수능특강

수학영역 **수학Ⅱ**

정답과 풀이

01 함수의 극한

유제

본문 5~11쪽

1 ④	2 ②	3 ③	4 36	5 ②
6 ③	7 ①	8 ④		

1 $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(-x)=-a$,

$\lim_{x\to a+1} f(x)=\lim_{x\to a+1} x=a+1$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+1} f(x)+3$에서

$-a=(a+1)+3$

따라서 $a=-2$

답 ④

2 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$

$\lim_{x\to 0+} f(x+1)$에서 $x+1=t$로 놓으면

$x\to 0+$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x+1)=\lim_{t\to 1+} f(t)=0$

따라서

$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(x+1)=1+0=1$

답 ②

3 $$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left\{(x+1)f(x)\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)f(x)\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{g(x)}{2x+1}\times(2x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{2x+1}\times\lim_{x\to 1}(2x+1)$$
$$=\frac{1}{9}\times 3=\frac{1}{3}$$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to 1} g(x)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$$

답 ③

4 $$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}^2$$
$$=\lim_{x\to 1}[\{f(x)-g(x)\}^2+4f(x)g(x)]$$
$$=\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}^2+4\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$$
$$=\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}\times\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}+4\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$$
$$=\left(-\frac{7}{6}\right)\times\left(-\frac{7}{6}\right)+4\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{49}{36}-\frac{4}{3}=\frac{1}{36}$$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{f(x)+g(x)}\right\}^2=\frac{1}{\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}^2}=36$$

답 36

5 $x^3+3x^2+5x+3=(x+1)(x^2+2x+3)$

이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+5x+3}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+2x+3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x^2+2x+3)$$
$$=1-2+3=2$$

답 ②

6 $f(a)=\overline{OA}=\sqrt{a^2+(2a-1)^2}=\sqrt{5a^2-4a+1}$,

$g(a)=\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$\lim_{a\to 1}\frac{f(a)-g(a)}{a-1}$$
$$=\lim_{a\to 1}\frac{\sqrt{5a^2-4a+1}-\sqrt{2}}{a-1}$$
$$=\lim_{a\to 1}\frac{(\sqrt{5a^2-4a+1}-\sqrt{2})(\sqrt{5a^2-4a+1}+\sqrt{2})}{(a-1)(\sqrt{5a^2-4a+1}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{a\to 1}\frac{5a^2-4a-1}{(a-1)(\sqrt{5a^2-4a+1}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{a\to 1}\frac{(a-1)(5a+1)}{(a-1)(\sqrt{5a^2-4a+1}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{a\to 1}\frac{5a+1}{\sqrt{5a^2-4a+1}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

7 $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x+1}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -1}(\sqrt{x+a}-2)=\sqrt{a-1}-2=0$이므로

$\sqrt{a-1}=2$에서 $a=5$

㉠에서

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{x+5}+2}=\frac{1}{4}$$

이므로 $b=\frac{1}{4}$

따라서 $a+b=5+\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$

답 ①

8 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(ax)^2+ax-2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(ax+2)(ax-1)}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to 1$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값 b가 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}(ax+2)(ax-1)=(a+2)(a-1)=0$이므로

$a=-2$ 또는 $a=1$

이때 $a>0$이므로

$a=1$

㉠에서

$b=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$

따라서

$a+b=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 12~13쪽

1 ②	2 ①	3 2	4 ④	5 ④
6 ④	7 ③	8 ⑤		

1 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=-4$

답 ②

2 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to 0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 2-}f(x)=3$이고,

$\lim_{x\to 0+}(2x+3)=3$, $\lim_{x\to 2-}(x^2-2)=2$이므로

$\lim_{x\to 0+}(2x+3)f(x)+\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{x^2-2}$

$=\lim_{x\to 0+}(2x+3)\times\lim_{x\to 0+}f(x)+\frac{\lim_{x\to 2-}f(x)}{\lim_{x\to 2-}(x^2-2)}$

$=3\times(-1)+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$

답 ①

3 $a<-1$이면 $x\to a+$일 때, $f(x)=2x+8$

$a\ge -1$이면 $x\to a+$일 때, $f(x)=x^2+2$

이므로 $a<-1$, $a\ge -1$인 경우로 나누어 생각하자.

(i) $a<-1$일 때,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(2x+8)=2a+8$

이므로 $2a+8=6$에서 $a=-1$

이때 $a<-1$이므로 $a=-1$이 될 수 없다.

(ii) $a\ge -1$일 때,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(x^2+2)=a^2+2$

이므로 $a^2+2=6$에서 $a=-2$ 또는 $a=2$

이때 $a\ge -1$이므로 $a=2$

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

답 2

4 $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)f(x)$

$=\lim_{x\to 2}\left\{(x^2-x-2)f(x)\times\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)f(x)\times\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)f(x)\times\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)f(x)\times\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}$

$=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

답 ④

5 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2-5ax+4a^2}\left(\frac{a}{x}-1\right)$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{1}{(x-a)(x-4a)}\times\frac{-(x-a)}{x}\right\}$

$=\lim_{x\to a}\frac{-1}{x(x-4a)}$

$=\frac{-1}{a\times(-3a)}=\frac{1}{3a^2}$

이므로 $\frac{1}{3a^2}=\frac{1}{30}$에서

$a^2=10$

답 ④

6 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=3$ …… ㉠

㉠에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $g(x)$에 대하여

$f(x)=(x-1)g(x)$ …… ㉡

로 놓을 수 있다.

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)g(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=3$ …… ㉢

㉢에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 다항식 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. 따라서 ㉡에서

$f(x)=(x-1)^2(x+a)$ (a는 상수) …… ㉣

로 놓을 수 있다.

㉣을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+a)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}(x+a)$

$=1+a=3$

이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$이므로

$f(2)=4$

답 ④

7 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{3x+a}-x}=b$ …… ㉠

㉠에서 $x\to 2$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 2}(\sqrt{3x+a}-x)=\sqrt{6+a}-2=0$

$\sqrt{6+a}=2$에서 $a=-2$

㉠에서

$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+x)}{(\sqrt{3x-2}-x)(\sqrt{3x-2}+x)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+x)}{(\sqrt{3x-2})^2-x^2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+x)}{-x^2+3x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+x)}{-(x-1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}+x}{-(x-1)}=-4$

이므로 $b=-4$

따라서 $ab=(-2)\times(-4)=8$

답 ③

8 $2x^2-1\le f(x)-g(x)\le 2x^2+1$,

$3x^2-1\le f(x)+g(x)\le 3x^2+1$에서

$5x^2-2\le 2f(x)\le 5x^2+2$

$\frac{5}{2}x^2-1\le f(x)\le\frac{5}{2}x^2+1$

모든 실수 x에 대하여 $4x^2+1>0$이므로

$\frac{\frac{5}{2}x^2-1}{4x^2+1}\le\frac{f(x)}{4x^2+1}\le\frac{\frac{5}{2}x^2+1}{4x^2+1}$

$\frac{5x^2-2}{8x^2+2}\le\frac{f(x)}{4x^2+1}\le\frac{5x^2+2}{8x^2+2}$

이때

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{8x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x^2}}{8+\frac{2}{x^2}}=\frac{5}{8}$,

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{8x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}}{8+\frac{2}{x^2}}=\frac{5}{8}$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x^2+1}=\frac{5}{8}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 14~15쪽

1 ②	**2** ②	**3** ⑤	**4** ⑤	**5** 32
6 22	**7** ①	**8** ④		

1 $$f(x)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{(x+k-1)(x+k)}$$
$$=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{x+k-1}-\frac{1}{x+k}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{6}{x(x+6)}$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2-1)f(x)=6\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x(x+6)}$$
$$=6\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{6}{x}}$$
$$=6\times3=18$$

답 ②

2 $$\lim_{x\to2-}\frac{|x-2|(x^2+ax+3)}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{-(x-2)(x^2+ax+3)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{-(x^2+ax+3)}{x+1}=-\frac{2a+7}{3}\quad\cdots\cdots ㉠$$
$$\lim_{x\to2+}\frac{|x-2|(x^2+ax+3)}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x^2+ax+3)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax+3}{x+1}=\frac{2a+7}{3}\quad\cdots\cdots ㉡$$

이때 $\lim_{x\to2}\frac{|x-2|(x^2+ax+3)}{x^2-x-2}$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{|x-2|(x^2+ax+3)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{|x-2|(x^2+ax+3)}{x^2-x-2}$$

㉠, ㉡에서

$$-\frac{2a+7}{3}=\frac{2a+7}{3}$$
$$a=-\frac{7}{2}$$

$\lim_{x\to2}\frac{|x-2|(x^2+ax+3)}{x^2-x-2}=0$이므로

$b=0$

따라서 $a+b=-\frac{7}{2}+0=-\frac{7}{2}$

답 ②

3 $$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{ax+b}-3}=c\quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to1$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to0$이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{ax+b}-3)=\sqrt{a+b}-3=0$$

$\sqrt{a+b}=3$에서 $a+b=9$

$b=9-a\quad\cdots\cdots ㉡$

이때

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{ax+b}-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{ax+b}+3)}{(\sqrt{ax+b}-3)(\sqrt{ax+b}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{ax+b}+3)}{ax+b-9}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{ax+9-a}+3)}{ax+(9-a)-9}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{ax+9-a}+3)}{a(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax+9-a}+3}{a}$$
$$=\frac{\sqrt{9}+3}{a}=\frac{6}{a}$$

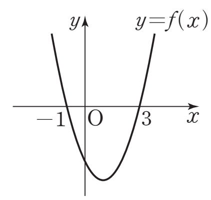
이므로 ㉠에서 $\frac{6}{a}=c\quad\cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 8, 6)$, $(2, 7, 3)$, $(3, 6, 2)$, $(6, 3, 1)$이므로 $a+b+c$의 값은 $a=1$, $b=8$, $c=6$일 때 최대이고 최댓값은 15이다.

답 ⑤

4 $f(x)=x^2-2x-3$
$=(x-3)(x+1)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$$g(x)=\begin{cases}x^2-2x-2 & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge3)\\ -x^2+2x+1 & (-1<x<3)\end{cases}$$

이고

$$\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to-1+}(-x^2+2x+1)$$
$$=-1-2+1=-2$$
$$\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}(x^2-2x-2)$$
$$=9-6-2=1$$

이므로

$$\lim_{x\to-1+}g(x)+\lim_{x\to3+}g(x)=-2+1=-1$$

답 ⑤

5 조건 (가)에서 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{4x^2-1}$의 0이 아닌 극한값이 존재하고 분모인 $4x^2-1$이 이차함수이므로 함수 $f(x)$도 이차함수이다. 따라서

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0$)

으로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{4x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+c}{4x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{4-\frac{1}{x^2}} = \frac{a}{4}$$

이므로 $\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$에서 $a=2$

조건 (나)의

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{f(x)} = \frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

에서 $x \to \frac{1}{2}$일 때 (분자) $\to$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to$ 0이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

따라서 $f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+k)$ (k는 상수)로 놓으면

㉠에서

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{f(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+k)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+k} = \frac{2}{\frac{1}{2}+k} = \frac{4}{1+2k}$$

이므로 $\frac{4}{1+2k}=\frac{1}{3}$에서 $k=\frac{11}{2}$

따라서 $f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{11}{2}\right)$이므로

$f\left(\frac{5}{2}\right)=2 \times 2 \times 8=32$

답 32

6 조건 (가)에서 집합 $\{-1, 1, 2\}$의 모든 원소 a에 대하여

$\lim_{x \to a} \frac{xf(x)-2a}{x-a}$의 값이 존재하고, $x \to a$일 때

(분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다. 즉,

$\lim_{x \to a} \{xf(x)-2a\} = af(a)-2a=0$

이때 $a \in \{-1, 1, 2\}$에서 $a \neq 0$이므로

$f(a)-2=0$

따라서

$f(x)-2=k(x+1)(x-1)(x-2)$, 즉

$f(x)=k(x+1)(x-1)(x-2)+2$ (k는 상수, $k \neq 0$)

으로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-1}{f(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-1}{k(x+1)(x-1)(x-2)+2} = \frac{2}{8k+2} = \frac{1}{4k+1}$$

이므로 $\frac{1}{4k+1}=-1$에서 $k=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)+2$이므로

$f(-3)=-\frac{1}{2} \times (-2) \times (-4) \times (-5)+2=22$

답 22

7 이차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} g(x)=g(a)$이므로 조건 (가)에서

$\left\{a \,\middle|\, \lim_{x \to a} g(x)=0\right\} = \{a \mid g(a)=0\} = \{-1\}$

따라서 $g(x)=k(x+1)^2$ (k는 상수, $k \neq 0$) $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

으로 놓을 수 있다.

이때 일차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 k인 이차함수이고

$\lim_{x \to b} \frac{1}{g(x)-f(x)}$의 값이 존재하지 않으려면

$\lim_{x \to b} \{g(x)-f(x)\}=0$, 즉 $g(b)-f(b)=0$이어야 한다.

그러므로 조건 (나)에서

$\left\{b \,\middle|\, \lim_{x \to b} \frac{1}{g(x)-f(x)}\text{의 값이 존재하지 않는다.}\right\}$

$=\{b \mid g(b)-f(b)=0\}$

$=\{-2, 1\}$

이므로 이차방정식 $g(x)-f(x)=0$의 두 근은 -2, 1이다.

따라서

$g(x)-f(x)=k(x+2)(x-1)$

이므로

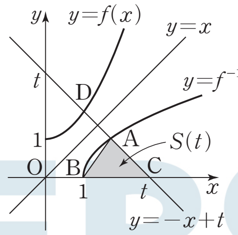
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)-k(x+2)(x-1) \\ &= k(x+1)^2-k(x+2)(x-1) \\ &= k(x+3) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $f(3)=6k$, $g(0)=k$이므로

$\frac{f(3)}{g(0)}=\frac{6k}{k}=6$

답 ①

8 직선 $y=-x+t\ (t>1)$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 D라 하자.



함수 $f(x)=x^2+1(x\geq 0)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A의 y좌표와 점 D의 x좌표는 같다.

점 D의 x좌표는

$x^2+1=-x+t$, 즉 $x^2+x+1-t=0$에서

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{4t-3}}{2}$$

이때 $x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{4t-3}}{2}$

따라서 점 A의 y좌표는 $\dfrac{-1+\sqrt{4t-3}}{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(t-1)\times\frac{-1+\sqrt{4t-3}}{2}$$
$$=\frac{(t-1)(\sqrt{4t-3}-1)}{4}$$

따라서

$$\lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{(t-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 1+}\frac{\sqrt{4t-3}-1}{t-1}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to 1+}\frac{(\sqrt{4t-3}-1)(\sqrt{4t-3}+1)}{(t-1)(\sqrt{4t-3}+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to 1+}\frac{4(t-1)}{(t-1)(\sqrt{4t-3}+1)}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{1}{\sqrt{4t-3}+1}=\frac{1}{2}$$

답 ④

Level
3 실력 완성

본문 16쪽

1 12 **2** 14 **3** 4

1 $g(x)$는 삼차함수이므로 $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)\ (-3<a<3)$

(i) $-3<a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $1<a<3$일 때,

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이고, $f(a)\neq 0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to a}g(x)}{\lim_{x\to a}f(x)}=\frac{g(a)}{f(a)}$$

따라서 $-3<a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $1<a<3$일 때,

$\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

(ii) $a=0$일 때,

$\lim_{x\to 0-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0+}f(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 0-}g(x)}{\lim_{x\to 0-}f(x)}=\frac{g(0)}{-1}=-g(0),$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 0+}g(x)}{\lim_{x\to 0+}f(x)}=\frac{g(0)}{1}=g(0)$$

이때 $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}$$

즉, $-g(0)=g(0)$에서

$g(0)=0$

따라서 삼차다항식 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다. …… ㉠

(iii) $a=1$일 때,

$\lim_{x\to 1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=2$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 1+}g(x)}{\lim_{x\to 1+}f(x)}=\frac{g(1)}{2}$$

이때 $\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1+}\dfrac{g(x)}{f(x)}$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to 1-}g(x)=g(1)=0$이어야 한다.

따라서 삼차다항식 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$g(x)=x(x-1)(x+k)$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

그러므로 $\lim_{x\to 1+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{g(1)}{2}=0$이고,

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ …… ㉢

$\lim_{x\to 1-}f(x)=0$에서 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=0$이므로

$\alpha=1$ 또는 $\beta=1$ 또는 $\gamma=1$

이때 α, β, γ는 서로 다른 상수이므로

$\alpha=1$, $\beta\neq 1$, $\gamma\neq 1$, $\beta\neq\gamma$라 하면 ㉢에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{x(x-1)(x+k)}{(x-1)(x-\beta)(x-\gamma)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x(x+k)}{(x-\beta)(x-\gamma)}=0$$

이때 $\lim_{x\to1-}(x-\beta)(x-\gamma)=(1-\beta)(1-\gamma)\neq0$이므로

$\lim_{x\to1-}x(x+k)=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}x(x+k)=1\times(1+k)=0$에서 $k=-1$

따라서 $g(x)=x(x-1)^2$이므로

$g(3)=3\times4=12$

답 12

2 조건 (가)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+f(-x)}{x-a}$의 값이 존재하고, $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to a}\{f(x)+f(-x)\}=f(a)+f(-a)=0$

이므로 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 a에 대하여

$f(-a)=-f(a)$를 만족시킨다.

따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$f(x)=px^3+qx$ (p, q는 상수, $p\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

조건 (나)의

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=f(1)+2=p+q+2=0$에서

$$q=-(p+2) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{px^3+qx+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{px^3-(p+2)x+2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(px^2+px-2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(px^2+px-2)$$
$$=2p-2=4$$

이므로 $p=3$이고, ㉡에서 $q=-5$

따라서 $f(x)=3x^3-5x$이므로

$f(2)=24-10=14$

답 14

3 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

점 B의 좌표를 B$(t,\ mt)$ $(t>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{t^2+(mt)^2}=t\sqrt{1+m^2}$

이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로

$4\sqrt{2}=t\sqrt{1+m^2}$에서

$$t=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{4\sqrt{2}m}{\sqrt{1+m^2}}\right)$이고, 점 C의 x좌표는 $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$이다.

또 직선 OA의 방정식은 $y=x$이고, 점 C가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 C의 y좌표는 $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$이다.

따라서

$$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{4\sqrt{2}m}{\sqrt{1+m^2}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{4\sqrt{2}(m-1)}{\sqrt{1+m^2}}$$

한편, 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=4-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{4(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{2})}{\sqrt{1+m^2}}$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이 $S(m)$은

$$S(m)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}(m-1)}{\sqrt{1+m^2}}\times\frac{4(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{2})}{\sqrt{1+m^2}}$$
$$=\frac{8\sqrt{2}(m-1)(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{2})}{1+m^2}$$

따라서

$$\lim_{m\to1+}\frac{S(m)}{(m-1)^2}$$
$$=\lim_{m\to1+}\frac{8\sqrt{2}(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{2})}{(1+m^2)(m-1)}$$
$$=\lim_{m\to1+}\frac{8\sqrt{2}(\sqrt{1+m^2}-\sqrt{2})(\sqrt{1+m^2}+\sqrt{2})}{(1+m^2)(m-1)(\sqrt{1+m^2}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{m\to1+}\frac{8\sqrt{2}(m^2-1)}{(1+m^2)(m-1)(\sqrt{1+m^2}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{m\to1+}\frac{8\sqrt{2}(m-1)(m+1)}{(1+m^2)(m-1)(\sqrt{1+m^2}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{m\to1+}\frac{8\sqrt{2}(m+1)}{(1+m^2)(\sqrt{1+m^2}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{8\sqrt{2}\times2}{2\times2\sqrt{2}}=4$$

답 4

02 함수의 연속

유제 본문 19~23쪽

1 ③ 2 2 3 ④ 4 ④ 5 ③
6 13

1 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)=f(-1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}(2x^2-ax)=2+a$,

$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(ax-4)=-a-4$,

$f(-1)=-a-4$

이므로 $2+a=-a-4$

따라서 $a=-3$

답 ③

2 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2|x|}{|x|}\\&=\lim_{x\to0}\frac{|x|^2+2|x|}{|x|}\\&=\lim_{x\to0}(|x|+2)=2\end{aligned}$$

이때 $f(0)=a$이므로 $a=2$

답 2

3 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{g(1)}{f(1)}$

이어야 한다.

$\lim_{x\to1-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\dfrac{2x+a}{x^2-3x+4}=\dfrac{a+2}{2}$,

$\lim_{x\to1+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\dfrac{2x+a}{3}=\dfrac{a+2}{3}$,

$\dfrac{g(1)}{f(1)}=\dfrac{a+2}{3}$

이므로 $\dfrac{a+2}{2}=\dfrac{a+2}{3}$

따라서 $a=-2$

답 ④

4 함수 $f(x)f(-x)$가 $x=2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to2-} f(x)f(-x)=\lim_{x\to2+} f(x)f(-x)=f(2)f(-2)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}(ax^2-3)=4a-3$

$\lim_{x\to2-} f(-x)=\lim_{s\to-2+} f(s)=\lim_{s\to-2+}(as^2-3)=4a-3$

$\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2+}(-x+3a)=3a-2$

$\lim_{x\to2+} f(-x)=\lim_{t\to-2-} f(t)=\lim_{t\to-2-}(-t+3a)=3a+2$

이므로

$\lim_{x\to2-} f(x)f(-x)=(4a-3)\times(4a-3)=16a^2-24a+9$

$\lim_{x\to2+} f(x)f(-x)=(3a-2)(3a+2)=9a^2-4$

$f(2)f(-2)=(4a-3)\times(4a-3)=16a^2-24a+9$

따라서 $16a^2-24a+9=9a^2-4$, $7a^2-24a+13=0$

이차방정식 $7a^2-24a+13=0$에서

$a=\dfrac{12-\sqrt{53}}{7}$ 또는 $a=\dfrac{12+\sqrt{53}}{7}$

이므로 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$\dfrac{12-\sqrt{53}}{7}+\dfrac{12+\sqrt{53}}{7}=\dfrac{24}{7}$

답 ④

5 함수 $f(x)=2x^3+3x+k$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $f(x)$가 역함수를 가지므로 일대일대응이고, 방정식 $f(x)=0$의 오직 하나의 실근인 α가 열린구간 $(-1, 2)$에 속하려면 사잇값의 정리에 의하여

$f(-1)f(2)<0$을 만족시켜야 한다.

