수능특강

수학영역 확률과 통계

정답과 풀이

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 ② 2 ④ 3 ① 4 ② 5 ③

1 서로 다른 6가지 색을 칠하는 원순열의 수는
$(6-1)!=5!=120$

답 ②

2 서로 이웃한 2개의 접시에 적혀 있는 수의 합이 4 이하가 될 수 있는 경우는 그 합이 3 또는 4인 경우이다.
서로 이웃한 2개의 접시에 적혀 있는 수의 합이 3인 경우는 1이 적힌 접시와 2가 적힌 접시가 서로 이웃하는 경우이고, 4인 경우는 1이 적힌 접시와 3이 적힌 접시가 서로 이웃하는 경우이다.
1이 적힌 접시와 2가 적힌 접시가 서로 이웃하는 경우의 수는
$(5-1)!\times 2=4!\times 2=48$
1이 적힌 접시와 3이 적힌 접시가 서로 이웃하는 경우의 수는
$(5-1)!\times 2=4!\times 2=48$
1이 적힌 접시와 2가 적힌 접시가 서로 이웃하고, 동시에 1이 적힌 접시와 3이 적힌 접시가 서로 이웃하는 경우의 수는
$(4-1)!\times 2=3!\times 2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$48+48-12=84$

답 ④

3 십만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 0을 제외한 2개이고, 만의 자리의 수, 천의 자리의 수, 백의 자리의 수, 십의 자리의 수가 될 수 있는 수는 각각 3개이고, 일의 자리의 수가 될 수 있는 수는 0이다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
$2\times {}_3\Pi_4\times 1=2\times 3^4=162$

답 ①

4 6개의 볼펜 중 5개를 택하는 경우는 검은색, 파란색, 빨간색 중 한 가지 색만 1개를 선택하면 되므로 이 경우의 수는 3이다. 1개를 선택한 색의 볼펜을 a, 나머지 두 가지 색의 볼펜을 각각 b, c라 하면 이 5개의 볼펜을 5명의 학생에게 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 a, b, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$3\times \dfrac{5!}{2!\times 2!}=90$

답 ②

5 A지점에서 Q지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 4칸 이동해야 하므로 이 경우의 수는
$\dfrac{9!}{5!\times 4!}=126$
이 중 A지점에서 P지점을 지나 Q지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 이동한 후 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 2칸 이동해야 하므로 이 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!\times 2!}\times \dfrac{5!}{3!\times 2!}=6\times 10=60$
그러므로 A지점에서 P지점은 지나지 않고 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$126-60=66$
Q지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 1칸 이동해야 하므로 이 경우의 수는
$\dfrac{4!}{3!}=4$
따라서 구하는 경우의 수는
$66\times 4=264$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 10~11쪽

1 ③ 2 ② 3 ⑤ 4 ① 5 ④
6 ④ 7 ⑤ 8 ⑤

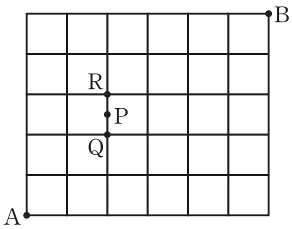
1 ${}_2\Pi_4+{}_3\Pi_2=2^4+3^2=16+9=25$

답 ③

2 n명의 청소년이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 원순열의 수는
$(n-1)!=6$
$n-1=3$
따라서 $n=4$

답 ②

3



P지점을 지나려면 그림의 Q지점과 R지점을 지나야 한다.
A지점에서 Q지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 이동해야 하므로 이 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

R지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 2칸 이동해야 하므로 이 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times2!}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times15=90$

답 ⑤

4 주사위의 눈의 수 중 15의 약수는 1, 3, 5이므로 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 4번 택하는 중복순열의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

답 ①

5 서로 다른 6가지 색 중 서로 다른 5가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

택한 5가지 색 중 내부의 정사각형에 칠할 색을 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

남은 4가지 색을 남은 4개의 영역에 칠하는 원순열의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times5\times6=180$

답 ④

다른 풀이

서로 다른 6가지 색 중 서로 다른 5가지 색을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_5={}_6C_1=6$

택한 5가지 색을 5개의 영역에 한 가지씩 칠하는 경우의 수는 5!이고, 그림의 도형을 회전하면 같아지는 것이 4가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$6\times\frac{5!}{4}=180$

6 X의 바로 양옆에 C와 T가 있도록 세 문자 X, C, T를 나열하는 경우의 수는 2이다.
세 문자 X, C, T를 나열한 것을 한 묶음 A라 하자. 7개의 문자 A, E, E, E, L, L, N을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times2!}=420$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times420=840$

답 ④

7 서로 다른 6개의 공을 서로 다른 2개의 상자에 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

이고, 6개의 공을 한 상자에 모두 넣는 경우의 수가 2이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$64-2=62$

답 ⑤

8 4개의 학급을 정사각형의 네 변에 배열하는 원순열의 수는

$(4-1)!=3!=6$

각 학급의 대표 2명이 각각 자리를 정하는 경우의 수는

$2^4=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times16=96$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 12~13쪽

1 ④ 2 ④ 3 ③ 4 ⑤ 5 ⑤
6 ② 7 ②

1 1명의 학생이 경제, 사회문화, 세계사, 한국지리 중 3개의 과목을 택하는 조합의 수는

${}_4C_3=4$

4명의 학생이 이 4개의 조합을 중복을 허락하여 택하는 중복순열의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

답 ④

2 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 항상 짝수가 되는 경우는 홀수가 적힌 의자끼리 서로 이웃하지 않는 경우이다.
짝수가 적힌 의자 4개를 배열하는 원순열의 수는
$(4-1)!=6$
나열된 짝수가 적힌 의자의 사이사이에 홀수가 적힌 의자를 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times24=144$

답 ④

3 자음을 먼저 나열한 뒤 나열된 자음의 사이사이 중 3개에 모음을 1개씩 나열하면 양 끝에는 자음이 나열되고, 모음끼리는 서로 이웃하지 않도록 나열된다.
문자 b, b, c, c, f를 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times2!}=30$
나열된 5개의 자음 사이사이 중 3개에 문자 a, a, e를 나열하는 경우의 수는
${}_4C_3\times\frac{3!}{2!}=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$30\times12=360$

답 ③

4 각 자리의 수의 곱이 3의 배수이지만 9의 배수가 아니려면 각 자리의 수 중 3 또는 6이 1개 있어야 한다. 즉, 2, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_3\Pi_4=81$
3 또는 6 중 하나를 택해 나열된 네 수의 사이사이와 양 끝 중 하나에 나열하는 경우의 수는
${}_2C_1\times5=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$81\times10=810$

답 ⑤

5 개인 식별 번호에 포함되는 숫자 1, 3, 5의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=6$ …… ㉠
조건 (나)에 의하여
$x+3y+5z\geq22$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $y+2z\geq8$
조건 (가)에 의하여 x, y, z가 자연수이므로 x, y, z는
$x=1$, $y=1$, $z=4$ 또는 $x=1$, $y=2$, $z=3$
(i) $x=1$, $y=1$, $z=4$인 경우
1, 3, 5, 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{4!}=30$
(ii) $x=1$, $y=2$, $z=3$인 경우
1, 3, 3, 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{2!\times3!}=60$
(i), (ii)에 의하여 구하는 개인 식별 번호의 개수는
$30+60=90$

답 ⑤

6 한 상자에 넣은 모든 공에 적힌 수의 곱이 12의 배수인 상자의 개수가 3이므로 3의 배수 3, 6, 9가 적힌 공은 3개의 상자에 하나씩 넣어야 한다. 12의 배수가 되려면 3, 9가 적힌 공을 넣은 상자에는 4 또는 8이 적힌 공을 하나씩 넣어야 하고, 6이 적힌 공을 넣은 상자에는 2가 적힌 공을 넣어야 한다.
즉, 2, 3, 4, 6, 8, 9가 적힌 공을 같은 종류의 상자 3개에 나누어 넣는 경우의 수는 2이다.
남은 공 3개를 이 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times27=54$

답 ②

7 그림을 회전하여 같아지는 것이 3개씩이므로 9명이 둘러앉는 경우의 수는
$\frac{9!}{3}$
어린이 5명 중 3명이 어떤 변의 3개의 의자에 모두 앉는 경우의 수는
${}_5C_3\times3!\times{}_3C_1\times\frac{1}{3}=60$
이고, 나머지 6자리에 어른 4명과 남은 어린이 2명이 앉는 경우의 수는 $6!$이므로 삼각형의 어떤 변의 3개의 의자에 모두 어린이만 앉도록 9명이 둘러앉는 경우의 수는

$60\times6!$

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{3}-60\times6!=108\times6!$

이므로

$k=108$

답 ②

Level

3 실력 완성

본문 14쪽

1 180 2 344 3 ②

1 주어진 조건을 만족시키도록 같은 종류의 바구니 4개에 공 8개를 나누어 담는 경우는 다음과 같다.

(i) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 홀수이고 두 공이 모두 흰 공인 경우

1, 3, 5가 적힌 흰 공 중에서 2개를 택해 한 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이다. 짝수가 적힌 공 3개를 남은 바구니 3개에 1개씩 담는 경우의 수는 1이다. 남은 공 중 홀수가 적힌 흰 공은 2가 적힌 검은 공만 담은 바구니에 담아야 하고, 홀수가 적힌 검은 공 2개를 1개의 공만 담은 두 바구니에 나누어 담는 경우의 수는 2이다.

따라서 (i)의 경우의 수는

$3\times1\times2=6$

(ii) 한 바구니에 담는 두 공에 적힌 수의 곱이 홀수이고 두 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개인 경우

1, 3, 5가 적힌 흰 공 중에서 1개와 1, 3이 적힌 검은 공 중에서 1개를 택해 한 바구니에 담는 경우의 수는 ${}_3C_1\times{}_2C_1=6$이다. 짝수가 적힌 공 3개를 남은 바구니 3개에 1개씩 담는 경우의 수는 1이다. 남은 공 중 홀수가 적힌 검은 공을 짝수가 적힌 1개의 흰 공만 담은 두 바구니 중 한 바구니에 담는 경우의 수는 2이고, 홀수가 적힌 흰 공 2개를 1개의 공만 담은 두 바구니에 나누어 담는 경우의 수는 2이다.

따라서 (ii)의 경우의 수는

$6\times1\times2\times2=24$

(i), (ii)에 의하여 같은 종류의 바구니 4개에 공 8개를 나누어 담는 경우의 수는

$6+24=30$

이고, 이 네 바구니를 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(4-1)!=6$

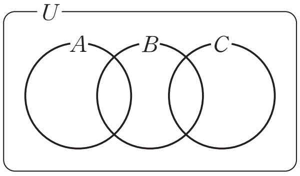
따라서 구하는 경우의 수는

$30\times6=180$

답 180

2 집합 $A\cup B$의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_4C_3=4$



집합 $A\cup B$의 세 원소는 각각 네 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$, $A^C\cap B\cap C^C$, $B\cap C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

집합 $(A\cup B)^C$의 원소는 두 집합 $B^C\cap C$, $(A\cup B\cup C)^C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_1=2^1=2$

따라서 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

$4\times64\times2=512$

(i) $A=\varnothing$인 경우

집합 $A\cup B$의 세 원소는 각각 두 집합 $A^C\cap B\cap C^C$, $B\cap C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

집합 $(A\cup B)^C$의 원소는 두 집합 $B^C\cap C$, $(A\cup B\cup C)^C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_1=2^1=2$

따라서 $A=\varnothing$이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

$4\times8\times2=64$

(ii) $C=\varnothing$인 경우

집합 $A\cup B$의 세 원소는 각각 세 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$, $A^C\cap B\cap C^C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_{3}\Pi_{3}=3^{3}=27$

집합 $(A\cup B)^{C}$의 원소는 집합 $(A\cup B\cup C)^{C}$의 원소이므로 $C=\varnothing$이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

$4\times 27=108$

(iii) $A=C=\varnothing$인 경우

집합 $A\cup B$의 원소는 모두 집합 $A^{C}\cap B\cap C^{C}$의 원소이고, 집합 $(A\cup B)^{C}$의 원소는 집합 $(A\cup B\cup C)^{C}$의 원소이므로 $A=C=\varnothing$이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C)의 개수는 4이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $A=\varnothing$ 또는 $C=\varnothing$이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

$64+108-4=168$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B, C)의 개수는

$512-168=344$

답 344

3 서로 이웃한 카드에 적힌 두 수의 최대공약수가 5의 약수가 되려면 2, 4, 6이 적힌 카드는 서로 이웃하면 안 되고, 3, 6이 적힌 카드도 서로 이웃하면 안 된다. 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열한 후 2, 4, 6이 적힌 카드를 나열할 때, 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하는 경우

3이 적힌 2장의 카드를 한 묶음으로 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times 2!}=30$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 3개의 자리를 제외한 4개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고, 3이 적힌 두 카드 사이에 2, 4가 적힌 카드 중 하나를 나열하고 남은 4개의 자리 중 3개의 자리에 남은 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}\times 2\times {}_{4}C_{3}\times \dfrac{3!}{2!}=144$

따라서 (i)의 경우의 수는

$30\times 144=4320$

(ii) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 경우

1, 5가 적힌 카드를 나열하고, 나열한 카드 사이사이 중 2개의 자리에 3이 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times 2!}\times {}_{5}C_{2}=60$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 3개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고, 6이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 5개의 자리 중 4개의 자리에 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}\times {}_{5}C_{4}\times \dfrac{4!}{2!\times 2!}=90$

따라서 (ii)의 경우의 수는

$60\times 90=5400$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4320+5400=9720$

답 ②

02 중복조합과 이항정리

유제				본문 17~23쪽
1 ①	2 ②	3 ①	4 ④	5 ③
6 ②	7 ②			

1 각 학생에게 공책을 1권씩 먼저 나누어 준 후 남은 공책 5권을 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$
\begin{aligned}
{}_4H_5&={}_{4+5-1}C_5\\
&={}_8C_5={}_8C_3\\
&=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56
\end{aligned}
$$

답 ①

2 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 값을 정하는 경우의 수는 3부터 8까지의 자연수 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$
\begin{aligned}
{}_6H_3&={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3\\
&=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56
\end{aligned}
$$

이때 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{CA}$

를 만족시켜야 한다.

