수능특강

수학영역 **수학 I**

정답과 풀이

01 지수와 로그

유제 본문 5~13쪽

1 ③	2 ③	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ⑤	7 ⑤	8 ③	9 ⑤	10 148

1 $n=2$일 때, $3-2=1$이므로 1의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식

$x^2=1$

의 서로 다른 실근의 개수이다.

즉, $f(2)=2$

$n=3$일 때, $3-3=0$이므로 0의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식

$x^3=0$

의 서로 다른 실근의 개수이다.

즉, $f(3)=1$

$n=4$일 때, $3-4=-1$이므로 -1의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 방정식

$x^4=-1$

의 실근의 개수이다.

즉, $f(4)=0$

따라서

$f(2)+f(3)+f(4)=2+1+0=3$

답 ③

2 $\frac{9}{2}$의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로

$a=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$

또 36의 여섯제곱근 중 양수인 것이 b이므로

$b=\sqrt[6]{36}=\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[3]{6}$

따라서

$$a\times b=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\times\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{\frac{9}{2}\times 6}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$$

답 ③

3
$$\sqrt[3]{2}\times 16^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

답 ②

4
$$(3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}}\times(3^{\sqrt{3}+1})^{-1}=(3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}=3^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=3^2=9$$

답 ⑤

다른 풀이

$$(3^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}}\times(3^{\sqrt{3}+1})^{-1}=3^{3+\sqrt{3}}\times 3^{-\sqrt{3}-1}=3^{(3+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}-1)}=3^2=9$$

5
$$\log_3 4+\log_4 16+\log_3\frac{1}{12}=\log_3 4+\log_3\frac{1}{12}+\log_4 4^2=\log_3\left(4\times\frac{1}{12}\right)+2=\log_3 3^{-1}+2=(-1)+2=1$$

답 ④

6 $\log_2\sqrt[3]{4^n}=\log_2\sqrt[3]{2^{2n}}=\log_2 2^{\frac{2n}{3}}=\frac{2n}{3}$

$\frac{2n}{3}$이 10 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값은 3, 6, 9, 12, 15이고 그 개수는 5이다.

답 ⑤

7
$$3\log_2\sqrt{6}+\log_{\frac{1}{4}}27=3\log_2 6^{\frac{1}{2}}+\log_{2^{-2}}3^3=3\times\frac{1}{2}\times\log_2 6+\frac{3}{-2}\log_2 3$$

$=\frac{3}{2}\log_2 6-\frac{3}{2}\log_2 3$

$=\frac{3}{2}(\log_2 6-\log_2 3)$

$=\frac{3}{2}\log_2 \frac{6}{3}$

$=\frac{3}{2}\log_2 2$

$=\frac{3}{2}$

답 ⑤

8 $\sqrt{3}\times 2^{\log_4 3}$

$=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\log_4 2}$

$=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}\log_2 2}$

$=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$=3$

답 ③

9 $\log \sqrt[3]{300}$

$=\log 300^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\log(3\times 10^2)$

$=\frac{1}{3}\times(\log 3+\log 10^2)$

$=\frac{1}{3}\times(\log 3+2)$

$=\frac{1}{3}\times(0.4771+2)$

$=\frac{1}{3}\times 2.4771$

$=0.8257$

답 ⑤

10 $\log A=2.3010$

$=2+0.3010$

$=\log 10^2+\log 2$

$=\log(10^2\times 2)$

그러므로 $A=10^2\times 2=200$

또

$\log B=1.7093$

$=1+0.7093$

$=\log 10+\log 5.12$

$=\log(10\times 5.12)$

그러므로 $B=10\times 5.12=51.2$

한편, $(x-A)(x-B)<0$의 해는 $51.2<x<200$

따라서 자연수 x의 값은 52, 53, 54, $\cdots$, 199이고 그 개수는

$199-52+1=148$

답 148

Level **1**
기초 연습

본문 14~15쪽

1 ④	2 ④	3 ①	4 ④	5 ②
6 ②	7 ③	8 ②	9 ③	10 ④

1 $\sqrt[3]{\sqrt{12}+2}\times\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}$

$=\sqrt[3]{(\sqrt{12}+2)(\sqrt{12}-2)}$

$=\sqrt[3]{12-4}$

$=\sqrt[3]{8}$

$=\sqrt[3]{2^3}$

$=2$

답 ④

2 $9^{\frac{1}{6}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{8}+1}$

$=(3^2)^{\frac{1}{6}}\times\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=3^{\frac{1}{3}}\times\frac{(3^2)^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}}$

$=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}$

답 ④

3 $\sqrt[3]{-24}\times 81^{\frac{1}{6}}$

$=-\sqrt[3]{24}\times(3^4)^{\frac{1}{6}}$

$=-(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=-\left(2\times 3^{\frac{1}{3}}\right)\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=-2\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=-6$

답 ①

4 $(\sqrt[6]{27}+1)(9^{\frac{1}{4}}-1)$

$=\left(27^{\frac{1}{6}}+1\right)\left(9^{\frac{1}{4}}-1\right)$

$=\left\{(3^3)^{\frac{1}{6}}+1\right\}\left\{(3^2)^{\frac{1}{4}}-1\right\}$

$=\left(3^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(3^{\frac{1}{2}}-1\right)$

$=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2-1^2$

$=3-1$

$=2$

답 ④

5 $\left(\sqrt{2^{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{12}}}\times 2^{-\frac{5}{4}}$

$=\left(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{12}}}\times 2^{-\frac{5}{4}}$

$=\left(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\times 2^{-\frac{5}{4}}$

$=2^{\frac{1}{4}}\times 2^{-\frac{5}{4}}$

$=2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)}$

$=2^{-1}$

$=\frac{1}{2}$

답 ②

6 $\log_3 \sqrt[3]{\frac{9}{8}}+\log_3 2$

$=\log_3 (3^2\times 2^{-3})^{\frac{1}{3}}+\log_3 2$

$=\log_3 \left(3^{\frac{2}{3}}\times 2^{-1}\right)+\log_3 2$

$=\log_3 3^{\frac{2}{3}}+\log_3 2^{-1}+\log_3 2$

$=\frac{2}{3}+(-\log_3 2)+\log_3 2$

$=\frac{2}{3}$

답 ②

다른 풀이

$\log_3 \sqrt[3]{\frac{9}{8}}+\log_3 2$

$=\log_3 \{(3^2\times 2^{-3})^{\frac{1}{3}}\times 2\}$

$=\log_3 \left\{\left(3^{\frac{2}{3}}\times 2^{-1}\right)\times 2\right\}$

$=\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

7 $(\log_3 6)^2-(\log_3 2)^2$

$=(\log_3 6+\log_3 2)(\log_3 6-\log_3 2)$

$=\log_3 (6\times 2)\times\log_3 \frac{6}{2}$

$=\log_3 12\times\log_3 3$

$=\log_3 12$

답 ③

8 $\log_3 2+\log_3 9\times\log_3 \frac{1}{\sqrt{6}}$

$=\log_3 2+\log_3 3^2\times\log_3 6^{-\frac{1}{2}}$

$=\log_3 2+2\times\left(-\frac{1}{2}\log_3 6\right)$

$=\log_3 2-\log_3 6$

$=\log_3 \frac{2}{6}$

$=\log_3 \frac{1}{3}$

$=\log_3 3^{-1}$

$=-1$

답 ②

9 $\left(\log_4 3+\frac{1}{2}\right)\times\log_6 8$

$=\left(\log_4 3+\frac{1}{2}\log_4 4\right)\times\log_6 8$

$=\left(\log_4 3+\log_4 4^{\frac{1}{2}}\right)\times\log_6 8$

$=(\log_4 3+\log_4 2)\times\log_6 8$

$=\log_4 (3\times 2)\times\log_6 8$

$=\log_4 6\times\frac{\log_4 8}{\log_4 6}$

$=\log_4 8$

$=\log_{2^2} 2^3$

$=\frac{3}{2}\log_2 2$

$=\frac{3}{2}$

답 ③

10 $6^{\log_3 2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 2}=2^{\log_3 6}\times(2^{-1})^{\log_3 2}$

