 $\overline{A_1A_2}=2\sqrt{3}$, $\overline{A_1A_4}=4$, $\overline{A_1A_5}=1$인 직육면체 $A_1A_2A_3A_4-A_5A_6A_7A_8$이 있다.



이때 세 점 B, D, P를 각각 A_4, A_1, 선분 A_2A_3의 중점에 일치시키면 점 O는 선분 A_5A_8의 중점과 일치한다.

점 O′에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{BO'}\perp$(평면 O′OP), $\overline{O'H}\perp\overline{OP}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{BH}\perp\overline{OP}$

같은 방법으로 $\overline{DH}\perp\overline{OP}$

직각삼각형 O′OP에서 $\overline{O'O}=1$, $\overline{O'P}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{O'O}^2+\overline{O'P}^2}$

$\quad=\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$

$\overline{O'O}\times\overline{O'P}=\overline{OP}\times\overline{O'H}$에서

$1\times2\sqrt{3}=\sqrt{13}\times\overline{O'H}$

$\overline{O'H}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

직각삼각형 BO′H에서 $\overline{BO'}=2$이므로

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{BO'}^2+\overline{O'H}^2}$

$\quad=\sqrt{2^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{8}{\sqrt{13}}$

같은 방법으로 $\overline{DH}=\frac{8}{\sqrt{13}}$

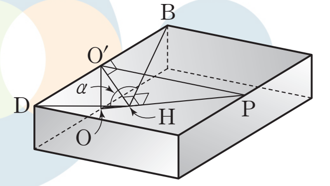
두 평면 OAB, OCD의 교선은 직선 OP이고,

두 평면 OAB, OCD가 이루는 예각의 크기는

두 평면 OBP, ODP가 이루는 예각의 크기와 같다.

$\angle BHD=\alpha$라 하면 삼각형 BDH에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{13}}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{13}}\right)^2-4^2}{2\times\frac{8}{\sqrt{13}}\times\frac{8}{\sqrt{13}}}=-\frac{5}{8}$$



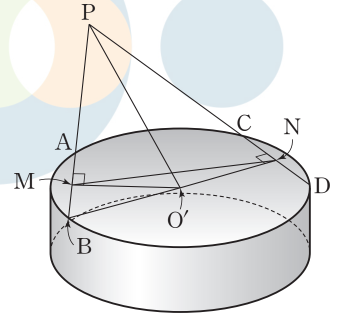
따라서 이면각의 정의에 의하여

$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{5}{8}$

답 ④

다른 풀이

네 점 A, B, C, D를 포함하는 밑면의 중심을 O′, 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 직선 AB, CD의 교점을 P라 하자. (단, $\overline{PA}<\overline{PB}$, $\overline{PC}<\overline{PD}$)



직각삼각형 O′MB에서

$\overline{O'B}=2$

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2=1$

이므로

$\overline{O'M}=\sqrt{\overline{O'B}^2-\overline{BM}^2}$

$\quad=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

두 직각삼각형 O′MP, O′NP는 서로 합동이고

$\angle MPN=\frac{\pi}{3}$이므로

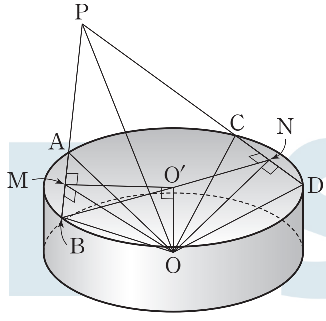
$\angle O'PM=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

직각삼각형 O′MP에서

$\overline{PM}=\sqrt{3}\times\overline{O'M}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$

같은 방법으로 $\overline{PN}=3$

삼각형 PMN에서 $\overline{PM}=\overline{PN}=3$, $\angle MPN=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 PMN은 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다.
그러므로 $\overline{MN}=3$



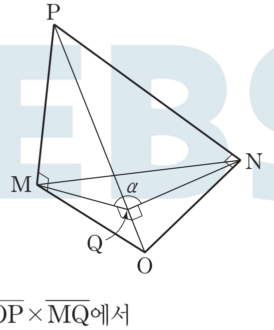
점 O에서 네 점 A, B, C, D를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발은 O′이므로 $\overline{OO'}\perp$(평면 ABCD)
$\overline{OO'}\perp$(평면 ABCD), $\overline{O'M}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{OM}\perp\overline{AB}$
같은 방법으로 $\overline{ON}\perp\overline{CD}$
직각삼각형 OO′M에서 $\overline{OO'}=1$, $\overline{O'M}=\sqrt{3}$이므로

$$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OO'}^2+\overline{O'M}^2}$$
$$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

같은 방법으로 $\overline{ON}=2$
직각삼각형 OMP에서

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{PM}^2}$$
$$=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

두 평면 OAB, OCD의 교선은 직선 OP이고, 두 평면 OAB, OCD가 이루는 예각의 크기는 두 평면 OMP, ONP가 이루는 예각의 크기와 같다.
두 직각삼각형 OMP, ONP는 서로 합동이므로 점 M에서 직선 OP에 내린 수선의 발과 점 N에서 직선 OP에 내린 수선의 발은 서로 일치한다. 이 점을 Q라 하자.