$\overline{AB}+\overline{BC}\le\overline{CA}$인 경우는

$\overline{AB}=\overline{BC}=3$일 때 $6\le\overline{CA}\le8$이므로 3가지,

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$일 때 $7\le\overline{CA}\le8$이므로 2가지,

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$일 때 $8\le\overline{CA}\le8$이므로 1가지,

$\overline{AB}=\overline{BC}=4$일 때 $8\le\overline{CA}\le8$이므로 1가지

이므로 이 경우의 수는

$3+2+1+1=7$

따라서 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 개수는

$56-7=49$

답 ②

3 밤빵, 팥빵, 크림빵을 선택하는 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=6$ (a, b, c는 5 이하의 음이 아닌 정수)

를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $a+b+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수인 ${}_3H_6$에서 a, b, c 중 하나가 6인 경우의 수 3을 빼면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$
\begin{aligned}
{}_3H_6-3&={}_{3+6-1}C_6-3\\
&={}_8C_6-3\\
&={}_8C_2-3\\
&=\frac{8\times7}{2\times1}-3\\
&=28-3=25
\end{aligned}
$$

답 ①

4 ${}_4C_0-{}_4C_1\times5+{}_4C_2\times5^2-{}_4C_3\times5^3+{}_4C_4\times5^4$

$=\{1+(-5)\}^4$

$=4^4$

$=256$

답 ④

5 $\left(ax-\dfrac{4}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(ax)^{6-r}\left(-\dfrac{4}{x}\right)^r={}_6C_r\times a^{6-r}(-4)^r\times x^{6-2r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

x^2의 계수는 $6-2r=2$, $r=2$일 때

${}_6C_2\times a^4\times(-4)^2=15$

$16a^4=1$

$(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)=0$

따라서 양수 a의 값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 ③

6 ${}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6$

$={}_7C_0+{}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+{}_7C_4+{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7-{}_7C_0-{}_7C_7$

$=2^7-2$

$=128-2$

$=126$

답 ②

7
$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{9}{}_{a_n}C_{n-1}&={}_8C_0+{}_9C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+\cdots+{}_8C_6+{}_9C_7+{}_8C_8\\
&=({}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8)\\
&\quad+({}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7)\\
&=({}_8C_0+{}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8)\\
&\quad+({}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9-{}_9C_9)
\end{aligned}
$$

$=2^{8-1}+2^{9-1}-1$
$=128+256-1$
$=383$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 24~25쪽

1 ③	2 ④	3 ④	4 ②	5 ③
6 ②	7 ①	8 ①		

1 다항식 $(x-2)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r x^{6-r}(-2)^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 6)$
x^2의 계수는 $r=4$일 때
${}_6C_4\times(-2)^4=15\times16=240$

답 ③

2 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5$
$={}_8C_5={}_8C_3$
$=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

답 ④

3 ${}_{10}C_1+{}_{10}C_3+{}_{10}C_5+{}_{10}C_7+{}_{10}C_9$
$=2^{10-1}$
$=512$

답 ④

4 ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3$
$={}_6C_3$
$=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

답 ②

5 감자전 1개를 먼저 택한 후 서로 다른 5종류의 음식 중에서 4개의 음식을 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_4={}_{5+4-1}C_4={}_8C_4$
$=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

답 ③

6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}{}_6C_{n-1}$
$={}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+\cdots+{}_6C_6$
$=2^6$
$=64$

답 ②

7 각 상자에 사과를 6개씩 먼저 나누어 넣은 후 남은 사과 4개를 서로 다른 7개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 7개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_7H_4={}_{7+4-1}C_4$
$={}_{10}C_4$
$=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

답 ①

8 다항식 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 세 문자 a, b, c 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5$
$={}_7C_5={}_7C_2$
$=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 26~27쪽

1 ②	2 ①	3 ②	4 ⑤	5 146
6 ⑤	7 260	8 ④		

1 9명의 학생 중에서 n명을 택하는 경우의 수는

$f(n)={}_9C_n$

$f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)$

$={}_9C_5+{}_9C_6+{}_9C_7+{}_9C_8+{}_9C_9$

$={}_9C_5+{}_9C_3+{}_9C_7+{}_9C_1+{}_9C_9$

$={}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9$

$=2^{9-1}$

$=256$

답 ②

2 세 종류의 꽃의 개수를 각각 a, b, c라 하면 구하는 경우의 수는 방정식

$a+b+c=10$

을 만족시키는 7 이하의 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같다.

$a+b+c=10$에서

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$ (a', b', c'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라 하면

$a'+b'+c'=7$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $a'+b'+c'=7$을 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로

${}_3H_7-3={}_{3+7-1}C_7-3$

$={}_9C_7-3$

$={}_9C_2-3$

$=\dfrac{9\times8}{2}-3=33$

답 ①

3 $\left(3x+\dfrac{a}{2x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(3x)^{5-r}\left(\dfrac{a}{2x}\right)^r={}_5C_r\times3^{5-r}\times\left(\dfrac{a}{2}\right)^r\times x^{5-2r}$

$(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

x^3의 계수는 $r=1$일 때

${}_5C_1\times3^4\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{405}{2}a$

이고, x의 계수는 $r=2$일 때

${}_5C_2\times3^3\times\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{135}{2}a^2$

이므로

$\dfrac{405}{2}a>\dfrac{135}{2}a^2$

$a(a-3)<0$

$0<a<3$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2이므로 개수는 2이다.

답 ②

4 x_1, x_2는 자연수이고 $x_1\le x_2\le4$이므로

x_1, x_2를 정하는 경우의 수는 4 이하의 자연수 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2$

$={}_5C_2$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}$

$=10$

y_1, y_2는 자연수이고 $y_1\le y_2\le6$이므로

y_1, y_2를 정하는 경우의 수는 6 이하의 자연수 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2$

$={}_7C_2$

$=\dfrac{7\times6}{2\times1}$

$=21$

이때 두 점 A, B가 서로 같으면 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$이므로 이 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_6C_1=24$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$10\times21-24=186$

답 ⑤

5 조건 (가)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$

$1\le x^2-3\le6$을 만족시키는 자연수 x는 2 또는 3이므로

$f(2)=1$ 또는 $f(3)=6$이다.

(i) $f(2)=1$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이고, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$은 6 이하의 자연수이므로 이 경우 함수 f의 개수는

${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4$

$={}_9C_4$

$=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

(ii) $f(3)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$는 6 이하의 자연수이고,

$f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=6$이므로 이 경우 함수 f의 개수는

$${}_6\mathrm{H}_2={}_{6+2-1}\mathrm{C}_2$$
$$={}_7\mathrm{C}_2$$
$$=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

(iii) $f(2)=1$, $f(3)=6$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이고, $f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=6$이므로 이 경우 함수 f의 개수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$126+21-1=146$

답 146

6 서로 다른 종류의 선물 상자 5개에 담는 쿠키의 개수를 각각 a, b, c, d, e라 하면

$a+b+c+d+e=26$

(a, b, c, d, e는 2 이상 6 이하의 자연수)

$a=a_1+2$, $b=b_1+2$, $c=c_1+2$, $d=d_1+2$, $e=e_1+2$

라 하면

$(a_1+2)+(b_1+2)+(c_1+2)+(d_1+2)+(e_1+2)=26$

$a_1+b_1+c_1+d_1+e_1=16$

(a_1, b_1, c_1, d_1, e_1은 4 이하의 음이 아닌 정수)

또 $a_1=4-a_2$, $b_1=4-b_2$, $c_1=4-c_2$, $d_1=4-d_2$, $e_1=4-e_2$라 하면

$(4-a_2)+(4-b_2)+(4-c_2)+(4-d_2)+(4-e_2)=16$

$a_2+b_2+c_2+d_2+e_2=4$

(a_2, b_2, c_2, d_2, e_2는 4 이하의 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 경우의 수는 순서쌍 $(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ e_2)$의 개수와 같으므로

$${}_5\mathrm{H}_4={}_{5+4-1}\mathrm{C}_4$$
$$={}_8\mathrm{C}_4$$
$$=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

답 ⑤

7 $x_1\times x_5=8$을 만족시키는 정수 x_1은

-8, -4, 1, 2

(i) $x_1=-8$ 또는 $x_1=1$인 경우

$x_1=-8$이면 $x_5=-1$이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $-8\le x_2\le x_3\le x_4\le -1$을 만족시키는 정수 x_2, x_3, x_4의 순서쌍 $(x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수와 같다.

$${}_8\mathrm{H}_3={}_{8+3-1}\mathrm{C}_3$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

$x_1=1$이면 $x_5=8$이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $1\le x_2\le x_3\le x_4\le 8$을 만족시키는 정수 x_2, x_3, x_4의 순서쌍 $(x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수와 같다.

${}_8\mathrm{H}_3=120$

따라서 $x_1=-8$ 또는 $x_1=1$인 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는

$120+120=240$

(ii) $x_1=-4$ 또는 $x_1=2$인 경우

$x_1=-4$이면 $x_5=-2$이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $-4\le x_2\le x_3\le x_4\le -2$를 만족시키는 정수 x_2, x_3, x_4의 순서쌍 $(x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수와 같다.

$${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3$$
$$={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

$x_1=2$이면 $x_5=4$이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는 $2\le x_2\le x_3\le x_4\le 4$를 만족시키는 정수 x_2, x_3, x_4의 순서쌍 $(x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수와 같다.

${}_3\mathrm{H}_3=10$

따라서 $x_1=-4$ 또는 $x_1=2$인 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는

$10+10=20$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$의 개수는

$240+20=260$

답 260

8 다항식 $P(x)=(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}a^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

x^3의 계수는 $n-r=3$일 때

${}_n\mathrm{C}_{n-3}\times a^{n-3}={}_n\mathrm{C}_3\times a^{n-3}$

이고, x^4의 계수는 $n-r=4$일 때

${}_n\mathrm{C}_{n-4}\times a^{n-4}={}_n\mathrm{C}_4\times a^{n-4}$

이므로

$${}_n\mathrm{C}_3\times a^{n-3}=\frac{4}{5}\times{}_n\mathrm{C}_4\times a^{n-4}$$

$$a=\frac{4}{5}\times\frac{n-3}{4}$$

$5a=n-3$ $\cdots\cdots$ ㉠

다항식 $P(2x)=(2x+a)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_s(2x)^{n-s}a^s$ $(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

x^3의 계수는 $n-s=3$일 때

${}_{n}C_{n-3}\times2^3\times a^{n-3}=8\times{}_{n}C_3\times a^{n-3}$

x^5의 계수는 $n-s=5$일 때

${}_{n}C_{n-5}\times2^5\times a^{n-5}=32\times{}_{n}C_5\times a^{n-5}$

$8\times{}_{n}C_3\times a^{n-3}=\frac{1}{4}\times32\times{}_{n}C_5\times a^{n-5}$

$a^2=\frac{(n-3)(n-4)}{5\times4}$

$20a^2=(n-3)(n-4)$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $n=8$

따라서 $a+n=9$

답 ④

Level

3 실력 완성

본문 28쪽

1 35 2 ① 3 688

1 $b\times c\times d$가 홀수이므로 b, c, d는 모두 홀수이고,

$a=d-b-c$에서 자연수 a도 홀수이다.

$a+b+c=d$에서

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$이라 하면

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)=2d'+1$

$a'+b'+c'=d'-1$

(a', b', c', d'은 5 이하의 음이 아닌 정수)

이때 $d'-1\geq0$이므로 d'은 $1\leq d'\leq5$인 자연수이다.

순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $a'+b'+c'=d'-1$을 만족시키는 5 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

$\sum_{d'=1}^{5}{}_{3}H_{d'-1}$

$={}_{3}H_0+{}_{3}H_1+{}_{3}H_2+{}_{3}H_3+{}_{3}H_4$

$={}_{2}C_0+{}_{3}C_1+{}_{4}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$

$={}_{3}C_0+{}_{3}C_1+{}_{4}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$

$={}_{4}C_1+{}_{4}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$

$={}_{5}C_2+{}_{5}C_3+{}_{6}C_4$

$={}_{6}C_3+{}_{6}C_4$

$={}_{7}C_4={}_{7}C_3$

$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$

$=35$

답 35

2 조건 (가)에 의하여 5 이하의 자연수 x에 대하여

$f(x)+2\leq f(x+1)$임을 알 수 있다.

$f(2)=f(1)+2+a$,

$f(3)=f(2)+2+b=f(1)+4+a+b$,

$f(4)=f(3)+2+c=f(1)+6+a+b+c$,

$f(5)=f(4)+2+d=f(1)+8+a+b+c+d$,

$f(6)=f(5)+2+e=f(1)+10+a+b+c+d+e$

(a, b, c, d, e는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

$f(6)=f(3)+10$에서

$f(1)+10+a+b+c+d+e=\{f(1)+4+a+b\}+10$

$c+d+e=4$ (c, d, e는 음이 아닌 정수)

이므로 c, d, e를 정하는 경우의 수는 ${}_{3}H_4$이다.

$f(1)\geq-9$이므로 $p=f(1)+9$라 하면 p는 음이 아닌 정수이다.

$f(6)=(p+1)+a+b+4\leq9$에서

$p+a+b\leq4$

$p+a+b+q=4$ (q는 음이 아닌 정수)

이므로 p, a, b, q를 정하는 경우의 수는 ${}_{4}H_4$이다.

따라서 a, b, c, d, e, p, q가 정해지면 함숫값이 모두 정해지므로 구하는 함수의 개수는

${}_{3}H_4\times{}_{4}H_4={}_{6}C_4\times{}_{7}C_4$

$={}_{6}C_2\times{}_{7}C_3$

$=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$

$=15\times35$

$=525$

답 ①

3 파란색 볼펜을 넣는 필통을 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_1=4$

파란색 볼펜을 넣지 않는 3개의 필통에 검은색 볼펜을 1개씩 넣고, 남은 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개를 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.