$=2^{\log_3 6}\times 2^{-\log_3 2}$

$=2^{\log_3 6-\log_3 2}$

$=2^{\log_3 \frac{6}{2}}=2^{\log_3 3}$

$=2^1=2$

답 ④

다른 풀이

$6^{\log_3 2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 2}=\left(6\times\frac{1}{2}\right)^{\log_3 2}=3^{\log_3 2}$

$=2^{\log_3 3}=2$

Level
2 기본 연습
본문 16~17쪽

1 ④	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ④
6 ②	7 ③	8 ③		

1 어떤 실수를 k라 하면 두 실수 2, a $(a\neq 2)$는 방정식

$x^n=k$

의 근이다.

이때 서로 다른 두 실근이 존재하기 위해서는 n은 짝수이어야 하므로 n의 값은

2, 4, 6, $\cdots$, 100

그러므로 $p=50$

이때 a의 값은 -2이다.

따라서

$p+a=50+(-2)=48$

답 ④

2 a의 n제곱근은 다음 방정식의 근이다.

$x^n=a$

이 방정식의 한 근이 $\sqrt[6]{2}\times\sqrt[3]{4}$이므로

$(\sqrt[6]{2}\times\sqrt[3]{4})^n=a$

$\left(2^{\frac{1}{6}}\times 2^{\frac{2}{3}}\right)^n=a$

$\left(2^{\frac{5}{6}}\right)^n=a$

a가 자연수이므로 n의 최솟값은 6이고, 이때의 a의 값은 2^5

따라서 $\alpha=6$, $\beta=2^5$이므로

$\alpha+\beta=6+2^5=6+32=38$

답 ⑤

3 이차방정식 $x^2-\sqrt[6]{3}x-\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\sqrt[6]{3}$, $\alpha\beta=-\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=(\sqrt[6]{3})^3-3\times\left(-\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)\times\sqrt[6]{3}\\&=\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^3+2\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}\\&=3^{\frac{1}{6}\times 3}+2\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\\&=3^{\frac{1}{2}}+2\times 3^{\frac{1}{2}}\\&=3\times 3^{\frac{1}{2}}\\&=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ③

4 선분 AB가 원의 지름이므로

$\angle ACB=90^\circ$

직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{\overline{CA}^2+\overline{CB}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt[4]{3})^2+(\sqrt[4]{12})^2}\\&=\sqrt{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2+\left\{(2^2\times 3)^{\frac{1}{4}}\right\}^2}\\&=\sqrt{3^{\frac{1}{2}}+2\times 3^{\frac{1}{2}}}\\&=\sqrt{3\times 3^{\frac{1}{2}}}\\&=\sqrt{3^{1+\frac{1}{2}}}\\&=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=3^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

이때 $\angle CAB=\theta$라 하면 직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}\\&=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}\\&=3^{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}\\&=3^{-\frac{1}{2}}\qquad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

또 직각삼각형 AHC에서

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overline{AH}}{\overline{CA}}\\&=\frac{\overline{AH}}{3^{\frac{1}{4}}}\qquad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$3^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\overline{AH}}{3^{\frac{1}{4}}}$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AH}&=3^{-\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{4}}\\&=3^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\\&=3^{-\frac{1}{4}}\\&=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\end{aligned}$$

답 ④

5 점 A$(0,\ \log_2 ab)$가 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로

$\log_2 ab=2\times0+3$

$\log_2 a+\log_2 b=3$ …… ㉠

또 점 B$\left(1,\ \log_2 \dfrac{b}{a}\right)$가 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로

$\log_2 \dfrac{b}{a}=2\times1+3$

$\log_2 b-\log_2 a=5$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 변끼리 더하면

$2\log_2 b=8$

$\log_2 b=4$

$b=2^4=16$

또 $\log_2 b=4$를 ㉠에 대입하면

$\log_2 a=-1$

$a=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

따라서

$a+b=\dfrac{1}{2}+16=\dfrac{33}{2}$

답 ④

6 $\log_4 a+\log_4 b=\dfrac{5}{2}$에서

$\log_4 ab=\dfrac{5}{2}$

$ab=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2^5),\ (2^1,\ 2^4),\ (2^2,\ 2^3),\ (2^3,\ 2^2),\ (2^4,\ 2^1),\ (2^5,\ 1)$

이고 그 개수는 6이다.

답 ②

7 두 직선 $y=(\log_2 3)x,\ y=(\log_9 a)x$가 서로 수직이므로

$\log_2 3\times\log_9 a=-1$

$\log_2 3\times\log_{3^2} a=-1$

$\log_2 3\times\left(\dfrac{1}{2}\log_3 a\right)=-1$

$\log_2 3\times\log_3 a=-2$

$\log_2 a=-2$

따라서 $a=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

8 $\log_a b : \log_b a=\log_a ab : 2$에서

$\log_a b : \dfrac{1}{\log_a b}=(1+\log_a b) : 2$

$2\log_a b=\dfrac{1}{\log_a b}(\log_a b+1)$

$2(\log_a b)^2=\log_a b+1$

$2(\log_a b)^2-\log_a b-1=0$

$(2\log_a b+1)(\log_a b-1)=0$

$\log_a b=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\log_a b=1$

이때 $a\neq b$이므로

$\log_a b=-\dfrac{1}{2}$

따라서

$\log_a b+\log_b \dfrac{1}{a}$

$=\log_a b-\log_b a$

$=\log_a b-\dfrac{1}{\log_a b}$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)-(-2)$

$=\dfrac{3}{2}$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 18쪽

1 ① 2 ② 3 ③

1 $A_1=\{64\}$이므로 집합 A_2는 64의 제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.

이때 방정식 $x^2=64$의 근 중 실수인 것은

$8,\ -8$

이므로

$A_2=\{-8,\ 8\}$

또 집합 A_3은 집합 A_2에 속하는 각 원소의 세제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.

즉, 두 방정식 $x^3=-8,\ x^3=8$의 근 중 실수인 것은

$-2,\ 2$

이므로

$A_3=\{-2,\ 2\}$

또 집합 A_4는 집합 A_3에 속하는 각 원소의 네제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.

즉, 두 방정식 $x^4=-2,\ x^4=2$의 근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=2$에만 존재하고 그 값은

$\sqrt[4]{2},\ -\sqrt[4]{2}$

이므로

$A_4=\{-\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{2}\}$

또 집합 A_5는 집합 A_4에 속하는 각 원소의 다섯제곱근 중 실수인 것들의 집합이다.

즉, 두 방정식 $x^5=-\sqrt[4]{2}$, $x^5=\sqrt[4]{2}$의 근 중 실수인 것이다.

이때 방정식 $x^5=-\sqrt[4]{2}$는 음의 실근 1개, 방정식 $x^5=\sqrt[4]{2}$는 양의 실근 1개를 가지므로 집합 A_5의 원소의 개수는 2이다.