$\overline{PM}\times\overline{OM}=\overline{OP}\times\overline{MQ}$에서
$3\times 2=\sqrt{13}\times\overline{MQ}$이므로

$$\overline{MQ}=\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$$

같은 방법으로 $\overline{NQ}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$
$\angle MQN=\alpha$라 하면 삼각형 MQN에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)^2-3^2}{2\times\frac{6\sqrt{13}}{13}\times\frac{6\sqrt{13}}{13}}=\frac{-\frac{45}{13}}{\frac{72}{13}}=-\frac{5}{8}$$

따라서 이면각의 정의에 의하여

$$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{5}{8}$$

07 공간좌표

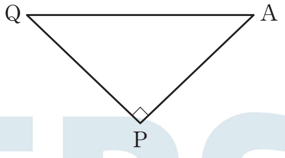
유제 본문 81~89쪽

1 ④	2 3	3 ②	4 ②	5 4	6 2
7 ④	8 ①	9 10	10 ①		

1 점 P의 좌표는 $(a,\ -1,\ -2)$, 점 Q의 좌표는 $(-a,\ 1,\ 2)$, $\angle PAQ=\frac{\pi}{2}$이다.
삼각형 AQP가 이등변삼각형이므로
$\overline{AP}=\overline{AQ}$
두 점 A, P의 x좌표가 서로 같으므로
$\overline{AP}=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$
두 점 A, Q의 y좌표와 z좌표가 각각 서로 같으므로
$\overline{AQ}=|-a-a|=2a$
따라서 $2a=2\sqrt{5}$이므로
$a=\sqrt{5}$

답 ④

2 점 P의 좌표는 $(1,\ 0,\ 0)$, 점 Q의 좌표는 $(1,\ -a,\ a)$이므로 세 점 A, P, Q의 x좌표는 모두 같다.
$\overline{AP}=\sqrt{(0-a)^2+(0-a)^2}=\sqrt{2}a$
$\overline{AQ}=\sqrt{(-a-a)^2+(a-a)^2}=2a$
$\overline{PQ}=\sqrt{(-a-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{2}a$
$\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$이므로 삼각형 AQP는 $\overline{AP}=\overline{PQ}$, $\angle APQ=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.



삼각형 AQP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a=a^2$
따라서 $a^2=9$이므로 $a=3$

답 3

3 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{a^2+29}$
$\overline{OB}=\sqrt{(-1)^2+4^2+(3-a)^2}=\sqrt{a^2-6a+26}$
$\overline{OA}=\overline{OB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2$이므로
$(\sqrt{a^2+29})^2=(\sqrt{a^2-6a+26})^2$
$a^2+29=a^2-6a+26$
따라서 $a=-\frac{1}{2}$

답 ②

4 $\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+\{0-(-1)\}^2+(3-4)^2}=\sqrt{3}$
$\overline{BC}=\sqrt{(4-2)^2+(a-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{a^2+13}$
$\overline{CA}=\sqrt{(3-4)^2+(-1-a)^2+(4-0)^2}=\sqrt{a^2+2a+18}$
삼각형 ABC가 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로
$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서
$(\sqrt{a^2+2a+18})^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{a^2+13})^2$
$a^2+2a+18=3+(a^2+13)$
$a^2+2a+18=a^2+16$
따라서 $a=-1$

답 ②

5 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{a+(-3)+1}{3},\ \frac{1+b+(-6)}{3},\ \frac{-2+5+c}{3}\right)$
즉, $\left(\frac{a-2}{3},\ \frac{b-5}{3},\ \frac{c+3}{3}\right)$
삼각형 ABC의 무게중심이 원점 O와 일치하므로
$\frac{a-2}{3}=0,\ \frac{b-5}{3}=0,\ \frac{c+3}{3}=0$
따라서 $a=2,\ b=5,\ c=-3$이므로
$a+b+c=2+5+(-3)=4$

답 4

6 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 P, 선분 AB를 $4:1$로 외분하는 점이 Q이므로 점 B는 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점이다.

그러므로 점 B의 좌표는
$\left(\frac{2\times5+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times1+1\times(-2)}{2+1},\ \frac{2\times(-3)+1\times0}{2+1}\right)$
즉, $B(4,\ 0,\ -2)$
따라서 $a=4,\ b=0,\ c=-2$이므로
$a+b+c=4+0+(-2)=2$

답 2

7 $x^2+y^2+z^2-2ax+2by-4cz-7=0$에서

$(x-a)^2+(y+b)^2+(z-2c)^2=a^2+b^2+4c^2+7$

이므로 구 S의 중심의 좌표는 $(a,\ -b,\ 2c)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+4c^2+7}$이다.