$f(-1)=-2-3+k=k-5$

$f(2)=16+6+k=k+22$

이므로

$f(-1)f(2)=(k-5)(k+22)<0$에서

$-22<k<5$

따라서 정수 k의 값은 $-21, -20, -19, \cdots, 4$이므로 그 개수는 26이다.

답 ③

6 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)(x-4)} & (x\neq-1,\ x\neq4)\\ 1 & (x=-1 \text{ 또는 } x=4)\end{cases}$ 에서

$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}\dfrac{1}{(x+1)(x-4)}$

$=\infty$(발산) …… ㉠

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}\frac{1}{(x+1)(x-4)}$$
$$=-\infty(\text{발산}) \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}\frac{1}{(x+1)(x-4)}$$
$$=-\infty(\text{발산}) \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+}\frac{1}{(x+1)(x-4)}$$
$$=\infty(\text{발산}) \quad \cdots\cdots ㉣$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=4$에서 불연속이고, $x\neq-1$, $x\neq4$인 모든 실수 x에서 연속임을 알 수 있다.

(ⅰ) $a+1<-1$ 또는 $a-1>4$, 즉 $a<-2$ 또는 $a>5$일 때,
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

(ⅱ) $a+1<4$, $a-1>-1$, 즉 $0<a<3$일 때,
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

(ⅲ) $a-1\le-1\le a+1$, 즉 $-2\le a\le0$일 때,
$x=-1$이 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에 포함되므로 ㉠, ㉡에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않는다.

(ⅳ) $a-1\le4\le a+1$, 즉 $3\le a\le5$일 때,
$x=4$가 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에 포함되므로 ㉢, ㉣에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a-1,\ a+1]$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여
$a<-2$ 또는 $0<a<3$ 또는 $a>5$
따라서 정수 a $(-10<a<10)$의 값은 -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, 1, 2, 6, 7, 8, 9이므로 그 개수는 13이다.

답 13

Level 1 **기초 연습** 본문 24~25쪽

1 ⑤	2 ④	3 ②	4 ④	5 ③
6 ①	7 ②	8 ⑤		

1 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to-2} f(x)=f(-2)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}(3x+a)=-6+a$$
$$f(-2)=4$$
이므로 $-6+a=4$에서 $a=10$

답 ⑤

2 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$이다.

$\lim_{x\to3}(4x-2)f(x)=8$에서

$$\lim_{x\to3}(4x-2)f(x)=\lim_{x\to3}(4x-2)\times\lim_{x\to3}f(x)$$
$$=(4\times3-2)f(3)$$
$$=10f(3)$$

이므로 $10f(3)=8$

따라서 $f(3)=\frac{4}{5}$

답 ④

3 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2+ax+b}$이 $x=-2$와 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=1$에서 정의되지 않는다.
즉, $x=-2$와 $x=1$은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(-2)+1=-a$, $(-2)\times1=b$이므로
$a=1$, $b=-2$
따라서 $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$이므로

$$\lim_{x\to1}(x^2+a+b)f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{(x^2-1)\times\frac{1}{x^2+x-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{(x+1)(x-1)\times\frac{1}{(x+2)(x-1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$$

답 ②

4 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{\sqrt{x+3}-2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+5)(\sqrt{x+3}+2)$$
$$=6\times4=24,$$

$f(1)=a$

이므로 $a=24$

답 ④

5 $x\neq2$일 때,

$f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{x-2}=x^2+x+1$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$이다.

따라서

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$

$=\lim_{x\to2}(x^2+x+1)=7$

답 ③

6 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to1+}\{f(x)\}^2=\{f(1)\}^2$이어야 한다.

$\lim_{x\to1-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to1-}(3x+a)^2$

$=(3+a)^2=a^2+6a+9$,

$\lim_{x\to1+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to1+}(x^2-3)^2$

$=(-2)^2=4$,

$\{f(1)\}^2=(-2)^2=4$

이므로 $a^2+6a+9=4$에서

$a^2+6a+5=0$, $(a+5)(a+1)=0$

$a=-5$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-5+(-1)=-6$

답 ①

7 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}(x+a)(x^2+2x+a)$

$=(-1+a)\times(-1+a)$

$=a^2-2a+1$,

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}(2x-1)(x^2+2x+a)$

$=-3\times(-1+a)$

$=-3a+3$,

$f(-1)g(-1)=-3\times(-1+a)=-3a+3$

이므로 $a^2-2a+1=-3a+3$에서

$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+1=-1$

답 ②

8 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to0-}f(x)=6$, $\lim_{x\to0+}f(x)=-2$

함수 $g(x)$를 $g(x)=\{3f(x)-2\}\{f(x)-a\}$라 하면 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$이다.

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{3f(x)-2\}\{f(x)-a\}$

$=(3\times6-2)(6-a)=16(6-a)$,

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\{3f(x)-2\}\{f(x)-a\}$

$=\{3\times(-2)-2\}(-2-a)=8(2+a)$,

$g(0)=\{3\times(-2)-2\}(-2-a)=8(2+a)$

이므로 $16(6-a)=8(2+a)$, $3a=10$

따라서 $a=\dfrac{10}{3}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 26~27쪽

1 ①	2 ③	3 24	4 ②	5 17
6 ⑤				

1 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}(-x+a)(x+3)$

$=(1+a)\times2$

$=2a+2$,

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+}(2x+3)(3x+a)$

$=1\times(-3+a)$

$=a-3$,

$f(-1)g(-1)=1\times(-3+a)$

$=a-3$

이므로 $2+2a=a-3$
따라서 $a=-5$

답 ①

2 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2+} f(x)=f(-2)$이다.
조건 (나)에서 $f(-2)=f(2)$이고,
$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} f(-x)=\lim_{t\to -2} f(t)=f(-2)=f(2)$
이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$이다.
$\lim_{x\to -2-} f(x)=4\lim_{x\to 2+} f(x)-18$에서
$f(-2)=4f(2)-18$
이때 $f(-2)=f(2)$이므로
$f(2)=4f(2)-18$
$f(2)=6$
따라서 $\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)=6$

답 ③

3 함수 $g(x)$를 $g(x)=\{f(x)\}^2+bf(x)$라 하면
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$
이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} g(x)&=\lim_{x\to 0-} [\{f(x)\}^2+bf(x)]\\&=\lim_{x\to 0-} \{(-5x-6)^2+b(-5x-6)\}\\&=(-6)^2+b\times(-6)\\&=36-6b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} g(x)&=\lim_{x\to 0+} [\{f(x)\}^2+bf(x)]\\&=\lim_{x\to 0+} \{(x+2)^2+b(x+2)\}\\&=2^2+b\times 2\\&=4+2b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(0)&=\{f(0)\}^2+bf(0)\\&=(a-b)^2+b(a-b)\\&=a(a-b)\end{aligned}$$

이므로
$36-6b=4+2b=a(a-b)$ …… ㉠
㉠에서 $36-6b=4+2b$, $8b=32$이므로
$b=4$
$b=4$를 ㉠에 대입하면
$a(a-4)=12$
$a^2-4a-12=0$
$(a+2)(a-6)=0$
이때 $a>0$이므로 $a=6$
따라서 $ab=6\times 4=24$

답 24

4 함수 $g(x)$를
$g(x)=\dfrac{b^2+1}{x^2+ax+4}\ (x\neq 0)$
이라 하자.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하고, 함수 $g(x)$도 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$을 만족시켜야 한다.
$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{b^2+1}{x^2+ax+4}=\dfrac{b^2+1}{4}$,
$f(0)=\dfrac{|b|}{2}$
이므로 $\dfrac{b^2+1}{4}=\dfrac{|b|}{2}$에서
$b^2-2|b|+1=0$
$|b|^2-2|b|+1=0$
$(|b|-1)^2=0$
$|b|=1$
따라서 $b=-1$ 또는 $b=1$이므로 정수 b의 개수는 2이다.

(ii) 함수 $g(x)=\dfrac{2}{x^2+ax+4}\ (x\neq 0)$이 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하므로 $x\neq 0$인 실수 전체의 집합에서 $x^2+ax+4\neq 0$이어야 한다.
이때 $x=0$이면 $x^2+ax+4=4\neq 0$이므로 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.
$D=a^2-16=(a+4)(a-4)<0$
$-4<a<4$
따라서 정수 a의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 7이다.

(i), (ii)에 의하여 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$2\times 7=14$

답 ②

5 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 직선 $y=x+a$와 이차함수 $y=x^2-4x+b$의 그래프의 교점의 개수는 2이고, 이 두 교점의 x좌표는 각각 c, $c+3$이어야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-4x+b=x+a$, 즉 $x^2-5x+b-a=0$의 두 실근이 c, $c+3$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

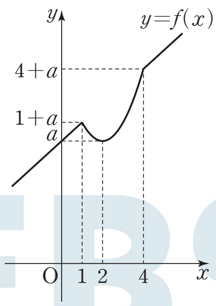
$c+(c+3)=5$ …… ㉠

$c\times(c+3)=b-a$ …… ㉡

㉠에서 $2c=2$, $c=1$

㉡에서 $4=b-a$, $b=a+4$ …… ㉢

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+a & (x<1 \text{ 또는 } x>4) \\ (x-2)^2+a & (1\le x\le 4)\end{cases}$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로 $a=6$이고, ㉢에서

$b=a+4=6+4=10$

이므로

$a+b+c=6+10+1=17$

답 17

6 곡선 $y=x^2-2x+2$와 직선 $y=-2tx+1$의 교점의 개수는 이차방정식

$x^2-2x+2=-2tx+1$, 즉 $x^2+2(t-1)x+1=0$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2+2(t-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(t-1)^2-1=t(t-2)$

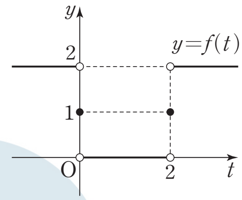
이므로

$D>0$, 즉 $t<0$ 또는 $t>2$이면 $f(t)=2$

$D=0$, 즉 $t=0$ 또는 $t=2$이면 $f(t)=1$

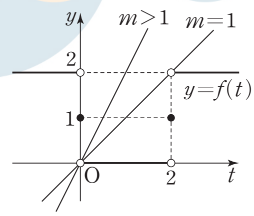
$D<0$, 즉 $0<t<2$이면 $f(t)=0$

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{t\to 0-} f(t)=2$ (참)

ㄴ. $m\ge 1$이면 직선 $y=mt$와 함수 $y=f(t)$의 그래프는 만나지 않는다. (참)



ㄷ. 함수 $y=t^2-2t$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $y=f(t)$는 $t\ne 0$, $t\ne 2$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $(t^2-2t)f(t)$는 $t\ne 0$, $t\ne 2$인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 함수 $g(t)$를 $g(t)=(t^2-2t)f(t)$라 하자.

(i) $\lim_{t\to 0-} g(t)=\lim_{t\to 0-}(t^2-2t)f(t)$

$=\lim_{t\to 0-}(t^2-2t)\times\lim_{t\to 0-} f(t)$

$=0\times 2=0$,

$\lim_{t\to 0+} g(t)=\lim_{t\to 0+}(t^2-2t)f(t)$

$=\lim_{t\to 0+}(t^2-2t)\times\lim_{t\to 0+} f(t)$

$=0\times 0=0$,

$g(0)=0\times 1=0$

이므로 $\lim_{t\to 0-} g(t)=\lim_{t\to 0+} g(t)=g(0)$이 성립한다.

즉, 함수 $g(t)$는 $t=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{t\to 2-} g(t)=\lim_{t\to 2-}(t^2-2t)f(t)$

$=\lim_{t\to 2-}(t^2-2t)\times\lim_{t\to 2-} f(t)$

$=0\times 0=0$,

$\lim_{t\to 2+} g(t)=\lim_{t\to 2+}(t^2-2t)f(t)$

$=\lim_{t\to 2+}(t^2-2t)\times\lim_{t\to 2+} f(t)$

$=0\times 2=0$,

$g(2)=0\times 1=0$

이므로 $\lim_{t\to 2-} g(t)=\lim_{t\to 2+} g(t)=g(2)$가 성립한다.

즉, 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $g(t)$가 $t=0$, $t=2$에서 연속이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

Level 3 **실력 완성** 본문 28쪽

1 127 **2** 28 **3** ④

1 함수 $f(x)$는 $k\le x<k+1$ (k는 자연수)에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 구간 $[1, \infty)$에서 연속이 되려면 모든 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=n+1$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to(n+1)-} f(x)=\lim_{x\to(n+1)+} f(x)=f(n+1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to(n+1)-} f(x)$

$=\lim_{x\to(n+1)-}\{(na_n+1)x+n(n+1)\}$

$=(na_n+1)(n+1)+n(n+1)$,

$\lim_{x\to(n+1)+} f(x)$

$=\lim_{x\to(n+1)+}[\{(n+1)a_{n+1}+1\}x+(n+1)(n+2)]$

$=\{(n+1)a_{n+1}+1\}(n+1)+(n+1)(n+2)$,

$f(n+1)=\{(n+1)a_{n+1}+1\}(n+1)+(n+1)(n+2)$

이므로

$(na_n+1)(n+1)+n(n+1)$

$=\{(n+1)a_{n+1}+1\}(n+1)+(n+1)(n+2)$

에서

$(n+1)a_{n+1}=na_n-2$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) …… ㉠

$a_1=p$라 하고, ㉠에 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 대입하면

$2a_2=a_1-2=p-2$

$3a_3=2a_2-2=p-4$

$4a_4=3a_3-2=p-6$

$5a_5=4a_4-2=p-8$

$6a_6=5a_5-2=p-10$ …… ㉡

$a_6=8$이므로 ㉡에서

$p=6a_6+10=6\times8+10=58$

따라서 $a_1=58$, $a_2=28$, $a_3=18$, $a_4=13$, $a_5=10$이므로

$\sum_{n=1}^{5} a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=58+28+18+13+10=127$

답 127

2 조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|f(-1)|$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1-}|-2|=2$,

$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|x^2+ax+b|=|1-a+b|$,

$|f(-1)|=|1-a+b|$

이므로

$|1-a+b|=2$

$1-a+b=-2$ 또는 $1-a+b=2$

$a-b=3$ 또는 $a-b=-1$

이때 $a<b$이므로 $a-b=-1$ …… ㉠

함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2-}|f(x)|=\lim_{x\to2+}|f(x)|=|f(2)|$이어야 한다.

$\lim_{x\to2-}|f(x)|=\lim_{x\to2-}|x^2+ax+b|=|4+2a+b|$,

$\lim_{x\to2+}|f(x)|=\lim_{x\to2+}|2|=2$,

$|f(2)|=|4+2a+b|$

이므로

$|4+2a+b|=2$

$4+2a+b=-2$ 또는 $4+2a+b=2$

$2a+b=-6$ 또는 $2a+b=-2$ …… ㉡

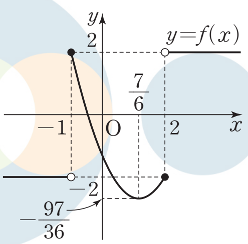
㉠, ㉡에서

(ⅰ) $a-b=-1$, $2a+b=-6$일 때,

연립하여 풀면 $a=-\frac{7}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$이므로

$$f(x)=\begin{cases} -2 & (x<-1) \\ x^2-\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}=\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{97}{36} & (-1\le x\le 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\frac{97}{36}$이고, -2보다 작으므로 조건 (나)를 만족시킨다.

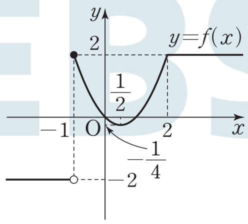
이때 $ab=\left(-\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{28}{9}$

(ii) $a-b=-1$, $2a+b=-2$일 때,

연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases} -2 & (x<-1) \\ x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} & (-1\le x\le 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 -2이고, 이 값은 -2보다 작지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $ab=\frac{28}{9}$이므로 $9ab=28$

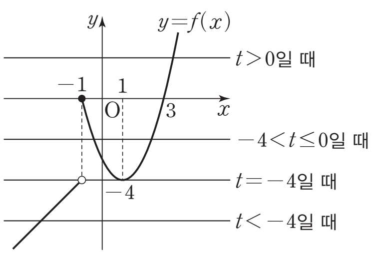
답 28

3 $x<-1$일 때, $f(x)=x-3$이고,

$x\ge -1$일 때,

$$\begin{aligned} f(x)&=(x+1)(x-3) \\ &=x^2-2x-3 \\ &=(x-1)^2-4 \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $t<-4$일 때,

방정식 $f(x)=t$의 실근은 두 직선 $y=x-3\ (x<-1)$과 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

즉, $x-3=t$에서 $x=t+3$이므로

$g(t)=t+3$

(ii) $t=-4$일 때,

방정식 $f(x)=-4$의 실근은 곡선

$y=x^2-2x-3\ (x\ge -1)$과 직선 $y=-4$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

즉, $x^2-2x-3=-4$, $(x-1)^2=0$에서 $x=1$이므로

$g(t)=1$

(iii) $-4<t\le 0$일 때

방정식 $f(x)=t$의 실근은 곡선

$y=x^2-2x-3\ (x\ge -1)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

이차방정식 $x^2-2x-3=t$, 즉 $x^2-2x-3-t=0$의 두 실근을 β, $\gamma\ (\beta<\gamma)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\beta+\gamma=2$이므로

$g(t)=2$

(iv) $t>0$일 때,

방정식 $f(x)=t$의 실근은 곡선

$y=x^2-2x-3\ (x\ge -1)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

이차방정식 $x^2-2x-3-t=0$의 실근은

$x=1-\sqrt{t+4}<-1$, $x=1+\sqrt{t+4}>3$

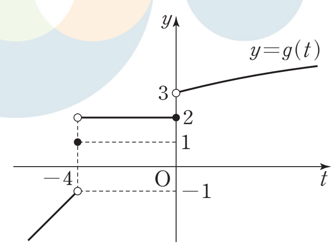
이므로

$g(t)=1+\sqrt{t+4}$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases} t+3 & (t<-4) \\ 1 & (t=-4) \\ 2 & (-4<t\le 0) \\ 1+\sqrt{t+4} & (t>0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{t\to 0-} g(t)=\lim_{t\to 0-} 2=2$ (참)

ㄴ. $t\to 5$일 때 $-t\to -5$이므로

$g(-t)=-t+3$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 5}\frac{g(-t)+2}{g(t)-4}&=\lim_{t\to 5}\frac{(-t+3)+2}{(1+\sqrt{t+4})-4} \\ &=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)}{\sqrt{t+4}-3} \\ &=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)(\sqrt{t+4}+3)}{(\sqrt{t+4}-3)(\sqrt{t+4}+3)} \\ &=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)(\sqrt{t+4}+3)}{t-5} \\ &=-\lim_{t\to 5}(\sqrt{t+4}+3) \\ &=-6 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

ㄷ. 함수 $h(t)$를 $h(t)=(|t+2|-2)g(t)$라 하자.

함수 $y=|t+2|-2$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $y=g(t)$는 $t\neq-4$, $t\neq0$인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $h(t)$는 $t\neq-4$, $t\neq0$인 모든 실수에서 연속이다.

(i) $\lim_{t\to-4-}h(t)=\lim_{t\to-4-}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times(-1)=0$,

$\lim_{t\to-4+}h(t)=\lim_{t\to-4+}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times2=0$,

$h(-4)=0\times1=0$

이므로

$\lim_{t\to-4-}h(t)=\lim_{t\to-4+}h(t)=h(-4)$

따라서 함수 $h(t)$는 $t=-4$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{t\to0-}h(t)=\lim_{t\to0-}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times2=0$,

$\lim_{t\to0+}h(t)=\lim_{t\to0+}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times3=0$,

$h(0)=0\times2=0$

이므로

$\lim_{t\to0-}h(t)=\lim_{t\to0+}h(t)=h(0)$

따라서 함수 $h(t)$는 $t=0$에서 연속이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $h(t)=(|t+2|-2)g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

03 미분계수와 도함수

유제				본문 31~37쪽
1 ④	2 15	3 ①	4 ②	5 29
6 23	7 27			

1 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3f(1)$ ······ ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(1)-2=0$에서 $f(1)=2$

㉠에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}=\frac{f'(1)}{2}$

이므로

$\frac{f'(1)}{2}=3f(1)$에서

$f'(1)=6f(1)=6\times2=12$

따라서 $f(1)+f'(1)=2+12=14$

답 ④

2 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{f(1)-f(-2)}{3}$

이고, $x=-2$에서의 미분계수는 $f'(-2)$이므로 조건 (가)에 의하여

$\frac{f(1)-f(-2)}{3}=f'(-2)$에서

$f(1)-f(-2)=3f'(-2)$ ······ ㉠

조건 (나)에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-(1-h)f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-2-h)-f(-2)+hf(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h}\times(-1)+f(-2)\right\}$

$=-f'(-2)+f(-2)$

이므로

$-f'(-2)+f(-2)=f(1)-60$

$f'(-2)=-f(1)+f(-2)+60$

이때 ㉠에 의하여

$f'(-2)=-3f'(-2)+60$

$4f'(-2)=60$, $f'(-2)=15$

따라서

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x^2+5x+6}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\left\{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=f'(-2)=15$$

답 15

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=1$에서 미분가능하면 된다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이다.