검은색 볼펜 2개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

${}_{4}H_2={}_{4+2-1}C_2={}_{5}C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

빨간색 볼펜 3개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

${}_{4}H_3={}_{4+3-1}C_3={}_{6}C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이때 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개 중 4개 또는 5개의 볼펜을 1개의 필통에 넣으면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

4개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우는 함께 넣을 볼펜 4개를 택하는 경우의 수는 2, 이 4개의 볼펜과 남은 1개의 볼펜을 넣을 필통을 택하는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$이므로 4개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우의 수는

$2\times12=24$

5개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우는 볼펜 5개를 넣을 필통을 택하면 되므로 경우의 수는

${}_4C_1=4$

즉, 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

$10\times20-(24+4)=172$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times172=688$

답 688

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 31~37쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ③ 4 ③ 5 ②
6 ⑤ 7 ⑤

1 두 사건 A와 B^C이 서로 배반사건이려면 $A\cap B^C=\varnothing$이어야 한다.

$A\subset B\subset S$이어야 하므로 집합 B는 집합 A를 포함하는 집합 S의 부분집합이다.

표본공간 S와 사건 A에 대하여

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{1, 3, 5, 7\}$

이므로 구하는 사건 B의 개수는 2, 4, 6을 각각 두 집합 B 또는 B^C에 포함시키는 경우의 수와 같다.

따라서 사건 B의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

답 ③

2 이 시행의 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

이고,

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{4, 8\}$

$A\cap B=\{3, 5, 7\}$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

$B\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 B와 C는 서로 배반사건이다.

$C\cap A=\varnothing$이므로 두 사건 C와 A는 서로 배반사건이다.

따라서 서로 배반사건인 것은 B와 C, C와 A이다.

답 ⑤

3 11명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_{11}C_4=\dfrac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$

여학생 5명, 남학생 6명 중에서 여학생 1명, 남학생 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_6C_3=5\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=100$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{100}{330}=\dfrac{10}{33}$

답 ③

4 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$6^2=36$

원의 중심 $(a,\ b)$와 직선 $4x+3y-3a=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|4a+3b-3a|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{|a+3b|}{5}$

직선 $y=-\dfrac{4}{3}x+a$가 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=9$와 만나려면

$\dfrac{|a+3b|}{5}\le 3$

이어야 한다. 즉, $a+3b\le 15$

$b=1$일 때 $a\le 12$

$b=2$일 때 $a\le 9$

$b=3$일 때 $a\le 6$

$b=4$일 때 $a\le 3$

$b\ge 5$일 때 자연수 a가 존재하지 않는다.

조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$6+6+6+3=21$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$

답 ③

5 만들 수 있는 모든 세 자리의 자연수의 개수는

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

만든 수가 홀수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 홀수이고 3의 배수인 사건이다.

만든 수가 홀수이려면 일의 자리의 수가 홀수이어야 하므로 그 개수는

$3\times{}_4\mathrm{P}_2=3\times4\times3=36$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{36}{60}=\dfrac{3}{5}$

만든 수가 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 하므로 각 자리의 수는

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5

이고 그 개수는

$3!+3!+3!+3!=24$

그러므로 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{24}{60}=\dfrac{2}{5}$

만든 수가 홀수이고 3의 배수이려면 각 자리의 수는

1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4 또는 3, 4, 5

이고 그 개수는 $2\times2!+3\times2!+1\times2!+2\times2!=16$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{16}{60}=\dfrac{4}{15}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{15}=\dfrac{11}{15}$$

답 ②

6 1부터 12까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개의 수를 선택하는 경우의 수는

${}_{12}\mathrm{C}_2=\dfrac{12\times11}{2\times1}=66$

선택된 2개의 수 중 적어도 하나가 8 이상의 짝수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 선택된 2개의 수가 모두 8 미만의 자연수 또는 8 이상의 홀수인 사건이다.

8 미만의 자연수 또는 8 이상의 홀수 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{36}{66}=\dfrac{6}{11}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{6}{11}=\dfrac{5}{11}$

답 ⑤

7 22명의 학생 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_{22}\mathrm{C}_3=\dfrac{22\times21\times20}{3\times2\times1}=1540$

적어도 한 명이 독서를 선택한 학생인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 선택한 3명이 모두 문학 또는 언어와 매체를 선택한 학생인 사건이다.

문학 또는 언어와 매체를 선택한 12명의 학생 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_{12}\mathrm{C}_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{220}{1540}=\dfrac{1}{7}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$

답 ⑤

Level **1** **기초 연습** 본문 38~39쪽

1 ③	2 ③	3 ④	4 ④	5 ②
6 ②	7 ⑤	8 ④		

1 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6^2=36$

$|2a-b|=a$에서 $2a-b=a$ 또는 $-2a+b=a$

즉, $a=b$ 또는 $3a=b$

$a=b$인 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 6

$3a=b$인 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 2

따라서 구하는 확률은

$\frac{6+2}{36}=\frac{2}{9}$

답 ③

2 8병의 음료 중 3병의 음료를 동시에 택하는 경우의 수는

${}_8C_3$

택한 3병의 음료 중 이온 음료가 2병인 경우의 수는 서로 다른 탄산 음료 5병 중에서 1병을 택하고, 서로 다른 이온 음료 3병 중에서 2병을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_1\times{}_3C_2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_5C_1\times{}_3C_2}{{}_8C_3}=\frac{5\times3}{56}=\frac{15}{56}$

답 ③

3 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+P(B)$

따라서 $P(B)=\frac{7}{12}$

답 ④

4 6명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는 $6!$

A와 B의 한 묶음을 T라 하면

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

A, B, C를 제외한 나머지 3명의 학생과 T가 일렬로 서는 경우의 수는 $4!$

B와 C가 이웃하지 않으려면 A, B, C를 제외한 나머지 3명의 학생과 T가 일렬로 서고 사이사이와 양 끝 중 B와 이웃하지 않는 4곳 중 하나에 C가 서면 되므로 경우의 수는 4

따라서 구하는 확률은

$\frac{2!\times4!\times4}{6!}=\frac{4}{15}$

답 ④

5 10개의 사탕이 들어 있는 상자에서 2개의 사탕을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

꺼낸 2개의 사탕이 모두 딸기맛 사탕인 사건을 A, 모두 포도맛 사탕인 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

꺼낸 2개의 사탕이 모두 딸기맛 사탕인 경우의 수는 딸기맛 사탕 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

그러므로 $P(A)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

꺼낸 2개의 사탕이 모두 포도맛 사탕인 경우의 수는 포도맛 사탕 6개 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_2=15$

그러므로 $P(B)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{15}+\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$$

답 ②

6 9명의 학생 중에서 대표 3명을 정하는 경우의 수는

${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

A가 대표인 사건을 A, B가 대표인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 A, B가 모두 대표인 사건이다.

A가 대표인 경우의 수는 A를 제외한 8명 중에서 2명을 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_2=28$

그러므로 $P(A)=\frac{28}{84}=\frac{1}{3}$

B가 대표인 경우의 수는 B를 제외한 8명 중에서 2명을 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_2=28$

그러므로 $P(B)=\frac{1}{3}$

A, B가 모두 대표인 경우의 수는 A, B를 제외한 7명 중에서 1명을 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_1=7$

그러므로 $P(A\cap B)=\frac{7}{84}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

답 ②

다른 풀이

$$P(A\cup B)=1-P(A^C\cap B^C)$$
$$=1-\frac{{}_7C_3}{{}_9C_3}$$
$$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

7 8명의 학생이 모두 한 명씩 발표하도록 발표 순서를 정하는 경우의 수는 $8!$

2명 이상의 여학생이 연이어 발표하는 순서로 정해지는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 연이어 발표하는 여학생이 없는 사건이다.

연이어 발표하는 여학생이 없는 경우의 수는 남학생 5명을 배열하고 남학생 사이사이와 양 끝 중 3곳에 여학생을 한 명씩 배열하는 경우의 수와 같으므로

$5!\times{}_6P_3$

$P(A^C)=\frac{5!\times{}_6P_3}{8!}=\frac{6\times5\times4}{8\times7\times6}=\frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

답 ⑤

8 이 주머니에서 3장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

꺼낸 3장의 카드에 적혀 있는 숫자 중 적어도 한 개가 소수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 꺼낸 3장의 카드에 적혀 있는 숫자가 모두 소수가 아닌 사건이다.

1부터 9까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7이므로

꺼낸 3장의 카드에 적힌 숫자가 모두 소수가 아닌 경우의 수는 1, 4, 6, 8, 9가 적혀 있는 카드 중에서 3장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수와 같다.

${}_5C_3={}_5C_2=10$

그러므로 $P(A^C)=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ②　2 ③　3 43　4 ④　5 ②
6 ③　7 ⑤　8 ③

1 A, B, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=6\times5\times4=120$

(i) A, B 사이에 1, 1이 오는 경우

A, B와 1, 1을 배열하는 경우의 수는 $2!$

이 묶음과 1, 2를 배열하는 경우의 수는 $3!$

이때의 경우의 수는

$2!\times3!=12$

(ii) A, B 사이에 1, 2가 오는 경우

A, B와 1, 2를 배열하는 경우의 수는 $2!\times2!$

이 묶음과 1, 1을 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}$

이때의 경우의 수는

$2!\times2!\times\frac{3!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{12+12}{120}=\frac{1}{5}$

답 ②

2 세 사람 A, B, C가 이 5개의 의자 중 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

A, B, C가 앉은 의자에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c라 하면 A, B가 앉은 의자에 적혀 있는 두 수의 합이 C가 앉은 의자에 적혀 있는 수 이하인 순서쌍 (a, b, c)는

(1, 2, 3), (2, 1, 3),

(1, 2, 4), (2, 1, 4), (1, 3, 4), (3, 1, 4),

(1, 2, 5), (2, 1, 5), (1, 3, 5), (3, 1, 5),

(1, 4, 5), (4, 1, 5), (2, 3, 5), (3, 2, 5)

따라서 구하는 확률은
$\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$

답 ③

3 집합 X에서 X로의 모든 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4$이다.

(i) $f(3)=1$인 경우
$f(1)$의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $f(1)$을 정하는 경우의 수는 4
$x>1$일 때 $f(x)\le3$이므로 $f(2)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2$
이때의 경우의 수는
$4\times{}_3\Pi_2=4\times3^2=36$

(ii) $f(3)=2$인 경우
$x<2$일 때 $f(x)\ge3$이므로 $f(1)$을 정하는 경우의 수는 2
$f(2)$의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $f(2)$를 정하는 경우의 수는 4
$x>2$일 때 $f(x)\le3$이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 3
이때의 경우의 수는
$2\times4\times3=24$

(iii) $f(3)=3$인 경우
$x<3$일 때 $f(x)\ge3$이므로 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$
$x>3$일 때 $f(x)\le3$이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 3
이때의 경우의 수는
${}_2\Pi_2\times3=2^2\times3=12$

(iv) $f(3)=4$인 경우
$x<3$일 때 $f(x)\ge3$이므로 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$
$f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $f(4)$를 정하는 경우의 수는 4
이때의 경우의 수는
${}_2\Pi_2\times4=2^2\times4=16$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은
$\frac{36+24+12+16}{4^4}=\frac{11}{32}$
따라서 $p=32$, $q=11$이므로 $p+q=43$

답 43

4 서로 다른 8개의 숫자 중에서 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는
${}_8P_3=8\times7\times6=336$
1부터 8까지의 자연수 중 3의 배수는 3, 6이다.
나열된 수가 3, 6 중 하나만 포함하는 사건을 A, 3, 6을 모두 포함하는 사건을 B라 하면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

(i) 3, 6 중 하나를 택하는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수이려면 두 번째에 3의 배수를 놓고 첫 번째와 세 번째에 1, 2, 4, 5, 7, 8 중 2개를 놓으면 되므로
${}_6P_2=6\times5=30$
그러므로 $P(A)=\frac{2\times30}{336}=\frac{5}{28}$

(ii) 3, 6을 모두 택하는 경우의 수는
${}_2C_2=1$
1, 2, 4, 5, 7, 8 중 1개를 택하는 경우의 수는
${}_6C_1=6$
배열과 상관없이 이웃하는 두 수의 곱이 모두 3의 배수이므로
$3!=6$
그러므로 $P(B)=\frac{6\times6}{336}=\frac{3}{28}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$=\frac{5}{28}+\frac{3}{28}=\frac{2}{7}$

답 ④

5 7개의 문자 a, a, b, b, c, c, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!\times2!\times3!}=210$
a끼리 이웃하는 사건을 A, b끼리 이웃하는 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 a끼리 이웃하고 b끼리 이웃하는 사건이다.
a, a의 묶음을 T라 하고, b, b의 묶음을 S라 하면
T, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{2!\times3!}=60$
이므로
$P(A)=\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$

a, a, S, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}$

T, S, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{210}=\frac{2}{21}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}-\frac{2}{21}=\frac{10}{21}\end{aligned}$$

답 ②

6 집합 X의 원소의 개수가 3인 사건을 A, 집합 X의 모든 원소가 홀수인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 원소의 개수가 3이고 모든 원소가 홀수인 사건이다.

원소의 개수가 3인 집합 X의 개수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{20}{63}$

모든 원소가 홀수인 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 3, 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$

그러므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$

집합 $\{1, 3, 5\}$의 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 1이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{63}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{20}{63}+\frac{1}{9}-\frac{1}{63}=\frac{26}{63}\end{aligned}$$

답 ③

7 남학생 4명과 여학생 3명이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

모든 여학생의 옆에는 적어도 한 명의 남학생이 앉게 되는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 어떤 여학생의 양옆에 여학생이 앉게 되는 사건, 즉 여학생 3명이 이웃하는 사건이다.

여학생 3명이 이웃하는 경우의 수는 여학생 3명을 배열하고 이 묶음과 남학생 4명을 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$3!\times(5-1)!=3!\times4!$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3!\times4!}{6!}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

답 ⑤

8 A, B가 모두 처음 진열되었던 칸이 아닌 칸에 진열되는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 A, B 중 적어도 하나가 처음 진열되었던 칸에 진열되는 사건이다.