구 S의 중심의 좌표가 $(1,\ 2,\ 2)$이므로

$a=1,\ b=-2,\ c=1$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+4c^2+7}=\sqrt{1^2+(-2)^2+4\times1^2+7}$$
$$=\sqrt{16}=4$$

답 ④

8 선분 AB가 구 S의 지름과 같으므로 두 점 A, B는 구 S의 지름의 양 끝점이고, 선분 AB의 중점을 O라 하면 점 O는 구 S의 중심과 일치한다.

점 O의 좌표는

$$\left(\frac{a+(4-a)}{2},\ \frac{b+(2-b)}{2},\ \frac{c+(-2-c)}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{O}(2,\ 1,\ -1)$

그러므로 구 S의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$

점 $\mathrm{C}(4,\ 0,\ d)$가 구 S 위의 점이므로

$(4-2)^2+(0-1)^2+(d+1)^2=9$

$(d+1)^2=4$

$d>0$이므로 $d=1$

답 ①

9 구 S가 x축에 접하므로 $5=\sqrt{b^2+c^2}$

즉, $b^2+c^2=25$ …… ㉠

구 S가 z축에 접하므로 $5=\sqrt{a^2+b^2}$

즉, $a^2+b^2=25$ …… ㉡

㉡에서 $a<b$이고, a, b는 자연수이므로

$a=3,\ b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$4^2+c^2=25,\ c=3$

따라서 $a+b+c=3+4+3=10$

답 10

10 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-1)^2+(-b)^2=(a+2)^2$

즉, $(x-a)^2+(y-a-1)^2=a^2-b^2+4a+4$이므로

도형 C_1은 xy평면 위의 중심의 좌표가 $(a,\ a+1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2-b^2+4a+4}$인 원이다.

구 S가 yz평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은

$(-a)^2+(y-a-1)^2+(z-b)^2=(a+2)^2$

즉, $(y-a-1)^2+(z-b)^2=4a+4$이므로

도형 C_2는 yz평면 위의 중심의 좌표가 $(0,\ a+1,\ b)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{4a+4}$인 원이다.

구 S가 zx평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은

$(x-a)^2+(-a-1)^2+(z-b)^2=(a+2)^2$

즉, $(x-a)^2+(z-b)^2=2a+3$이므로

도형 C_3은 zx평면 위의 중심의 좌표가 $(a,\ 0,\ b)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2a+3}$인 원이다.

그러므로

$A_1=\pi\times(\sqrt{a^2-b^2+4a+4})^2=(a^2-b^2+4a+4)\pi$

$A_2=\pi\times(\sqrt{4a+4})^2=(4a+4)\pi$

$A_3=\pi\times(\sqrt{2a+3})^2=(2a+3)\pi$

$A_1=A_2$에서

$(a^2-b^2+4a+4)\pi=(4a+4)\pi$

즉, $a=b$ …… ㉠

$3A_2=5A_3$에서

$3\times(4a+4)\pi=5\times(2a+3)\pi$

즉, $a=\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=\frac{3}{2}$이므로

$a+b=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 90~91쪽

1 6	**2** 8	**3** ①	**4** ③	**5** ③	**6** 12
7 ③	**8** ⑤				

1 점 B의 좌표는 $(1,\ -2,\ -\sqrt{5})$, 점 C의 좌표는 $(1,\ 2,\ \sqrt{5})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-2-2)^2+(-\sqrt{5}-\sqrt{5})^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(1-1)^2+\{2-(-2)\}^2+\{\sqrt{5}-(-\sqrt{5})\}^2}=6$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2+(\sqrt{5}-\sqrt{5})^2}=2$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CA}}=\frac{1}{2}\times6\times2=6$

답 6

2 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-0)^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{6}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+(-2-2)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{6}$

$\overline{CA}=\sqrt{(2-0)^2+\{0-(-2)\}^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{6}$

이므로 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$인 정삼각형이다.

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2r$이므로

$\dfrac{2\sqrt{6}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2r$, $r=2\sqrt{2}$

따라서 $r^2=(2\sqrt{2})^2=8$

답 8

3 $\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-\sqrt{2})^2+(0-0)^2$

$=(1-a)^2+(-\sqrt{2}-b)^2+(2\sqrt{2}-0)^2$

즉, $b=-\sqrt{2}$이므로 점 C의 좌표는 $(a,\ -\sqrt{2},\ 0)$이다.