따라서 집합 A_3의 모든 원소의 곱은 -4이고 집합 A_5의 원소의 개수는 2이므로

$p+q=(-4)+2=-2$

답 ①

2 $\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{q}=-\sqrt[3]{2}$에서 $\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{q}$의 값이 음수이므로 $\sqrt[n]{p}$, $\sqrt[n]{q}$ 중 하나는 양수, 하나는 음수이다.

이때 $p<q$이므로

$\sqrt[n]{p}<0,\ \sqrt[n]{q}>0$

위에서 $\sqrt[n]{p}$는 p의 n제곱근 중 실수이고 이 값이 음수이므로 n은 홀수이어야 한다.

한편, $\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{q}=-\sqrt[3]{2}$의 양변을 n제곱하면

$p\times q=(-1)^n\times(\sqrt[3]{2})^n=(-1)^n\times 2^{\frac{n}{3}}=-2^{\frac{n}{3}}$

이때 n $(2\le n\le 20)$은 홀수이고 $-2^{\frac{n}{3}}$의 값이 정수이어야 하므로

$n=3,\ 9,\ 15$

(i) $n=3$일 때

$p\times q=-2$

이때 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(-1,\ 2),\ (-2,\ 1)$

이고 그 개수는 2이다.

(ii) $n=9$일 때

$p\times q=-2^3$

이때 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(-1,\ 2^3),\ (-2,\ 2^2),\ (-2^2,\ 2),\ (-2^3,\ 1)$

이고 그 개수는 4이다.

(iii) $n=15$일 때

$p\times q=-2^5$

이때 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(-1,\ 2^5),\ (-2,\ 2^4),\ (-2^2,\ 2^3),\ (-2^3,\ 2^2),$

$(-2^4,\ 2),\ (-2^5,\ 1)$

이고 그 개수는 6이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$2+4+6=12$

답 ②

3 $\log_{2n}\sqrt{m}+\log_{2n}\sqrt{m+1}\times\log_{m+1}m=\frac{3}{2}$에서

$\frac{1}{2}\log_{2n}m+\frac{1}{2}\log_{2n}(m+1)\times\log_{m+1}m=\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}\log_{2n}m+\frac{1}{2}\log_{2n}m=\frac{3}{2}$

$\log_{2n}m=\frac{3}{2}$

로그의 정의를 이용하면

$(2n)^{\frac{3}{2}}=m$

$(2n)^3=m^2$

$2^3\times n^3=m^2$ …… ㉠

이때 좌변이 어떤 자연수의 제곱이어야 하므로

$n=2\times p^2$ (p는 자연수)

이 식을 ㉠에 대입하면

$2^6\times p^6=m^2$

$m=2^3\times p^3$

그러므로 p의 값에 따라 n, m의 값을 구하면 다음과 같다.

$p=1$일 때, $n=2\times 1^2$, $m=2^3\times 1^3$

$p=2$일 때, $n=2\times 2^2$, $m=2^3\times 2^3$

$p=3$일 때, $n=2\times 3^2$, $m=2^3\times 3^3$

$p=4$일 때, $n=2\times 4^2$, $m=2^3\times 4^3$

⋮

이때 m, n이 500 이하의 자연수이므로 p의 값은 3 이하의 자연수이어야 한다.

따라서 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 3이다.

답 ③

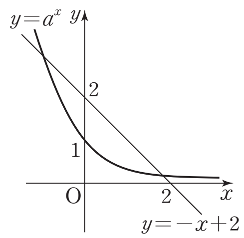
02 지수함수와 로그함수

유제 본문 21~29쪽

1 ①	2 ②	3 ③	4 17	5 ③
6 205	7 ③	8 ③	9 52	10 ④

1 함수 $y=a^x$의 그래프가 직선 $y=-x+2$와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$0<a<1$ …… ㉠



또 $f(1)+f(-1)=\frac{5}{2}$에서

$a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$

$2a^2-5a+2=0$

$(2a-1)(a-2)=0$

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

이때 ㉠을 만족시켜야 하므로

$a=\frac{1}{2}$

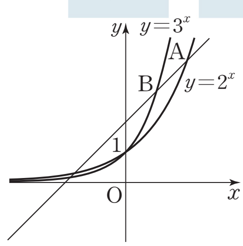
따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로

$f(2)=\frac{1}{4}$

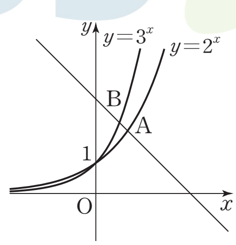
답 ①

2 직선 $y=mx+k$ $(k>1)$이 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

(i) $m>0$일 때



(ii) $m<0$일 때



이때 점 A의 x좌표는 2, 점 B의 x좌표는 1이므로

$\mathrm{A}(2,\ 2^2)$, $\mathrm{B}(1,\ 3^1)$

그러므로 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{3-4}{1-2}(x-1)+3$

$y=x+2$

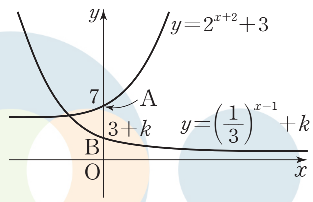
따라서 $m=1$, $k=2$이므로

$mk=1\times2=2$

답 ②

3 함수 $y=2^{x+2}+3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고 점 $\mathrm{A}(0,\ 7)$을 지난다.

또 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+k=3^{-(x-1)}+k$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이고 점 $\mathrm{B}(0,\ 3+k)$를 지난다.



두 함수 $y=2^{x+2}+3$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 제2사분면에서 만나기 위해서는 점 A의 y좌표가 점 B의 y좌표보다 커야 하므로

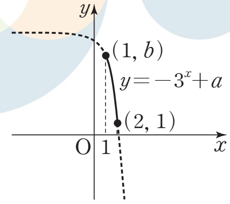
$7>3+k$

$k<4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 1, 2, 3이고 그 개수는 3이다.

답 ③

4 함수 $y=-3^x+a$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.



정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le2\}$인 함수 $y=-3^x+a$는 $x=1$에서 최댓값을 갖고 $x=2$에서 최솟값을 갖는다.

최솟값이 1이므로 $-3^2+a=1$에서

$a=10$

또 최댓값이 b이므로

$b=-3^1+10=7$

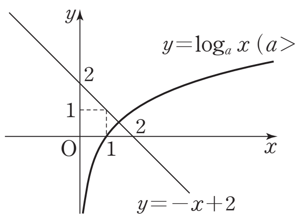
따라서

$a+b=10+7=17$

답 17

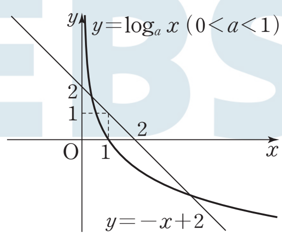
5 a의 값의 범위에 따라 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 만나는 점의 개수를 조사하면 다음과 같다.

(i) $a>1$일 때



함수 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 만나는 점의 개수는 1이다.

(ii) $0<a<1$일 때



함수 $y=\log_a x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$가 만나는 점의 개수는 2이다.

(i), (ii)에서 $0<a<1$

한편, $|f(2)|=2$에서

$|\log_a 2|=2$

$\log_a 2=2$ 또는 $\log_a 2=-2$

$a^2=2$ 또는 $a^{-2}=2$

$a>0$이므로

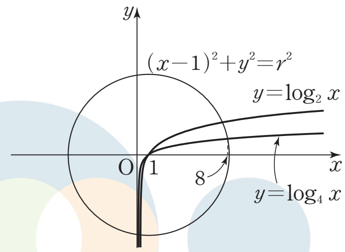
$a=\sqrt{2}$ 또는 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

이때 $0<a<1$이므로

$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 ③

6 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$의 그래프와 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$은 그림과 같고 네 교점 중 x좌표가 가장 큰 점은 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$과 함수 $y=\log_4 x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점이다.