5개의 가방을 아래층의 5개의 칸에 모두 하나씩 진열하는 경우의 수는 $5!$

(ⅰ) A, B가 모두 처음 진열되었던 칸에 진열되는 경우
새로운 서로 다른 가방 3개를 진열하는 경우의 수는 $3!$

(ⅱ) A, B 중 하나만 처음 진열되었던 칸에 진열되는 경우
A, B 중 하나를 선택하는 경우의 수는 2, 나머지 하나를 새로운 칸에 진열하는 경우의 수는 3, 새로운 서로 다른 가방 3개를 진열하는 경우의 수는 $3!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 A, B 중 적어도 하나가 처음 진열되었던 칸에 진열될 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3!+2\times3\times3!}{5!}=\frac{1+6}{20}=\frac{7}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{20}=\frac{13}{20}$

답 ③

Level **3** **실력 완성** 본문 42쪽

1 ③ 2 ② 3 13

1 집합 X에서 집합 Y로의 모든 함수 f의 개수는
${}_6\Pi_4=6^4$
1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 치역의 원소가 될 세 수를 선택하는 경우의 수는
${}_6C_3=20$
선택된 세 수 중에서 $f(1)$, $f(2)$를 정하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
치역의 원소인 세 수 중에서 $f(3)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2$이고, $f(1)$, $f(2)$ 중에서 $f(3)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$이므로 $f(3)$, $f(4)$를 정하는 경우의 수는
${}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2=3^2-2^2=5$
따라서 구하는 확률은
$\frac{20\times3\times5}{6^4}=\frac{25}{108}$

답 ③

2 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.
3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A, 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B라 하자.
3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우는
HHHT → HHTT → HTTT → HHHH
뿐이다.
1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 3번째 시행에서 T, T, T를 뒤집으면 되므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3C_2\times{}_1C_1}{{}_4C_3}\times\frac{{}_2C_2\times{}_2C_1}{{}_4C_3}\times\frac{{}_3C_3}{{}_4C_3}$
$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$
3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이는 경우는
HHHT → HHTT → HHHT → TTTT
뿐이다.
1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, T, T를 뒤집고, 3번째 시행에서 H, H, H를 뒤집으면 되므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3C_2\times{}_1C_1}{{}_4C_3}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_2}{{}_4C_3}\times\frac{{}_3C_3}{{}_4C_3}$
$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$
두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$

답 ②

3 흰 공 4개와 검은 공 6개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{10!}{4!\times6!}=210$
mn의 값이 0 또는 짝수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 m, n이 모두 홀수인 사건이다.
첫 번째 흰 공 왼쪽에 나열된 검은 공의 개수를 x, 두 번째 흰 공과 세 번째 흰 공 사이에 나열된 검은 공의 개수를 y, 네 번째 흰 공 오른쪽에 나열된 검은 공의 개수를 z라 하면
(i) $m=1$, $n=1$인 경우
방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
(ii) $m=1$, $n=3$ 또는 $m=3$, $n=1$인 경우
방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로
${}_3H_2={}_4C_2=6$
(iii) $m=1$, $n=5$ 또는 $m=3$, $n=3$ 또는 $m=5$, $n=1$인 경우
방정식 $x+y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로
1
(i), (ii), (iii)에서
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{15+2\times6+3\times1}{210}=\frac{1}{7}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$
이므로 $p+q=7+6=13$

답 13

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ② 4 14 5 ③

1 이 단체의 회원 50명 중에서 임의로 선택한 한 회원이 여자인 사건을 A, 사용하는 오피스 프로그램이 H인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
이때
$\mathrm{P}(A)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$
이고, 사건 $A\cap B$는 선택한 한 회원이 여자이고 사용하는 오피스 프로그램이 H인 사건이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}$$
답 ⑤

2 이 주머니에서 학생 A가 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수인 사건을 A, 학생 B가 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 모두 짝수인 사건을 B라 하면
학생 A가 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은
$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$
학생 B가 꺼낼 때는 주머니에 홀수가 적혀 있는 카드가 2장, 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 들어 있고, 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 모두 짝수인 경우는 짝수가 적혀 있는 카드 4장 중에서 2장을 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$$
답 ③

3 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 두 사건 A^C과 B도 서로 독립이므로
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$
답 ②

4 이 동호회의 학생 120명 중 1명을 임의로 선택할 때, 선택된 학생이 여학생인 사건을 A, 칼국수를 택하는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{70}{120}=\frac{7}{12}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{30+b}{120}$
사건 $A\cap B$는 칼국수를 택하는 여학생인 사건이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{b}{120}$
두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\frac{b}{120}=\frac{7}{12}\times\frac{30+b}{120}$
$12b=210+7b$
즉, $b=42$
따라서 $a=28$이므로
$b-a=42-28=14$
답 14

5 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
이 시행을 3번 반복한 후 두 카드가 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우는 A, B를 모두 1번 뒤집고 A를 2번 뒤집거나 A, B를 모두 3번 뒤집으면 되므로 구하는 확률은
$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{9}+\frac{8}{27}=\frac{14}{27}$$
답 ③

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ③ 2 ② 3 ② 4 ③ 5 ②
6 ⑤ 7 ③ 8 91

1 확률의 곱셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

답 ③

2 $\frac{b}{a}$가 자연수인 사건을 A, ab가 소수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는

$6^2=36$

$\frac{b}{a}$가 자연수인 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,

$(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$,

$(3, 3)$, $(3, 6)$,

$(4, 4)$,

$(5, 5)$,

$(6, 6)$

이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

$\frac{b}{a}$가 자연수이고 ab가 소수인 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 5)$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{18}}=\frac{3}{14}$$

답 ②

3 10개의 필기구 중에서 2개의 필기구를 선택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_2=45$

선택한 2개의 필기구에 연필이 포함되어 있는 사건을 A, 2개 모두 연필인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

선택한 2개의 필기구에 연필이 포함되어 있는 경우의 수는 연필 1개와 볼펜 1개를 선택하거나 연필 2개를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2=4\times6+6=30$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$

사건 $A\cap B$는 2개의 필기구가 모두 연필인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

답 ②

4 리만 가설을 선택한 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

리만 가설을 선택한 학생이 16명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

리만 가설을 선택한 2학년 학생이 6명이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$$

답 ③

5 이 학년의 학생 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 이 학생이 남학생인 사건을 A, 봉사활동을 하고 있는 학생인 사건을 B라 하자. 이때 A의 여사건 A^C은 이 학년의 학생 중에서 임의로 택한 한 명의 학생이 여학생인 사건이다.

이 학년 학생의 60 %가 남학생이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$

이 학년의 남학생의 50 %가 봉사활동을 하고 있으므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

또한 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

이 학년의 여학생의 40 %가 봉사활동을 하고 있으므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{10}+\frac{4}{25}=\frac{23}{50}$

답 ②

6 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$

답 ⑤

7 6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

6의 약수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

6의 약수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{9}+\frac{8}{27}=\frac{14}{27}$

답 ③

8 $\log_2 a=n$ (n은 정수)라 하면

$a=2^n$이므로 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 세 수는 1 또는 2 또는 4이어야 한다.

이 상자를 3번 던질 때, 1 또는 2 또는 4가 3번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

따라서 $p=64$, $q=27$이므로 $p+q=91$

답 91

Level **2** 기본 연습 본문 54~55쪽

1 ③	2 ④	3 ④	4 ④	5 3
6 ④	7 89	8 ③		

1 이 고등학교의 학생 150명 중에서 임의로 선택한 한 명이 한라산을 등반해 본 경험이 없는 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

한라산을 등반해 본 경험이 없는 학생의 수는 50이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{150}$

한라산을 등반해 본 경험이 없는 여학생의 수는 20이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{150}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{20}{150}}{\frac{50}{150}}=\frac{2}{5}$

답 ③

2 이 주머니에서 동시에 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_2=21$

이 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 홀수인 사건을 A, 2개의 공의 색이 같은 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

홀수가 적혀 있는 같은 색의 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 홀수가 적혀 있는 검은 공 2개를 꺼내거나 홀수가 적혀 있는 흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2=1+3=4$

홀수가 적혀 있는 다른 색의 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 홀수가 적혀 있는 검은 공 1개와 흰 공 1개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=2\times3=6$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{4+6}{21}=\frac{10}{21}$

사건 $A\cap B$는 홀수가 적혀 있는 같은 색의 공 2개를 꺼내는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{10}{21}}=\frac{2}{5}$

답 ④

3 X에서 X로의 모든 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

$f(1) \le f(2) \le f(3)$인 사건을 A라 하고, $f(3)$의 값이 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$f(1) \le f(2) \le f(3)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개의 원소를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이므로

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{20 \times 4}{4^4} = \dfrac{5}{16}$

$f(1) \le f(2) \le f(3)$이고 $f(3)$의 값이 홀수인 경우는 다음의 두 가지가 있다.

(i) $f(3)=1$인 경우

$f(1) \le f(2) \le 1$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1이고, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이므로 이때의 경우의 수는

$1 \times 4 = 4$

(ii) $f(3)=3$인 경우

$f(1) \le f(2) \le 3$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

이고, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이므로 이때의 경우의 수는

$6 \times 4 = 24$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{4+24}{4^4} = \dfrac{7}{64}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{7}{64}}{\frac{5}{16}} = \frac{7}{20}$$

답 ④

4 상자 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1인 사건을 A, 상자 B에서 꺼낸 공에 홀수가 적혀 있는 사건을 B라 하자. 이때 A의 여사건 A^C은 상자 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 2인 사건이다.

상자 A에 숫자 1, 1, 1, 2가 하나씩 적혀 있는 공이 들어 있으므로

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{4}$

사건 A가 일어났을 때, 상자 B에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 4가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있으므로

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

그러므로 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$

또한 $\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

사건 A^C이 일어났을 때, 상자 B에 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 4가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있으므로

$\mathrm{P}(B|A^C) = \dfrac{1}{6}$

그러므로 $\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{7}{24}$

답 ④

5 1부터 7까지의 자연수를 이 7개의 원에 하나씩 모두 적는 경우의 수는

$(7-1)! = 6!$

3으로 나눈 나머지가 같은 수들을 아래와 같이 각각 A, B, C로 나타내기로 하자.

A: 1, 4, 7

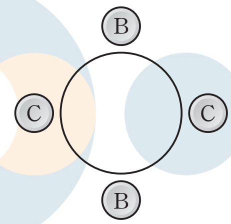
B: 2, 5

C: 3, 6

1부터 7까지의 자연수를 이 7개의 원에 이웃하는 두 원에 적은 두 수를 각각 3으로 나눈 나머지가 서로 다르도록 하나씩 모두 적는 사건을 T, 어떤 원과 이웃한 두 원에 3과 6이 적혀 있는 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E|T)$이다.

B, C를 원 모양으로 배열하는 경우는 다음의 두 가지가 있다.

(i) 2, 3, 5, 6을 그림과 같이 배열하는 경우의 수는 $2! = 2$



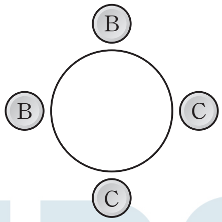
조건을 만족시키는 경우는 네 수의 사이사이 중에서 세 곳에 1, 4, 7을 배열하는 경우와 같으므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_3 = 24$

이때의 경우의 수는

$2 \times 24 = 48$

(ii) 2, 3, 5, 6을 그림과 같이 배열하는 경우의 수는 $2!\times2!=4$



조건을 만족시키는 경우는 2, 5 사이에 A 중 1개를, 3, 6 사이에 A 중 1개를, B와 C 사이 중에서 한 곳에 나머지 A를 배열하는 경우와 같으므로

$3\times2\times2=12$

이때의 경우의 수는

$4\times12=48$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(T)=\dfrac{48+48}{6!}=\dfrac{2}{15}$

(ii)에서

$\mathrm{P}(E\cap T)=\dfrac{48}{6!}=\dfrac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E|T)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap T)}{\mathrm{P}(T)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{15}}=\dfrac{1}{2}$

이므로 $p+q=2+1=3$

답 3

6 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{5}\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(B)\neq0$이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=2\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{5}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{2}{5}\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$

답 ④

7 한 개의 주사위를 4번 던져서 3의 약수의 눈이 3번 나오면 되므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{8}{81}$

따라서 $p=81$, $q=8$이므로 $p+q=89$

답 89

8 한 개의 주사위를 3번 던져서 6의 눈이 나오는 횟수를 a라 하고, 6이 아닌 눈이 나오는 횟수를 b라 하면

$a+b=3$ ...... ㉠

A 제품 한 개에 포함된 탄수화물의 양이 4 g이고 B 제품 한 개에 포함된 탄수화물의 양이 2 g이므로

$4a+2b=10$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=1$이므로 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^1=\dfrac{5}{72}$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 56쪽

1 ④ 2 ③ 3 104

1 함수 $f\circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3인 사건을 A, 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

집합 X에서 집합 X로의 함수의 개수는

${}_5\Pi_5=5^5$

이고, 사건 A는 다음의 세 가지가 있다.