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(1-1)^2+\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^2+(0-2\sqrt{2})^2$

$=(a-1)^2+(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(0-0)^2$

$(a-1)^2=8$

$a>0$이므로 $a=1+2\sqrt{2}$

따라서

$a+b=(1+2\sqrt{2})+(-\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$

답 ①

4 $\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-0)^2+(5-1)^2}=6$

선분 AB를 1 : 5로 내분하는 점이 P, 선분 AB를 5 : 1로 내분하는 점이 Q이므로

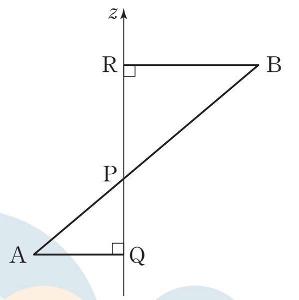
$\overline{AP}=\dfrac{1}{6}\times\overline{AB}=1$, $\overline{AQ}=\dfrac{5}{6}\times\overline{AB}=5$

따라서 $\overline{PQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}=5-1=4$

답 ③

5 점 A에서 z축에 내린 수선의 발을 Q, 점 B에서 z축에 내린 수선의 발을 R이라 하면

Q(0, 0, 1), R(0, 0, 6)



두 직각삼각형 AQP, BRP는 서로 닮음이고, 닮음비는

$\overline{AQ} : \overline{BR}=\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2+(1-1)^2} :$

$\sqrt{(0-c)^2+(0-d)^2+(6-6)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}$

$=\sqrt{4} : \sqrt{9}$

$=2 : 3$

그러므로 점 P는 선분 QR을 2 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 z좌표는

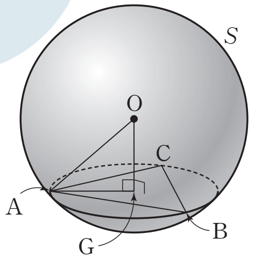
$\dfrac{2\times6+3\times1}{2+3}=\dfrac{15}{5}=3$

답 ③

6 구 S의 중심은 원점 O이고, 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.

점 $(2,\ \sqrt{3},\ 3)$을 G라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{OG}\perp$(평면 ABC)



$\overline{OG}=\sqrt{(2-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2+(3-0)^2}=4$

이므로 직각삼각형 OAG에서

$\overline{AG}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OG}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$

$\overline{AB}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=\overline{AG}$에서 $\overline{AB}=\sqrt{3}\times\overline{AG}$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{AB}^2=(2\sqrt{3})^2=12$

답 12

7 $x^2+y^2+z^2+2kx-4ky+4kz=0$에서

$(x+k)^2+(y-2k)^2+(z+2k)^2=(3k)^2$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(-k,\ 2k,\ -2k)$, 반지름의 길이는 $3k$이다.

점 $\mathrm{P}(k, -2k, 2k)$와 구의 중심인 점 $(-k, 2k, -2k)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-k-k)^2+\{2k-(-2k)\}^2+(-2k-2k)^2}=\sqrt{36k^2}$$
$$=6k$$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은

$6k-3k=3k$

따라서 $3k=6$이므로 $k=2$

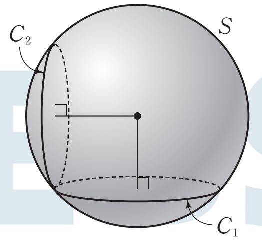
답 ③

8 구 S의 중심인 점 $(a, 4, 3)$에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a, 4, 0)$, zx평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a, 0, 3)$이므로 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각

$(a, 4, 0)$, $(a, 0, 3)$

이다.

이때 두 원 C_1, C_2가 한 점에서만 만나므로 그 교점의 좌표는 $(a, 0, 0)$이다.



점 $(a, 0, 0)$이 구 S 위의 점이므로

$(a-a)^2+(0-4)^2+(0-3)^2=r^2$

$r^2=25$, $r=5$

구 S: $(x-a)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=25$가 점 $(0, 2, 2)$를 지나므로

$(0-a)^2+(2-4)^2+(2-3)^2=25$

$a^2=20$, $a=2\sqrt{5}$

따라서 $ar=2\sqrt{5}\times5=10\sqrt{5}$

답 ⑤

Level **2** **기본 연습** 본문 92~93쪽

1 ⑤	**2** ②	**3** ③	**4** 6	**5** ④	**6** 24
7 ①	**8** ①				

1 점 P의 좌표를 $(a, b, 0)$이라 하면

$a^2+b^2=4$ …… ㉠

원 C의 중심이 원점 O이고, 두 점 P, Q가 원 C의 지름의 양 끝점이므로 점 Q의 좌표는 $(-a, -b, 0)$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(a-1)^2+(b-0)^2+(0-1)^2$

$=a^2+b^2-2a+2$

$\overline{\mathrm{BQ}}^2=(-a-1)^2+(-b-0)^2+\{0-(-1)\}^2$

$=a^2+b^2+2a+2$

이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}^2-\overline{\mathrm{AP}}^2=8$에서

$4a=8$, $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=0$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-2, 0, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{(-2-1)^2+(0-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$