$\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\dfrac{3}{2}$이므로 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$은

점 $\left(8,\ \dfrac{3}{2}\right)$을 지난다.

따라서 $(8-1)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=r^2$이므로

$4r^2=4\times\left\{(8-1)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}$

$=4\times\left(49+\dfrac{9}{4}\right)$

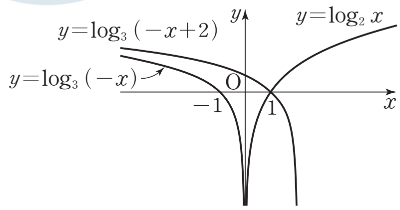
$=196+9$

$=205$

답 205

7 $\log_3(-x+m)=\log_3\{-(x-m)\}$이므로

함수 $y=\log_3(-x+m)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이다.



이때 함수 $y=\log_3(-x)$의 그래프는 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로 이 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

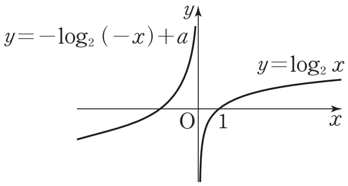
따라서 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 함수 $y=\log_3(-x+m)$의 그래프가 제1사분면에서 만나려면 $m>2$이어야 하므로 자연수 m의 최솟값은 3이다.

답 ③

8 함수 $y=-\log_2(-x)+a$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=-\log_2(-x)+a$의 그래프는 x의 값이 증가

하면 y의 값도 증가한다.



그러므로 정의역이 $\left\{x \middle| -4 \le x \le -\frac{1}{8}\right\}$인

함수 $y=-\log_2(-x)+a$는 $x=-\frac{1}{8}$에서 최댓값을 갖고

최댓값이 4이므로

$4=-\log_2 \frac{1}{8}+a$

$=-\log_2 2^{-3}+a$

$=3+a$

$a=1$

또 함수 $y=-\log_2(-x)+1$은 $x=-4$에서 최솟값을 갖고 최솟값이 b이므로

$b=-\log_2 4+1$

$=-\log_2 2^2+1$

$=-2+1$

$=-1$

따라서 $a+b=1+(-1)=0$

답 ③

9 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 원 $x^2+(y-1)^2=1$과 만나려면 $0<a<1$이어야 하므로

$\log_a(3x+1) \le \log_a(x+6)$에서

$3x+1 \ge x+6$

$2x \ge 5$

$x \ge \frac{5}{2}$ ...... ㉠

한편, 진수의 조건으로부터

$3x+1>0$이고 $x+6>0$

즉, $x>-\frac{1}{3}$ ...... ㉡

㉠과 ㉡에서 $x \ge \frac{5}{2}$

x가 10 이하의 자연수이므로 x의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 그 합은 52이다.

답 52

10 $4^{|x-1|}=2\sqrt{2}$에서

$(2^2)^{|x-1|}=2^1 \times 2^{\frac{1}{2}}$

$2^{2|x-1|}=2^{\frac{3}{2}}$

$2|x-1|=\frac{3}{2}$

$|x-1|=\frac{3}{4}$

$x-1=\frac{3}{4}$ 또는 $x-1=-\frac{3}{4}$

$x=\frac{7}{4}$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

따라서 모든 x의 값의 곱은

$\frac{7}{4} \times \frac{1}{4}=\frac{7}{16}$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 30~31쪽

1 ③	2 ②	3 ④	4 ②	5 ④
6 ②	7 ④	8 ①	9 ③	10 ②

1 $f(x)=a^x$이므로

$(f \circ f)(0)=f(f(0))=f(a^0)=f(1)=a=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)=(\sqrt{2})^x$이므로

$f(3)=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$

답 ③

2 함수 $y=a^x$의 정의역이 $\{x|0 \le x \le 1\}$이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다. 이때 $f(x)=a^x$이라 하자.

(i) $a>1$일 때

함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 치역은

$\{y|f(0) \le y \le f(1)\}=\{y|1 \le y \le a\}$

이것은 치역이 $\left\{y \middle| \frac{1}{3} \le y \le b\right\}$라는 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $0<a<1$일 때

함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 치역은

$\{y|f(1) \le y \le f(0)\}=\{y|a \le y \le 1\}$

이때 치역이 $\left\{y \middle| \frac{1}{3} \le y \le b\right\}$이므로

$a=\frac{1}{3}$, $b=1$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

답 ②

3 $4\times2^{x-1}+3=2^2\times2^{x-1}+3=2^{x+1}+3$

이므로 함수 $y=4\times2^{x-1}+3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2$, $m=-1$, $n=3$이므로

$a+m+n=2+(-1)+3=4$

답 ④

4 함수 $y=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+1$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 정의역이 $\{x|-1\le x\le 3\}$인 함수

$y=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}+1$은 $x=3$에서 최댓값을 갖고 그 값은

$-\left(\frac{2}{3}\right)^1+1=\frac{1}{3}$

답 ②

5 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 그러므로 점근선의 방정식은 $y=2$

점 (a, b)와 직선 $y=2$ 사이의 거리가 1이고 $b>2$이므로

$b-2=1$

$b=3$

이때 점 $(a, 3)$이 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프 위에 있으므로

$2^{a-1}+2=3$

$2^{a-1}=1$

$a=1$

따라서

$a+b=1+3=4$

답 ④

6 $y=\frac{2}{3}\log_4\frac{1}{x}$

$=\frac{2}{3}\log_{2^2}x^{-1}$

$=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\log_2 x$

$=-\frac{1}{3}\log_2 x$

$=\log_{2^{-3}}x$

$=\log_{\frac{1}{8}}x$

이므로

$a=\frac{1}{8}$

답 ②

7 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=-\log_3 x$

함수 $y=-\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=-\log_3(x-1)+2$

함수 $y=-\log_3(x-1)+2$의 그래프가 점 $(4, a)$를 지나므로

$a=-\log_3(4-1)+2$

$=-\log_3 3+2$

$=-1+2$

$=1$

답 ④

8 함수 $y=4^{x-1}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=4^{(x-1)-1}+1$

즉, $y=4^{x-2}+1$

함수 $y=4^{x-2}+1$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는

$x=4^{y-2}+1$

$4^{y-2}=x-1$

$y-2=\log_4(x-1)$

$y=\log_4(x-1)+2$

함수 $y=\log_4(x-1)+2$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하기 위해 $y=0$을 대입하면

$0=\log_4(x-1)+2$

$\log_4(x-1)=-2$

$x-1=4^{-2}$

따라서

$x=\frac{1}{16}+1=\frac{17}{16}$

답 ①

9 $y=\log_7(8x-1)$

$=\log_7\left\{8\left(x-\frac{1}{8}\right)\right\}$

$=\log_7\left(x-\frac{1}{8}\right)+\log_7 8$

함수 $y=\log_7\left(x-\frac{1}{8}\right)+\log_7 8$의 그래프는

함수 $y=\log_7 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{8}$만큼, y축의 방향으로 $\log_7 8$만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은

$x=\frac{1}{8}$

직선 $x=\frac{1}{8}$이 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$의 그래프와 만나는 점의 y좌표는

$$y=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{8}$$
$$=\log_{2^{-2}} 2^{-3}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ③

10 $\log_2(x+7)<1-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$에서

$\log_2(x+7)<1-\log_{2^{-1}}(x+1)$

$\log_2(x+7)<1+\log_2(x+1)$

$\log_2(x+7)<\log_2 2+\log_2(x+1)$

$\log_2(x+7)<\log_2 2(x+1)$

밑 2가 1보다 크므로

$x+7<2x+2$

$x>5$ ······ ㉠

또 진수의 조건으로부터

$x+7>0$이고 $x+1>0$

즉, $x>-1$ ······ ㉡

㉠과 ㉡에서 $x>5$

따라서 자연수 x의 최솟값은 6이다.