(i) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 5인 경우

함수 f는 일대일대응이므로 함수 $f\circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수는 3

이때의 함수 f의 개수는

$5!=120$

(ii) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

함수 f의 치역은 1, 3, 5를 포함해야 하므로 나머지 치역의 원소 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

• 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 4인 경우
함수 f의 치역에 포함되지 않는 집합 X의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 4이므로
함수 f의 치역의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는
$4!=24$

• 함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 3인 경우
함수 $f \circ f$의 치역이 $\{1, 3, 5\}$이므로 함수 f의 치역에 포함되지 않는 집합 X의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는 1
함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 3이므로
함수 f의 치역의 원소 2개를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
선택된 원소 2개를 1, 3, 5 중 하나에 대응시키는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
함수 f의 치역의 나머지 원소 2개의 함숫값을 정하는 경우의 수는 $2!=2$

이때의 함수 f의 개수는
$2\times(4\times24+1\times6\times3\times2)=264$

(iii) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 경우
함수 f의 치역이 $\{1, 3, 5\}$이어야 하므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$를 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는
$3!=6$
이고 집합 X의 나머지 두 원소를 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는
${}_3\Pi_2=3^2=9$
이때의 함수 f의 개수는
$6\times9=54$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(A)=\frac{120+264+54}{5^5}=\frac{438}{5^5}$$

사건 $A\cap B$는 함수 $f \circ f$의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3이고 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3인 사건이므로

$$P(A\cap B)=\frac{54}{5^5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{54}{5^5}}{\frac{438}{5^5}}=\frac{9}{73}$$

답 ④

2 $\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수인 사건을 A, mn의 값이 18의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.
2개의 공에 적혀 있는 두 수 중에서 큰 수를 기록하므로 m, n은 2 이상 8 이하의 자연수이다.
$\left|\sin\frac{m\pi}{6}\right|\le1$, $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\le1$이므로 $\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $\sin\frac{m\pi}{6}$, $\cos\frac{n\pi}{3}$ 중 적어도 하나가 0이거나 $\sin\frac{m\pi}{6}$, $\cos\frac{n\pi}{3}$가 모두 정수이어야 한다.
$\sin\frac{m\pi}{6}$의 값이 정수이려면 $m=3$ 또는 $m=6$
$\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면 $n=3$ 또는 $n=6$
$\sin\frac{3\pi}{6}=1$, $\sin\frac{6\pi}{6}=0$, $\cos\frac{3\pi}{3}=-1$, $\cos\frac{6\pi}{3}=1$
이므로
$\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이려면
$m=6$일 때 n은 2 이상 8 이하의 자연수이고,
$m=3$일 때 $n=3$ 또는 $n=6$이다.

(i) $m=6$이고 n이 2 이상 8 이하의 자연수인 경우
첫 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 어느 공을 꺼내도 상관없으므로 그 확률은

$$\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\frac{{}_8C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{28}$$

(ii) $m=3$이고 $n=3$ 또는 $n=6$인 경우
첫 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내거나 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\left(\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}+\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\right)=\frac{2}{28}\times\left(\frac{2}{28}+\frac{5}{28}\right)=\frac{1}{56}$$

(i), (ii)에서 $P(A)=\frac{5}{28}+\frac{1}{56}=\frac{11}{56}$

사건 $A\cap B$는 $\sin\frac{m\pi}{6}\times\cos\frac{n\pi}{3}$의 값이 정수이고 mn의 값이 18의 배수인 사건이므로

(iii) $m=6$, $n=3$ 또는 $m=6$, $n=6$인 경우
첫 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내거나 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6

이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\left(\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}+\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\right)$$

$$=\frac{5}{28}\times\left(\frac{2}{28}+\frac{5}{28}\right)=\frac{35}{28\times28}$$

(iv) $m=3$, $n=6$인 경우

첫 번째 시행에서 2 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 3이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 5 이하의 자연수가 적혀 있는 공 1개와 6이 적혀 있는 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}\times\frac{{}_5C_1\times{}_1C_1}{{}_8C_2}$$

$$=\frac{2}{28}\times\frac{5}{28}=\frac{10}{28\times28}$$

(iii), (iv)에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{35}{28\times28}+\frac{10}{28\times28}=\frac{45}{28\times28}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{45}{28\times28}}{\frac{11}{56}}=\frac{45}{154}$$

답 ③

3 n명의 학생들 중 한 명의 학생을 택할 때, 이 학생의 수험번호가 20 이하인 사건을 A라 하고 홀수인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{n}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{12}{n}$

사건 $A\cap B$는 수험번호가 20 이하의 홀수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{k}{n}$ (k는 자연수)라 놓을 수 있다.

20 이하의 홀수와 짝수의 개수가 각각 10이므로 수험번호가 20 이하의 홀수인 학생은 5명 이상 10명 이하이다.

$5\le k\le10$ …… ㉠

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{k}{n}=\frac{15}{n}\times\frac{12}{n}$

즉, $nk=180$

㉠에서

$n=36$ 또는 $n=30$ 또는 $n=20$ 또는 $n=18$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$36+30+20+18=104$

답 104

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 59~67쪽

1 ④	2 ⑤	3 ③	4 4	5 ④
6 ②	7 ①	8 10	9 ①	10 50

1 $X^2-7X+10<0$에서

$(X-2)(X-5)<0$

$2<X<5$

따라서 $X=3$ 또는 $X=4$

$\mathrm{P}(X^2-7X+10<0)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$$=\frac{2^2}{63}+\frac{2^3}{63}$$

$$=\frac{4+8}{63}=\frac{4}{21}$$

답 ④

2 5장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

확률변수 X가 갖는 값은 2, 4, 6, 8이다.

$\mathrm{P}(|X-4|=2)$에서

$X-4=-2$ 또는 $X-4=2$

$X=2$ 또는 $X=6$

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수를 a, b $(a<b)$라 할 때 순서쌍 (a, b)로 나타내자.

$X=2$일 때, $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(7, 9)$인 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$X=6$일 때, $(1, 7)$, $(3, 9)$인 경우이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

따라서

$\mathrm{P}(|X-4|=2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=6)$

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

답 ⑤

3 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{2}{9}+a+b+\frac{1}{9}=1$에서

$a+b=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=b+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

에서

$b=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

㉠에서 $a=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{9}=\frac{7}{3}$

답 ③

4 $\mathrm{P}(X=x)=a(7-x)$ $(x=3,\ 4,\ 5,\ 6)$이고

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$4a+3a+2a+a=10a=1$에서

$a=\frac{1}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}+6\times\frac{1}{10}=4$

답 4

5 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{6}+b=1$에서

$a+b=\frac{5}{6}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{3}{2}$이므로

$\mathrm{E}(X)=1\times a+2\times\frac{1}{6}+3\times b=\frac{3}{2}$에서

$a+3b=\frac{7}{6}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{17}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$

답 ④

6 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이다.

$X=1$일 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 1인 경우

$X=2$일 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 2, 3인 경우

$X=3$일 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 4인 경우

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$

이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

7 $\mathrm{E}(3X-2)=3\mathrm{E}(X)-2=19$이므로

$\mathrm{E}(X)=7$

$\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=4\mathrm{V}(X)=12$이므로

$\mathrm{V}(X)=3$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=3+7^2=52$

답 ①

8 확률변수 X가 갖는 값은 2, 4, 8이다.
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{6}=4$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{2}+8^2\times\frac{1}{6}-4^2=4$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=2$이므로

$\sigma(5X+4)=5\sigma(X)=5\times2=10$

답 10

9 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}n$, $\mathrm{V}(X)=n\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}n$

$\mathrm{E}(2X)+\mathrm{V}(2X)=88$에서

$\mathrm{E}(2X)+\mathrm{V}(2X)=2\mathrm{E}(X)+2^2\mathrm{V}(X)$

$=2\times\frac{2}{5}n+4\times\frac{6}{25}n$

$=\frac{4}{5}n+\frac{24}{25}n=\frac{44}{25}n$

따라서 $\frac{44}{25}n=88$이므로

$n=50$

답 ①

10 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

한 번의 시행에서 꺼낸 공의 색이 모두 서로 다른 경우는 노란 공, 빨간 공, 파란 공을 각각 1개씩 꺼내는 경우이므로 이 경우의 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(490, \frac{2}{7}\right)$를 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{490\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}}=10$

$\sigma(5X-1)=5\sigma(X)=5\times10=50$

답 50

Level 1 기초 연습

본문 68쪽

1 ② 2 ④ 3 ⑤ 4 ① 5 27

1 5번의 게임을 할 때 3의 약수의 눈이 나온 횟수를 x, 3의 약수가 아닌 눈이 나온 횟수를 y라 하면

$x+y=5$ …… ㉠

5번의 게임을 한 후 얻은 모든 점수의 합이 9이려면

$2x+y=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=1$

한 개의 주사위를 던져 3의 약수의 눈이 나올 확률이

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 5번의 게임을 하여 $X=9$일 확률은

$\mathrm{P}(X=9)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}$

답 ②

2 $\mathrm{P}(X=-2)=-2a+3a=a$

$\mathrm{P}(X=-1)=-a+3a=2a$

$\mathrm{P}(X=0)=0+3a=3a$

$\mathrm{P}(X=1)=a+3a=4a$

$\mathrm{P}(X=2)=2a+3a=5a$

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+2a+3a+4a+5a=15a=1$에서 $a=\frac{1}{15}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X)$

$=(-2)\times\frac{1}{15}+(-1)\times\frac{2}{15}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{3}$

답 ④

3 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+b=1$에서

$a+b=\frac{5}{8}$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)$에서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로 $\mathrm{E}(X)=0$

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times b=0$에서

$a=2b+\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{8}$

따라서 $a-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

답 ⑤

4 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

5명의 학생 중 2명을 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(i) $X=0$일 때, 2학년 학생 2명을 택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

(ii) $X=1$일 때, 2학년 학생과 3학년 학생을 각각 1명씩 택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

(iii) $X=2$일 때, 3학년 학생 2명을 택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

따라서

$\mathrm{E}(5X-1)=5\mathrm{E}(X)-1=5\times\frac{6}{5}-1=5$

$\mathrm{V}(5X-1)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{9}{25}=9$

이므로

$\mathrm{E}(5X-1)+\mathrm{V}(5X-1)=5+9=14$

답 ①

5 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$

$\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(3X)=9\mathrm{V}(X)$에서

$\left(\frac{n}{4}\right)^2=9\times\frac{3}{16}n$

$n^2=27n$

이때 n은 자연수이므로

$n=27$

답 27

Level 2 **기본 연습** 본문 69~70쪽

1 ③	**2** ①	**3** ④	**4** ②	**5** 158
6 ⑤	**7** ①	**8** 206		

1 $\mathrm{P}(X=0)=a$, $\mathrm{P}(X=1)=b$라 하자.

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}b$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}b$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{4}b$	1

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b=1$

$a+\frac{7}{4}b=1$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{11}{16}$에서

$\mathrm{E}(X)=0\times a+1\times b+2\times\frac{1}{2}b+3\times\frac{1}{4}b=\frac{11}{16}$

$\frac{11}{4}b=\frac{11}{16}$, $b=\frac{1}{4}$

$b=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$a=1-\frac{7}{4}b=1-\frac{7}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$

따라서

$P(X=0)+P(X=2)=a+\frac{1}{2}b$

$=\frac{9}{16}+\frac{1}{8}=\frac{11}{16}$

답 ③

2 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명을 2명씩 3개의 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$

$X=1$일 때, 한 학년의 학생끼리만 같은 팀이고 나머지 두 학년의 학생은 다른 학년의 학생과 같은 팀이 되는 경우로 같은 팀이 되는 학년을 정하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 나머지 두 학년의 학생이 서로 다른 팀이 되는 경우의 수는 2이므로

$P(X=1)=\frac{3\times2}{15}=\frac{2}{5}$

$X=3$일 때, 1, 2, 3학년의 학생 모두 같은 학년의 학생끼리 같은 팀이 되는 경우의 수는 1이므로

$P(X=3)=\frac{1}{15}$

따라서

$P(X=1)-P(X=3)=\frac{2}{5}-\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$

답 ①

3 확률변수 X가 갖는 값은 0, 3, 6이다.

(ⅰ) $X=0$일 때, 꺼낸 세 공에 적혀 있는 수가 모두 0인 경우이므로

$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ⅱ) $X=3$일 때, 꺼낸 세 공에 적혀 있는 수가 0 또는 3인 경우에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 수가 모두 0인 경우를 제외하면 되므로

$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$

(ⅲ) $X=6$일 때, 꺼낸 세 공에 적혀 있는 수가 0 또는 3 또는 6인 경우에서 꺼낸 세 공에 적혀 있는 수가 0 또는 3인 경우를 제외하면 되므로

$P(X=6)=\left(\frac{3}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	3	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{27}+3\times\frac{7}{27}+6\times\frac{19}{27}=5$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{27}+3^2\times\frac{7}{27}+6^2\times\frac{19}{27}=\frac{83}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{83}{3}-5^2=\frac{8}{3}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

답 ④

4 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{6}+b+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=1$, $b=\frac{1}{4}$

$E(X)=\frac{5}{4}$에서

$E(X)=a\times\frac{1}{6}+2a\times\frac{1}{4}+3a\times\frac{1}{2}+4a\times\frac{1}{12}$

$=\frac{5}{2}a=\frac{5}{4}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$

이때 $Y=aX+b=\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}$이므로

$E(Y)=E\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}E(X)+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$

답 ②

5 이 시행으로 일어나는 경우를 다음과 같이 나눌 수 있다.

첫 번째 꺼낸 공	두 번째 꺼낸 공	X
흰 공	흰 공 2개	3
	흰 공 1개, 검은 공 1개	2
	검은 공 2개	1
검은 공	흰 공 2개	2
	흰 공 1개, 검은 공 1개	1
	검은 공 2개	0

즉, 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$일 때

$$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$$

(ii) $X=1$일 때

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}=\frac{2}{5}$$

(iii) $X=2$일 때

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{15}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{20}$$

(iv) $X=3$일 때

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$$

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{10}=\frac{8}{5}$$

따라서

$$E(100X-2)=100E(X)-2$$
$$=100\times\frac{8}{5}-2=158$$

답 158

6 $P(X=-2)=p$라 하자.