답 ⑤

2 점 $\mathrm{G_1}$의 좌표는

$$\left(\frac{8+(-6)+(-2)}{3}, \frac{12+(-4)+(-8)}{3}, \frac{-8+2+6}{3}\right)$$

즉, $\mathrm{G_1}(0, 0, 0)$

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{8+(-6)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}, \frac{-8+2}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{P}(1, 4, -3)$

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3\times(-2)+1\times(-6)}{3+1}, \frac{3\times(-8)+1\times(-4)}{3+1}, \frac{3\times6+1\times2}{3+1}\right)$$

즉, $\mathrm{Q}(-3, -7, 5)$

점 R의 좌표는

$$\left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-8+12}{2}, \frac{6+(-8)}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{R}(3, 2, -1)$

점 $\mathrm{G_2}$의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-3)+3}{3}, \frac{4+(-7)+2}{3}, \frac{-3+5+(-1)}{3}\right)$$

즉, $\mathrm{G_2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

따라서

$$\overline{\mathrm{G_1G_2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

3 두 점 C, D를 각각 $\mathrm{C}(c, 0, 0)$, $\mathrm{D}(d, 0, 0)$ $(c>d)$라 하자.

조건 (가)에서 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서

$(c-5)^2+\{0-(2-a)\}^2+\{0-(2a-2)\}^2$

$=(c-5)^2+(0-a)^2+\{0-(4-2a)\}^2$ …… ㉠

$a=2$

즉, A(5, 0, 2), B(5, 2, 0)

조건 (나)에서 $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로 $\overline{AC}^2=\overline{BD}^2$에서

$(c-5)^2+(0-0)^2+(0-2)^2$

$=(d-5)^2+(0-2)^2+(0-0)^2$

$(c-5)^2=(d-5)^2$

$c>d$에서 $c\neq d$이므로

$c-5=-(d-5)$

$c+d=10$ …… ㉡

$\overline{AB}=\sqrt{(5-5)^2+(2-0)^2+(0-2)^2}$

$=2\sqrt{2}$

이므로 조건 (나)의 $\overline{AB}=\overline{CD}$에서

$\overline{CD}=2\sqrt{2}$

$c-d=2\sqrt{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$c=5+\sqrt{2}$, $d=5-\sqrt{2}$

즉, C$(5+\sqrt{2}, 0, 0)$, D$(5-\sqrt{2}, 0, 0)$

세 점 B, C, D는 xy평면 위의 점이고

$\overline{BC}=\sqrt{\{(5+\sqrt{2})-5\}^2+(0-2)^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{6}$

$\overline{BD}=\sqrt{\{(5-\sqrt{2})-5\}^2+(0-2)^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{6}$

이므로 삼각형 BCD는

$\overline{BC}=\overline{BD}=\sqrt{6}$, $\overline{CD}=2\sqrt{2}$

인 이등변삼각형이다.

그러므로 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$

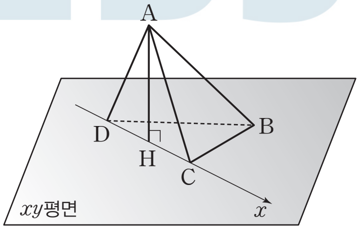
점 A(5, 0, 2)에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

H(5, 0, 0)이므로

$\overline{AH}=2$

따라서 사면체 ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$



답 ③

참고

$a=2$이면 ㉠은 c의 값에 관계없이 항상 성립하므로 x축 위의 모든 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$이다.

4 선분 BC의 중점을 M_1, 선분 EF의 중점을 M_2, 정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자.

조건 (가)에서 선분 PQ와 선분 AM_1의 교점은 G이다.

조건 (나)에서 삼각형 DEF의 무게중심 또한 G이고

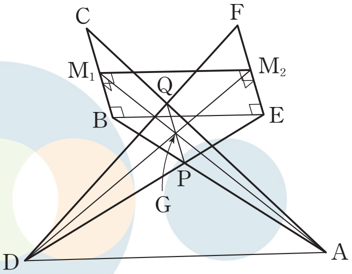
$\overline{GM_1}=\overline{GM_2}$, $\overline{GA}=\overline{GD}$, $\overline{GA}=2\overline{GM_1}$

즉, 두 삼각형 GM_1M_2, GAD는 서로 닮음이고, 닮음비는 1 : 2이다.

한편, 사각형 BEM_2M_1은 직사각형이므로

$\overline{M_1M_2}=\overline{BE}$

$\overline{BE}=3$이므로 $\overline{M_1M_2}=3$



따라서 $\overline{AD}=2\overline{M_1M_2}=2\times3=6$

답 6

참고

$\overline{PA}=\overline{PD}=\frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{PB}=\overline{PE}=\frac{1}{3}\overline{AB}$이므로

두 삼각형 PAD, PBE는 서로 닮음이고, 닮음비는 2 : 1이다.