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(ax-3)(x+a)$$
$$=(a-3)(1+a)$$
$$=a^2-2a-3,$$
$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(4ax+4)$$
$$=4a+4,$$

$f(1)=4a+4$

이므로 $a^2-2a-3=4a+4$에서

$a^2=6a+7$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\text{이다.}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(ax-3)(x+a)-(4a+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+(a^2-3)x-7a-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+\{(6a+7)-3\}x-7a-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+(6a+4)x-7a-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(ax+7a+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(ax+7a+4)$$
$$=8a+4,$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(4ax+4)-(4a+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{4a(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}4a=4a$$

이므로 $8a+4=4a$

따라서 $a=-1$

답 ①

다른 풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=1$에서 미분가능하면 되므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이다.

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(ax-3)(x+a)$$
$$=(a-3)(1+a)=a^2-2a-3,$$
$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(4ax+4)=4a+4,$$

$f(1)=4a+4$

이므로 $a^2-2a-3=4a+4$에서

$a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=7$

(i) $a=-1$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-(x+3)(x-1) & (x<1)\\ -4x+4 & (x\geq1)\end{cases}$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x+3)(x-1)}{x-1}$$
$$=-\lim_{x\to1-}(x+3)=-4,$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{-4x+4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{-4(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(-4)=-4$$

이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(ii) $a=7$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}(7x-3)(x+7) & (x<1)\\ 28x+4 & (x\geq1)\end{cases}$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(7x-3)(x+7)-32}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(7x+53)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(7x+53)=60,$$
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(28x+4)-32}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{28(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}28=28$$

이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에 의하여 상수 a의 값은 -1이다.

4 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2+4x-1$이므로

$f'(x)=3x^2+4x-1$

따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}\times2\right\}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}$$
$$=2f'(-1)$$
$$=2\times\{3\times(-1)^2+4\times(-1)-1\}$$
$$=-4$$

답 ②

5 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)f(x+h)-f(h)f(x)}{h^2}=2x^3+4$에서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)f(x+h)-f(h)f(x)}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)\{f(x+h)-f(x)\}}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=f'(0)\times f'(x)=2f'(x)$$

이므로 $2f'(x)=2x^3+4$, 즉 $f'(x)=x^3+2$

따라서 $f'(3)=3^3+2=29$

답 29

6 $g(x)=(3x-1)f(x)$에서

$g'(x)=3f(x)+(3x-1)f'(x)$

따라서

$$g'(2)=3f(2)+5f'(2)$$
$$=3\times1+5\times4$$
$$=23$$

답 23

7 조건 (가)에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속함수이므로

$f(0)=g(0)$ …… ㉠

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$=f'(0)-g'(0)$$

이므로 $f'(0)-g'(0)=0$에서

$f'(0)=g'(0)$ …… ㉡

조건 (나)에서 주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=12$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하면

$f(0)=g(0)=6$

또 조건 (나)에서

$f'(x)+g'(x)=2x-6$

위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)+g'(0)=-6$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하면

$f'(0)=g'(0)=-3$

한편, $f(x)$가 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

$f(0)=b=6$

$f'(x)=a$이고 $f'(0)=-3$이므로

$a=-3$

따라서 $f(x)=-3x+6$, $f'(x)=-3$이고

$f(5)=-9$, $f'(5)=-3$이므로

$$f(5)\times f'(5)=(-9)\times(-3)$$
$$=27$$

답 27

Level
1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ②	2 ①	3 ①	4 ④	5 ③
6 ①	7 ⑤	8 20		

1 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)+1}{h}=3$ …… ㉠

㉠에서 $h \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(2+h)+1\}=0$이고, 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{h\to0}\{f(2+h)+1\}=f(2)+1=0$에서

$f(2)=-1$

이때

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)+1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

이므로 ㉠에서

$f'(2)=3$

따라서 $f(2)+f'(2)=-1+3=2$

답 ②

2 함수 $f(x)=x^3+ax^2$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(27+9a)-(1+a)}{2}=13+4a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=x^3+ax^2$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$x=1$에서의 미분계수는

$f'(1)=3+2a$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 서로 같으므로

$13+4a=3+2a$

따라서 $a=-5$

답 ①

3 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+a)=1+a$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(bx^2+1)=b+1$,

$f(1)=1+a$

이므로 $1+a=b+1$, 즉 $a=b$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이다.

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x+a)-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to1-}1=1,$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(bx^2+1)-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(bx^2+1)-(b+1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{b(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}b(x+1)=2b$$

이므로

$1=2b$, 즉 $b=\frac{1}{2}$

㉠에서 $a=b=\frac{1}{2}$

따라서 $ab=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

답 ①

4 $f(x)=3x^3+2x^2+ax$에서

$f'(x)=9x^2+4x+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$이고, x축과 평행한 직선의 기울기는 0이므로 $f'(-1)=0$이다.

$f'(-1)=9-4+a=0$

따라서 $a=-5$

답 ④

5 $g(x)=(x^2+1)f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

이므로

$$g'(1)=2f(1)+2f'(1)=2\{f(1)+f'(1)\}=2\times3=6$$

답 ③

6 $f(x)=x^2+ax$에서

$f'(x)=2x+a$

$\lim_{x\to1}\frac{xf'(x)}{x-1}=b$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}xf'(x)=0$

이때 함수 $xf'(x)$는 다항함수이고, 다항함수는 연속함수이므로

$\lim_{x\to1} xf'(x)=f'(1)=2+a=0$에서

$a=-2$

이때 $f'(x)=2x-2=2(x-1)$이므로

$b=\lim_{x\to1}\frac{xf'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}2x=2$

따라서 $ab=(-2)\times2=-4$

답 ①

7 $f(x)=x^3+3x^2-x$에서 $f'(x)=3x^2+6x-1$이므로

$f'(-1)=-4$, $f'(0)=-1$, $f'(k)=3k^2+6k-1$

$f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(k)$의 값이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2f'(0)=f'(-1)+f'(k)$

$-2=3k^2+6k-5$

$k^2+2k-1=0$

$k=-1\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 -2이다.

답 ⑤

8 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-5}{x-3}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}$ …… ㉠

이차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 ㉠의 우변은

$\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=-f'(1)$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-5}{x-3}=-f'(1)$에서 $x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-5\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)-5\}=f(3)-5=0$에서 $f(3)=5$

이때

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-5}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

이므로 $f'(3)=-f'(1)$ …… ㉡

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2x+a$이므로 ㉡에서

$6+a=-(2+a)$, $a=-4$

또한 $f(3)=5$이므로

$9+(-4)\times3+b=5$, $b=8$

따라서 $f(x)=x^2-4x+8$이므로

$f(-2)=4+8+8=20$

답 20

참고

이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭인 포물선이므로 어떤 두 점에서의 접선의 기울기가 절댓값이 같고 부호가 다르면 이 두 점은 축에 대하여 대칭이다.

그러므로 ㉡에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{1+3}{2}$, 즉 $x=2$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

따라서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x-2)^2+c$ (c는 상수)로 놓을 수 있고

$f(3)=1+c=5$에서 $c=4$

이므로 $f(x)=(x-2)^2+4$

따라서 $f(-2)=(-4)^2+4=20$

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ③	2 ⑤	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ①	7 10			

1 $\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=f(2)-5$에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)\right\}$

$=-f'(2)$

즉, $-f'(2)=f(2)-5$에서

$f'(2)+f(2)=5$ …… ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{(3-x)f(x)-f(2)}{x-2}=-1$에서

함수 $g(x)$를 $g(x)=(3-x)f(x)$라 하면

$g(2)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{(3-x)f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=g'(2)=-1$

이때 $g'(x)=-f(x)+(3-x)f'(x)$이므로

$g'(2)=-f(2)+f'(2)$

따라서 $-f(2)+f'(2)=-1$에서

$f'(2)-f(2)=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(2)=3$, $f'(2)=2$이므로

$f(2)\times f'(2)=3\times2=6$

답 ③

2 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 함수 $g(t)$이므로 $g(t)=f'(t)$, 즉 $g(x)=f'(x)$이다.
함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$, 즉 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.
한편, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=g(x)$이므로

$$\left\{x\,\middle|\,\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2\right\}=\{x\,|\,f'(x)=2\}$$
$$=\{x\,|\,g(x)=2\}$$
$$=\{-3,\ 4\}$$

즉, $g(-3)=2$, $g(4)=2$이므로
$g(x)-2=3(x+3)(x-4)$
$g(x)=3(x+3)(x-4)+2$
따라서 $g(-2)=3\times1\times(-6)+2=-16$

답 ⑤

3 상수항이 0인 이차함수 $f(x)$를
$f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면
$f'(x)=2ax+b$
x의 값이 n에서 $n+1$까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율 $g(n)$은

$$g(n)=\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$$
$$=\{a(n+1)^2+b(n+1)\}-(an^2+bn)$$
$$=2an+a+b$$

이때

$$\sum_{n=1}^{9}g(n)=\sum_{n=1}^{9}(2an+a+b)$$
$$=2a\times\frac{9\times10}{2}+9(a+b)$$
$$=99a+9b$$

이므로 조건 (가)에 의해 $99a+9b=9$에서
$11a+b=1$ …… ㉠
조건 (나)의

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(10+h)+k}{h}=-\frac{k}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim\limits_{h\to 0}\{f(1+h)-f(10+h)+k\}=0$
이때 이차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(1)-f(10)+k=0$

$k=f(10)-f(1)$
$=(100a+10b)-(a+b)$
$=99a+9b=9$
㉡에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(10+h)+k}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(10+h)+f(10)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(10+h)-f(10)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(10+h)-f(10)}{h}$$
$$=f'(1)-f'(10)$$
$$=(2a+b)-(20a+b)=-18a$$

이므로 $-18a=-\dfrac{k}{2}$에서

$$a=\frac{k}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

㉠에서 $b=1-11a=1-\dfrac{11}{4}=-\dfrac{7}{4}$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{7}{4}x$이고, $f(-1)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4}=2$

따라서 $\dfrac{f(-1)}{k}=\dfrac{2}{9}$

답 ②

4 조건 (가)의 $\{x\,|\,f(x)=3\}=\{-a,\ a,\ 2a\}$에서
$f(-a)=3$, $f(a)=3$, $f(2a)=3$이고, 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
$f(x)=(x+a)(x-a)(x-2a)+3$ $(a\neq0)$ …… ㉠
㉠에서
$f'(x)$
$=(x-a)(x-2a)+(x+a)(x-2a)+(x+a)(x-a)$
이므로
$f'(1)$
$=(1-a)(1-2a)+(1+a)(1-2a)+(1+a)(1-a)$
$=(2a^2-3a+1)+(-2a^2-a+1)+(-a^2+1)$
$=-a^2-4a+3$
조건 (나)에서 $f'(1)=-2$이므로
$-a^2-4a+3=-2$, $a^2+4a-5=0$
$(a+5)(a-1)=0$
$a=-5$ 또는 $a=1$
㉠에서 $f(0)=2a^3+3$이므로
$a=-5$이면 $f(0)=-247<0$이고,
$a=1$이면 $f(0)=5>0$
조건 (나)에서 $f(0)>0$이므로 $a=1$이다.

따라서 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+3$이므로
$f(3)=4\times2\times1+3=11$

답 ⑤

5 $\lim_{h\to0}\frac{g(h)-26}{h}=49$ …… ㉠

㉠에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\{g(h)-26\}=0$이고, $g(h)=\sum_{k=1}^{6}f(k+h)$는 다항함수이므로

$\lim_{h\to0}\{g(h)-26\}=g(0)-26=0$

따라서 $g(0)=26$이고,

$$g(0)=\sum_{k=1}^{6}f(k)=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{3}k^3+ak^2+b\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2+a\times\left(\frac{6\times7\times13}{6}\right)+6b$$
$$=147+91a+6b$$

이므로

$147+91a+6b=26$에서

$91a+6b=-121$ …… ㉡

$g(h)=\sum_{k=1}^{6}f(k+h)=f(1+h)+f(2+h)+\cdots+f(6+h)$,

$g(0)=\sum_{k=1}^{6}f(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=26$

이므로 ㉠에서

$$\lim_{h\to0}\frac{g(h)-26}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\cdots+\lim_{h\to0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}$$
$$=f'(1)+f'(2)+\cdots+f'(6)$$
$$=\sum_{k=1}^{6}f'(k)=49$$

한편, $f'(x)=x^2+2ax$이고,

$$\sum_{k=1}^{6}f'(k)=\sum_{k=1}^{6}(k^2+2ak)$$
$$=\frac{6\times7\times13}{6}+2a\times\frac{6\times7}{2}$$
$$=91+42a$$

이므로

$91+42a=49$에서 $a=-1$

㉡에서 $-91+6b=-121$, $b=-5$

따라서 $a-b=-1-(-5)=4$

답 ④

6 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

라 하면

$f(x+1)-f(x)$
$=\{(x+1)^2+a(x+1)+b\}-(x^2+ax+b)$
$=2x+a+1$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (x<1)\\ 2x+a+1 & (x\ge1)\end{cases}$$

이다.

조건에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$이다.

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)=1+a+b$,

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}(2x+a+1)=a+3$,

$g(1)=a+3$

이므로 $1+a+b=a+3$에서

$b=2$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+ax+2)-(a+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x+a+1)=a+2,$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(2x+a+1)-(a+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}2=2$$

이므로 $a+2=2$에서

$a=0$

따라서 $f(x)=x^2+2$이므로

$f(2)=4+2=6$

답 ①

7 (i) $a>1$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1) & (x<1)\\ x-1 & (1\le x<a)\\ -x^2+bx+b-5 & (x\ge a)\end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1,$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 할 수 없다.

(ii) $a\le1$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1) & (x<a)\\ -x^2+bx+b-5 & (x\ge a)\end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=a$에서 미분가능하면 된다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to a-}f(x)=-\lim_{x\to a-}(x-1)$$
$$=-(a-1)=-a+1,$$

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(-x^2+bx+b-5)$$
$$=-a^2+ab+b-5,$$

$$f(a)=-a^2+ab+b-5$$

이므로

$$-a+1=-a^2+ab+b-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이어야 하고,

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-1)-(-a^2+ab+b-5)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-1)-(-a+1)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)}{x-a}=-1,$$

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{(-x^2+bx+b-5)-(-a^2+ab+b-5)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{-(x-a)(x+a-b)}{x-a}$$
$$=-\lim_{x\to a+}(x+a-b)=-2a+b$$

이므로

$-1=-2a+b$에서

$$b=2a-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$-a+1=-a^2+a(2a-1)+(2a-1)-5$$
$$a^2+2a-7=0$$

이때 $a\le1$이므로

$$a=-1-\sqrt{1^2-1\times(-7)}=-1-2\sqrt{2}$$

이고, ㉡에서

$$b=2(-1-2\sqrt{2})-1=-3-4\sqrt{2}$$

그러므로

$$a+b=(-1-2\sqrt{2})+(-3-4\sqrt{2})$$
$$=-4-6\sqrt{2}$$

따라서 $p=-4$, $q=-6$이므로

$$|p+q|=|(-4)+(-6)|=10$$

답 10

Level

3 실력 완성

본문 42쪽

1 ① 2 ④ 3 44

1 $f(x)=x^4+ax^2+bx$에서

$$f'(x)=4x^3+2ax+b$$

한편, x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{(16+4a+2b)-(1+a-b)}{2-(-1)}$$
$$=a+b+5$$

조건 (가)에서 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 $2f'(0)=2b$이므로

$$a+b+5=2b,\ 즉\ a-b=-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{f'(2)}{4}$$

이므로 $\frac{f'(2)}{4}=\frac{11}{2}$

$$f'(2)=22$$

$f'(2)=32+4a+b=22$에서

$4a+b=-10$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

이때 $f(x)=x^4-3x^2+2x$, $f'(x)=4x^3-6x+2$

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{f\left(\frac{1-2x}{x}\right)+f\left(\frac{2-2x}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(-2+\frac{1}{x}\right)+f\left(-2+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉢에서 $\frac{1}{x}=h$로 놓으면 $x\to\infty$일 때, $h\to0+$이고,

$f(-2)=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(-2+\frac{1}{x}\right)+f\left(-2+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(-2+h)+f(-2+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)+f(-2+2h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}+2\lim_{h\to0+}\frac{f(-2+2h)-f(-2)}{2h}$$

$=f'(-2)+2f'(-2)$

$=3f'(-2)$

$=3\times(-18)=-54$

답 ①

2 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$가 $x=-1$과 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 때

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-4x-2)=2,$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(ax^2+bx-1)=a-b-1,$$

$f(-1)=2$

이므로

$a-b-1=2$

$b=a-3$ ...... ㉠

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1-}\frac{(-4x-2)-2}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1-}\frac{-4(x+1)}{x+1}$$

$=-4$,

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(ax^2+bx-1)-2}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{ax^2+bx-3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{ax^2+(a-3)x-3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(ax-3)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1+}(ax-3)$$

$=-a-3$

이므로 $-4=-a-3$, 즉 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=1-3=-2$

또 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 때,

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2-2x-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(2x+c)=4+c,$$

$f(2)=4+c$

이므로 $-1=4+c$, 즉 $c=-5$

이때

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x^2-2x-1)-(-1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{x(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}x=2,$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-5)-(-1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$$f(x)=\begin{cases} -4x-2 & (x\le -1) \\ x^2-2x-1 & (-1<x<2), \\ 2x-5 & (x\ge 2) \end{cases}$$

$g(x)=-x^2+4x+3$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+12}{x-1}$에서

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(1)=f(1)g(1)=(-2)\times 6=-12$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+12}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$

이때

$$f'(x)=\begin{cases} -4 & (x\le -1) \\ 2x-2 & (-1<x<2), \\ 2 & (x\ge 2) \end{cases}$$

$g'(x)=-2x+4$

이고 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=0\times 6+(-2)\times 2=-4$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+12}{x-1}=h'(1)=-4$$

답 ④

3 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

조건 (나)의

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=24$ …… ㉠

에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=0$에서 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=f(0)-2=0$, $f(0)=2$

이때 ㉠에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=24$이므로

$f'(0)=24$

한편, $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지난다. 또 점 $(0, 2)$는 직선 $y=2$ 위의 점이므로 세 점 A, B, C 중 한 점의 좌표가 $(0, 2)$이다. 원점 O에서 직선 $y=2$ 위의 점 중 점 $(0, 2)$까지의 거리가 최소이고

$\overline{OA}<\overline{OB}<\overline{OC}$이므로 점 A의 좌표는 $(0, 2)$이다.

두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0<|b|<|c|)$라 하면 점 B가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$c=3b$

이때 $f(x)-2=2x(x-b)(x-3b)$이므로

$f(x)=2x(x-b)(x-3b)+2$

$f'(x)=2(x-b)(x-3b)+2x(x-3b)+2x(x-b)$

$f'(0)=6b^2=24$에서

$b^2=4$

$b=-2$ 또는 $b=2$

(i) $b=-2$일 때,

$f(x)=2x(x+2)(x+6)+2$

$f(1)=2\times 1\times 3\times 7+2=44$

(ii) $b=2$일 때,

$f(x)=2x(x-2)(x-6)+2$

$f(1)=2\times 1\times (-1)\times (-5)+2=12$

(i), (ii)에서 $f(1)$의 최댓값은 44이다.

답 44

04 도함수의 활용(1)

유제 본문 45~51쪽

1 ①	2 15	3 28	4 16	5 ④
6 3	7 ③	8 ①		

1 $f(x)=x^4+ax+4$에서

$f'(x)=4x^3+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=-2x+b$이므로

$f'(1)=4\times1^3+a=-2,\ a=-6$

$f(x)=x^4-6x+4$이므로

$f(1)=1^4-6\times1+4=-1$

점 $(1,\ -1)$이 직선 $y=-2x+b$ 위의 점이므로

$-1=-2\times1+b,\ b=1$

따라서 $a+b=-6+1=-5$

답 ①

2 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

곡선 $y=xf(x)$가 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$-2f(-2)=0$, 즉 $f(-2)=0$

$f(-2)=(-2)^3+a\times(-2)^2+b\times(-2)=0$에서

$2a-b=4$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=xf(x)$에서 $y'=f(x)+xf'(x)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선이 서로 평행하므로

$f'(0)=f(-2)-2f'(-2)=-2f'(-2)$

$b=-2(12-4a+b)$

$8a-3b=24$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6,\ b=8$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2+8x$이므로

$f(1)=1+6+8=15$

답 15

3 함수 $f(x)=x^3-4x^2+4x+1$은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ …… ㉠

를 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2-8x+4$

㉠에서 $\dfrac{4-1}{3-0}=3c^2-8c+4$

$3c^2-8c+3=0,\ c=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

이때 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}=\dfrac{\sqrt{16}-\sqrt{7}}{3}>0$이고

$\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}<\dfrac{4+\sqrt{9}}{3}=\dfrac{7}{3}<3$이므로

$0<\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}<\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}<3$

따라서 $M=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$, $m=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$이므로

$9(M-m)^2=9\times\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}-\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^2=28$

답 28

4 점 $(-2,\ f(-2))$에서 곡선 $y=-3x^2+4x\ (x>0)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 구해 보자.