$P(X=k+1)=P(X=k)+d$ $(k=-2,\ -1,\ 0,\ 1)$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	p	$p+d$	$p+2d$	$p+3d$	$p+4d$	1

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$p+(p+d)+(p+2d)+(p+3d)+(p+4d)=1$

$5p+10d=1$ …… ㉠

$P(X=1)=P(X=-1)+\frac{4}{25}$에서

$p+3d=p+d+\frac{4}{25}$, $d=\frac{2}{25}$

$d=\frac{2}{25}$를 ㉠에 대입하면

$5p+\frac{4}{5}=1$, $p=\frac{1}{25}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{9}{25}$	1

$$E(X)=(-2)\times\frac{1}{25}+(-1)\times\frac{3}{25}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{7}{25}+2\times\frac{9}{25}$$
$$=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$$

$$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{25}+(-1)^2\times\frac{3}{25}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{7}{25}+2^2\times\frac{9}{25}$$
$$=\frac{50}{25}=2$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{34}{25}$$

$V(aX)=136$에서

$V(aX)=a^2V(X)=a^2\times\frac{34}{25}=136$

$a^2=100$

이때 $a>0$이므로 $a=10$

답 ⑤

7 확률변수 X가 이항분포 $B(6,\ p)$를 따르므로

$P(X=r)={}_6C_r p^r(1-p)^{6-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

$\frac{3}{4}\times P(X=0)+P(X=1)=P(X=2)$에서

$\frac{3}{4}\times{}_6C_0(1-p)^6+{}_6C_1p(1-p)^5={}_6C_2p^2(1-p)^4$

이때 $p\neq1$, 즉 $1-p\neq0$이므로

$\frac{3}{4}(1-p)^2+6p(1-p)=15p^2$

$(1-p)^2+8p(1-p)=20p^2$

$27p^2-6p-1=0$

$(3p-1)(9p+1)=0$

$p>0$이므로 $p=\frac{1}{3}$

따라서 $E(X)=6\times\frac{1}{3}=2$

답 ①

8 7개의 공 중 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수가 각각 a, b, c $(a<b<c)$인 경우를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내자.

꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 차가 1이 아닌 경우는

$(1, 3, 5)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 3, 7)$,
$(1, 4, 6)$, $(1, 4, 7)$, $(1, 5, 7)$,
$(2, 4, 6)$, $(2, 4, 7)$, $(2, 5, 7)$,
$(3, 5, 7)$

일 때이므로 이 경우의 수는 10이다.

한 번의 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률은 $\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(49, \frac{2}{7}\right)$를 따른다.

따라서

$\mathrm{E}(X)=49\times\frac{2}{7}=14$

$\mathrm{V}(X)=49\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}=10$

이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=10+14^2=206$

답 206

Level **3** **실력 완성** 본문 71쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 52

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이고

$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}=0$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{P}(X=k)&=\sum_{k=1}^{2n}c\{(-1)^{k+1}+k\}\\&=c\left\{\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}+\sum_{k=1}^{2n}k\right\}\\&=c\left\{0+\frac{2n(2n+1)}{2}\right\}\\&=cn(2n+1)=1\end{aligned}$$

에서

$c=\frac{1}{n(2n+1)}$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^{k+1}\\&=1+(-2)+3+(-4)+\cdots+(2n-1)+(-2n)\\&=-n\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X)=\frac{48}{5}$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{2n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\sum_{k=1}^{2n}kc\{(-1)^{k+1}+k\}\\&=c\left\{\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^{k+1}+\sum_{k=1}^{2n}k^2\right\}\\&=c\left\{-n+\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}\right\}\\&=\frac{1}{n(2n+1)}\times\left\{-n+\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}\right\}\\&=-\frac{1}{2n+1}+\frac{4n+1}{3}\\&=\frac{2(4n^2+3n-1)}{3(2n+1)}=\frac{48}{5}\end{aligned}$$

이므로

$\frac{4n^2+3n-1}{2n+1}=\frac{72}{5}$

$20n^2+15n-5=144n+72$

$20n^2-129n-77=0$

$(20n+11)(n-7)=0$

n은 자연수이므로 $n=7$

답 ③

2 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이고 4개의 직사각형에 3가지 색으로 칠하는 경우의 수는 $3^4=81$이다.

(i) $X=1$일 때, 1가지 색으로 칠하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{81}=\frac{1}{27}$

(ii) $X=2$일 때, 2가지 색으로 칠하는 경우이므로

색칠할 2가지 색을 정하는 경우의 수는 $_3\mathrm{C}_2=3$

㉠ 2가지 색을 1번, 3번 칠하는 경우

2가지 색 중에서 3번 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 $_2\mathrm{C}_1=2$이므로 4개의 직사각형에 칠하는 경우의 수는

$2\times\frac{4!}{3!}=8$

㉡ 2가지 색을 2번씩 칠하는 경우

4개의 직사각형에 칠하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

즉, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3\times(8+6)}{81}=\frac{14}{27}$

(iii) $X=3$일 때, 3가지 색을 1번, 1번, 2번 칠하는 경우이고 3가지 색 중에서 2번 칠하는 색을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이므로 4개의 직사각형에 칠하는 경우의 수는

$3\times\frac{4!}{2!}=36$

즉, $P(X=3)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{4}{9}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{27}+2\times\frac{14}{27}+3\times\frac{4}{9}=\frac{65}{27}$

따라서

$$E\left(\frac{9}{5}X-2\right)=\frac{9}{5}E(X)-2$$
$$=\frac{9}{5}\times\frac{65}{27}-2=\frac{7}{3}$$

답 ⑤

3 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고 7장의 카드 중 4장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(i) $X=0$일 때, 0이 적혀 있는 카드 4장을 꺼내는 경우이므로

$P(X=0)=\frac{{}_4C_4}{35}=\frac{1}{35}$

(ii) $X=1$일 때, 0이 적혀 있는 카드 3장과 1이 적혀 있는 카드 1장을 꺼내는 경우이므로

$P(X=1)=\frac{{}_4C_3\times{}_2C_1}{35}=\frac{8}{35}$

(iii) $X=2$일 때, 0이 적혀 있는 카드 3장과 2가 적혀 있는 카드 1장을 꺼내거나 0이 적혀 있는 카드 2장과 1이 적혀 있는 카드 2장을 꺼내는 경우이므로

$P(X=2)=\frac{{}_4C_3\times{}_1C_1+{}_4C_2\times{}_2C_2}{35}=\frac{4+6}{35}=\frac{2}{7}$

(iv) $X=3$일 때, 0이 적혀 있는 카드 2장, 1이 적혀 있는 카드 1장, 2가 적혀 있는 카드 1장을 꺼내는 경우이므로

$P(X=3)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1}{35}=\frac{12}{35}$

(v) $X=4$일 때, 0이 적혀 있는 카드 1장, 1이 적혀 있는 카드 2장, 2가 적혀 있는 카드 1장을 꺼내는 경우이므로

$P(X=4)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2\times{}_1C_1}{35}=\frac{4}{35}$

(i)~(v)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{8}{35}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{4}{35}$$
$$=\frac{16}{7}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{35}+1^2\times\frac{8}{35}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{12}{35}+4^2\times\frac{4}{35}$$
$$=\frac{44}{7}$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{44}{7}-\left(\frac{16}{7}\right)^2=\frac{52}{49}$

따라서

$V(7X)=7^2V(X)=49\times\frac{52}{49}=52$

답 52

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ②	2 ④	3 ④	4 ③	5 ①
6 ③	7 ②	8 ④		

1 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$$\frac{a}{3}\times a+\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{a}{3}\right)\times a=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}a^2$$
$$=\frac{2}{3}a^2=1$$

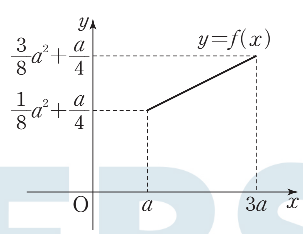
이므로 $a^2=\frac{3}{2}$, $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} a & \left(0\le x<\frac{a}{3}\right) \\ -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}a & \left(\frac{a}{3}\le x\le a\right)\end{cases}$ 이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{3}\le X\le\frac{2a}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\left(a+\frac{a}{2}\right)\times\left(\frac{2a}{3}-\frac{a}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$
$$a^2+\mathrm{P}\left(\frac{a}{3}\le X\le\frac{2a}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$$

답 ②

2 $a<3a$에서 $a>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=3a$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$$\frac{1}{2}\times\{f(a)+f(3a)\}\times(3a-a)$$
$$=\left(\frac{1}{8}a^2+\frac{a}{4}+\frac{3}{8}a^2+\frac{a}{4}\right)\times a=\frac{1}{2}a^3+\frac{a}{2}=1$$

$a^3+a-2=0$에서

$(a-1)(a^2+a+2)=0$

방정식 $a^2+a+2=0$의 실근은 없으므로

$a-1=0$, $a=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}$ $(1\le x\le 3)$이므로

$$f(2a)=f(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ④

3 정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균을 m이라 하고 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(X\le 7)+\mathrm{P}(X\le 13)=1$에서

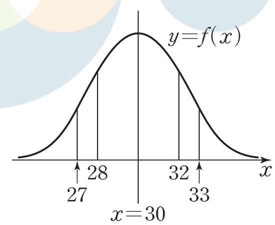
$$\mathrm{P}(X\le 7)=1-\mathrm{P}(X\le 13)$$
$$=\mathrm{P}(X\ge 13)$$
$$m=\frac{7+13}{2}=10$$

따라서

$$\mathrm{P}(X\ge 7)=\mathrm{P}(7\le X\le 10)+\mathrm{P}(X\ge 10)$$
$$=0.23+0.5$$
$$=0.73$$

답 ④

4 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하자.



확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ \sigma^2)$을 따르므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=30$에 대하여 대칭이다.

$$\mathrm{P}(28\le X\le 32)=\mathrm{P}(28\le X\le 30)+\mathrm{P}(30\le X\le 32)$$
$$=2\mathrm{P}(30\le X\le 32)=0.68$$

에서

$\mathrm{P}(30\le X\le 32)=0.34$

$$\mathrm{P}(27\le X\le 33)=\mathrm{P}(27\le X\le 30)+\mathrm{P}(30\le X\le 33)$$
$$=2\mathrm{P}(30\le X\le 33)=0.86$$

에서

$\mathrm{P}(30\le X\le 33)=0.43$

따라서

$$\mathrm{P}(27\le X\le 28)=\mathrm{P}(32\le X\le 33)$$
$$=\mathrm{P}(30\le X\le 33)-\mathrm{P}(30\le X\le 32)$$
$$=0.43-0.34=0.09$$

또한
$P(X\geq 32)=P(X\geq 30)-P(30\leq X\leq 32)$
$=0.5-0.34=0.16$
이므로
$P(27\leq X\leq 28)+P(X\geq 32)=0.09+0.16=0.25$

답 ③

5 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $P(X\leq 9)=P(X\geq 13)$이므로
$m=\frac{9+13}{2}=11$
확률변수 X가 정규분포 $N(11,\ 2^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-11}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
따라서
$P(m-2\leq X\leq 2m-8)$
$=P(9\leq X\leq 14)$
$=P\left(\frac{9-11}{2}\leq Z\leq \frac{14-11}{2}\right)$
$=P(-1\leq Z\leq 1.5)$
$=P(-1\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=P(0\leq Z\leq 1)+P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=0.3413+0.4332=0.7745$

답 ①

6 철근 한 개의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(400,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-400}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X\geq a)=P\left(Z\geq \frac{a-400}{5}\right)$
이때 $P(X\geq a)=0.9332>0.5$이므로 $\frac{a-400}{5}<0$
즉,
$P\left(Z\geq \frac{a-400}{5}\right)$
$=P\left(\frac{a-400}{5}\leq Z\leq 0\right)+P(Z\geq 0)$
$=P\left(0\leq Z\leq \frac{400-a}{5}\right)+0.5=0.9332$
$P\left(0\leq Z\leq \frac{400-a}{5}\right)=0.9332-0.5=0.4332$
이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로
$\frac{400-a}{5}=1.5,\ a=392.5$

답 ③

7 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(288,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.
$E(X)=288\times\frac{1}{3}=96$
$V(X)=288\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=64$
이때 288은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(96,\ 8^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-96}{8}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
따라서
$P(X\leq 84)=P\left(Z\leq \frac{84-96}{8}\right)$
$=P(Z\leq -1.5)$
$=P(Z\geq 1.5)$
$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=0.5-P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

답 ②

8 확률변수 X는 이항분포 $B(192,\ p)$를 따르므로
$V(X)=192p(1-p)$ …… ㉠
$V(2X)=2^2V(X)=144$에서 $V(X)=36$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$192p(1-p)=36$
$16p^2-16p+3=0$
$(4p-1)(4p-3)=0$
이때 $\frac{1}{2}<p<1$이므로 $p=\frac{3}{4}$
즉, 확률변수 X가 이항분포 $B\left(192,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로
$E(X)=192\times\frac{3}{4}=144$
$V(X)=192\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=36$
이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(144,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-144}{6}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}P(X\le 153)&=P\left(Z\le\frac{153-144}{6}\right)\\&=P(Z\le 1.5)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332=0.9332\end{aligned}$$

답 ④

Level 1 **기초 연습** 본문 82쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ② 5 ⑤

1 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 2\times a+\frac{1}{2}\times 1\times\left(a+\frac{a}{2}\right)+2\times\frac{a}{2}=\frac{11}{4}a=1$

따라서 $a=\frac{4}{11}$

답 ④

2 정규분포 $N(8,\ 2^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이고,

$P(X\ge a)=P(X\le 2a-14)$이므로

$\frac{a+(2a-14)}{2}=8$, $3a-14=16$

따라서 $a=10$

답 ③

3 확률변수 X가 정규분포 $N(16,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-16}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(14\le X\le 24)&=P\left(\frac{14-16}{4}\le Z\le\frac{24-16}{4}\right)\\&=P(-0.5\le Z\le 2) \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

확률변수 Y가 정규분포 $N(40,\ 2^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-40}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(36\le Y\le a)&=P\left(\frac{36-40}{2}\le Z\le\frac{a-40}{2}\right)\\&=P\left(-2\le Z\le\frac{a-40}{2}\right) \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

$P(14\le X\le 24)=P(36\le Y\le a)$이므로

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}P(-0.5\le Z\le 2)&=P(-2\le Z\le 0.5)\\&=P\left(-2\le Z\le\frac{a-40}{2}\right)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a-40}{2}=0.5$이므로

$a=41$

답 ③

4 이 공장에서 생산하는 야구공 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(142,\ 3^2)$을 따르고

$Z=\frac{X-142}{3}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(136\le X\le 139)\\&=P\left(\frac{136-142}{3}\le Z\le\frac{139-142}{3}\right)\\&=P(-2\le Z\le -1)\\&=P(1\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 ②

5 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{150}C_x p^x(1-p)^{150-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 150)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B(150,\ p)$를 따른다.