따라서 $\overline{AD}=2\overline{BE}=2\times3=6$

5 구 S는 원점에서 xy평면과 접한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 OMA는

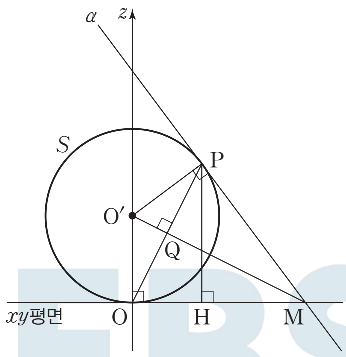
$\angle OMA=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\sqrt{2}\times\overline{OM}=2\sqrt{2}$

에서

$\overline{OM}=2$

구 S의 중심을 O′이라 하고 구 S를 평면 O′OM으로 자른 단면에서 두 선분 OP, O′M의 교점을 Q, 점 P에서 선분 OM에 내린 수선의 발을 H라 하자.



두 삼각형 O′OM, O′PM은 서로 합동이므로

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{O'M}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$

직각삼각형 O′OM에서

$\overline{\mathrm{O'O}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{O'M}}\times\overline{\mathrm{OQ}}$

이므로

$1\times2=\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{OP}}=2\times\overline{\mathrm{OQ}}=2\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{OH}}=x\ (0<x<2)$라 하면 $\overline{\mathrm{HM}}=2-x$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2=\overline{\mathrm{PM}}^2-\overline{\mathrm{HM}}^2$에서

$\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-x^2=2^2-(2-x)^2$, $x=\dfrac{4}{5}$

즉, $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{4}{5}$

직각삼각형 POH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{8}{5}$

따라서 점 P의 z좌표는 $\dfrac{8}{5}$

답 ④

6 구 S의 중심을 O라 하고, 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$, 선분 CD에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자.

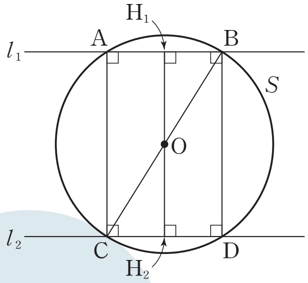
$\overline{\mathrm{OH_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{BH_1}}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{OH_2}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{CH_2}}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

이므로 사각형 ACDB는 직사각형이고 직사각형 ACDB의 넓이는 점 O가 평면 ACDB 위에 있을 때 최대이다.



이때

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{OH_1}}+\overline{\mathrm{OH_2}}$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

이므로 사각형 ACDB의 넓이의 최댓값은

$2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=24$

답 24

7 구 S와 평면 ABC가 만나서 생긴 원을 C, 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

원 C 위의 임의의 점 P에 대하여 삼각형 OHP는

$\angle\mathrm{OHP}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{HP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

$=\sqrt{7^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{49-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

즉, 점 H는 원 C의 중심과 일치한다.

점 H가 선분 AB 위에 있으므로 두 점 A, B는 원 C의 지름의 양 끝점이고, $\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$이다.

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{2}\times8\times6=24$

직각삼각형 ABC에서

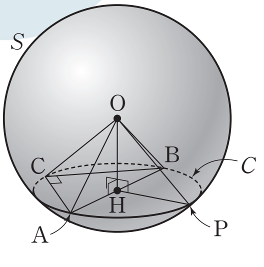
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

직각삼각형 OHA에서

$\overline{\mathrm{HA}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\times10=5$

이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{HA}}^2}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}$



따라서 사면체 OABC의 부피는

$\frac{1}{3}\times 24\times 2\sqrt{6}=16\sqrt{6}$

답 ①

8 구 S의 중심은 원점 O이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

점 B는 점 A를 원점 O에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 세 점 A, O, B는 한 직선 위에 있다.

직선 l_1이 구 S와 점 P에서만 만나므로 직선 l_1은 구 S와 점 P에서 접한다.

즉, $\overline{OP}\perp l_1$

$\overline{OA}=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}=3$

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 점 P가 나타내는 도형은 점 H_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{PH_1}$인 원이다.