$y=-3x^2+4x$에서 $y'=-6x+4$

곡선 $y=-3x^2+4x$ 위의 점 $(t,\ -3t^2+4t)\ (t>0)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3t^2+4t)=(-6t+4)(x-t)$

이 접선이 점 $(-2,\ f(-2))$, 즉 점 $(-2,\ -4)$를 지나므로

$-4-(-3t^2+4t)=(-6t+4)(-2-t)$

$3t^2+12t-4=0$

$t>0$이므로 $t=\dfrac{-6+4\sqrt{3}}{3}$

한편, $f(-2)=-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4$의 교점의 x좌표를 구해 보자.

(i) $x\le0$일 때,

$f(x)=-4$에서 $x^2+4x=-4$

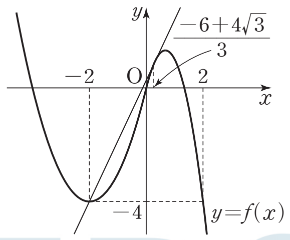
$(x+2)^2=0,\ x=-2$

(ii) $x>0$일 때,

$f(x)=-4$에서 $-3x^2+4x=-4$

$(3x+2)(x-2)=0$

$x>0$이므로 $x=2$



(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

한편, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2+4x)=0$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(-3x^2+4x)=0$,

$f(0)=0$

이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+4x}{x}=\lim_{x\to 0-}(x+4)=4$,

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-3x^2+4x}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}(-3x+4)=4$

이므로 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\frac{f(a)-f(-2)}{a+2}=f'(c)$를 만족시키고 열린구간 $(-2, a)$에 속하는 상수 c의 개수는 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

$-2<a\le\frac{-6+4\sqrt{3}}{3}$일 때 상수 c의 개수는 1이고,

$\frac{-6+4\sqrt{3}}{3}<a<2$일 때 상수 c의 개수는 2이고,

$a\ge 2$일 때 상수 c의 개수는 1이다.

그러므로 상수 c의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $\frac{-6+4\sqrt{3}}{3}<a<2$이다.

따라서 $p=\frac{-6+4\sqrt{3}}{3}$, $q=2$이므로

$3(p+q)^2=3\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=16$

답 16

5 $f(x)=x^3+ax^2+\left(2a+\frac{7}{3}\right)x-5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2a+\frac{7}{3}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2ax+2a+\frac{7}{3}\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+2a+\frac{7}{3}=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3\left(2a+\frac{7}{3}\right)\le 0$

$a^2-6a-7\le 0$, $(a+1)(a-7)\le 0$

$-1\le a\le 7$

따라서 정수 a의 값은 $-1, 0, 1, \cdots, 7$이므로 그 개수는 9이다.

답 ④

6 $f(x)=-x^3+ax^2-ax+1$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-a$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이고 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=-3x^2+2ax-a\le 0$이므로

$3x^2-2ax+a\ge 0$

이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3a\le 0$

$a(a-3)\le 0$, $0\le a\le 3$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

답 3

7 사차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극대이므로 $f'(2)=0$

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2+ax$에서

$f'(x)=-x^3+x^2+4x+a$

$f'(2)=-2^3+2^2+4\times 2+a=4+a=0$

에서 $a=-4$

$f'(x)=-x^3+x^2+4x-4=-(x+2)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+2-4=-\frac{23}{12}$

답 ③

8 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x-2$에서
$f'(x)=3x^2+2ax-a^2$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$이다.
$f'(1)=3+2a-a^2=-(a+1)(a-3)=0$이므로
$a=-1$ 또는 $a=3$
(i) $a=-1$일 때
$f(x)=x^3-x^2-x-2$이므로
$f(-a)=f(1)=1-1-1-2=-3<0$이 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $a=3$일 때
$f(x)=x^3+3x^2-9x-2$이므로
$f(-a)=f(-3)=-27+27+27-2=25>0$이 되어 주어진 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $a=3$
즉, $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이다.
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-3)=25$이다.

답 ①

Level **1** **기초 연습** 본문 52~53쪽

1 ⑤	**2** ①	**3** ④	**4** 5	**5** 55
6 ⑤	**7** ②	**8** ③		

1 $y=x^4-4x^2+x+1$에서 $y'=4x^3-8x+1$
곡선 $y=x^4-4x^2+x+1$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는
$4\times1^3-8\times1+1=-3$
이므로 접선의 방정식은
$y-(-1)=-3(x-1)$, 즉 $y=-3x+2$
따라서 $a=-3$, $b=2$이므로
$a-b=-3-2=-5$

답 ⑤

2 점 $(1, 1)$이 곡선 $y=-x^3-ax^2+3x+b$ 위의 점이므로
$1=-1-a+3+b$
$a-b=1$ …… ㉠
$y=-x^3-ax^2+3x+b$에서 $y'=-3x^2-2ax+3$
곡선 $y=-x^3-ax^2+3x+b$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는
$-3-2a+3=-2a$
곡선 $y=-x^3-ax^2+3x+b$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{4}$이므로
$-2a\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$, $a=-2$
$a=-2$를 ㉠에 대입하면
$-2-b=1$, $b=-3$
따라서 $ab=(-2)\times(-3)=6$

답 ①

3 $y=x^3-9x+16$에서 $y'=3x^2-9$
곡선 $y=x^3-9x+16$ 위의 점 $(t, t^3-9t+16)$에서의 접선의 방정식은
$y-(t^3-9t+16)=(3t^2-9)(x-t)$
이 접선이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$0-(t^3-9t+16)=(3t^2-9)(0-t)$
$2(t-2)(t^2+2t+4)=0$
$t^2+2t+4=(t+1)^2+3>0$이므로 $t=2$
이때 접선의 방정식은
$y-6=3(x-2)$, 즉 $y=3x$
$x^3-9x+16=3x$에서
$(x+4)(x-2)^2=0$
$x=-4$ 또는 $x=2$
따라서 $x_1=-4$, $x_2=2$ 또는 $x_1=2$, $x_2=-4$이므로
$|x_1-x_2|=|-4-2|=6$

답 ④

4 $y=-x^4+2x^3+1$에서 $y'=-4x^3+6x^2$
곡선 $y=-x^4+2x^3+1$ 위의 점 $\mathrm{A}(1, 2)$에서의 접선의 기울기는
$-4\times1^3+6\times1^2=2$
이므로 접선의 방정식은
$y-2=2(x-1)$, 즉 $y=2x$
$y=x^2-2x+4$에서 $y'=2x-2$
곡선 $y=x^2-2x+4$ 위의 점 B의 좌표를 (t, t^2-2t+4)라 하면 곡선 $y=x^2-2x+4$ 위의 점 B에서의 접선이 직선 $y=2x$이므로

$2t-2=2$에서 $t=2$

이때 $y=2^2-2\times2+4=4$

점 B의 좌표가 $(2,\ 4)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$

따라서 $k^2=(\sqrt{5})^2=5$

답 5

5 함수 $f(x)=x^3-2x^2$은 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ a)$에서 미분가능하다. 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값이 3이므로

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(3)$ …… ㉠

$f(x)=x^3-2x^2$에서 $f'(x)=3x^2-4x$

㉠에서 $\dfrac{a^3-2a^2}{a}=3\times3^2-4\times3$

$a^2-2a-15=0,\ (a+3)(a-5)=0$

이때 $a>3$이므로 $a=5$

따라서 $f'(a)=f'(5)=3\times5^2-4\times5=55$

답 55

6 $f(x)=-2x^3+ax^2-5ax+5$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax-5a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 하므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이다.

즉, $-6x^2+2ax-5a\le0$에서

$6x^2-2ax+5a\ge0$

이차방정식 $6x^2-2ax+5a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-6\times5a\le0$

$a(a-30)\le0,\ 0\le a\le30$

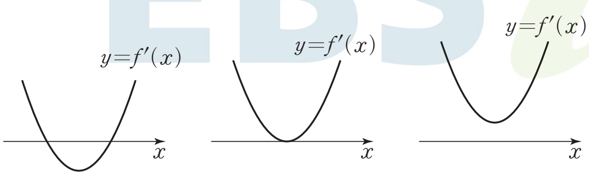
따라서 실수 a의 최댓값은 30이다.

답 ⑤

7 $f(x)=x^3+ax^2+(2a^2-10a)x+5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+2a^2-10a$

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 [그림 1], [그림 2], [그림 3] 중 하나이다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같아야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+2a^2-10a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-3\times(2a^2-10a)>0$

$5a(a-6)<0,\ 0<a<6$

따라서 정수 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 개수는 5이다.

답 ②

8 $f(x)=x^3-6x^2-15x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	5	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 $b=-1$

함수 $f(x)$의 극댓값이 12이므로

$f(-1)=(-1)^3-6\times(-1)^2-15\times(-1)+a=12$

$8+a=12$, 즉 $a=4$

따라서 $a+b=4+(-1)=3$

답 ③

Level **2** **기본 연습** 본문 54~55쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ⑤	5 ③
6 ④	7 61	8 ③		

1 $f(x)=2x^3-ax^2+2x$에서 $f'(x)=6x^2-2ax+2$

$f'(0)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}$에서

$6x^2-2ax+2=-\dfrac{1}{2}$

$12x^2-4ax+5=0$ …… ㉠

㉠이 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-12\times5\ge0$, 즉 $a^2\ge15$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ②

2 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{3}$인 삼차함수이다.

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{(x-2)^2}=2$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-2)g(x)$ ($g(x)$는 이차함수)로 놓을 수 있다.

이때 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}=2$

마찬가지로 $g(2)=0$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{3}(x-2)^2(x-k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-k}{3}=\dfrac{2-k}{3}=2$에서

$k=-4$

따라서

$f(x)=\dfrac{1}{3}(x-2)^2(x+4)=\dfrac{1}{3}x^3-4x+\dfrac{16}{3}$,

$f'(x)=x^2-4$

이므로

$f'(-1)=-3,\ f(-1)=9$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선의 방정식은

$y-9=-3(x+1)$, 즉 $y=-3x+6$

이 접선이 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$a=-3+6=3$

답 ③

3 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-a^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2-a^2t)=(3t^2+2at-a^2)(x-t)$

$x=0$일 때, $y=g(t)$이므로

$g(t)-(t^3+at^2-a^2t)=(3t^2+2at-a^2)(0-t)$

$g(t)=-2t^3-at^2$

$g'(t)=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\dfrac{a}{3}$

(i) $a>0$일 때,

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극대이고, 극댓값은 $g(0)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(t)$는 $t=-\dfrac{a}{3}$에서 극대이고, 극댓값은

$g\left(-\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{a^3}{27}=\dfrac{64}{27}$

$a^3=-64$, $(a+4)(a^2-4a+16)=0$

이때 $a^2-4a+16=(a-2)^2+12>0$이므로

$a=-4$

(i), (ii)에서 $a=-4$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2-16x$이므로

$f(a)=f(-4)=(-4)^3-4\times(-4)^2-16\times(-4)=-64$

답 ①

4 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(0)=f'(2)=-24$이므로

$f'(x)-(-24)=3x(x-2)$

$f'(x)=3x^2-6x-24$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-3,\ b=-24$

$f(x)=x^3-3x^2-24x+c$

한편, $f'(x)=3(x+2)(x-4)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, 극댓값은

$f(-2)=(-2)^3-3\times(-2)^2-24\times(-2)+c=28+c$

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 15이므로

$28+c=15$, 즉 $c=-13$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-24x-13$이므로

$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-24\times(-1)-13=7$

답 ⑤

5 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

함수 $f(x)$가 $x=-3\alpha$, $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

$f'(-3\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$

즉, 이차방정식 $3x^2+2ax-9=0$의 두 근이 -3α, α이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3\alpha+\alpha=-\frac{2a}{3}$, $(-3\alpha)\times\alpha=\frac{-9}{3}$

$(-3\alpha)\times\alpha=\frac{-9}{3}$에서 $\alpha^2=1$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=1$

또 $-3\alpha+\alpha=-\frac{2a}{3}$에서 $-2=-\frac{2a}{3}$, 즉 $a=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고, 극솟값은 -4이므로

$f(1)=1+3-9+b=-4$에서 $b=1$

즉, $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$이므로

$f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-9\times(-3)+1=28$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=f'(c)$

를 만족시키는 상수 c가 열린구간 $(-3, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(c)=3c^2+6c-9$,

$\frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=\frac{-4-28}{1-(-3)}=-8$

이므로

$3c^2+6c-9=-8$에서 $3c^2+6c-1=0$

$c=\frac{-3\pm2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $-3<\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}<\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}<1$이므로

상수 c의 최댓값은 $\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ③

6 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=x^3-6x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하므로

$x>0$일 때, $f'(x)\geq0$이어야 한다.

$f'(x)=x^3-6x^2+2ax\geq0$에서

$x(x^2-6x+2a)\geq0$

$x>0$이므로 $x^2-6x+2a\geq0$

$(x-3)^2+2a-9\geq0$, 즉 $a\geq\frac{9}{2}$

따라서 $f'(1)=1-6+2a=2a-5\geq4$이므로 $f'(1)$의 최솟값은 4이다.

답 ④

7 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$-x^3+ax^2-bx+c=-x^3-ax^2-bx-c$

$2ax^2+2c=0$

위 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a=c=0$

$f(x)=x^3+bx$에서 $f'(x)=3x^2+b$

$b\geq0$이면 $f'(x)\geq0$이므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 $b<0$이다.

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{3}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{-\frac{b}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{-\frac{b}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{-\frac{b}{3}}$에서 극대이고, 극댓값이 $\frac{1}{4}$이므로

$f\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3+b\times\left(-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)=\frac{1}{4}$

$-\frac{2b}{3}\sqrt{-\frac{b}{3}}=\frac{1}{4}$, $b^3=-\frac{27}{64}$

$\left(b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2-\frac{3}{4}b+\frac{9}{16}\right)=0$

이때 $b^2-\frac{3}{4}b+\frac{9}{16}=\left(b-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{27}{64}>0$이므로

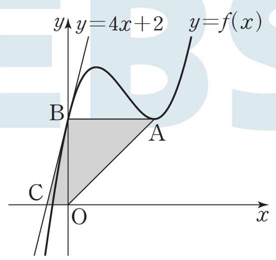
$b=-\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$이므로

$f(4)=4^3-\frac{3}{4}\times4=61$

답 61

8 $f(x)=x^3-ax^2+4x+2$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+4$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극소이므로
$f'(2)=3\times2^2-2a\times2+4=0$, $a=4$
$f(2)=2^3-4\times2^2+4\times2+2=2$
즉, 점 A의 좌표는 $(2, 2)$이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(2, 2)$에서의 접선의 방정식은
$y=2$
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 만나는 점 중 A가 아닌 점 B의 좌표를 구해 보자.
$f(x)=2$에서
$x^3-4x^2+4x+2=2$, $x(x-2)^2=0$
$x=0$ 또는 $x=2$
즉, 점 B의 좌표는 $(0, 2)$이다.
$f'(0)=4$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $B(0, 2)$에서의 접선의 방정식은
$y=4x+2$
직선 $y=4x+2$와 x축이 만나는 점 C의 좌표를 구해 보자.
$y=0$일 때, $0=4x+2$, 즉 $x=-\frac{1}{2}$이므로
점 C의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$이다.



따라서 사각형 OABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(\overline{BA}+\overline{CO})\times\overline{BO}=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{5}{2}$

답 ③

Level **3** **실력 완성** 본문 56쪽

1 ③ **2** 50 **3** ④

1 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\frac{g(1)}{12}$에서
$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+1\}=0$이고 $f(x)$가 다항함수이므로
$f(1)=-1$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$
이므로
$f'(1)=\frac{g(1)}{12}$ …… ㉠
$f(x)g(x)=x^4+x^3-4x^2-4x$ …… ㉡
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)g(1)=1^4+1^3-4\times1^2-4\times1$
$(-1)\times g(1)=-6$, 즉 $g(1)=6$
$g(1)=6$을 ㉠에 대입하면
$f'(1)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$
㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x^3+3x^2-8x-4$ …… ㉢
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=4\times1^3+3\times1^2-8\times1-4$
$\frac{1}{2}\times6+(-1)\times g'(1)=-5$, 즉 $g'(1)=8$
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$, 즉 $(1, 6)$에서의 접선의 방정식은
$y-6=8(x-1)$, 즉 $y=8x-2$
따라서 $a=8$, $b=-2$이므로
$a-b=8-(-2)=10$

답 ③

참고
$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$, $g(x)=2x(x+2)$이면 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 주어진 조건을 만족시킨다.

2 조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=9x$가 모두 원점을 지난다.
조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=9x$가 만나는 점의 개수가 2이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=9x$가 만나는 두 점을 $O(0, 0)$, $A(a, f(a))$ (a는 0이 아닌 상수)라 할 수 있다.
즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=9x$는 두 점 O, A 중 한 점에서만 접한다.
(i) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=9x$가 원점 O에서 접할 때,
$f(x)-9x=x^2(x-a)$
로 놓을 수 있다.
즉, $f(x)=x^3-ax^2+9x$에서
$f'(x)=3x^2-2ax+9$

조건 (나)에서

$f'(3)=3\times3^2-2a\times3+9=0,\ a=6$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=9x$가 점 A에서 접할 때,

$f(x)-9x=x(x-a)^2$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=x^3-2ax^2+(a^2+9)x$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2+9$

조건 (나)에서

$f'(3)=3\times3^2-4a\times3+a^2+9=0$

$(a-6)^2=0,\ a=6$

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이고 $x=5$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

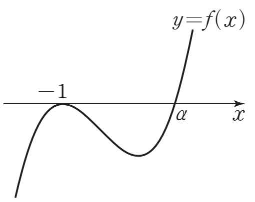
(i), (ii)에서 $f(x)=x(x-6)^2+9x$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(5)=5\times(5-6)^2+9\times5=50$

답 50

3 조건 (가)에서 $f(-1)=0$이고 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha\ (\alpha>-1)$에서만 미분가능하지 않으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(\alpha)=0,\ f'(-1)=0$이므로 $f(x)=(x+1)^2(x-\alpha)$로 놓을 수 있다.

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수이고, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)\ge0$이므로

$f(x)g(x)=(x+1)^2(x-\alpha)^2$이어야 한다.

이때 $f(x)g(x)=(x^2+2x+1)(x^2-2\alpha x+\alpha^2)$이므로

$\{f(x)g(x)\}'$

$=(2x+2)(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+(x^2+2x+1)(2x-2\alpha)$

$=2(x+1)(x-\alpha)(2x-\alpha+1)$

$\{f(x)g(x)\}'=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\alpha$ 또는 $x=\dfrac{\alpha-1}{2}$

함수 $f(x)g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{\alpha-1}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$\{f(x)g(x)\}'$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)g(x)$는 $x=\dfrac{\alpha-1}{2}$에서 극대이고,

조건 (나)에서 함수 $f(x)g(x)$의 극댓값이 81이므로

$$f\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)g\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)=\left(\frac{\alpha-1}{2}+1\right)^2\left(\frac{\alpha-1}{2}-\alpha\right)^2$$

$$=\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^4=81$$

에서

$$\left(\frac{\alpha+1}{2}+3\right)\left(\frac{\alpha+1}{2}-3\right)\left\{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2+9\right\}=0$$

$\dfrac{\alpha+1}{2}+3=0$ 또는 $\dfrac{\alpha+1}{2}-3=0$

$\alpha=-7$ 또는 $\alpha=5$

$\alpha>-1$이므로 $\alpha=5$

따라서 $A=\{-1,\ 2,\ 5\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$-1+2+5=6$

답 ④

05 도함수의 활용(2)

유제

본문 59~65쪽

1 ②	2 30	3 ①	4 6	5 ②
6 4	7 ④	8 35		

1 $f(x)=-2x^3+9x^2-6$에서

$f'(x)=-6x^2+18x=-6x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	21	$\searrow$	10

닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 21을 갖고, $x=0$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

따라서 $M=21$, $m=-6$이므로

$M+m=21+(-6)=15$

답 ②

2 $f(x)=3x^4-4x^3+a$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	a	$\searrow$	$a-1$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이고, 극솟값은 $a-1$이다.

함수 $f(x)$의 극솟값이 2이므로

$a-1=2$, 즉 $a=3$

이때 $f(-1)=3+4+3=10$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $M=10$을 갖는다.

따라서 $aM=3\times10=30$

답 30

3 곡선 $y=x^3+3x^2+5x-1$과 직선 $y=5x+k$가 만나는 점의 개수가 3이려면 방정식 $x^3+3x^2+5x-1=5x+k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$x^3+3x^2+5x-1=5x+k$에서

$x^3+3x^2-1=k$

$f(x)=x^3+3x^2-1$이라 하면

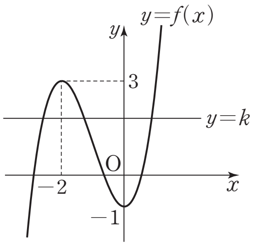
$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $x^3+3x^2-1=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-1<k<3$

따라서 정수 k의 값은 $0,\ 1,\ 2$이므로 그 개수는 3이다.