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 32~33쪽

1 ⑤	2 ⑤	3 ②	4 29	5 ①
6 ④	7 ④	8 ③		

1 x의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $x>0$일 때

함수 $y=4^x$의 그래프가 함수 $y=2^x$의 그래프보다 위쪽에 있으므로

$f(x)=4^x$

(ii) $x\le 0$일 때

함수 $y=2^x$의 그래프가 함수 $y=4^x$의 그래프보다 위쪽에 있거나 점 $(0, 1)$에서 만나므로

$f(x)=2^x$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}4^x & (x>0)\\ 2^x & (x\le 0)\end{cases}$$

한편, 양수 a에 대하여

$f(a)\times f(-a)=f(0)+7$이므로

$4^a\times 2^{-a}=1+7$

$2^{2a}\times 2^{-a}=8$

$2^a=2^3$

따라서 $a=3$

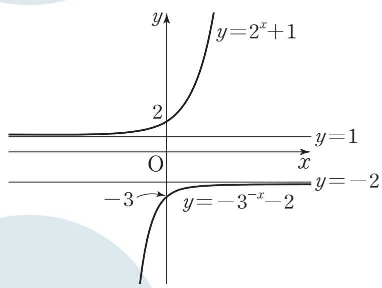
답 ⑤

2 함수 $y=2^x+1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 점근선은 직선 $y=1$이다. 또 함수 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+a=-3^{-x}+a$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다. 그러므로 점근선은 직선 $y=a$이다.

두 점근선 $y=1$, $y=a$ 사이의 거리가 3이므로

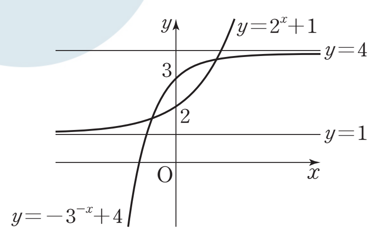
$a=-2$ 또는 $a=4$

(i) $a=-2$일 때



두 함수 $y=2^x+1$, $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x-2$의 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $a=4$일 때



두 함수 $y=2^x+1$, $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+4$의 그래프는 만난다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$a=4$

답 ⑤

3 함수 $y=a^{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(ⅰ) $a>1$일 때

함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

그러므로 정의역이 $\{x|2\le x\le 3\}$인 함수 $y=a^{x-1}+2$는 $x=2$에서 최솟값 $\frac{9}{4}$를 가져야 한다.

즉, $a+2=\frac{9}{4}$에서 $a=\frac{1}{4}$

이것은 $a>1$인 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $0<a<1$일 때

함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

그러므로 정의역이 $\{x|2\le x\le 3\}$인 함수 $y=a^{x-1}+2$는 $x=3$에서 최솟값 $\frac{9}{4}$를 가져야 한다.

즉, $a^2+2=\frac{9}{4}$에서 $a^2=\frac{1}{4}$

이때 $a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

이것은 $0<a<1$인 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{2}$이므로

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$

이 함수는 $x=2$에서 최댓값 b를 가지므로

$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

따라서 $a+b=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$

답 ②

4 함수 $y=3^{x+2}+4$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점을 (p, q)라 하면 위의 평행이동에 의해 점 (p, q)는 점 $(p-2, q+4)$로 옮겨지고 이 점은 함수 $y=3^{x+2}+4$의 그래프 위의 점이다.

이때 두 점 (p, q), $(p-2, q+4)$를 지나는 직선의 기울기가 -2이므로

$A(p, q)$, $B(p-2, q+4)$

라 하면 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{p+(p-2)}{2}, \frac{q+(q+4)}{2}\right)$, 즉 $(p-1, q+2)$

이 중점의 좌표가 $(2, a)$이므로

$p-1=2$, $q+2=a$

$p=3$, $a=q+2$

또 점 $A(3, q)$는 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점이므로

$q=3^3$

따라서 $a=3^3+2=29$

답 29

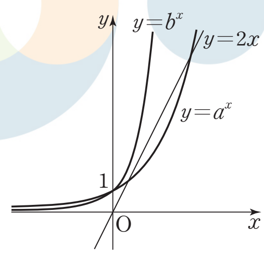
5 함수 $y=\log_b x$ $(b>0, b\ne 1)$의 역함수는

$y=b^x$

또 함수 $y=\frac{1}{2}x$의 역함수는 $y=2x$이다.

이때 조건 (나)에서 함수 $y=\log_b x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나지 않으므로 함수 $y=b^x$의 그래프는 직선 $y=2x$와 만나지 않는다.

또 조건 (가)에서 함수 $y=a^x$ $(a>0, a\ne 1)$의 그래프와 직선 $y=2x$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 다음과 같다.



이때 $1<a<b$이므로

$0<\frac{a}{b}<1$

그러므로 함수 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때 정의역이 $\{x|-1\le x\le 2\}$인 함수 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$은 $x=-1$에서 최댓값 2를 가지므로

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=2$

$\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

함수 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$은 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

답 ①

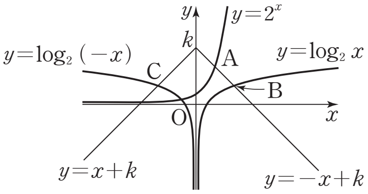
6 $y=-|x|+k$

$=\begin{cases}-x+k & (x\ge 0)\\ x+k & (x<0)\end{cases}$

한편, 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

그러므로 기울기가 -1인 직선 $y=-x+k$와 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프가 만나는 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

그러므로 $\mathrm{A}(p, q)$라 하면 $\mathrm{B}(q, p)$



또 두 직선 $y=-x+k$, $y=x+k$는 y축에 대하여 대칭이고 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(-x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이므로 두 점 B, C는 y축에 대하여 대칭이다.

그러므로 $\mathrm{C}(-q, p)$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(\dfrac{2}{3}, a\right)$이므로

$\dfrac{p+q+(-q)}{3}=\dfrac{2}{3}$ …… ㉠

$\dfrac{q+p+p}{3}=a$ …… ㉡

㉠에서 $p=2$이고 $q=2^p=2^2=4$이므로 ㉡에서

$a=\dfrac{4+2+2}{3}=\dfrac{8}{3}$

또 점 $\mathrm{A}(2, 4)$가 직선 $y=-x+k$ 위에 있으므로

$4=-2+k$

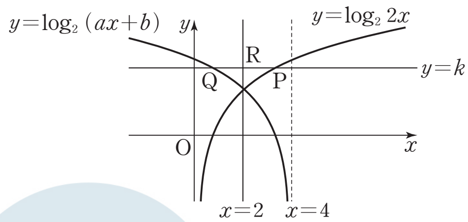
$k=6$

따라서 $k+a=6+\dfrac{8}{3}=\dfrac{26}{3}$

답 ④

7 $\log_2 2x=\log_2 x+\log_2 2=\log_2 x+1$이므로 함수 $y=\log_2 2x$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 이때 점근선은 y축이다.