$\overline{OA}\times\overline{PH_1}=\overline{OP}\times\overline{AP}$에서

$3\times\overline{PH_1}=\sqrt{5}\times 2$

$\overline{PH_1}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

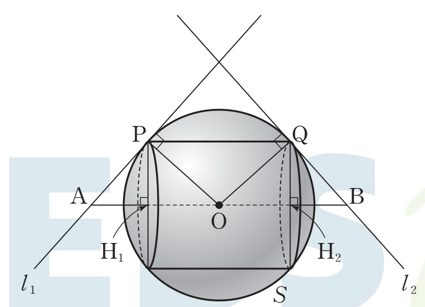
$\overline{OH_1}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH_1}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$

$\overline{OB}=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-0)^2+(-2-0)^2}=3$

이므로 점 Q에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H_2라 하면 같은 방법으로

$\overline{QH_2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$, $\overline{OH_2}=\frac{5}{3}$



그러므로

$M=\sqrt{\left(2\times\frac{5}{3}\right)^2+\left(2\times\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=2\sqrt{5}$

$m=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$

따라서 $M\times m=2\sqrt{5}\times\frac{10}{3}=\frac{20\sqrt{5}}{3}$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 94쪽

1 35 **2** ⑤ **3** ②

1 C$(-a,\ -1,\ 6)$, D$(-2,\ -b,\ c)$이므로 조건 (가)에서

$-a=-2,\ -1=-b$

즉, $a=2,\ b=1$이므로

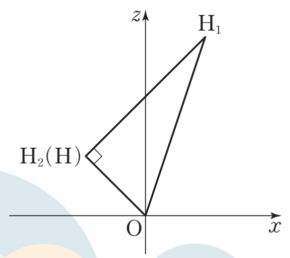
A$(2,\ 1,\ 6)$, B$(-2,\ 1,\ c)$, D$(-2,\ -1,\ c)$

점 A에서 zx평면에 내린 수선의 발을 $H_1(2,\ 0,\ 6)$,

점 B에서 zx평면에 내린 수선의 발을 $H_2(-2,\ 0,\ c)$라 하자.

두 점 B, D가 zx평면에 대하여 대칭이므로 점 H는 점 O에서 직선 H_1H_2에 내린 수선의 발과 같다.

이때 조건 (나)에서 점 H의 x좌표가 점 H_2의 x좌표와 같으므로 점 H는 점 H_2와 같다.



$\angle OH_2H_1=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 OH_2H_1에서

$\overline{OH_1}=\sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2+(6-0)^2}$

$=2\sqrt{10}$

$\overline{OH_2}=\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2+(c-0)^2}$

$=\sqrt{c^2+4}$

$\overline{H_1H_2}=\sqrt{(-2-2)^2+(0-0)^2+(c-6)^2}$

$=\sqrt{c^2-12c+52}$

이므로 $\overline{OH_1}^2=\overline{OH_2}^2+\overline{H_1H_2}^2$에서

$40=(c^2+4)+(c^2-12c+52)$

$c^2-6c+8=0$

$(c-2)(c-4)=0$

$-6<c<3$이므로

$c=2$

B$(-2,\ 1,\ 2)$, D$(-2,\ -1,\ 2)$, E$(2,\ -1,\ 6)$이므로

사각형 ABDE는

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(1-1)^2+(2-6)^2}$

$=4\sqrt{2}$

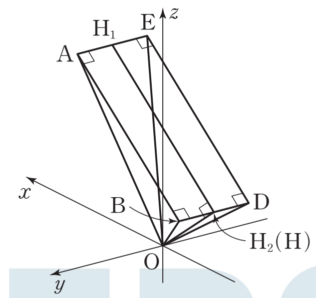
$\overline{AE}=\sqrt{(2-2)^2+(-1-1)^2+(6-6)^2}$

$=2$

인 직사각형이다.

즉, 사각형 ABDE의 넓이는

$4\sqrt{2}\times 2=8\sqrt{2}$



점 H의 좌표는 $(-2,\ 0,\ 2)$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$

그러므로 사각뿔 O$-$ABDE의 부피는

$\frac{1}{3}\times 8\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=\frac{32}{3}$

따라서 $p=3$, $q=32$이므로

$p+q=3+32=35$

답 35

2 ㄱ. 두 점 A, C가 yz평면에 대하여 대칭이고, 두 점 B, E는 yz평면 위의 점이므로 직선 l은 yz평면 위에 있다.

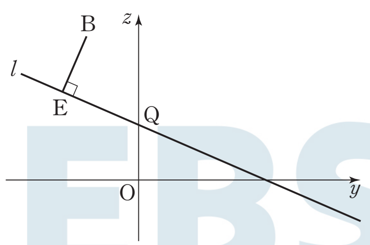
따라서 $\overline{PA}=\overline{PC}$ (참)

ㄴ. $C(-a,\ -5,\ 8)$, $D(0,\ -5,\ 8)$이다.

점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 0+1\times 0}{2+1},\ \frac{2\times(-5)+1\times(-2)}{2+1},\ \frac{2\times 8+1\times 14}{2+1}\right)$$

즉, $E(0,\ -4,\ 10)$



yz평면 위에서 직선 l은 점 E를 지나고 직선 BE에 수직인 직선이다. 직선 BE의 기울기는

$\frac{14-10}{-2-(-4)}=2$

이므로 직선 l의 방정식은

$z-10=-\frac{1}{2}\{y-(-4)\}$

즉, $l:\ z=-\frac{1}{2}y+8$

$y=0$일 때, $z=8$이므로 점 Q의 z좌표는 8이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ACB는 $\overline{BA}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이고, 점 E는 삼각형 ACB의 무게중심이다.