답 ①

4 $x^3-6x^2+9x-k=0$에서

$x^3-6x^2+9x=k$

$f(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면

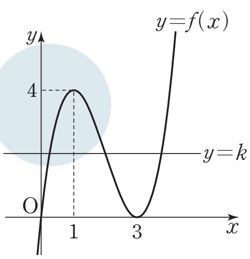
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $x^3-6x^2+9x=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<k<4$

따라서 정수 k의 값은 $1,\ 2,\ 3$이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$1+2+3=6$

답 6

5 부등식 $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+15>a$, 즉

$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+15-a>0$에서

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+15-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$(15-a)$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=5-a$이므로

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+15-a>0$이 성립하려면

$5-a>0$, 즉 $a<5$

이어야 한다.

따라서 자연수 a의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 개수는 4이다.

답 ②

6 부등식 $f(x)\geq g(x)$에서

$x^3-x^2+3x+5\geq 4x+k$

$x^3-x^2-x+5-k\geq 0$

$h(x)=x^3-x^2-x+5-k$라 하면

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$(5-k)$	$\searrow$	$4-k$	$\nearrow$

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=4-k$이므로

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^3-x^2-x+5-k\geq 0$이 성립하려면

$4-k\geq 0$, 즉 $k\leq 4$

이어야 한다.

따라서 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

7 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 x가

$x=\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2+4t-5$

$v=16$에서

$t^2+4t-5=16$

$t^2+4t-21=0$

$(t+7)(t-3)=0$

$t>0$이므로 $t=3$

따라서 시각 $t=3$일 때 점 P의 위치는

$\frac{1}{3}\times 3^3+2\times 3^2-5\times 3=12$

답 ④

8 두 점 P, Q가 만나는 순간에 $x_1=x_2$이므로

$t^3-5t^2=-2t^2+10t$

$t^3-3t^2-10t=0$

$t(t+2)(t-5)=0$

$t>0$이므로 $t=5$

즉, 시각 $t=5$일 때 두 점 P, Q는 만난다.

한편, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-10t$

$v_2=\frac{dx_2}{dt}=-4t+10$

따라서 시각 $t=5$일 때 두 점 P, Q의 속도 p, q는

$p=3\times 5^2-10\times 5=25$, $q=-4\times 5+10=-10$

이므로

$p-q=25-(-10)=35$

답 35

Level 1 기초 연습

본문 66~67쪽

1 ④	2 ⑤	3 ②	4 ③	5 ④
6 ③	7 ①	8 ④		

1 $f(x)=-2x^3+6x^2+1$에서

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	1

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 9를 갖는다.

답 ④

2 $f(x)=x^4+2x^2-8x+a$에서

$f'(x)=4x^3+4x-8$

$=4(x^3+x-2)$

$=4(x-1)(x^2+x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+11$	$\searrow$	$a-5$	$\nearrow$	$a+8$

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $a+11$을 갖고, $x=1$일 때 최솟값 $a-5$를 갖는다.

이때 $M=a+11$, $m=a-5$이므로

$M+m=16$에서

$(a+11)+(a-5)=16$

따라서 $a=5$

답 ⑤

3 $-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x+k=0$에서

$\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x=k$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x$라 하면

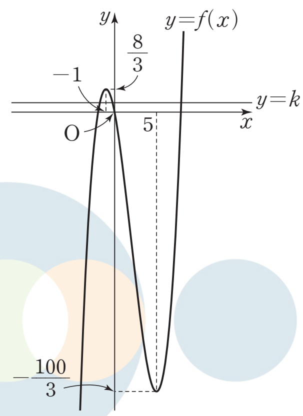
$f'(x)=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$-\frac{100}{3}$	$\nearrow$

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x=k$의 서로 다른 음의 실근의 개수가 2이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점 중 두 점의 x좌표가 음수이어야 하므로

$0<k<\frac{8}{3}$

따라서 정수 k의 값은 1, 2이므로 그 개수는 2이다.

답 ②

4 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+10$에서

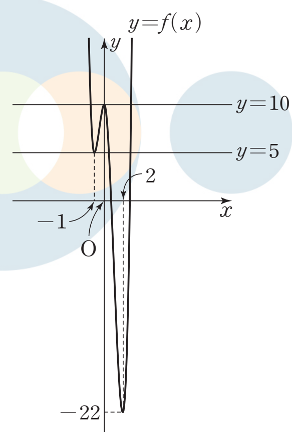
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	5	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면
$k=5$ 또는 $k=10$
이어야 한다.
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$5+10=15$

답 ③

5 부등식 $x^4-4x^3-a^2+9a+37>0$에서
$f(x)=x^4-4x^3-a^2+9a+37$이라 하면
$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-a^2+9a+37$	↘	$-a^2+9a+10$	↗

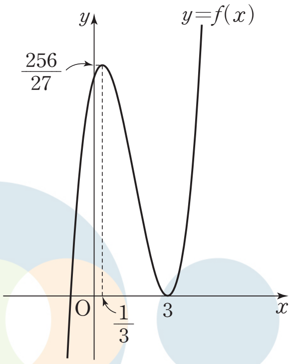
함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $-a^2+9a+10$을 갖는다.
그러므로 모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^4-4x^3-a^2+9a+37>0$이 성립하려면
$-a^2+9a+10>0$이어야 하므로
$a^2-9a-10<0$, $(a+1)(a-10)<0$
$-1<a<10$
따라서 정수 a의 값은 $0, 1, 2, \cdots, 9$이므로 그 개수는 10이다.

답 ④

6 부등식 $x^3-5x^2+3x+9>0$에서
$f(x)=x^3-5x^2+3x+9$라 하면
$f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 0을 갖고, $x=\frac{1}{3}$에서 극댓값 $\frac{256}{27}$을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^3-5x^2+3x+9>0$이 성립하려면
$a\geq3$이어야 하므로 정수 a의 최솟값은 3이다.

답 ③

7 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=t^2-8t+6$
점 P의 시각 t에서의 가속도를 a라 하면
$a=\frac{dv}{dt}=2t-8$
$a=0$에서
$2t-8=0$, 즉 $t=4$
따라서 시각 $t=4$일 때 점 P의 속도는
$4^2-8\times4+6=-10$

답 ①

8 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면
$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-6t$, $v_2=\frac{dx_2}{dt}=-5t+10$
$v_1=v_2$에서
$3t^2-6t=-5t+10$
$3t^2-t-10=0$, $(3t+5)(t-2)=0$
$t>0$이므로 $t=2$
즉, 시각 $t=2$일 때 두 점 P, Q의 속도가 같아진다.
따라서 시각 $t=2$일 때 점 P의 위치는
$2^3-3\times2^2=-4$
이고, 시각 $t=2$일 때 점 Q의 위치는
$-\frac{5}{2}\times2^2+10\times2=10$
이므로 시각 $t=2$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는
$10-(-4)=14$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 68~69쪽

1 ⑤	2 ②	3 ③	4 ④	5 19
6 ②	7 ③			

1 $f(x)=-x^3+6x^2$에서
$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 극값을 가지고, $p>0$이므로
$p=4$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y-(-t^3+6t^2)=(-3t^2+12t)(x-t)$
위 식에 $x=0$을 대입하면
$y-(-t^3+6t^2)=(-3t^2+12t)(-t)$
$y=2t^3-6t^2$
이때 $g(t)=2t^3-6t^2$이므로
$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$
$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$
닫힌구간 $\left[-\frac{p}{2},\ \frac{p}{2}\right]$, 즉 $[-2,\ 2]$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-40	↗	0	↘	-8

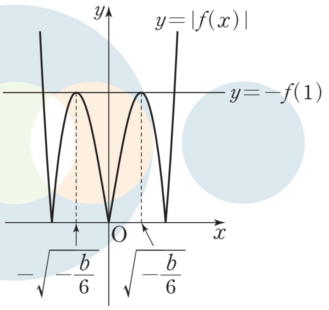
따라서 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $g(t)$의 최솟값은 -40이다.

답 ⑤

2 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로
$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)
로 놓을 수 있다.
조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로
$-2x^3+ax^2-bx+c=-2x^3-ax^2-bx-c$
$2ax^2+2c=0$
위 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $a=0$, $c=0$
$f(x)=2x^3+bx$에서 $f'(x)=6x^2+b$
$b\ge0$이면 $f'(x)\ge0$이므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.
이때 $f(1)>0$, 즉 $-f(1)<0$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=-f(1)$은 만나지 않는다.
조건 (나)에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=-f(1)$은 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 $b<0$이어야 한다.
$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{6}}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{-\frac{b}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{-\frac{b}{6}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(0)=0$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



조건 (나)에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=-f(1)$이 서로 다른 네 점에서 만나므로 $f(1)<0$이어야 한다.
이때 $\sqrt{-\frac{b}{6}}=1$, 즉 $-\frac{b}{6}=1$에서
$b=-6$
따라서 $f(x)=2x^3-6x$이므로
$f(3)=2\times3^3-6\times3=36$

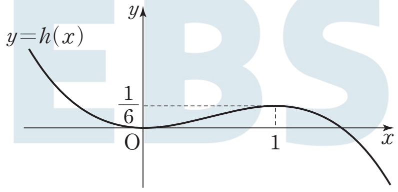
답 ②

3 방정식 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+k=0$에서
$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2=k$
$h(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$이라 하면
$h'(x)=-x^2+x=-x(x-1)$
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$

함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $f(k)$는

$$f(k)=\begin{cases} 1 & (k<0) \\ 2 & (k=0) \\ 3 & \left(0<k<\frac{1}{6}\right) \\ 2 & \left(k=\frac{1}{6}\right) \\ 1 & \left(k>\frac{1}{6}\right) \end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$과 $x=\frac{1}{6}$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=3g(0)$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=g(0)$,

$f(0)g(0)=2g(0)$

이므로 $3g(0)=g(0)=2g(0)$에서

$g(0)=0$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=\frac{1}{6}$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to \frac{1}{6}+} f(x)g(x)=g\left(\frac{1}{6}\right)$,

$\lim_{x\to \frac{1}{6}-} f(x)g(x)=3g\left(\frac{1}{6}\right)$,

$f\left(\frac{1}{6}\right)g\left(\frac{1}{6}\right)=2g\left(\frac{1}{6}\right)$

이므로 $g\left(\frac{1}{6}\right)=3g\left(\frac{1}{6}\right)=2g\left(\frac{1}{6}\right)$에서

$g\left(\frac{1}{6}\right)=0$

(i), (ii)에서 $g(0)=0$, $g\left(\frac{1}{6}\right)=0$이므로

$g(x)=x\left(x-\frac{1}{6}\right)$

따라서 $f(2)+g(2)=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}$

답 ③

4 부등식 $f(x)\le g(x)$에서

$x^4+x^3-8x\le x^3-2x^2+k$

$x^4+2x^2-8x\le k$ ⋯⋯ ㉠

$h(x)=x^4+2x^2-8x$라 하면

$h'(x)=4x^3+4x-8=4(x-1)(x^2+x+2)$

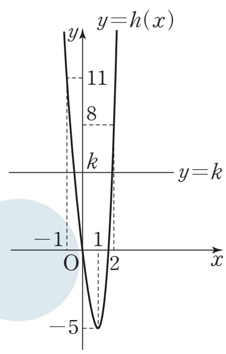
$h'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 동시에 최솟값 -5를 갖는다.

이때 $h(-1)=11$, $h(0)=0$, $h(2)=8$이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x의 개수가 2이려면



$0\le k<8$

이어야 한다.

따라서 정수 k의 값은

$0, 1, 2, \cdots, 7$

이므로 그 개수는 8이다.

답 ④

5 조건 (나)에서 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(x-4)f(x)\ge 0$, 즉 $x(x-4)(x^2+ax+b)\ge 0$

이 성립해야 하므로

$x^2+ax+b=x(x-4)$

이어야 한다.

즉, $x^2+ax+b=x^2-4x$에서

$a=-4$, $b=0$

이때 $f(x)=x^3-4x^2$이므로 $f'(x)=3x^2-8x$

방정식 $f(x)-xf'(k)=0$에서

$(x^3-4x^2)-xf'(k)=0$

$x\{x^2-4x-f'(k)\}=0$

$x=0$ 또는 $x^2-4x-f'(k)=0$

(i) 방정식 $x^2-4x-f'(k)=0$이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-4x-f'(k)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2+f'(k)=4+f'(k)=0$

$3k^2-8k+4=0$, $(3k-2)(k-2)=0$

$k=\frac{2}{3}$ 또는 $k=2$

이때 방정식 $x^2-4x-f'(k)=0$, 즉 $x^2-4x+4=0$에서 $x=2$이므로 방정식 $x^2-4x-f'(k)=0$은 0이 아닌 중근을 갖는다.

(ⅱ) $x=0$이 방정식 $x^2-4x-f'(k)=0$의 근인 경우

$f'(k)=0$

$3k^2-8k=0$, $k(3k-8)=0$

$k=0$ 또는 $k=\frac{8}{3}$

이때 방정식 $x^2-4x-f'(k)=0$, 즉 $x^2-4x=0$의 근은 $x=0$ 또는 $x=4$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$k=0$ 또는 $k=\frac{2}{3}$ 또는 $k=2$ 또는 $k=\frac{8}{3}$

이므로 모든 k의 값의 합은

$0+\frac{2}{3}+2+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로

$p+q=3+16=19$

답 19

6 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t^3-6t^2+k$

점 P가 원점을 출발한 후 운동 방향이 두 번 바뀌려면 t에 대한 방정식 $2t^3-6t^2+k=0$이 $t>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$2t^3-6t^2+k=0$, 즉 $2t^3-6t^2=-k$에서

$f(t)=2t^3-6t^2$이라 하면

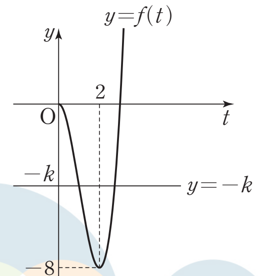
$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

$t\geq 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↘	-8	↗

$t\geq 0$일 때, 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극솟값 -8을 가지므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$t>0$에서 방정식 $2t^3-6t^2=-k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 $t>0$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-8<-k<0$, 즉 $0<k<8$

이어야 한다.

따라서 정수 k의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 7이므로 그 개수는 7이다.

답 ②

7 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^3-6t^2+9t+k$

$f(t)=t^3-6t^2+9t+k$라 하면

$f'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	(k)	↗	$4+k$	↘	k	↗

함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값 $4+k$를 갖고, $t=3$에서 극솟값 k를 갖는다.

시각 $t=3$에서 점 P의 속도가 0보다 작으므로 $f(3)=k<0$이다.

시각 $t=p$와 $t=q$ $(p<q)$에서만 점 P의 속도가 2이고 $k<0$이므로 $t>0$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, $f(1)=2$이어야 하므로 $4+k=2$에서 $k=-2$

$f(t)=2$에서

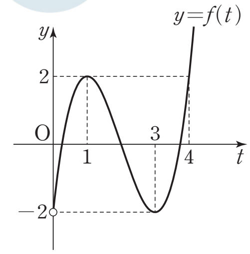
$t^3-6t^2+9t-2=2$

$t^3-6t^2+9t-4=0$

$(t-1)^2(t-4)=0$

$t=1$ 또는 $t=4$

이때 $p=1$, $q=4$이다.



한편, 점 P의 시각 t에서의 가

속도를 a라 하면

$a=\dfrac{dv}{dt}=3t^2-12t+9$

따라서 시각 $t=q$, 즉 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$3\times4^2-12\times4+9=9$

답 ③

Level **3** **실력 완성** 본문 70쪽

1 ② **2** ③ **3** 10

1 $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	16	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 20을 갖고, $x=3$에서 극솟값 16을 갖는다.

한편, $f(x)=(x+1)(x^2-7x+16)$이고

모든 실수 x에 대하여

$x^2-7x+16=\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$이므로

$f(x)=0$에서 $x=-1$

집합 A의 $f(x)f'(t)(x-t)+f(x)f(t)=0$에서

$f(x)\{f'(t)(x-t)+f(t)\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f'(t)(x-t)+f(t)=0$

이때 $g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선이다.

집합 A의 원소의 개수가 1이려면 방정식 $f(x)g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다.

즉, 접선 $y=g(x)$가 x축에 평행하거나 점 $(-1,\ 0)$을 지나야 한다.

$t=1$ 또는 $t=3$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 x축에 평행하다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(x-t)$

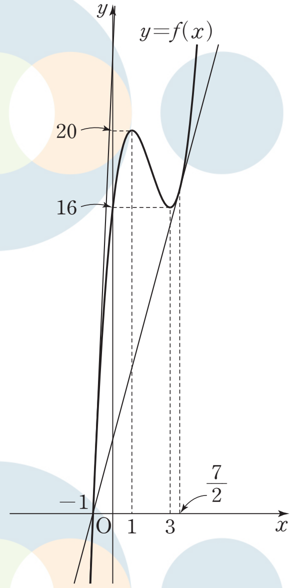
이 접선이 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

$0-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(-1-t)$

$(t+1)^2(2t-7)=0$

$t=-1$ 또는 $t=\dfrac{7}{2}$

즉, $t=-1$ 또는 $t=\dfrac{7}{2}$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.



따라서 집합 A의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은

$-1+1+3+\dfrac{7}{2}=\dfrac{13}{2}$

답 ②

2 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 조건 (가)에서 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\alpha\ (\alpha\neq1)$에서만 미분가능하지 않으므로

$f(x)-f(1)=(x-1)^3(x-\alpha)$

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)+f(1)$

$\quad=x^4-(\alpha+3)x^3+3(\alpha+1)x^2-(3\alpha+1)x+\alpha+f(1)$

$f'(x)=4x^3-3(\alpha+3)x^2+6(\alpha+1)x-(3\alpha+1)$

$\quad=(x-1)^2(4x-3\alpha-1)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 극값을 가지므로

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)^2(-2-3\alpha-1)=0$에서

$\alpha=-1$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3\left(-\frac{1}{2}+1\right)+f(1)=0$

$f(1)=\frac{27}{16}$

그러므로 $f(x)=(x-1)^3(x+1)+\frac{27}{16}$

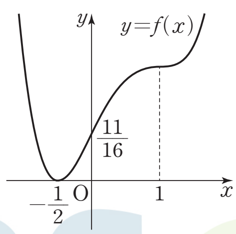
한편, $f'(x)=2(x-1)^2(2x+1)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{27}{16}$	↗

$f(0)=\frac{11}{16}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(f(x))=t$에서

$f(x)=X\ (X\geq 0)$이라 하면

$f(X)=t$

(i) $t<\frac{11}{16}$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않거나 만나는 경우에도 교점의 x좌표의 값이 0보다 작으므로 방정식 $f(X)=t$의 해는 없다.

즉, $g(t)=0$이다.

(ii) $t=\frac{11}{16}$일 때,

$f(X)=\frac{11}{16}$에서 $X=0$

즉, $f(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$이므로

$g\left(\frac{11}{16}\right)=1$

(iii) $t>\frac{11}{16}$일 때,

제1사분면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(X)=t$를 만족시키는 실수 X의 값은 1개 존재한다.

방정식 $f(X)=t$의 실근을 $p\ (p>0)$이라 하면

$X=p$에서 $f(x)=p$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=p\ (p>0)$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=p$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, $g(t)=2$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(t)=\begin{cases}0 & \left(t<\frac{11}{16}\right)\\ 1 & \left(t=\frac{11}{16}\right)\\ 2 & \left(t>\frac{11}{16}\right)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=\frac{11}{16}$에서만 불연속이므로

$\beta=\frac{11}{16}$

따라서 $\alpha+\beta=-1+\frac{11}{16}=-\frac{5}{16}$

답 ③

3 조건 (가)에서

$\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$

이므로

$f(x)-f(3)=0,\ f'(2)=0$

방정식 $\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 방정식 $f(x)-f(3)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

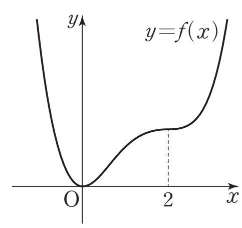
한편, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$에서 $f(0)=0$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$에서

$f'(0)=0$

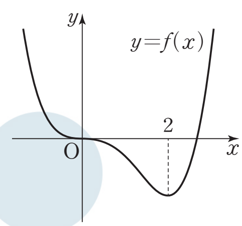
(i) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서만 극값을 갖는 경우

이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



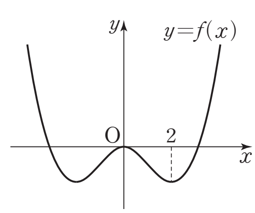
(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 극값을 갖는 경우

이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



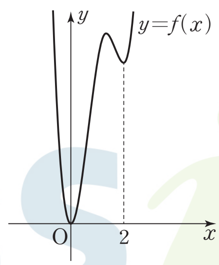
(iii) 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 모두 극값을 갖는 경우

$f(0)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지면 $f(2)<0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

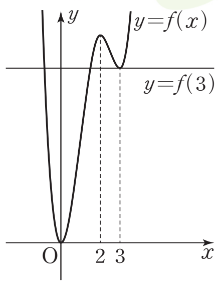


따라서 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 모두 극값을 갖는 경우에는 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

(a) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 갖는 경우
이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(b) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 갖는 경우
조건 (나)에서 $f(3)>0$이고 방정식 $f(x)-f(3)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가져야 한다.



즉, $f'(0)=f'(2)=f'(3)=0$이므로 이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$의 두 근이 2, 3이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$2+3=-\dfrac{3a}{4}$, $2\times3=\dfrac{2b}{4}$

즉, $a=-\dfrac{20}{3}$, $b=12$

이때 $f(x)=x^4-\dfrac{20}{3}x^3+12x^2$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=x^4-\dfrac{20}{3}x^3+12x^2$이므로

$f(3)=9$

$f(x)=9$에서 $x^4-\dfrac{20}{3}x^3+12x^2=9$

$3x^4-20x^3+36x^2-27=0$

$(x-3)^2(3x^2-2x-3)=0$

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

$x\ge k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge f(3)$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$이다.