한편, $a<0$이고 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로 함수 $y=\log_2(ax+b)$의 그래프는 그림과 같이 점근선이 직선 $x=4$이어야 한다.



그러므로 함수 $y=\log_2(ax+b)$ $(a<0)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 된다.

이때 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2(-x)+1$이고 이 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2\{-(x-4)\}+1$이다. 즉,

$\log_2(ax+b)=\log_2\{-(x-4)\}+1$

$=\log_2(-x+4)+1$

$=\log_2\{2\times(-x+4)\}$

$=\log_2(-2x+8)$

따라서 $a=-2$, $b=8$이므로

$ab=(-2)\times 8=-16$

답 ④

8 점 C의 x좌표를 p라 하면

$\mathrm{C}(p, 4^{p+1})$

이때 세 점 A, B, C의 y좌표가 각각 $6\sqrt{2}$, 0, 4^{p+1}이고 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=1:2$이므로

$\dfrac{1\times 0+2\times 6\sqrt{2}}{1+2}=4^{p+1}$

$4^{p+1}=4\sqrt{2}$

$(2^2)^{p+1}=2^{2+\frac{1}{2}}$

$2^{2p+2}=2^{\frac{5}{2}}$

$2p+2=\dfrac{5}{2}$

$2p=\dfrac{1}{2}$

따라서 $p=\dfrac{1}{4}$

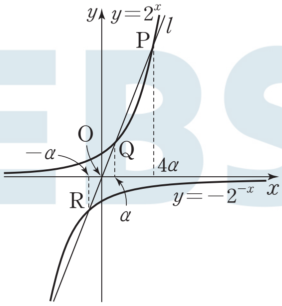
답 ③

Level 3 실력 완성

본문 34쪽

1 ④ 2 ③ 3 8

1 두 함수 $y=2^x$, $y=-2^{-x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 점 Q, R도 원점에 대하여 대칭이다.
또 $\overline{PQ}:\overline{QR}=3:2$이므로 점 Q의 x좌표를 α $(\alpha>0)$으로 놓으면
$Q(\alpha,\ 2^{\alpha})$, $R(-\alpha,\ -2^{\alpha})$, $P(4\alpha,\ 2^{4\alpha})$



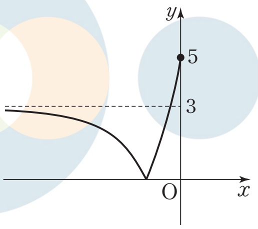
직선 OQ와 직선 OP의 기울기가 서로 같으므로
$\frac{2^{\alpha}-0}{\alpha-0}=\frac{2^{4\alpha}-0}{4\alpha-0}$
$\alpha>0$이므로
$2^{\alpha}\times4=2^{4\alpha}$
$2^{\alpha+2}=2^{4\alpha}$
$4\alpha=\alpha+2$
따라서 $\alpha=\frac{2}{3}$

답 ④

2 점 A의 좌표를 $(a,\ \log_2 a)$ $(a>1)$이라 하면 점 B의 y좌표는 $\log_2 a$이므로 점 B의 x좌표는
$\log_{\frac{1}{2}}(-x)=\log_2 a$에서
$-\log_2(-x)=\log_2 a$
$\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=\log_2 a$
$-\frac{1}{x}=a$
$x=-\frac{1}{a}$
그러므로 점 B의 좌표는
$\left(-\frac{1}{a},\ \log_2 a\right)$
한편, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$는
$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)=-\log_2(-x)$이므로 함수
$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
그러므로 원점 O는 선분 BC의 중점이다.
이때 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로
$\overline{OA}\perp\overline{OB}$
두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로
$\frac{\log_2 a}{a}\times\frac{\log_2 a}{-\frac{1}{a}}=-1$
$(\log_2 a)^2=1$
$\log_2 a=1$ 또는 $\log_2 a=-1$
$a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$
이때 $a>1$이므로
$a=2$
따라서 $A(2,\ 1)$, $B\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OA}$
$=\frac{1}{2}\times2\overline{OB}\times\overline{OA}$
$=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\times\sqrt{2^2+1^2}$
$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{5}$
$=\frac{5}{2}$

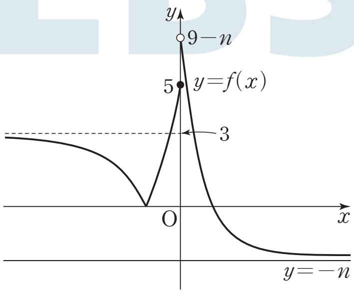
답 ③

3 $x\le0$일 때, 함수 $y=|2^{x+3}-3|$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 후 x축의 아랫부분의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다. 이때 함수 $y=2^{x+3}-3$의 그래프의 점근선은 직선 $y=-3$이므로 함수 $y=|2^{x+3}-3|$의 그래프의 점근선은 직선
$y=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
또 $x=0$일 때, $y=|2^3-3|=5$이므로
함수 $y=|2^{x+3}-3|$ $(x\le0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $3^{-x+2}-n=3^{-(x-2)}-n$이므로 $x>0$일 때,
함수 $y=3^{-x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$의 그래프의 점근선은 직선
$y=-n$ ...... ㉡
또 $x=0$일 때, $y=9-n$이므로 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$의 그래프는 점 $(0,\ 9-n)$을 지난다.
한편, 방정식 $f(x)=t$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표이다.
이때 ㉠, ㉡과 함수 $y=|2^{x+3}-3|$의 그래프가 y축과 만나는 점 $(0,\ 5)$를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $9-n>0$이어야 한다.
즉, $n<9$
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 8이고 그 개수는 8이다.

답 8

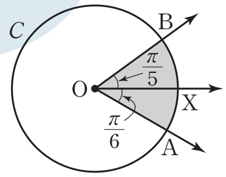
03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

1	6	2	④	3	②	4	4	5	3
6	12	7	⑤	8	②	9	2	10	①

1 주어진 조건을 만족시키는 부채꼴 OAB는 그림의 색칠한 부분과 같다.



부채꼴 OAB의 중심각의 크기는
$\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}=\frac{11}{30}\pi$
반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면 부채꼴 OAB의 넓이가 $\frac{33}{5}\pi$이므로
$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{11}{30}\pi=\frac{33}{5}\pi$
$r^2=36$
따라서 $r=6$

답 6

2 세 호 OA, OB, AB의 길이를 각각 l_1, l_2, l_3이라 하자.
부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 3, 즉 $\overline{OA}=\overline{OB}=3$이므로
$l_1=l_2=\frac{3}{2}\times\pi=\frac{3}{2}\pi$
세 호 OA, OB, AB로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이가 $\frac{14}{3}\pi$이므로
$l_1+l_2+l_3=\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi+l_3=\frac{14}{3}\pi$
$l_3=\frac{5}{3}\pi$
따라서 부채꼴 OAB의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\times3\times\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ④

3 $\sin\theta=\frac{3}{5}>0$이므로 각 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.
각 θ가 제1사분면의 각이면
$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$에서 $\cos\theta+\tan\theta>0$이고,
각 θ가 제2사분면의 각이면
$\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$에서 $\cos\theta+\tan\theta<0$이다.
이때 $\cos\theta+\tan\theta<0$이므로 각 θ는 제2사분면의 각이고

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

따라서

$$\cos\theta-\tan\theta=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{20}$$

답 ②

4 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\frac{1}{4}}\\&=4\end{aligned}$$

답 4

5 $b>0$이고 함수 $y=a\cos bx+ab$의 주기가 π이므로
$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서 $b=2$
함수 $y=a\cos 2x+2a$의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로
$|a|+2a=a+2a=3a=3$
$a=1$
따라서
$a+b=1+2=3$