$E(X)=90$에서 $150p=90$, $p=\frac{3}{5}$

$V(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-90}{6}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

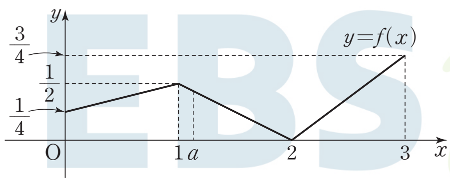
$$\mathrm{P}(84\le X\le 105)=\mathrm{P}\left(\frac{84-90}{6}\le Z\le \frac{105-90}{6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2.5)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=0.3413+0.4938$$
$$=0.8351$$

답 ⑤

Level **2** **기본 연습** 본문 83~84쪽

1 ①	2 ④	3 ②	4 54	5 ⑤
6 ①	7 ③	8 ①		

1



$\mathrm{P}(X\le 1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{3}{8}$

$3\mathrm{P}(X\le 1)=2\mathrm{P}(X\ge a)$에서

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(a\le X\le 3)$$
$$=\frac{3}{2}\mathrm{P}(X\le 1)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{16}$$

이때 $\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$이고

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$이므로

$1<a<2$이어야 한다.

한편, $1\le x\le 2$에서 $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(a\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 3)$$
$$=\frac{1}{2}\times(2-a)\times f(a)+\frac{3}{8}=\frac{9}{16}$$

$(2-a)\left(-\frac{a}{2}+1\right)=\frac{3}{8}$, $(2-a)^2=\frac{3}{4}$에서

$a=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $a=2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$1<a<2$이므로

$a=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

답 ①

2 $0\le x\le 6$일 때, $f(x)=f(6-x)$, 즉

$f(3+x)=f(3-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 4)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)=1$

이때 $\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)$이므로

$2\mathrm{P}(4\le X\le 6)+\frac{5}{8}=1$

$\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\frac{3}{16}$

$$\mathrm{P}\left(2\le X\le\frac{5}{2}\right)=\mathrm{P}(2\le X\le 4)-\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}\le X\le 4\right)$$
$$=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{7}{2}\le X\le 4\right)=\mathrm{P}\left(2\le X\le\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{8}$

따라서

$$\mathrm{P}\left(\frac{7}{2}\le X\le 6\right)=\mathrm{P}\left(\frac{7}{2}\le X\le 4\right)+\mathrm{P}(4\le X\le 6)$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$$

답 ④

다른 풀이

$0\le x\le 6$일 때, $f(x)=f(6-x)$, 즉

$f(3+x)=f(3-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 6)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 6)=1$에서

$\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\frac{5}{8}$이므로

$\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\frac{5}{16}$

$\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}\le X\le 4\right)=\frac{1}{2}$에서

$P\left(\frac{5}{2}\le X\le 3\right)=P\left(\frac{5}{2}\le X\le 4\right)-P(3\le X\le 4)$

$=\frac{1}{2}-\frac{5}{16}=\frac{3}{16}$

이므로

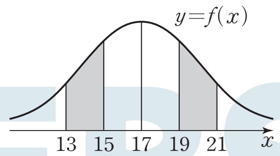
$P\left(3\le X\le \frac{7}{2}\right)=P\left(\frac{5}{2}\le X\le 3\right)=\frac{3}{16}$

따라서

$P\left(\frac{7}{2}\le X\le 6\right)=P(3\le X\le 6)-P\left(3\le X\le \frac{7}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$

3 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=17$에 대하여 대칭이고 $P(13\le X\le 15)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=13$, $x=15$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



따라서

$P(13\le X\le 15)=P(17-4\le X\le 17-2)$

$=P(17+2\le X\le 17+4)$

$=P(19\le X\le 21)$

$P(13\le X\le 15)\le P(17+a\le X\le 19+a)$ …… ㉠

에서

$15-13=(19+a)-(17+a)$

이므로 ㉠이 성립하려면

$13\le 17+a\le 19$, 즉 $-4\le a\le 2$

이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로 그 곱은

$2\times(-4)=-8$

답 ②

4 확률변수 X는 정규분포 $N\left(4, \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\frac{X-4}{\frac{1}{4}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $N\left(8, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-8}{\frac{1}{2}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(4\le X\le a)+P(Y\ge b)=\frac{1}{2}$에서

$P\left(0\le Z\le \frac{a-4}{\frac{1}{4}}\right)+P\left(Z\ge \frac{b-8}{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$

$P(0\le Z\le 4a-16)=\frac{1}{2}-P(Z\ge 2b-16)$

이때 $P(Z\ge 2b-16)\le\frac{1}{2}$이므로 $2b-16\ge 0$

$P(0\le Z\le 4a-16)=P(Z\ge 0)-P(Z\ge 2b-16)$

$=P(0\le Z\le 2b-16)$

에서

$4a-16=2b-16$, $b=2a$

$ab=\frac{81}{2}$에서 $ab=2a^2=\frac{81}{2}$

$a>0$이므로 $a=\frac{9}{2}$, $b=9$

따라서 $10a+b=10\times\frac{9}{2}+9=54$

답 54

5 확률변수 X가 정규분포 $N(10, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 8)=0.0668$이므로

$P(X\le 8)=P\left(Z\le\frac{8-10}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z\ge\frac{2}{\sigma}\right)$

$=P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)$

$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=0.0668$

에서

$P\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=0.5-0.0668=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{2}{\sigma}=1.5$, $\sigma=\frac{4}{3}$

따라서

$$\mathrm{P}(X\le 9\sigma)=\mathrm{P}\left(X\le 9\times\frac{4}{3}\right)=\mathrm{P}(X\le 12)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{12-10}{\frac{4}{3}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 1.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.5+0.4332$$
$$=0.9332$$

답 ⑤

6 조건 (가)에 의하여 확률변수 X의 평균은 20이고, 조건 (나)에 의하여 확률변수 Y의 평균은 $20-k$이다.
또한 조건 (나)에 의하여 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같으므로 표준편차를 σ라 하자.
확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma^2)$을 따르므로
$Z=\dfrac{X-20}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(16\le X\le 24)=0.6826$에서

$$\mathrm{P}(16\le X\le 24)=\mathrm{P}\left(\frac{16-20}{\sigma}\le Z\le\frac{24-20}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)=0.6826$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{4}{\sigma}\right)=0.3413$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로
$\dfrac{4}{\sigma}=1$, $\sigma=4$
한편, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20-k,\ 4^2)$을 따르므로
$Z=\dfrac{Y-(20-k)}{4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(Y\ge 31)=0.0228$에서

$$\mathrm{P}(Y\ge 31)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{31-(20-k)}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{11+k}{4}\right)$$

$\mathrm{P}(Y\ge 31)=0.0228<0.5$에서 $\dfrac{11+k}{4}>0$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{11+k}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{11+k}{4}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{11+k}{4}\right)=0.0228$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{11+k}{4}\right)=0.5-0.0228=0.4772$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로
$\dfrac{11+k}{4}=2$, $k=-3$

답 ①

7 공장에서 생산한 나사못 1개의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(16,\ 0.02^2)$을 따르고,
$Z=\dfrac{X-16}{0.02}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
나사못 1개의 길이가 15.98 이상 a 이하일 때 시판용으로 분류되고 시판용이 아닌 나사못으로 분류될 확률이 0.2255이므로 시판용으로 분류될 확률은
$1-0.2255=0.7745$
즉, $\mathrm{P}(15.98\le X\le a)=0.7745$

$$\mathrm{P}(15.98\le X\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{15.98-16}{0.02}\le Z\le\frac{a-16}{0.02}\right)$$
$$\mathrm{P}(15.98\le X\le a)=\mathrm{P}\left(-1\le Z\le\frac{a-16}{0.02}\right)$$

$\mathrm{P}(15.98\le X\le a)=0.7745>0.5$이므로 $\dfrac{a-16}{0.02}>0$

$$\mathrm{P}\left(-1\le Z\le\frac{a-16}{0.02}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-16}{0.02}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-16}{0.02}\right)$$
$$=0.3413+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-16}{0.02}\right)=0.7745$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-16}{0.02}\right)=0.7745-0.3413=0.4332$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로
$\dfrac{a-16}{0.02}=1.5$
따라서 $a=16.03$

답 ③

8 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$이므로 주사위를 72번 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=72\times\frac{2}{3}=48$

$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=16$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-48}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

게임을 72번 반복하여 얻은 모든 점수의 합을 확률변수 Y라 하면

$Y=1\times X+3\times(72-X)=-2X+216$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 104)&=\mathrm{P}(-2X+216\le 104)\\&=\mathrm{P}(X\ge 56)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{56-48}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

Level

3 실력 완성

본문 85쪽

1 ② 2 ① 3 ④

1 $\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(X\ge 1)=1$이고

$\mathrm{P}(X\ge 1)-\mathrm{P}(X\le 1)=\frac{1}{4}$이므로

$2\mathrm{P}(X\le 1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

즉, $\mathrm{P}(X\le 1)=\frac{3}{8}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(X\le 1)=\frac{1}{2}\times 1\times c=\frac{c}{2}$

㉠에서 $\frac{c}{2}=\frac{3}{8}$, $c=\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge b)&=\frac{1}{2}\times(a-b)\times c\\&=\frac{1}{2}\times(a-b)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}(a-b)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{16}$

이때 $\mathrm{P}(X\ge b)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형 중 삼각형의 넓이이고

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{a+b}{2}\right)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\frac{a+b}{2}$로 둘러싸인 도형 중 삼각형의 넓이이다.

따라서 삼각형의 닮음비를 이용하면

$\mathrm{P}(X\ge b):\mathrm{P}\left(X\ge\frac{a+b}{2}\right)=(a-b)^2:\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2$

이므로

$\frac{3}{8}(a-b):\frac{1}{16}=(a-b)^2:\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$3(a-b):\frac{1}{2}=1:\frac{1}{4}$

즉, $a-b=\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\{a+(b-1)\}\times\frac{3}{4}=1$

$a+b-1=\frac{8}{3}$, $a+b=\frac{11}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

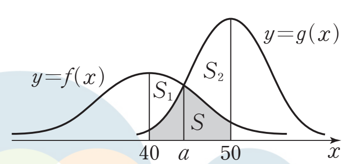
$a=\frac{13}{6}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서

$a(b-c)=\frac{13}{6}\times\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{13}{8}$

답 ②

2



$40<x<50$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 a라 하자.

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=40$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=50$으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합을 S라 하면

$S_1=\mathrm{P}(40\le X\le 50)-S$

$S_2=\mathrm{P}(40\le Y\le 50)-S$

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=\mathrm{P}(40\le Y\le 50)-\mathrm{P}(40\le X\le 50)\\&=0.1359\end{aligned}$$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-40}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-50}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(40\le Y\le 50)&=\mathrm{P}\left(\frac{40-50}{\sigma}\le Z\le\frac{50-50}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{10}{\sigma}\le Z\le 0\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(40\le X\le 50)&=\mathrm{P}\left(\frac{40-40}{10}\le Z\le\frac{50-40}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.1359+0.3413=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{10}{\sigma}=2,\ \sigma=5$

답 ①

3 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(t^2,\ \left(\dfrac{1}{t}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-t^2}{\frac{1}{t}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}f(t)&=\mathrm{P}(X\le 3)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3-t^2}{\frac{1}{t}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 3t-t^3)\end{aligned}$$

$g(t)=3t-t^3$이라 하자.

함수 $f(t)$가 최댓값을 갖기 위해서는 $g(t)=3t-t^3\ (t>0)$이 최댓값을 가져야 한다.

$g'(t)=3-3t^2=3(1+t)(1-t)$

$g'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

$t>0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

$t=1$에서 함수 $g(t)$는 극대이면서 최대이고 최댓값은 $g(1)=3\times 1-1^3=2$이다.

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최대이고 최댓값은

$$\begin{aligned}f(1)&=\mathrm{P}(X\le 3)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ④

07 통계적 추정

유제 본문 89~95쪽

1 ④ 2 ② 3 ① 4 ⑤ 5 ③
6 ③ 7 64

1 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}=2$

인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)일 때이므로

$$P(\overline{X}=2)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{3+4+3}{64}$$
$$=\frac{5}{32}$$

답 ④

2 $E(X)=1\times\dfrac{2}{5}+3\times\dfrac{1}{2}+5\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{12}{5}$

$E(X^2)=1^2\times\dfrac{2}{5}+3^2\times\dfrac{1}{2}+5^2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{37}{5}$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{37}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2$$
$$=\frac{41}{25}$$

따라서 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{41}{25}$$
$$=\frac{41}{100}$$

답 ②

3 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 확인한 카드에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{2}+2^2\times\dfrac{1}{3}+3^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{10}{3}$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 크기가 10인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

답 ①

4 음료 한 캔의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(190, 12^2)$을 따른다.