따라서 $p=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$이므로

$(3p-1)^2=\left(3\times\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}-1\right)^2=10$

답 10

06 부정적분과 정적분

유제

본문 73~79쪽

1 ④	2 25	3 ④	4 8	5 ①
6 100	7 ③	8 9		

1 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+1)dx$

$=x^3-2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=1-2+1+C=4$에서 $C=4$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+4$이므로

$f(2)=8-8+2+4=6$

답 ④

2 $F(x)=\{f(x)\}^2$ ⋯⋯ ㉠

다항함수 $f(x)$가 상수함수이면 $f(0)=-3$이므로 $f(x)=-3$이다. 이때 ㉠의 좌변은 일차식, 우변은 상수가 되어 조건을 만족시킬 수 없다.

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)라 하면 ㉠의 좌변의 최고차항은 $\dfrac{a}{n+1}x^{n+1}$, 우변의 최고차항은 a^2x^{2n}이므로

$n+1=2n$에서 $n=1$,

$\dfrac{a}{n+1}=a^2$에서 $\dfrac{a}{1+1}=a^2$

$a\ne0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

즉, 다항함수 $f(x)$의 최고차항은 $\dfrac{1}{2}x$이다.

이때 $f(0)=-3$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}x-3$

따라서 $F(1)=\{f(1)\}^2=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

이므로 $4F(1)=25$

답 25

다른 풀이

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$F(x)=\{f(x)\}^2$, 즉 $F(x)=f(x)\times f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)$

$f(x)=2f(x)f'(x)$

$f(x)\{2f'(x)-1\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f'(x)=\frac{1}{2}$

$f(0)=-3$이므로 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\frac{1}{2}$이다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(0)=C=-3$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x-3$

따라서 $f(1)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$이므로

$F(1)=\{f(1)\}^2=\frac{25}{4}$에서 $4F(1)=25$

3 $\int_2^x f'(t)dt=(x-3)^3+a$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$\int_2^2 f'(t)dt=-1+a$, $0=-1+a$, 즉 $a=1$

정적분의 정의에 의하여

$\int_2^x f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_2^x=f(x)-f(2)$

이므로 $\int_2^x f'(t)dt=(x-3)^3+1$에서

$f(x)-f(2)=(x-3)^3+1$

따라서 $f(3)-f(2)=0^3+1=1$

답 ④

4 $\int_{-1}^x xf(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^4+(a-1)x^2-a$에서

$x\int_{-1}^x f(t)dt-\int_{-1}^x tf(t)dt=x^4+(a-1)x^2-a$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+2(a-1)x$

$\int_{-1}^x f(t)dt=4x^3+2(a-1)x$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$\int_{-1}^{-1} f(t)dt=-4-2(a-1)$

$0=-2a-2$, $a=-1$

㉡에서 $\int_{-1}^x f(t)dt=4x^3-4x$

이고 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-4$

따라서 $f(a)=f(-1)=12-4=8$

답 8

5 $\int_1^3 (x^2+4)dx+\int_3^1 (x+2)^2dx$

$=\int_1^3 (x^2+4)dx-\int_1^3 (x+2)^2dx$

$=\int_1^3 \{(x^2+4)-(x+2)^2\}dx$

$=\int_1^3 (-4x)dx$

$=\Big[-2x^2\Big]_1^3$

$=-18+2=-16$

답 ①

6 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\le 1) \\ ax+b & (x>1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이 성립하고

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} (-x+1)=0$,

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} (ax+b)=a+b$,

$f(1)=-1+1=0$

이므로 $a+b=0$, 즉 $b=-a$

이때 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\le 1) \\ ax-a & (x>1) \end{cases}$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 (-x+1)dx+\int_1^2 (ax-a)dx$

$=\int_0^1 (-x+1)dx+a\int_1^2 (x-1)dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^1+a\times\Big[\frac{1}{2}x^2-x\Big]_1^2$

$=\left(\frac{1}{2}-0\right)+a\times\left\{0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a>5$

에서 $a>9$

따라서 정수 a의 최솟값은 10이므로

$|ab|=|a\times(-a)|=a^2$의 최솟값은 100이다.

답 100

7 $\int_{-2}^2 (3ax^2+2ax+a)dx$

$=\int_{-2}^2 3ax^2dx+\int_{-2}^2 2ax\,dx+\int_{-2}^2 a\,dx$

$=2\int_0^2 3ax^2\,dx+0+2\int_0^2 a\,dx$

$=2\times\Big[ax^3\Big]_0^2+2\times\Big[ax\Big]_0^2$

$=2\times 8a+2\times 2a$

$=20a=60$

에서 $a=3$

답 ③

8 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)의 $f(0)=1$에서

$f(0)=b=1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h} f'(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{\int_1^{1+h} f'(t)dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=f'(1)$$

이고 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_1^{1+h} f'(t)dt=0$이므로

$f'(1)=0$

$f(x)=x^4+ax^2+1$에서 $f'(x)=4x^3+2ax$이므로

$f'(1)=4+2a=0$, $a=-2$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2+1$이므로

$f(2)=16-8+1=9$

답 9

Level 1 기초 연습

본문 80~81쪽

1 ②	2 ④	3 ③	4 ⑤	5 ①
6 ③	7 ①	8 ②	9 72	

1 $f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(4x^3+6x)dx$

$=x^4+3x^2+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 $f(1)-f(0)=(4+C)-C=4$

답 ②

다른 풀이

$f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1(4x^3+6x)dx$

$=\Big[x^4+3x^2\Big]_0^1=4-0=4$

2 $\int_1^2(ax-2)dx=\Big[\frac{a}{2}x^2-2x\Big]_1^2$

$=(2a-4)-\left(\frac{a}{2}-2\right)$

$=\frac{3}{2}a-2=4$

에서 $\frac{3}{2}a=6$

따라서 $a=4$

답 ④

3 $\int_0^1\frac{x^2-2x}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x-2}{x+1}dx$

$=\int_0^1\left(\frac{x^2-2x}{x+1}+\frac{x-2}{x+1}\right)dx$

$=\int_0^1\frac{x^2-x-2}{x+1}dx$

$=\int_0^1\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}dx$

$=\int_0^1(x-2)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_0^1$

$=-\frac{3}{2}$

답 ③

4 $\int_0^2 x|x-1|dx$

$=\int_0^1 x|x-1|dx+\int_1^2 x|x-1|dx$

$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2$

$=\left(\frac{1}{6}-0\right)+\left\{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}$

$=1$

답 ⑤

5 $\int_{-3}^{3}(x^2+a)(x^3+x+1)dx$

$=\int_{-3}^{3}\{x^5+(a+1)x^3+x^2+ax+a\}dx$

$=2\int_{0}^{3}(x^2+a)dx$

$=2\times\left[\frac{1}{3}x^3+ax\right]_0^3$

$=2\times(9+3a)$

$=18+6a=6$

에서 $6a=-12$

따라서 $a=-2$

답 ①

6 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2+2x+3)dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x-3)(x+1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$의 극솟값이 2이므로

$f(-1)=\frac{1}{3}+1-3+C=2$, $C=\frac{11}{3}$

따라서 $f(0)=C=\frac{11}{3}$

답 ③

7 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x f(t)dt\right\}=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(1)\}$

$=F'(x)=f(x)$

이므로 $\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x f(t)dt\right\}=x^2+ax$에서

$f(x)=x^2+ax$

$f(-1)=1-a=3$에서 $a=-2$

답 ①

8 $\int_{-1}^{1}f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=3x^3+1+a$

$\int_{-1}^{1}(3t^3+1+a)dt=a$에서

$\int_{-1}^{1}(3t^3+1+a)dt=2\int_0^1(1+a)dt$

$=2\times\Big[(1+a)t\Big]_0^1$

$=2(1+a)=a$

이므로 $a=-2$

따라서 $f(x)=3x^3-1$이고 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)=2$

답 ②

9 $\int_0^x f(t)dt=f(x)+x^3+ax$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x)+3x^2+a$ …… ㉡

다항함수 $f(x)$가 상수함수이면 ㉡의 좌변은 상수, 우변은 이차식이 되어 조건을 만족시킬 수 없다.

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 bx^n (b는 0이 아닌 상수, n은 자연수)라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 nbx^{n-1}이므로 이 등식이 성립하려면 $bx^n=3x^2$이어야 한다.

즉, $b=3$, $n=2$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)+0$, $f(0)=0$

그러므로 $f(x)=3x^2+cx$ (c는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $f'(x)=6x+c$이므로 ㉡에서

$3x^2+cx=(6x+c)+3x^2+a=3x^2+6x+a+c$

즉, $c=6$, $a+c=0$에서 $a=-c=-6$

따라서 $f(x)=3x^2+6x$이므로

$f(a)=f(-6)=108-36=72$

답 72

Level 2 기본 연습

본문 82~83쪽

1 ④	2 ④	3 44	4 ⑤	5 ②
6 ②	7 ⑤			

1 다항함수 $f(x)$가 상수함수이면 $f(0)=4$에서 $f(x)=4$이고 $F'(x)=f(x)=4$이므로 $|F'(1)|\le2$를 만족시키지 않는다.

$2\{F(x)-F(1)\}=(x-1)\{f(x)+f(1)\}$ …… ㉠

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)라 하면 ㉠의 좌변의 최고차항은 $\frac{2a}{n+1}x^{n+1}$, 우변의 최고차항은 ax^{n+1}이다.

$\frac{2a}{n+1}=a$에서 $a\neq0$이므로

$\frac{2}{n+1}=1$, $n=1$

$n=1$이면 $f(x)$는 일차함수이고 $f(0)=4$이므로

$f(x)=ax+4$이다.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(ax+4)dx$$
$$=\frac{a}{2}x^2+4x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

㉠에서

$$2\left\{\left(\frac{a}{2}x^2+4x+C\right)-\left(\frac{a}{2}+4+C\right)\right\}$$
$$=(x-1)\{(ax+4)+(a+4)\}$$
$$ax^2+8x-a-8=ax^2+8x-a-8$$

이므로 함수 $f(x)=ax+4$는 두 상수 a, C의 값에 관계없이 ㉠을 만족시킨다.

이때 $F'(x)=f(x)$에서 $F'(1)=f(1)=a+4$이고 조건 (나)에서

$|a+4|\leq2$, $-2\leq a+4\leq2$

$-6\leq a\leq-2$ …… ㉡

$f(3)=3a+4$이고 ㉡에서

$-14\leq3a+4\leq-2$이므로

$-14\leq f(3)\leq-2$

따라서 $f(3)$의 최댓값은 -2, 최솟값은 -14이므로 이들의 곱은 28이다.

답 ④

2 $\int_0^x f(t)dt=g(x)+\int_3^0 f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$\int_0^3 f(t)dt=g(3)+\int_3^0 f(t)dt$$

$g(3)=6$이고, $\int_3^0 f(t)dt=-\int_0^3 f(t)dt$이므로

$\int_0^3 f(t)dt=6-\int_0^3 f(t)dt$에서

$\int_0^3 f(t)dt=3$, 즉 $\int_3^0 f(t)dt=-3$

$g(4)=10$이므로 ㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$$\int_0^4 f(t)dt=g(4)+\int_3^0 f(t)dt=10+(-3)=7$$

답 ④

3 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$ …… ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이고 삼차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(1)=0$ …… ㉡

이때 ㉠에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$$

$f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=4(x-1)^2(x+a)$ (a는 상수) …… ㉢

로 놓을 수 있다.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_0^x f(t)dt=k$에서

$\lim_{x\to1}\frac{F(x)}{x-1}=k$ …… ㉣

㉣에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}F(x)=0$이고 사차함수 $F(x)$는 연속함수이므로

$F(1)=0$

$$F(1)=\int_0^1 f(t)dt$$
$$=\int_0^1 4(t-1)^2(t+a)dt$$
$$=4\int_0^1\{t^3+(a-2)t^2+(1-2a)t+a\}dt$$
$$=4\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{a-2}{3}t^3+\frac{1-2a}{2}t^2+at\right]_0^1$$
$$=4\left(\frac{1}{4}+\frac{a-2}{3}+\frac{1-2a}{2}+a\right)$$
$$=4\left(\frac{a}{3}+\frac{1}{12}\right)=0$$

에서 $a=-\frac{1}{4}$

이것을 ㉢에 대입하면

$$f(x)=4(x-1)^2\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x-1)^2(4x-1)$$

한편, ㉣에서

$$\lim_{x\to1}\frac{F(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=f(1)=k$$

㉡에서 $f(1)=0$이므로 $k=0$

따라서

$f(k+3)=f(3)=2^2\times 11=44$

답 44

참고

다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$를 구할 수도 있다.

$F(1)=F(0)=0$, $F'(1)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $F(x)$를

$F(x)=x(x-1)^2(x+b)$ (b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$F(x)=x(x-1)^2(x+b)=(x^3-2x^2+x)(x+b)$에서

$$\begin{aligned}F'(x)&=(3x^2-4x+1)(x+b)+(x^3-2x^2+x)\\&=(x-1)(3x-1)(x+b)+x(x-1)^2\\&=(x-1)\{(3x-1)(x+b)+x(x-1)\}\end{aligned}$$

$F'(x)=f(x)$이므로 ㉢에서

$(x-1)\{(3x-1)(x+b)+x(x-1)\}$

$=4(x-1)^2(x+a)$

$(3x-1)(x+b)+x(x-1)=4(x-1)(x+a)$ …… ㉣

㉣의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2(1+b)=0$, $b=-1$

㉣의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-b=-4a$

$a=\frac{1}{4}b=-\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=4(x-1)^2\left(x-\frac{1}{4}\right)$이다.

4 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이다.

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(ax^2-1)=a-1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}f(x)&=\lim_{x\to 0+}f(x+1)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)+b\}\\&=\lim_{x\to 0+}(ax^2-1+b)=-1+b,\end{aligned}$$

$f(1)=f(0)+b=-1+b$

이므로 $a-1=-1+b$

즉, $a=b$

이때 $0\le x\le 1$에서 $f(x)=ax^2-1$이다.

$f(x+1)=f(x)+b$이므로 정수 n에 대하여 $n\le x\le n+1$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이 $n+1\le x\le n+2$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.

그러므로

$1\le x\le 2$일 때 $f(x)=a(x-1)^2-1+b$,

$2\le x\le 3$일 때 $f(x)=a(x-2)^2-1+2b$

이고 $a=b$이므로

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(x)dx&=\int_2^3\{a(x-2)^2-1+2a\}dx\\&=\int_2^3(ax^2-4ax+6a-1)dx\\&=\left[\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(6a-1)x\right]_2^3\\&=(9a-3)-\left(\frac{20}{3}a-2\right)\\&=\frac{7}{3}a-1=\frac{11}{3}\end{aligned}$$

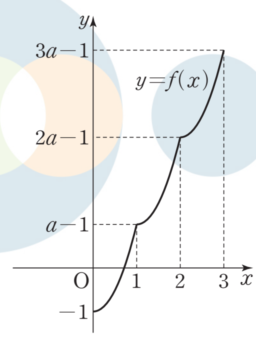
에서 $a=2$

따라서 $a+b=a+a=2a=4$

답 ⑤

참고

$a=b$이므로 $0\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 f(x)dx$, $\int_2^3 f(x)dx$의 값은 이 순서대로 공차가 $b(=a)$인 등차수열을 이룬다.

5 조건 (가)에서

$0\le x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고,

$1\le x\le a$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$이므로

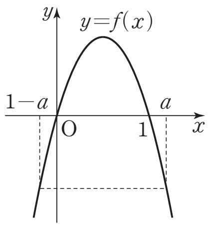
$f(1)=0$이다.

이때 $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 이차항의 계수는 음수, 즉 -4이고 $f(x)=-4x(x-1)$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$\int_0^a f(x)dx=\int_{1-a}^1 f(x)dx$ …… ㉠

를 만족시킨다.



따라서 조건 (나)와 ㉠에서

$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \int_{1-a}^1 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$인데

$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \ge \int_0^a f(x)dx$이므로

$\left|\int_0^a f(x)dx\right| = \int_0^a f(x)dx$

즉, $\int_0^a f(x)dx \ge 0$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx &= \int_0^a \{-4x(x-1)\}dx \\ &= -4\int_0^a (x^2-x)dx \\ &= -4\times\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a \\ &= -4\times\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2\right) \\ &= -\frac{4}{3}a^2\left(a-\frac{3}{2}\right)\ge 0\end{aligned}$$

에서 $a\le\frac{3}{2}$

$a>1$이므로 $1<a\le\frac{3}{2}$

닫힌구간 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$는 감소하고 $f(1)=0$,

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-3$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)\le f(a)<f(1)$

$-3\le f(a)<0$

따라서 $f(a)$의 최솟값은 -3이다.

답 ②

6 조건 (가)에서

$$\begin{aligned}g'(x) &= \int f'(x)dx-\int 6x\,dx \\ &= f(x)-3x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

조건 (나)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=g(x)+xg'(x)-g(x)$

즉, $f(x)=xg'(x)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$g'(x)=xg'(x)-3x^2+C$

$(x-1)g'(x)=3x^2-C$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3-C$

$C=3$

$(x-1)g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이때 $g'(x)$가 다항함수이므로 $g'(x)=3x+3$

$$\begin{aligned}g(x) &= \int g'(x)dx=\int(3x+3)dx \\ &= \frac{3}{2}x^2+3x+C_1 \text{ (단, } C_1\text{은 적분상수)}\end{aligned}$$

㉡에서 $f(x)=xg'(x)=3x^2+3x$이고

$f(1)=g(1)$이므로

$3+3=\frac{3}{2}+3+C_1$

$C_1=\frac{3}{2}$

따라서 $g(x)=\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}$이므로

$g(2)=6+6+\frac{3}{2}=\frac{27}{2}$

답 ②

7 ㄱ. $0\le x<2$일 때 $|f(x)|=|x-1|$,

$2\le x\le 4$일 때 $|f(x)|=|x-3|$에서

$f(1)=0$, $f(3)=0$이다.

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$0\le x<1$일 때, $f(x)=x-1$ 또는 $f(x)=-x+1$

$1\le x<2$일 때 $f(x)=x-1$이면, $2\le x<3$일 때

$f(x)=-x+3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$1\le x<2$일 때 $f(x)=-x+1$이면, $2\le x<3$일 때

$f(x)=x-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$3\le x\le 4$일 때, $f(x)=x-3$ 또는 $f(x)=-x+3$

이다.

그러므로 가능한 함수 f의 개수는 $2\times2\times2=8$이다.

(거짓)

ㄴ. ㉠, ㉡에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $1\le x\le 3$에서 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭성을 이용하면

$\int_1^2 f(t)dt=\int_2^3 f(t)dt$이므로

$$\begin{aligned}g(2) &= \int_1^2 f(t)dt+\int_3^2 f(t)dt \\ &= \int_1^2 f(t)dt-\int_2^3 f(t)dt=0\end{aligned}$$

그러므로 ㄱ에서 구한 8개의 연속함수 $f(x)$에 대하여 $g(2)=0$이다.

한편, $g(x)=\int_1^x f(t)dt+\int_3^x f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$ …… ㉢

㉢에서 $g'(2)=2f(2)$이고,

㉠의 경우 $f(2)=1$,

㉡의 경우 $f(2)=-1$이므로

$|g'(2)|=|2f(2)|=2$

따라서 $|g(2)|+|g'(2)|=0+2=2$ (참)

ㄷ. ㉢에서 $g'(x)=2f(x)$이므로

$g'(x)=0$에서 $f(x)=0$

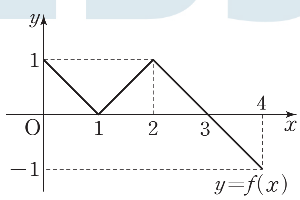
즉, $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$ $(1<\alpha<4)$에서만 극값을 가지므로 $\alpha=3$이다.

$g'(x)=2f(x)$이므로 $x=3$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀌고 $x=1$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

ㄴ에서 $g(2)=0$이므로 $g(\alpha)=g(3)>0$이려면 닫힌구간 $[2, 3]$에서 함수 $g(x)$는 증가해야 하므로 이 구간에서 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극대이고

$$g(3)=\int_1^3 f(t)dt+\int_3^3 f(t)dt$$
$$=\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt+0$$
$$=\int_1^2 (t-1)dt+\int_2^3 (-t+3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_1^2+\left[-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_2^3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

따라서 $\alpha+g(\alpha)=3+g(3)=3+1=4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 84~85쪽

1 ② **2** ⑤ **3** 21 **4** ⑤ **5** 54

1 $f'(x)=\begin{cases} a & (x<b) \\ -3x^2+x & (x\geq b)\end{cases}$에서 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f_1'(x)$, $f_2'(x)$를

$f_1'(x)=a$, $f_2'(x)=-3x^2+x$라 하자.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $f(x)$가 연속함수가 되도록 하는 $f_1'(x)$의 부정적분 중 하나를 $f_1(x)$라 하고, $f_2'(x)$의 부정적분 중 하나를 $f_2(x)$라 하자.

즉, $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x<b) \\ f_2(x) & (x\geq b)\end{cases}$라 하자.

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이므로

$\lim_{x\to b-}f(x)=\lim_{x\to b+}f(x)=f(b)$이다.

$\lim_{x\to b-}f(x)=\lim_{x\to b-}f_1(x)=f_1(b)$,

$\lim_{x\to b+}f(x)=\lim_{x\to b+}f_2(x)=f_2(b)$,

$f(b)=f_2(b)$

이므로 $f(b)=f_1(b)=f_2(b)$

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$이다.