답 3

6 $f(x)=a\tan 2x+b$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{3}\right)&=a\tan\frac{2}{3}\pi+b\\&=-\sqrt{3}a+b=0\end{aligned}$$

$b=\sqrt{3}a$
또한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$을 지나므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{2}\right)&=a\tan\pi+b\\&=a\times0+b\\&=b=3\end{aligned}$$

따라서

$$a=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

이므로
$a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+3^2=12$

답 12

7 $\sin(\pi-\theta)=\frac{3}{5}$에서 $\sin\theta=\frac{3}{5}$
이때 $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$에서 각 θ는 제2사분면의 각이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta&=-\sqrt{1-\sin^2\theta}\\&=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\\&=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)&=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}\\&=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\&=-\cos\theta\\&=-\left(-\frac{4}{5}\right)\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

답 ⑤

8 이차방정식 $x^2+2x\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan(\pi+\theta)=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=-2\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$=-2\times\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$

$=\frac{2}{\tan\theta}$

$\alpha\beta=\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

이때 $(4\alpha-1)(4\beta-1)=1$에서

$16\alpha\beta-4\alpha-4\beta+1=1$

$4\alpha\beta=\alpha+\beta$이므로

$4\tan\theta=\frac{2}{\tan\theta}$

따라서

$\tan^2\theta=\frac{1}{2}$

답 ②

9 x에 대한 이차방정식 $2x^2+(2\sin\theta)x+\sin\theta\cos\theta=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta(\sin\theta-2\cos\theta)=0$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta\neq0$, $\cos\theta\neq0$이므로

$\sin\theta=2\cos\theta$

따라서

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{\cos\theta}$

$=2$

답 2

10 $\cos^2 x+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x>1+\sqrt{2}$에서

$(1-\sin^2 x)+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x>1+\sqrt{2}$

$\sin^2 x-\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x+\sqrt{2}<0$

$(\sin x-2)\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$

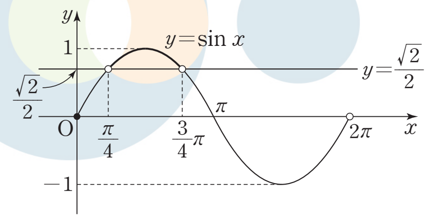
이때 $0\le x<2\pi$에서 $\sin x-2<0$이므로

$\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$

$\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

이 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{3}{4}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

1 4	2 ③	3 ①	4 ③	5 ③
6 ③	7 ④	8 ⑤	9 ②	

1 $400^\circ=a\pi$, $320^\circ=b\pi$이므로

$400^\circ+320^\circ=a\pi+b\pi$

$(a+b)\pi=720^\circ$

$a+b=\frac{720}{\pi}\times1^\circ$

$=\frac{720}{\pi}\times\frac{\pi}{180}$

$=4$

답 4

참고

$a=\frac{400}{\pi}\times1^\circ=\frac{400}{\pi}\times\frac{\pi}{180}=\frac{20}{9}$

$b=\frac{320}{\pi}\times1^\circ=\frac{320}{\pi}\times\frac{\pi}{180}=\frac{16}{9}$

2 부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 반지름의 길이가 4이므로 직각삼각형 OAC에서

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$

$\overline{OC}=\frac{\overline{OA}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

두 호 AB, CD와 두 선분 AD, BC로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면 S는 부채꼴 ODC의 넓이에서 부채꼴 OAB의 넓이를 뺀 것이다.

따라서

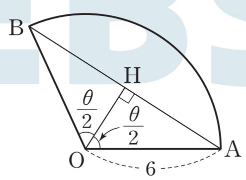
$S=\frac{1}{2}\times\overline{OC}^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times\overline{OA}^2\times\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{3}$

$=8\pi$

답 ③

3



부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ, 호 AB의 길이를 l이라 하면 부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 6이므로

$l=6\theta$

부채꼴 OAB의 둘레의 길이가 24이므로

$\overline{OA}+\overline{OB}+\widehat{AB}=24$에서

$6+6+6\theta=24$

$\theta=2$

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB가 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle AOH=\angle BOH=\frac{1}{2}\times(\angle AOB)=\frac{\theta}{2}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}=6\sin 1$

따라서

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\times 6\sin 1=12\sin 1$

답 ①

4 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

따라서

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$=1^2-2\times\left(-\frac{4}{9}\right)^2$

$=\frac{49}{81}$

답 ③

5 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서

$\sin\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{2}{3}\pi\times\tan\frac{7}{6}\pi$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{12}$

답 ③

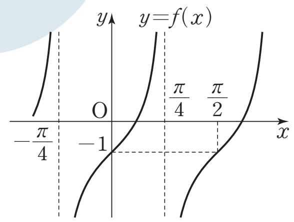
6 ㄱ. $f(x)=3\tan(\pi+2x)-1=3\tan 2x-1$

이므로

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=3\tan\frac{\pi}{4}-1=3\times 1-1=2$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)=3\tan 2x-1$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\tan 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.



이때 함수 $y=3\tan 2x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ -1)$에 대하여 대칭이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

7 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{\pi}{7}$

$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}$

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$

따라서

$$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2$$

$$=\left(\cos^2\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=2\left(\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$=2\times1$

$=2$

답 ④

8 $\log_2\sin x+\log_2(6\sin x-1)=0$ …… ㉠

진수의 조건에서

$\sin x>0,\ 6\sin x-1>0$

즉, $\sin x>\frac{1}{6}$

방정식 ㉠에서

$\log_2\sin x(6\sin x-1)=0$

$\sin x(6\sin x-1)=1$

$6\sin^2 x-\sin x-1=0$

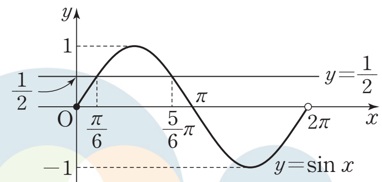
$(2\sin x-1)(3\sin x+1)=0$

이때 $\sin x>\frac{1}{6}$에서 $3\sin x+1>\frac{3}{2}$이므로

$2\sin x=1$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 점의 x좌표이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$이다.



따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은

$\frac{\pi}{6}\times\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{36}\pi^2$

답 ⑤

9 $f(x)=2\sin^2 x+\cos x-1$

$=2(1-\cos^2 x)+\cos x-1$

$=-2\cos^2 x+\cos x+1$

에서 $\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

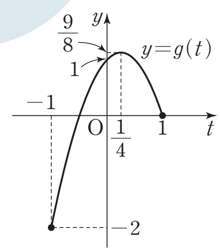
$f(x)=-2t^2+t+1$

$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\ (-1\le t\le 1)$

이때 $g(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}\ (-1\le t\le 1)$이라 하면

함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{9}{8}$를 갖고,

$t=-1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.



따라서 $M=\frac{9}{8}$, $m=-2$이므로

$M-m=\frac{9}{8}-(-2)=\frac{25}{8}$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 48~50쪽

1 ②	2 ③	3 ⑤	4 ④	5 ①
6 ④	7 ②	8 ②	9 ②	10 30
11 8	12 ②			

1 n이 두 자리의 자연수, 즉 $10\le n<100$이므로

$\frac{\pi}{2}<\frac{50}{n}\pi\le 5\pi$

이때 $\frac{50}{n}\pi$가 제2사분면의 각이려면

$\frac{\pi}{2}<\frac{50}{n}\pi<\pi$ 또는 $\frac{5}{2}\pi<\frac{50}{n}\pi<3\pi$ 또는

$\frac{9}{2}\pi<\frac{50}{n}\pi<5\pi$

이어야 한다.