$\overline{RA}=\overline{RB}$에서 $\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{EC}$이므로 점 E는 삼각형 ACB의 외심이다.

즉, 삼각형 ACB는 정삼각형이다.

$\sqrt{3}\times\overline{AD}=\overline{BD}$에서

$\overline{AD}=a$

$\overline{BD}=\sqrt{(0-0)^2+\{-5-(-2)\}^2+(8-14)^2}=3\sqrt{5}$

이므로 $\sqrt{3}a=3\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{15}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄷ. ㄴ에서 $z=-\frac{1}{2}y+8$이므로 실수 t에 대하여 직선 l 위의 점 R을 $R(0,\ 2t,\ 8-t)$로 놓을 수 있다.

$\overline{RA}=\overline{RB}$에서 $\overline{RA}^2=\overline{RB}^2$이므로

$(a-0)^2+(-5-2t)^2+\{8-(8-t)\}^2$

$=(0-0)^2+(-2-2t)^2+\{14-(8-t)\}^2$

$a^2+(2t+5)^2+t^2=(2t+2)^2+(t+6)^2$

$a^2+5t^2+20t+25=5t^2+20t+40$

$a^2=15$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{15}$ (참)

3 구 S의 중심은 O이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

$\angle AOH_1=\alpha$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서

$\overline{AH_1}=\overline{OA}\sin\alpha=\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{2}$

$\overline{OH_1}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH_1}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

$\angle BOH_2=\beta$이므로 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$에서

$\overline{BH_2}=\overline{OB}\sin\beta=\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{2}$

$\overline{OH_2}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BH_2}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

$\angle H_1OH_2=\theta_1\ (0\le\theta_1\le\pi)$, $\angle AOB=\theta_2\ \left(0<\theta_2\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 조건 (나)에서

$\cos\theta_2=\frac{1}{5}$

$\sin\theta_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

삼각형 OH_1H_2에서 코사인법칙에 의하여

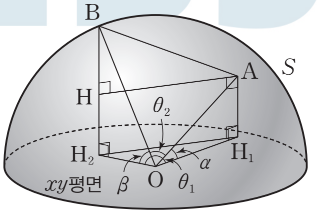
$\overline{H_1H_2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\theta_1}$

$\quad=\sqrt{10-8\cos\theta_1}$

점 A에서 직선 BH_2에 내린 수선의 발을 H라 하면 사각형 AHH_2H_1은 직사각형이므로

$\overline{AH}=\overline{H_1H_2}=\sqrt{10-8\cos\theta_1}$

$\overline{BH}=\overline{BH_2}-\overline{HH_2}=\overline{BH_2}-\overline{AH_1}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$



직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{BH}^2}$

$\quad=\sqrt{(\sqrt{10-8\cos\theta_1})^2+(\sqrt{2})^2}$

$\quad=\sqrt{12-8\cos\theta_1}$

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{12-8\cos\theta_1})^2$

$=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos\theta_2$

$5\cos\theta_2-2\cos\theta_1=2$

$\cos\theta_2=\frac{1}{5}$이므로

$\cos\theta_1=-\frac{1}{2}$

$\sin\theta_1=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영은 삼각형 OH_1H_2이다.

두 삼각형 OAB, OH_1H_2의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}$

$S_2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta=\frac{S_2}{S_1}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 ②

다른 풀이

구 S의 중심은 O이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

$\angle AOH_1=\alpha$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서

$\overline{AH_1}=\overline{OA}\sin\alpha=\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{2}$

$\overline{OH_1}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH_1}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

$\angle BOH_2=\beta$이므로 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$에서

$\overline{BH_2}=\overline{OB}\sin\beta=\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{2}$

$\overline{OH_2}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BH_2}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

$\cos(\angle AOB)=\frac{1}{5}$에서

$\sin(\angle AOB)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$이고

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\frac{1}{5}}=4$

점 A에서 직선 BH_2에 내린 수선의 발을 H라 하면 사각형 AHH_2H_1은 직사각형이므로

$\overline{AH}=\overline{H_1H_2}$

$\overline{AH_1}=\overline{HH_2}$

$\overline{BH}=\overline{BH_2}-\overline{HH_2}=\overline{BH_2}-\overline{AH_1}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}$

$\quad=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{14}$

즉, $\overline{H_1H_2}=\sqrt{14}$

그러므로 삼각형 OH_1H_2에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle H_1OH_2)=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{14})^2}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

$\sin(\angle H_1OH_2)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 OAB의 xy평면 위로의 정사영은 삼각형 OH_1H_2이다.

두 삼각형 OAB, OH_1H_2의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}$

$S_2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta=\frac{S_2}{S_1}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

memo