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b-}\frac{f_1(x)-f_2(b)}{x-b}$$
$$=\lim_{x\to b-}\frac{f_1(x)-f_1(b)}{x-b}$$
$$=f_1'(b)=a,$$

$$\lim_{x\to b+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b+}\frac{f_2(x)-f_2(b)}{x-b}$$
$$=f_2'(b)=-3b^2+b$$

이므로 $a=-3b^2+b$ …… ㉠

연속함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고

$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}(-3x^2+x)=-\infty$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

즉, $x<b$에서 $f'(x)=a\leq 0$이고 $x\geq b$에서 $f'(x)=-x(3x-1)\leq 0$이어야 한다.

$a=0$이면 $x<b$에서 함수 $f(x)$가 상수함수가 되어 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a<0$이다.

이때 ㉠에서 $a=-3b^2+b=-b(3b-1)<0$이므로

$b<0$ 또는 $b>\frac{1}{3}$ …… ㉡

또한 $x\ge b$에서 $f'(x)=-x(3x-1)\le 0$이려면 $b\ge\frac{1}{3}$이고, ㉡을 만족시키려면 $b>\frac{1}{3}$이다.

또한 ㉠에 의하여 함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)dx$이다.

$f(2)-f(0)=-\frac{15}{2}$이므로

$\int_0^2 f'(x)dx=-\frac{15}{2}$

(i) $b>2$인 경우

$\int_0^2 f'(x)dx=\int_0^2 a\,dx=\Big[ax\Big]_0^2=2a=-\frac{15}{2}$

에서 $a=-\frac{15}{4}$

㉠에서

$-3b^2+b=-\frac{15}{4}$, $12b^2-4b-15=0$

$b=\frac{2\pm2\sqrt{46}}{12}=\frac{1\pm\sqrt{46}}{6}$

이때 $b>2$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{1}{3}<b\le 2$인 경우

$\int_0^2 f'(x)dx$

$=\int_0^b f'(x)dx+\int_b^2 f'(x)dx$

$=\int_0^b a\,dx+\int_b^2 (-3x^2+x)dx$

$=\Big[ax\Big]_0^b+\Big[-x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_b^2$

$=ab+\left(-6+b^3-\frac{1}{2}b^2\right)$

$=(-3b^2+b)b+\left(-6+b^3-\frac{1}{2}b^2\right)$

$=-2b^3+\frac{1}{2}b^2-6=-\frac{15}{2}$

에서

$4b^3-b^2-3=0$

$(b-1)(4b^2+3b+3)=0$

$b=1$ 또는 $4b^2+3b+3=0$

이차방정식 $4b^2+3b+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-48=-39<0$이므로 이 방정식은 실근을 갖지 않는다.

즉, $b=1$

(i), (ii)에 의하여 $b=1$이고 ㉠에서 $a=-2$이므로

$a+b=-2+1=-1$

답 ②

2 조건 (가)의 $\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=x^4-3x^2+1$에서

$\{f(x)\}^2-x^2=x^4-3x^2+1$

$\{f(x)\}^2=x^4-2x^2+1$

$\{f(x)\}^2=(x^2-1)^2$

$f(x)=x^2-1$ 또는 $f(x)=-x^2+1$

이때 두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$이 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로 반드시 $f(-1)=0$, $f(1)=0$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 세 구간 $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, \infty)$에서 각각 두 함수 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$ 중 하나를 택하여 정해진다.

그러므로 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 될 수 있는 것은 8개이다.

(i) $-1<x<1$에서 $f(x)=x^2-1$인 경우

$-1<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$\int_x^1 f(t)dt<0$이다.

그러므로 $-1<x<1$에서

$f(x)-\int_1^x f(t)dt=f(x)+\int_x^1 f(t)dt<0$이 되어

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $-1<x<1$에서 $f(x)=-x^2+1$인 경우

(a) $x<-1$에서 $f(x)=-x^2+1$인 경우

$x\le 1$에서 $f(x)=-x^2+1$이므로

$f(x)-\int_1^x f(t)dt=-x^2+1-\int_1^x (-t^2+1)dt$

$=-x^2+1-\Big[-\frac{1}{3}t^3+t\Big]_1^x$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2-x+\frac{5}{3}$

이때 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-x+\frac{5}{3}\right)=-\infty$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) $x<-1$에서 $f(x)=x^2-1$인 경우

$x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로

$\int_x^1 f(t)dt\ge 0$이다.

그러므로 $x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-\int_1^x f(t)dt=f(x)+\int_x^1 f(t)dt\ge 0$이 되어

조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는

$x<-1$에서 $f(x)=x^2-1$, $-1\le x<1$에서

$f(x)=-x^2+1$임을 알 수 있다.

또 $x\ge 1$에서는 $f(x)=x^2-1$ 또는 $f(x)=-x^2+1$이다.

$\int_{-2}^{2} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx$

이고, $x\ge1$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2-1\ge0$,

$-x^2+1\le0$이므로 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m이라 하면

$M=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$

$m=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+1)dx$

따라서

$M+m$

$=2\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$

$\quad+\int_{1}^{2}\{(x^2-1)+(-x^2+1)\}dx$

$=2\times\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1}+2\times\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}+0$

$=2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

답 ⑤

3 $f'(0)=0$이므로 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^2+b$ (a, b는 상수, $a\ne0$)으로 놓을 수 있다.

$xg(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)dt$에서

$xg(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|(at^2+b)dt$ …… ㉠

이차함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 ㉠을 만족시키므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=\int_{-1}^{1}|t|(at^2+b)dt$

$\;=\int_{-1}^{1}(at^2|t|+b|t|)dt$

$\;=2\int_{0}^{1}(at^3+bt)dt$

$\;=2\times\left[\frac{a}{4}t^4+\frac{b}{2}t^2\right]_{0}^{1}$

$\;=\frac{a}{2}+b$

즉, $a+2b=0$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-2g(-2)=\int_{-1}^{1}|-2-t|(at^2+b)dt$

$=\int_{-1}^{1}(t+2)(at^2+b)dt$

$=\int_{-1}^{1}(at^3+2at^2+bt+2b)dt$

$=\int_{-1}^{1}(at^3+bt)dt+\int_{-1}^{1}(2at^2+2b)dt$

$=0+2\int_{0}^{1}(2at^2+2b)dt$

$=2\times\left[\frac{2a}{3}t^3+2bt\right]_{0}^{1}$

$=\frac{4a}{3}+4b$

$g(-2)=2$이므로

$\frac{4a}{3}+4b=-4$

즉, $a+3b=-3$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a=6$, $b=-3$

따라서 $f(x)=6x^2-3$이므로

$f(2)=21$

답 21

참고

$$g(x)=\begin{cases} 2 & (x<-1) \\ x^3-3x & (-1\le x\le1) \\ -2 & (x>1) \end{cases}$$

4 ㄱ. 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le0) \\ f(x+3) & (x>0) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0+} g(x)=g(0)$ …… ㉠

삼차함수 $f(x)$는 연속함수이고, 함수 $f(x+3)$도 연속함수이므로

$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=f(0)$,

$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} f(x+3)=f(3)$,

$g(0)=f(0)$

이고 ㉠에서

$g(0)=f(0)=f(3)$

그런데 $f(0)>0$이면 $f(3)>0$이고 절댓값이 충분히 작은 양수 α에 대하여 닫힌구간 $[3, 3+\alpha]$에 속하는 모든 x에서 $f(x)>0$이므로

$\int_{0}^{\alpha} g(x)dx=\int_{0}^{\alpha} f(x+3)dx=\int_{3}^{3+\alpha} f(x)dx>0$

이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
또 $f(0)<0$이면 절댓값이 충분히 작은 양수 β에 대하여 닫힌구간 $[-\beta, 0]$에 속하는 모든 x에서 $f(x)<0$이므로

$$\int_0^{-\beta} g(x)dx=\int_0^{-\beta} f(x)dx=-\int_{-\beta}^0 f(x)dx>0$$

이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $f(0)=0$이므로 $g(0)=f(0)=0$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x g(t)dt\le 0$을 만족시키려면 $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x)\ge 0$이고 $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x+3)\le 0$이어야 한다.
이때 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(3)=0$이고 $f(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 1이므로 최고차항의 계수는 음수, 즉 -1이어야 한다. …… ㉡
$x<0$에서 $f(x)>0$, $x>3$에서 $f(x)<0$이므로 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$는 $x\le 0$에서도 감소하고, $x\ge 3$에서도 감소한다. 그러므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.
이때 $g'(0)$이 존재하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$이다.
따라서 $g'(0)$이 존재하면 모든 실수 x에 대하여

$$\begin{aligned}\int_0^x |g'(t)|dt&=\int_0^x \{-g'(t)\}dt\\&=\Big[-g(t)\Big]_0^x\\&=-g(x)-\{-g(0)\}\\&=-g(x)-0\\&=-g(x)\ \text{(참)}\end{aligned}$$

ㄷ. ㄱ과 ㄴ의 ㉡에서

$$f(x)=-x(x-3)(x-a)=-x^3+(a+3)x^2-3ax$$
(a는 $0\le a\le 3$인 실수)

로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1\{-x^3+(a+3)x^2-3ax\}dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a+3}{3}x^3-\frac{3a}{2}x^2\right]_0^1\\&=-\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$0\le a\le 3$에서 $-\frac{11}{4}\le -\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}\le \frac{3}{4}$이므로

$\int_0^1 f(x)dx$의 값이 될 수 있는 정수는 -2, -1, 0이다.
한편, $f'(x)=-3x^2+2(a+3)x-3a$이고 $f(3)=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}&=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h+3)}{h}\\&=\lim_{h\to 0+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\&=f'(3)=3a-9\end{aligned}$$

그러므로 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}$의 값이 최대이면 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}=3a-9$의 값은 최소이다.
즉, $-\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}=0$에서 $a=\frac{9}{14}$일 때 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}$의 값이 최소이고 그 최솟값은

$$3a-9=3\times\frac{9}{14}-9=-\frac{99}{14}\ \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

5 함수 $f(x)$에서

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+1)=0,$$
$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(a|x-2|-a)=0,$$
$$f(1)=a|1-2|-a=0$$

이므로 $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그러므로 함수 $y=\int_b^x f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
한편, 함수 $y=|x|$는 $x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)=|x|\int_b^x f(t)dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|\int_b^x f(t)dt}{x}\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{x\int_b^x f(t)dt}{x}\\&=\lim_{x\to 0+}\int_b^x f(t)dt\\&=\int_b^0 f(t)dt,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-x\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\left\{-\int_b^x f(t)dt\right\}$$
$$=-\int_b^0 f(t)dt$$

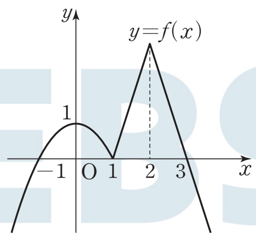
이므로 $\int_b^0 f(t)dt=-\int_b^0 f(t)dt$에서

$\int_b^0 f(t)dt=0$, 즉 $\int_0^b f(t)dt=0$

이어야 한다.

따라서 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 b는 방정식 $h(x)=0$의 실근이다.

$a<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$h'(x)=f(x)$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

$h(3)>h(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$이므로 $h(x)=0$이 되는 양수 x는 구간 $(3, \infty)$에 단 하나 존재한다.

즉, $M>3$이다.

$b=M$일 때의 함수 $g(x)$에 대하여 $g(3)=18$이므로

$g(3)=|3|\int_M^3 f(t)dt=18$에서

$\int_M^3 f(t)dt=6$

이때 $h(M)=0$, 즉 $\int_0^M f(t)dt=0$이므로

$$\int_0^3 f(t)dt=\int_0^M f(t)dt+\int_M^3 f(t)dt$$
$$=0+6=6 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편,

$$\int_0^3 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+1)dt+\int_1^2(-at+a)dt+\int_2^3(at-3a)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[-\frac{a}{2}t^2+at\right]_1^2+\left[\frac{a}{2}t^2-3at\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{2}{3}-a \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$\frac{2}{3}-a=6$, 즉 $a=-\frac{16}{3}$

$x\ge 3$에서 $f(x)=ax-3a$, 즉 $f(x)=-\frac{16}{3}x+16$이고

$\int_M^3 f(t)dt=6$이므로

$$\int_M^3 f(t)dt=\int_M^3\left(-\frac{16}{3}t+16\right)dt$$
$$=\left[-\frac{8}{3}t^2+16t\right]_M^3$$
$$=-24+48+\frac{8}{3}M^2-16M=6$$

에서 $4M^2-24M+27=0$

$(2M-3)(2M-9)=0$

$M>3$이므로 $M=\frac{9}{2}$

따라서 $12M=12\times\frac{9}{2}=54$

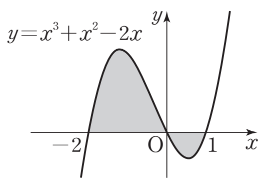
답 54

07 정적분의 활용

유제 본문 89~95쪽

1 ① 2 3 3 ④ 4 ② 5 27
6 6

1 $y=x^3+x^2-2x$
$=x(x+2)(x-1)$
이므로 곡선 $y=x^3+x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.

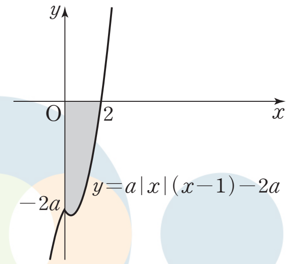


따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}|x^3+x^2-2x|dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\left\{0-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)-0\right\}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

답 ①

2 $x<0$일 때,
$y=a|x|(x-1)-2a=-ax(x-1)-2a$
$=-a(x^2-x+2)$
이차방정식 $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1-8=-7<0$이므로 $x<0$에서 곡선
$y=a|x|(x-1)-2a$는 x축과 만나지 않는다.
$x\geq0$일 때,
$y=a|x|(x-1)-2a=ax(x-1)-2a$
$=a(x^2-x-2)=a(x+1)(x-2)$
이므로 $x\geq0$에서 곡선 $y=a|x|(x-1)-2a$는 $x=2$에서 x축과 만난다.
그러므로 곡선 $y=a|x|(x-1)-2a$ $(a>0)$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.



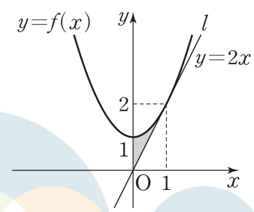
색칠한 부분의 넓이가 10이므로

$$\int_{0}^{2}|a|x|(x-1)-2a|dx$$
$$=-a\int_{0}^{2}(x^2-x-2)dx$$
$$=-a\times\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{10}{3}a=10$$

따라서 $a=3$

답 3

3 $f(x)=x^2+1$에서 $f'(x)=2x$
$f(1)=2$, $f'(1)=2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선 l의 방정식은
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$, 즉 $y=2(x-1)+2$, $y=2x$
그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같다.

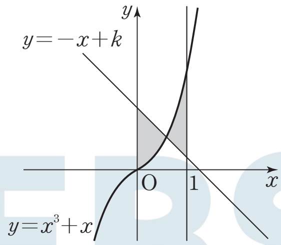


따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}|f(x)-2x|dx=\int_{0}^{1}\{(x^2+1)-2x\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

답 ④

4 좌표평면 위에 곡선 $y=x^3+x$와 직선 $y=-x+k\ (0<k<3)$을 나타내면 다음 그림과 같다.



색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 \{(x^3+x)-(-x+k)\}dx=0$$

$$\int_0^1 (x^3+2x-k)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2-kx\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+1-k-0=0$$

따라서 $k=\frac{5}{4}$

답 ②

5 $f(x)=x^3+3x-3$에서 $f'(x)=3x^2+3>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$에서

$k^3+3k-3=1$

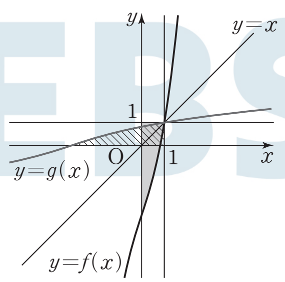
$(k-1)(k^2+k+4)=0$

이차방정식 $k^2+k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-16=-15<0$이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 $k=1$

$g(1)=1$, $f(1)=1$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$S=\int_0^1 \{1-(x^3+3x-3)\}dx$$

$$=\int_0^1 (-x^3-3x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+4=\frac{9}{4}$$

따라서 $12S=27$

답 27

6 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량이 4이므로

$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 a(t^2-t)dt$$

$$=a\times\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=\frac{2}{3}a=4$$

에서 $a=6$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|dt$$

$$=\int_0^1 |v(t)|dt+\int_1^2 |v(t)|dt$$

$$=-\int_0^1 v(t)dt+\int_1^2 v(t)dt$$

$$=-6\times\int_0^1 (t^2-t)dt+6\times\int_1^2 (t^2-t)dt$$

$$=-6\times\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+6\times\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2$$

$$=-6\times\left(-\frac{1}{6}\right)+6\times\frac{5}{6}=6$$

답 6

Level 1 **기초 연습** 본문 96~97쪽

1 ③	2 ③	3 ④	4 ②	5 ⑤
6 ④	7 ①	8 ③		

1 $\int_0^1 f(x)dx=3$, $\int_0^4 f(x)dx=-6$이고

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx$$이므로

$$-6=3+\int_1^4 f(x)dx,\ \int_1^4 f(x)dx=-9$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^4 |f(x)|dx=\int_0^1 |f(x)|dx+\int_1^4 |f(x)|dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx-\int_1^4 f(x)dx$$
$$=3+9=12$$

답 ③

2 곡선 $y=ax^2$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S=\int_0^2 |ax^2|dx=\int_0^2 ax^2 dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 곡선 $y=3ax^2$, $y=ax^2$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$T=\int_0^2 |3ax^2-ax^2|dx$$
$$=\int_0^2 2ax^2 dx=2\times\int_0^2 ax^2 dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{T}{S}=2$

답 ③

3 곡선 $y=-x^3$과 x축 및 직선 $x=k\,(k>0)$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^k |-x^3|dx=\int_0^k x^3 dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^k=\frac{1}{4}k^4$$

이고 이 넓이가 $2k$이므로

$\frac{1}{4}k^4=2k$

$k\neq0$이므로 $k^3=8$

$(k-2)(k^2+2k+4)=0$

이차방정식 $k^2+2k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4-16=-12<0$

이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

따라서 $k=2$

답 ④

4 두 곡선 $y=x^3+2x$, $y=x^2+2x$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x=x^2+2x$, $x^2(x-1)=0$, $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 두 곡선 $y=x^3+2x$, $y=x^2+2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 |(x^3+2x)-(x^2+2x)|dx$$
$$=\int_0^1 |x^3-x^2|dx$$
$$=\int_0^1 (-x^3+x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

답 ②

5 $A=\int_{-1}^1 |f(x)|dx=\int_{-1}^1 |x^2-1|dx$

$\quad=-2\int_0^1 (x^2-1)dx,$

$B=\int_1^k |f(x)|dx=\int_1^k |x^2-1|dx=\int_1^k (x^2-1)dx$

$A=2B$에서

$-2\int_0^1 (x^2-1)dx=2\int_1^k (x^2-1)dx$

$\int_0^1 (x^2-1)dx+\int_1^k (x^2-1)dx=0$

$\int_0^k (x^2-1)dx=0$

$\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^k=0$

$\frac{1}{3}k^3-k=0$, $\frac{1}{3}k(k^2-3)=0$

$k>1$이므로 $k=\sqrt{3}$

답 ⑤

6 $f(x)=x^3-x^2+x$에서 $f'(x)=3x^2-2x+1$

이차방정식 $3x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

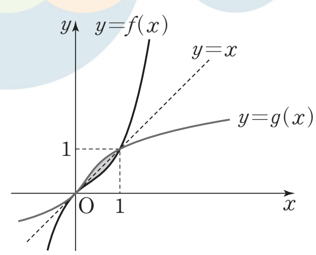
$D=4-12=-8<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 그러므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2+x=x$, $x^2(x-1)=0$, $x=0$ 또는 $x=1$

한편, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 다음 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}2\int_0^1|f(x)-x|dx&=2\int_0^1|(x^3-x^2+x)-x|dx\\&=2\int_0^1|x^3-x^2|dx\\&=2\int_0^1(-x^3+x^2)dx\\&=2\times\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\\&=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 ④

7 시각 $t=2$에서 점 P의 위치가 4이므로

$0+\int_0^2 v(t)dt=4$

$\int_0^2(4t+a)dt=4$

$\left[2t^2+at\right]_0^2=4$

$8+2a=4$

따라서 $a=-2$

답 ①

8 $t\geq1$일 때, 속도 $v(t)$는

$v(t)=\int a(t)dt=\int 2\,dt=2t+C$ (단, C는 적분상수)

$0\leq t\leq1$일 때 $v(t)=t^2-1$에서 $v(1)=0$이므로

$v(1)=2+C=0$, $C=-2$

그러므로 $t\geq1$일 때, $v(t)=2t-2$이다.

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^2|v(t)|dt&=\int_0^1|v(t)|dt+\int_1^2|v(t)|dt\\&=\int_0^1|t^2-1|dt+\int_1^2|2t-2|dt\\&=\int_0^1(1-t^2)dt+\int_1^2(2t-2)dt\\&=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1+\left[t^2-2t\right]_1^2\\&=\left(\frac{2}{3}-0\right)+\{0-(-1)\}\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ④	5 ②
6 ③	7 ⑤			

1 $f(x)=\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}$에서 $f'(x)=\frac{6}{7}x^2+1>0$이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프의 교점의 x좌표를 구해 보자.