이때 크기가 4인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=E(X)=190$

$V(\overline{X})=\dfrac{V(X)}{4}=\dfrac{12^2}{4}=6^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(190, 6^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-190}{6}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(\overline{X}\le 187)=P\left(Z\le\frac{187-190}{6}\right)$$
$$=P(Z\le -0.5)$$
$$=P(Z\ge 0.5)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5-0.1915$$
$$=0.3085$$

답 ⑤

5 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르고, 표본의 크기가 36이므로

$E(\overline{X})=E(X)=m$

$V(\overline{X})=\dfrac{V(X)}{36}=\left(\dfrac{\sigma}{6}\right)^2$

즉, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \le \frac{\sigma}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{\frac{\sigma}{2}-m}{\frac{\sigma}{6}}\right)=0.5$$

에서 $\frac{\sigma}{2}-m=0$이므로

$m=\frac{\sigma}{2}$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{\sigma}{2}, \sigma^2\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X \ge 4)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{4-\frac{\sigma}{2}}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{4}{\sigma}-\frac{1}{2}\right)$$

$\mathrm{P}(X \ge 4)<0.5$이므로 $\frac{4}{\sigma}-\frac{1}{2}>0$

$\mathrm{P}(X \ge 4)=0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{\sigma}-\frac{1}{2}\right)=0.1587$이므로

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{\sigma}-\frac{1}{2}\right)=0.5-0.1587=0.3413$

$\frac{4}{\sigma}-\frac{1}{2}=1$이므로

$\sigma=\frac{8}{3}$

따라서 $m=\frac{4}{3}$이므로

$m+\sigma=4$

답 ③

6 크기가 36인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}} \le m \le \overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$

이므로

$\overline{x}-0.43\sigma \le m \le \overline{x}+0.43\sigma$

$\overline{x}-0.43\sigma=364.2$, $\overline{x}+0.43\sigma=368.5$

$0.86\sigma=4.3$

따라서 $\sigma=5$

답 ③

7 크기가 n인 표본으로부터 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}}$

이므로

$a=\overline{x}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{x}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}}$

$b-a=2\times1.96\times\frac{16}{\sqrt{n}}=7.84$이므로

$\sqrt{n}=8$

따라서 $n=64$

답 64

Level 1 기초 연습

본문 96~97쪽

1 ④	2 ②	3 ③	4 ②	5 90
6 ③	7 ⑤	8 ①		

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$, $a=\frac{1}{3}$

모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 (X_1, X_2, X_3)이라 하면 $\overline{X}=9a$, 즉 $\overline{X}=3$인 경우는

$(1, 1, 7)$, $(1, 7, 1)$, $(7, 1, 1)$, $(3, 3, 3)$일 때이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{13}{72}$$

답 ④

2 $\mathrm{E}(X)=3$, $\mathrm{E}(X^2)=25$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=25-3^2=16$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

따라서 $\sigma(\overline{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

3 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=5$이므로

$a\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+8\times\frac{3}{8}=\frac{a}{4}+\frac{9}{2}=5$

$a=2$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{3}{8}+8^2\times\frac{3}{8}-5^2$

$=6$

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{8}=\frac{3}{4}$

따라서

$V(a\overline{X}+3)=V(2\overline{X}+3)$

$=2^2\times V(\overline{X})$

$=2^2\times\frac{3}{4}=3$

답 ③

4 정규분포 $N(8, 3^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면

$E(\overline{X})=E(X)=8$

$V(\overline{X})=\frac{3^2}{25}=\left(\frac{3}{5}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(8, \left(\frac{3}{5}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-8}{\frac{3}{5}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(8-a\le\overline{X}\le 8+a)=0.9876$에서

$P(8-a\le\overline{X}\le 8+a)=P\left(\frac{-a}{\frac{3}{5}}\le Z\le\frac{a}{\frac{3}{5}}\right)$

$=P\left(-\frac{5}{3}a\le Z\le\frac{5}{3}a\right)$

$=2P\left(0\le Z\le\frac{5}{3}a\right)=0.9876$

즉, $P\left(0\le Z\le\frac{5}{3}a\right)=0.4938$

이때 $P(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$\frac{5}{3}a=\frac{5}{2}$, $a=\frac{3}{2}$

답 ②

5 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $N(m, 12^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{12}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 86)=P\left(Z\le\frac{86-m}{12}\right)$

$=P\left(Z\ge\frac{m-86}{12}\right)$ …… ㉠

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=m$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}=\frac{12}{4}=3$

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{X}-m}{3}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge 91)=P\left(Z\ge\frac{91-m}{3}\right)$ …… ㉡

한편, $P(X\le 86)=P(\overline{X}\ge 91)$이므로

㉠, ㉡에서

$P\left(Z\ge\frac{m-86}{12}\right)=P\left(Z\ge\frac{91-m}{3}\right)$

따라서

$\frac{m-86}{12}=\frac{91-m}{3}$

$5m=450$

이므로 $m=90$

답 90

6 정규분포 $N(14, 2^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면

$E(\overline{X})=E(X)=14$

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{4}=\frac{2^2}{4}=1$

즉, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(14, 1^2)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{X}-14}{1}=\overline{X}-14$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

정규분포 $N(8, 6^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 Y라 하면

$E(\overline{Y})=E(Y)=8$

$V(\overline{Y})=\frac{V(Y)}{9}=\frac{6^2}{9}=2^2$

즉, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(8, 2^2)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{Y}-8}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\le 15)=P(Z\le 15-14)=P(Z\le 1)$

$P(\overline{Y}\ge 10)=P\left(Z\ge\frac{10-8}{2}\right)=P(Z\ge 1)$

따라서

$$P(\overline{X}\le 15)+P(\overline{Y}\ge 10)=P(Z\le 1)+P(Z\ge 1)$$
$$=1$$

답 ③

7 이 지역 성인 1명의 휴일 여가 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(334,\ 24^2)$을 따른다. 이 지역 성인 중 임의추출한 64명의 휴일 여가 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=E(X)=334$

$\sigma(\overline{X})=\frac{24}{\sqrt{64}}=\frac{24}{8}=3$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(334,\ 3^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-334}{3}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 임의추출한 64명의 휴일 여가 시간의 평균이 331분 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 331)&=P\left(Z\le\frac{331-334}{3}\right)\\&=P(Z\le -1)\\&=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ⑤

8 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 100인 표본의 표본평균이 14.36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$14.36-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le 14.36+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$

$14.36-1.96\times\frac{\sigma}{10}\le m\le 14.36+1.96\times\frac{\sigma}{10}$

이때 $a\le m\le 15.34$이므로

$a=14.36-1.96\times\frac{\sigma}{10}$, $15.34=14.36+1.96\times\frac{\sigma}{10}$

$1.96\times\frac{\sigma}{10}=0.98$에서 $\sigma=5$

$a=14.36-1.96\times\frac{5}{10}=13.38$

따라서 $a+\sigma=13.38+5=18.38$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ① 4 ③ 5 ③
6 ④ 7 ② 8 ⑤

1 $E(\overline{X})=E(X)=10$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=2$에서

$\sigma=12$

$V(X)=\sigma^2=144$

따라서

$E(\overline{X})+V(X)=10+144=154$

답 ④

2 이 회사에서 생산하는 비누 1개의 무게의 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 표준편차가 4, 표본의 크기가 64이고, 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면

$\overline{x}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}$

이때 $93.52\le m\le a$이므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}=93.52$

$\overline{x}=93.52+0.98=94.5$

따라서

$a=\overline{x}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}=94.5+0.98=95.48$

답 ⑤

3 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 확인한 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}=11$

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=11-3^2=2\end{aligned}$$

따라서 크기가 12인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{12}=\dfrac{1}{6}$

답 ①

4 이 학교의 학생 한 명이 일주일에 사용하는 물의 양을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 36^2)$을 따른다.

이 학교의 학생 중에서 임의추출한 81명의 일주일에 사용하는 물의 양의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \dfrac{36^2}{81}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 4^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-200}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(192\le\overline{X}\le202)&=\mathrm{P}\left(\frac{192-200}{4}\le Z\le\frac{202-200}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le0.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.4772+0.1915\\&=0.6687\end{aligned}$$

답 ③

5 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{4}=\dfrac{5}{4}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=5$

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{3}+a\times\dfrac{1}{2}+6\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{a}{2}+1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{3}+a^2\times\dfrac{1}{2}+6^2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{a^2}{2}+6$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5$

$\left(\dfrac{a^2}{2}+6\right)-\left(\dfrac{a}{2}+1\right)^2=5$

$\dfrac{a^2}{4}-a=0$

이때 $0<a<6$이므로

$a=4$

따라서 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\dfrac{a}{2}+1=3$

답 ③

6 이 과수원에서 수확하는 사과 1개의 무게의 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 표준편차가 $\sigma=3$이고, 표본의 크기가 n, 표본평균이 $\overline{x}$이므로

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}$

$208.53\le m\le211.47$에서

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}=208.53$ …… ㉠

$\overline{x}+1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}=211.47$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2\times1.96\times\dfrac{3}{\sqrt{n}}=2.94$, $n=16$

$2\overline{x}=420$, $\overline{x}=210$

따라서

$n+\overline{x}=16+210=226$

답 ④

7 이 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$이라 하자.

(i) $k=1$인 경우

$\overline{X}=1$인 경우 $X_1=X_2=X_3=1$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=a^3$

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(X=1)$에서

$a^3=a$

이때 $0<a<\dfrac{6}{7}$이므로 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k=2$인 경우

$\overline{X}=2$인 경우 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$은 $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$, $(3,\ 2,\ 1)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}=2)&=6\times a\times\frac{1}{7}\times b+\left(\frac{1}{7}\right)^3\\&=\frac{6}{7}ab+\frac{1}{343}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\mathrm{P}(X=2)$에서

$\dfrac{6}{7}ab+\dfrac{1}{343}=\dfrac{1}{7}$

$ab=\dfrac{8}{49}$

이때 $a+b=\dfrac{6}{7}$이고 $a>b>0$이므로

$a=\dfrac{4}{7}$, $b=\dfrac{2}{7}$

(iii) $k=3$인 경우

$\overline{X}=3$인 경우 $X_1=X_2=X_3=3$이므로

$P(\overline{X}=3)=b^3$

$P(\overline{X}=3)=P(X=3)$에서

$b^3=b$

이때 $0<b<\frac{6}{7}$이므로 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a=\frac{4}{7}$, $b=\frac{2}{7}$

따라서 $\frac{a}{b}=2$

답 ②

8 이 지역에 살고 있는 성인 한 명이 한 달 동안 걷는 거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다.
크기가 100인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(m, \frac{\sigma^2}{100}\right)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le 75)=0.5$에서

$m=75$

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{10}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge 72)=0.9332$에서

$$P(\overline{X}\ge 72)=P\left(Z\ge \frac{72-75}{\frac{\sigma}{10}}\right)$$
$$=P\left(Z\ge -\frac{30}{\sigma}\right)$$
$$=0.9332$$

이므로

$P\left(Z\ge -\frac{30}{\sigma}\right)=0.5+P\left(0\le Z\le \frac{30}{\sigma}\right)=0.9332$

$P\left(0\le Z\le \frac{30}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{30}{\sigma}=1.5$

$\sigma=20$

따라서

$m+\sigma=75+20=95$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 100쪽

1 287 **2** 144 **3** ③

1 주어진 시행을 2번 반복하여 기록한 수를 차례로 X_1, X_2라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

이므로 $\frac{X_1+X_2}{2}=4$에서

$X_1+X_2=8$

한 번의 시행에서 기록할 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 6이므로

$X_1=2$, $X_2=6$ 또는 $X_1=4$, $X_2=4$ 또는 $X_1=6$, $X_2=2$

각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 A, 각 면에 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 B라 하자.

(i) 2를 기록할 확률

A에서 2가 나오고 B에서 3, 4, 5가 나오거나 A에서 3, 4가 나오고 B에서 2가 나오면 되므로

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

(ii) 4를 기록할 확률

A에서 4가 나오고 B에서 5가 나오면 되므로

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(iii) 6을 기록할 확률

A, B에서 같은 수가 나오면 되므로

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{16}$

(i), (ii), (iii)에서

$X_1=2$, $X_2=6$일 확률은

$\frac{5}{16}\times\frac{3}{16}=\frac{15}{256}$

$X_1=4$, $X_2=4$일 확률은

$\frac{1}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{256}$

$X_1=6$, $X_2=2$일 확률은

$\frac{3}{16}\times\frac{5}{16}=\frac{15}{256}$

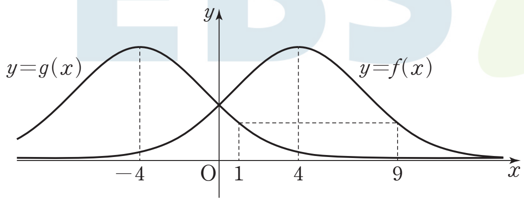
따라서

$P(\overline{X}=4)=\frac{15}{256}+\frac{1}{256}+\frac{15}{256}=\frac{31}{256}$

이므로 $p+q=256+31=287$

답 287

2 조건 (가)에서 $g(1)=f(-1)$이고 조건 (나)에서
$g(1)=f(9)$이므로 $f(-1)=f(9)$
확률변수 X가 정규분포를 따르므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이다.
즉, $m_1=\dfrac{-1+9}{2}=4$
조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(-x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.
즉, $m_2=-4$, $\sigma_1=\sigma_2$



확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(4, \left(\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-4}{\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(-4, \left(\dfrac{\sigma_1}{4}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{Y}+4}{\dfrac{\sigma_1}{4}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 3)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{3-4}{\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le -\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)$,

$\mathrm{P}(\overline{Y}\ge -1)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{-1+4}{\dfrac{\sigma_1}{4}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{12}{\sigma_1}\right)$

에서 $\mathrm{P}\left(Z\le -\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{12}{\sigma_1}\right)$이므로 $\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_1}=\dfrac{12}{\sigma_1}$

따라서 $n=144$

답 144

3 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le \overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}$
$\overline{x_1}-0.28\sigma=154.25$, $\overline{x_1}+0.28\sigma=a$ …… ㉠
모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은
$\overline{x_2}-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le \overline{x_2}+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{36}}$
$\overline{x_2}-0.43\sigma=b$, $\overline{x_2}+0.43\sigma=182.65$ …… ㉡

㉠, ㉡에서
$(\overline{x_2}+0.43\sigma)-(\overline{x_1}-0.28\sigma)=182.65-154.25$
$\overline{x_2}-\overline{x_1}+0.71\sigma=28.4$
$0.71\sigma=28.4-(\overline{x_2}-\overline{x_1})=28.4-21.3=7.1$
즉, $\sigma=10$
㉠, ㉡에서
$(\overline{x_2}+0.43\times 10)+(\overline{x_1}-0.28\times 10)=182.65+154.25$
즉, $\overline{x_2}+\overline{x_1}=335.4$
따라서
$a+b=(\overline{x_1}+0.28\times 10)+(\overline{x_2}-0.43\times 10)$
$=335.4+2.8-4.3=333.9$

답 ③

memo