$\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}=x$, $x^3=8$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=4-16=-12<0$

이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 ㉠에서 $x=2$

두 함수 $y=f(x)$, $y=-x$의 그래프의 교점의 x좌표를 구해 보자.

$\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}=-x$, $x^3+7x-8=0$

$(x-1)(x^2+x+8)=0$ …… ㉡

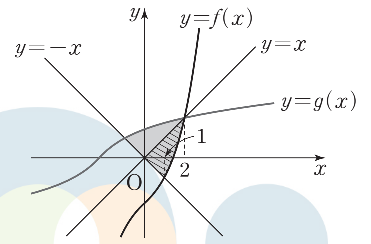
이차방정식 $x^2+x+8=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1-32=-31<0$

이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 ㉡에서 $x=1$

그러므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 두 함수 $y=g(x)$, $y=|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 세 함수 $y=f(x)$, $y=x$, $y=-x$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{x-(-x)\}dx+\int_1^2\left\{x-\left(\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 2x\,dx+\int_1^2\left(-\frac{2}{7}x^3+\frac{16}{7}\right)dx$$

$=\left[x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{14}x^4+\frac{16}{7}x\right]_1^2$

$=1+\frac{17}{14}=\frac{31}{14}$

답 ⑤

2 $x\geq 0$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1(x-1)^2(x+1)dx$$
$$=\int_0^1(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 y축에 의하여 이등분되려면 $x\leq 0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 $\frac{5}{12}$이어야 한다.

두 직선 $y=x+1$, $y=ax$의 교점의 x좌표는

$x+1=ax$, 즉 $(a-1)x=1$에서 $x=\frac{1}{a-1}$

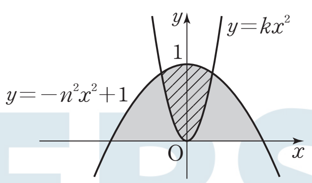
이므로

$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{1-a}=\frac{5}{12}$

따라서 $a=-\frac{1}{5}$

답 ④

3 자연수 n에 대하여 곡선 $y=-n^2x^2+1$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S, 두 곡선 $y=-n^2x^2+1$, $y=kx^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이 T에 대하여 $S=3T$이려면 두 곡선 $y=-n^2x^2+1$, $y=kx^2$은 다음 그림과 같고, $k>0$이다.



곡선 $y=-n^2x^2+1$이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$-n^2x^2+1=0$에서 $x=-\frac{1}{n}$ 또는 $x=\frac{1}{n}$

이므로 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|-n^2x^2+1|dx=2\int_0^{\frac{1}{n}}(-n^2x^2+1)dx$$
$$=2\times\left[-\frac{n^2}{3}x^3+x\right]_0^{\frac{1}{n}}=2\times\frac{2}{3n}=\frac{4}{3n}$$

두 곡선 $y=-n^2x^2+1$, $y=kx^2$이 만나는 점의 x좌표는

$-n^2x^2+1=kx^2$, 즉 $(n^2+k)x^2=1$에서

$x=\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ 또는 $x=-\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

이므로 이 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$T=\int_{-\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}^{\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}|(-n^2x^2+1)-kx^2|dx$$
$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}\{-(n^2+k)x^2+1\}dx$$
$$=2\times\left[-\frac{n^2+k}{3}x^3+x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}$$
$$=\frac{4}{3\sqrt{n^2+k}}$$

$S=3T$이므로

$\frac{4}{3n}=3\times\frac{4}{3\sqrt{n^2+k}}$

$\sqrt{n^2+k}=3n$, $n^2+k=9n^2$, 즉 $k=8n^2$

따라서 $f(n)=k=8n^2$이므로

$\sum_{n=1}^{5}f(n)=\sum_{n=1}^{5}8n^2=8\times\frac{5\times6\times11}{6}=440$

답 ③

4 곡선 $y=-x^4+2x^3$과 직선 $y=k(x-2)$의 교점 중 x좌표가 2가 아닌 점의 x좌표를 α라 하면

$B-A$

$$=\int_\alpha^2\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx$$
$$-\int_0^\alpha\{k(x-2)-(-x^4+2x^3)\}dx$$
$$=\int_\alpha^2\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx$$
$$+\int_0^\alpha\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx$$
$$=\int_0^2\{(-x^4+2x^3)-k(x-2)\}dx$$
$$=\int_0^2(-x^4+2x^3-kx+2k)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{k}{2}x^2+2kx\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{5}+2k$$

$B-A=1$이므로

$\frac{8}{5}+2k=1$

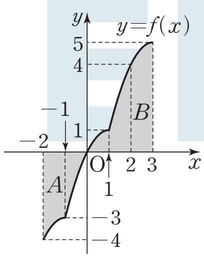
따라서 $k=-\frac{3}{10}$

답 ④

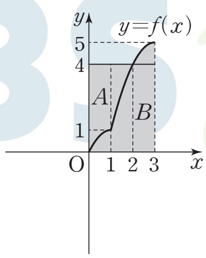
5 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이다.
$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (-x^2+ax)=-1+a$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} f(x)&=\lim_{x\to 1+} \{f(x-2)+4\}\\&=\lim_{x\to -1+} \{f(x)+4\}\\&=(-1-a)+4=3-a,\end{aligned}$$

$f(1)=f(-1)+4=(-1-a)+4=3-a$
이므로 $-1+a=3-a$
즉, $a=2$
그러므로 $-1\le x<1$일 때, $f(x)=-x^2+2x$이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-2)+4$이므로 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 곡선 $y=f(x-2)+4$는 곡선 $y=f(x)$와 일치한다.
따라서 $-2\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

곡선 $y=f(x)$와 x축(직선 $y=0$) 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이 A는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$ 및 y축(직선 $x=0$)으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 구하는 넓이 $A+B$는 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같다.
따라서

$$\begin{aligned}A+B&=3\times 4+\int_2^3 \{f(x)-4\}dx\\&=12+\int_0^1 f(x)dx\\&=12+\int_0^1 (-x^2+2x)dx\\&=12+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1\\&=12+\frac{2}{3}=\frac{38}{3}\end{aligned}$$

답 ②

6 $\lim_{t\to\infty} v(t)=\infty$이므로 점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸지 않으려면 $t\ge 0$인 모든 실수 t에 대하여 $v(t)\ge 0$이어야 한다.
$t>0$에서 $v'(t)=t^2-2at=t(t-2a)$이므로
$v'(t)=0$에서 $t=2a$
이때 속도 $v(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$v'(t)$		$-$	0	$+$
$v(t)$		↘	극소	↗

따라서 속도 $v(t)$는 시각 $t=2a$에서 최소이고, 최솟값이 0 이상이어야 하므로

$$\begin{aligned}v(2a)&=\frac{8}{3}a^3-4a^3+3a=-\frac{4}{3}a^3+3a\\&=-\frac{4}{3}a\left(a^2-\frac{9}{4}\right)\ge 0\end{aligned}$$

$a>0$이므로 $a^2\le\frac{9}{4}$, 즉 $0<a\le\frac{3}{2}$
한편, 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}0+\int_0^2 v(t)dt&=\int_0^2\left(\frac{1}{3}t^3-at^2+3a\right)dt\\&=\left[\frac{1}{12}t^4-\frac{a}{3}t^3+3at\right]_0^2\\&=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}a+6a=\frac{4}{3}+\frac{10}{3}a\end{aligned}$$

따라서 구하는 최댓값은 $a=\frac{3}{2}$일 때
$\frac{4}{3}+\frac{10}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{19}{3}$

답 ③

7 $v_1(k)=v_2(k)$에서
$k^2+ak-a=2k+a$, $k^2+(a-2)k-2a=0$
$(k+a)(k-2)=0$
$k=2$ 또는 $k=-a$ …… ㉠
두 점 P, Q의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$\begin{aligned}x_1(t)&=0+\int_0^t (t^2+at-a)dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2-at\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2-at\end{aligned}$$

$x_2(t)=0+\int_0^t (2t+a)dt=\left[t^2+at\right]_0^t=t^2+at$
$x_1(k)=x_2(k)$에서
$\frac{1}{3}k^3+\frac{a}{2}k^2-ak=k^2+ak$

$\frac{1}{6}k\{2k^2+(3a-6)k-12a\}=0$

$k\neq0$이므로 $2k^2+(3a-6)k-12a=0$ …… ㉡

㉠의 $k=2$가 ㉡을 만족시킬 때,

$8+6a-12-12a=0$, $a=-\frac{2}{3}$

이므로 a가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉠의 $k=-a$가 ㉡을 만족시킬 때,

$2a^2-a(3a-6)-12a=0$, $a^2+6a=0$

$k\neq0$에서 $a\neq0$이므로 $a=-6$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 -6이므로

$k=-a=6$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 100~101쪽

1 ① **2** ④ **3** ⑤ **4** ⑤

1 $f(x)=-x^3+x$에서 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

또한 $f'(x)=-3x^2+1$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)=f'(x)$이다.

$g(x)=f(x-a)+b$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수이다. 함수 $f(x)-g(x)$는 이차함수이고 조건 (가)에서 점 P의 x좌표를 α라 하면

$f(x)-g(x)=k(x-\alpha)^2$ (k는 상수, $k\neq0$)

이다.

$f(x)-g(x)=k(x^2-2\alpha x+\alpha^2)$에서

$f'(x)-g'(x)=k(2x-2\alpha)=2k(x-\alpha)$이므로

$f'(\alpha)-g'(\alpha)=0$, 즉 $f'(\alpha)=g'(\alpha)$

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=f(x-a)+b$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같다.

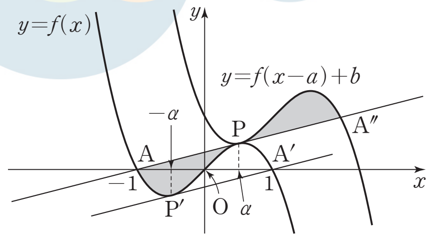
점 $\mathrm{P}'(-\alpha,\ f(-\alpha))$라 하면 $f'(\alpha)=f'(-\alpha)$이므로 점 P'을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 P이어야 한다.

이때 $a>0$이므로 $\alpha>0$이다.

$\mathrm{A}'(1,\ 0)$, $\mathrm{A}''(1+a,\ b)$라 하면 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{P}'$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선이 직선 $\mathrm{A}''\mathrm{P}$이고, 두 직선 AP, $\mathrm{A}'\mathrm{P}'$의 기울기가 서로 같으므로 직선 $\mathrm{A}''\mathrm{P}$가 바로 직선 AP이다.

이때 직선 AP는 곡선 $y=f(x)$와 두 점 A, P를 포함한 2개 이상의 점에서 만나고, 직선 AP는 곡선 $y=f(x-a)+b$와 두 점 P, A''을 포함한 2개 이상의 점에서 만난다.

따라서 조건 (나)를 만족시키려면 직선 AP가 곡선 $y=f(x)$ 또는 곡선 $y=f(x-a)+b$와 만나는 점이 A, P, A''뿐이어야 한다. 즉, 직선 AP가 곡선 $y=f(x)$와 두 점 A, P에서만 만나고, 접점이 P이어야 한다.



점 P에서의 접선의 방정식은

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

$y=(-3\alpha^2+1)(x-\alpha)-\alpha^3+\alpha$ …… ㉠

이 접선이 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$을 지나므로

$2\alpha^3+3\alpha^2-1=0$, $(\alpha+1)^2(2\alpha-1)=0$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$

㉠에서 직선 AP의 방정식은 $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$이다.

따라서

$$S_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)-(-x^3+x)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=\frac{27}{64}$$

곡선 $y=f(x-a)+b$와 직선 AP로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{P}'$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, 이 넓이는 S_1과 같다.

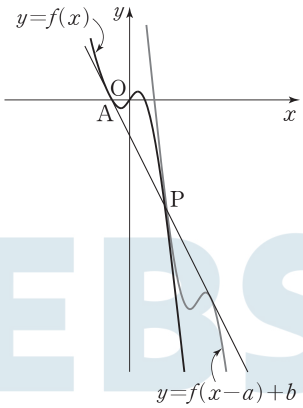
따라서 $S_1=S_2$이므로

$S_1+S_2=2S_1=2\times\frac{27}{64}=\frac{27}{32}$

답 ①

참고

문제의 $a>0$, $b>0$인 경우 이외에도 $a>0$, $b<0$인 경우에도 다음과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-a)+b$가 오직 점 P에서 만나고 직선 AP가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이면 두 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



2 시각 t에서의 점 Q의 속도를 $v_2(t)$라 하면

$$v_2(t)=\int a_2(t)dt$$
$$=\int(1-2t)dt$$
$$=t-t^2+C$$
$$=t(1-t)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$C\le -\frac{1}{4}$이면 $v_2(t)\ge 0$을 만족시키는 t의 개수는 1 이하이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$-\frac{1}{4}<C\le 0$이면 $v_2(t)\ge 0$을 만족시키는 모든 t의 값의 범위는 어떤 두 수 t_1, t_2 $(0\le t_1<t_2\le 1)$에 대하여 $t_1\le t\le t_2$이고

$$\int_{t_1}^{t_2}|v_1(t)|dt\le\int_0^1|v_1(t)|dt$$
$$=\int_0^1(3t^2+1)dt$$
$$=\Big[t^3+t\Big]_0^1=2$$

이므로 $v_2(t)\ge 0$인 모든 시간 동안 점 P가 움직인 거리가 10이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$C>0$일 때 $v_2(t)=t-t^2+C\ge 0$에서

$t^2-t-C\le 0$

$$\frac{1-\sqrt{1+4C}}{2}\le t\le\frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}$$

$t\ge 0$이므로 $0\le t\le\frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}$ …… ㉠라 하면

$0\le t\le\alpha$에서 점 P가 움직인 거리가 10이므로

$$\int_0^\alpha|v_1(t)|dt=\int_0^\alpha(3t^2+1)dt$$
$$=\Big[t^3+t\Big]_0^\alpha$$
$$=\alpha^3+\alpha=10$$

에서 $\alpha^3+\alpha-10=0$

$(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+5)=0$

이차방정식 $\alpha^2+2\alpha+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4-20=-16<0$이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 $\alpha=2$

㉠에서 $2=\frac{1+\sqrt{1+4C}}{2}$, 즉 $C=2$이므로

$v_2(t)=t-t^2+2$

따라서 시각 $t=3$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

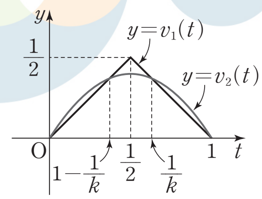
$$\left|\left\{0+\int_0^3 v_1(t)dt\right\}-\left\{0+\int_0^3 v_2(t)dt\right\}\right|$$
$$=\left|\int_0^3\{v_1(t)-v_2(t)\}dt\right|$$
$$=\left|\int_0^3\{(3t^2+1)-(t-t^2+2)\}dt\right|$$
$$=\left|\int_0^3(4t^2-t-1)dt\right|$$
$$=\left|\Big[\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-t\Big]_0^3\right|$$
$$=\left|36-\frac{9}{2}-3\right|$$
$$=\frac{57}{2}$$

답 ④

3 시각 $t=t_1$ $(0<t_1\le 1)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으면

$$0+\int_0^{t_1}v_1(t)dt=0+\int_0^{t_1}v_2(t)dt$$
$$\int_0^{t_1}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=0$$

이때 두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.



$0\le t\le\frac{1}{2}$일 때, 곡선 $y=-kt(t-1)$과 직선 $y=t$의 교점

의 t좌표를 구하면

$t=-kt(t-1)$

$t(kt-k+1)=0$

$t=0$ 또는 $t=1-\frac{1}{k}$

두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프는 모두 직선 $t=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 나머지 교점의 t좌표는 각각 $\frac{1}{k}$, 1이다.

$f(x)=\int_0^x \{v_1(t)-v_2(t)\}dt$라 하면 두 점 P, Q의 위치가 같도록 하는 시각 t의 값은 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다.

그러므로 $0<t\le 1$에서 두 점 P, Q가 오직 한 번 만나려면 $0<x\le 1$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나이어야 한다.

$0<x<1$일 때, $f'(x)=v_1(x)-v_2(x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1-\frac{1}{k}$ 또는 $x=\frac{1}{k}$

$0\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$1-\frac{1}{k}$	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 $0<x\le 1$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나이려면

$f\left(\frac{1}{k}\right)=0$ 또는 $f(1)>0$

(i) $f\left(\frac{1}{k}\right)=0$인 경우

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\int_0^{\frac{1}{k}}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=\int_0^{\frac{1}{k}}v_1(t)dt-\int_0^{\frac{1}{k}}v_2(t)dt=0$$

에서

$$\int_0^{\frac{1}{k}}v_1(t)dt=\int_0^{\frac{1}{k}}v_2(t)dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}}(1-t)dt=\int_0^{\frac{1}{k}}(-kt^2+kt)dt$$

$$\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}}=\left[-\frac{k}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{2k}$$

$3k^2-6k+2=0$

$k>1$이므로 $k=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

(ii) $f(1)>0$인 경우

$f(1)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$이고 $f(1)>0$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}v_1(t)dt-\int_0^{\frac{1}{2}}v_2(t)dt=\frac{1}{8}-\left[-\frac{k}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}-\left(-\frac{k}{24}+\frac{k}{8}\right)=\frac{1}{8}-\frac{k}{12}>0$$

에서 $k<\frac{3}{2}$

$k>1$이므로 $1<k<\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $\frac{3+\sqrt{3}}{3}>\frac{3}{2}$이므로

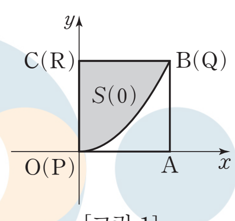
$1<k<\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{15+2\sqrt{3}}{6}$

답 ⑤

4 ㄱ. $t=0$일 때, 곡선 $y=x^2\ (0\le x\le 1)$과 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 내부와 사각형 OABC의 내부의 공통부분은 [그림 1]과 같다.

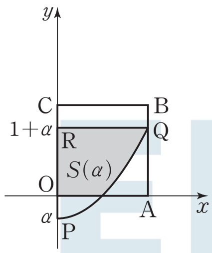


[그림 1]

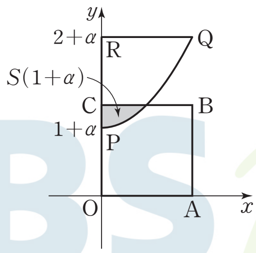
따라서

$$S(0)=\int_0^1(1-x^2)dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{2}{3}\ (\text{참})$$

ㄴ. $-1<\alpha<0$인 α에 대하여 $S(\alpha)$의 값은 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같다. 또한 $S(1+\alpha)$의 값은 [그림 3]의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



[그림 2]



[그림 3]

곡선 $y=x^2+\alpha$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이 곡선 $y=x^2+\alpha+1$이므로 곡선 $y=x^2+\alpha$ $(0\le x\le 1)$과 x축(직선 $y=0$) 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=x^2+\alpha+1$ $(0\le x\le 1)$과 직선 $y=1$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $S(\alpha)+S(1+\alpha)$의 값은 곡선 $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$과 두 선분 OC, CB로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 ㄱ에 의하여

$S(\alpha)+S(1+\alpha)=\frac{2}{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$S\left(-\frac{1}{2}\right)+S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$

$S\left(-\frac{1}{2}\right)+S\left(\frac{1}{2}\right)+S(\beta)=1$에서

$S(\beta)=\frac{1}{3}$

ㄱ에서 $S(0)=\frac{2}{3}$이므로 $\beta\ne 0$

(i) $0<\beta<1$인 경우

$0<t<1$일 때, 곡선 $y=x^2+t$ $(0\le x\le 1)$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^2+t=1$에서 $x^2=1-t$, $x>0$이므로

$x=\sqrt{1-t}$

따라서

$$S(t)=\int_0^{\sqrt{1-t}}\{1-(x^2+t)\}dx$$
$$=\left[(1-t)x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{1-t}}$$
$$=(1-t)\sqrt{1-t}-\frac{1}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$$
$$=\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$$

$S(\beta)=\frac{2}{3}(1-\beta)\sqrt{1-\beta}=\frac{1}{3}$에서

$(\sqrt{1-\beta})^3=\frac{1}{2}$, $\sqrt{1-\beta}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$1-\beta=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, 즉 $\beta=1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

(ii) $-1<\beta<0$인 경우

$S(\beta)=\frac{1}{3}$이면 ㄴ에서 $S(1+\beta)=\frac{1}{3}$이고

(i)에서 $1+\beta=1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$이므로

$\beta=-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

(i), (ii)에서 모든 β의 값의 곱은

$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\times\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

$-1<t<0$일 때, 곡선 $y=x^2+t$ $(0\le x\le 1)$이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구해 보자.

$x^2+t=0$에서 $x^2=-t$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{-t}$

사각형 OAQR의 넓이는 $1\times(1+t)=1+t$

곡선 $y=x^2+t$ $(0\le x\le 1)$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{\sqrt{-t}}^{1}(x^2+t)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+tx\right]_{\sqrt{-t}}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}+t+\frac{1}{3}t\sqrt{-t}-t\sqrt{-t}$$
$$=\frac{1}{3}+t-\frac{2}{3}t\sqrt{-t}$$

그러므로 $-1<t<0$일 때,

$$S(t)=(1+t)-\left(\frac{1}{3}+t-\frac{2}{3}t\sqrt{-t}\right)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}t\sqrt{-t}$$