$\frac{\pi}{2}<\frac{50}{n}\pi<\pi$에서 $50<n<100$이므로

n의 값은 51, 52, 53, $\cdots$, 99이고 그 개수는 49이다.

$\frac{5}{2}\pi<\frac{50}{n}\pi<3\pi$에서 $\frac{50}{3}<n<20$이므로

n의 값은 17, 18, 19이고 그 개수는 3이다.

$\frac{9}{2}\pi<\frac{50}{n}\pi<5\pi$에서 $10<n<\frac{100}{9}$이므로

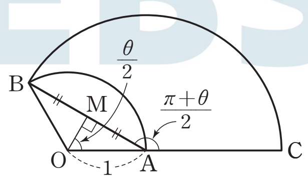
n의 값은 11이고 그 개수는 1이다.

따라서 구하는 두 자리의 자연수 n의 개수는

$49+3+1=53$

답 ②

2



선분 AB는 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA}$인 원의 현이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직선 OM은 선분 AB를 수직이등분한다.

즉, $\angle AOM=\frac{1}{2}\times(\angle AOB)=\frac{\theta}{2}$, $\angle AMO=\frac{\pi}{2}$이므로

직각삼각형 OAM에서

$\overline{AM}=\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}$

$=1\times\sin\frac{\theta}{2}$

$=\sin\frac{\theta}{2}$

$\overline{AC}=\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sin\frac{\theta}{2}$

이때

$\angle BAC=\angle AMO+\angle AOM$

$=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}=\frac{\pi+\theta}{2}$

이므로 부채꼴 ACB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}^2\times\frac{\pi+\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\frac{\pi+\theta}{2}$

$=(\pi+\theta)\sin^2\frac{\theta}{2}$

이때 $S=\frac{3}{4}(\pi+\theta)$이므로

$(\pi+\theta)\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}(\pi+\theta)$에서

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이고 $\sin\frac{\theta}{2}>0$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\theta=\frac{2}{3}\pi$

따라서

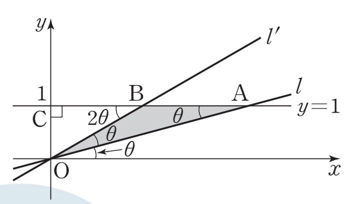
$\sin\theta\cos\theta=\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ③

3



C(0, 1)이라 하면 두 직선 l, l'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 θ, 2θ이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle OAC=\theta$, $\angle OBC=2\theta$

$\angle BOA=\angle OAB=\theta$에서 삼각형 OAB는 $\overline{OB}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이다.

한편, 삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1=\frac{1}{2}\overline{AB}$

이때 $S=1$이므로

$\frac{1}{2}\overline{AB}=1$에서

$\overline{AB}=\overline{OB}=2$

직각삼각형 OBC에서

$\sin 2\theta=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$, 즉 $0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}$에서

$2\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$\theta=\dfrac{\pi}{12}$

따라서

$\sin 6\theta=\sin\left(6\times\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

답 ⑤

4 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{n}x$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{n}}=2n$, 즉 2의 배수이다.

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x+20)=f(x)$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 주기가 20의 약수이어야 한다.

따라서 $2n$이 20의 약수가 되도록 하는 자연수 n의 값은

1, 2, 5, 10

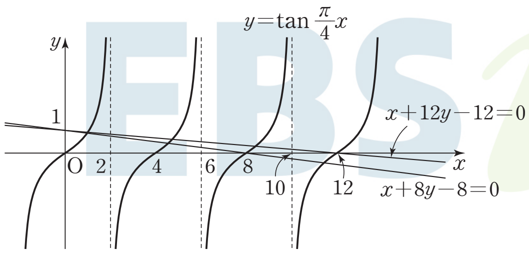
이므로 n의 값의 합은

$1+2+5+10=18$

답 ④

5 함수 $y=\tan\dfrac{\pi}{4}x$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\dfrac{\pi}{4}}=4$이므로

함수 $y=\tan\dfrac{\pi}{4}x$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $x+ny-n=0$에서

$x+n(y-1)=0$

이므로 직선 $x+ny-n=0$은 n의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.

이때 직선 $x+ny-n=0$은 점 $(n, 0)$을 지나므로 직선 $x+ny-n=0$과 함수 $y=\tan\dfrac{\pi}{4}x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 3이려면 $8<n\le 12$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은 9, 10, 11, 12이므로 그 합은

$9+10+11+12=42$

답 ①

6 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{7}{6}\pi$에서 방정식 $|f(x)|=4$의 근, 즉 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$\alpha-\dfrac{\pi}{6}=2\left(\dfrac{7}{6}\pi-\alpha\right)$

이므로 $\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 주기는

$\alpha-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$

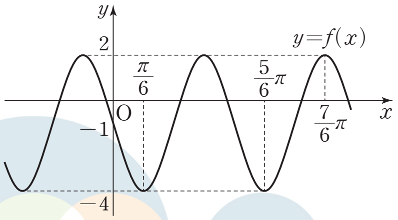
함수 $f(x)=a\sin bx+c$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}$이므로

$\dfrac{2\pi}{|b|}=\dfrac{2}{3}\pi$

$|b|=3$

한편, $|f(0)|=1$에서 $|c|=1$, 즉 $c=-1$ 또는 $c=1$

(i) $c=-1$일 때



$f(x)=a\sin bx-1$의 최댓값이 2이므로

$|a|-1=2$, $|a|=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-3\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

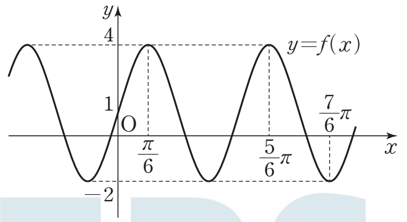
$f(x)=-3\sin 3x-1$

이때 $|a|=|b|=3$이고 $-3\sin 3x=3\sin(-3x)$이므로

$a=-3$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=-3$

따라서 $a+b=0$이므로 $a+b+c$의 값은 -1이다.

(ii) $c=1$일 때



$f(x)=a\sin bx+1$의 최댓값이 4이므로

$|a|+1=4$, $|a|=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=3\sin 3x+1$

이때 $|a|=|b|=3$이고 $3\sin 3x=-3\sin(-3x)$이므로

$a=b=3$ 또는 $a=b=-3$

따라서 $a+b+c$의 값은 $3+3+1=7$ 또는

$-3+(-3)+1=-5$이다.

(i), (ii)에서 $a+b+c$의 최댓값과 최솟값은 각각 $M=7$, $m=-5$이므로

$M-m=7-(-5)=12$

답 ④

7 $-1\le\sin b(x+\pi)\le 1$이고, a, c가 자연수이므로 함수 $f(x)=a\sin b(x+\pi)+c$의 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c$, $-a+c$이다.

조건 (가)에 의하여

$a+c=7$ …… ㉠

$-a+c=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $c=2$

함수 $f(x)=5\sin b(x+\pi)+2$에서 조건 (나)에 의하여

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\sin\frac{3b}{2}\pi+2=2$

$\sin\frac{3b}{2}\pi=0$ …… ㉢

이때 자연수 b가 홀수이면 $\sin\frac{3b}{2}\pi=-1$ 또는 $\sin\frac{3b}{2}\pi=1$이고 b가 짝수이면 $\sin\frac{3b}{2}\pi=0$이다.

그러므로 ㉢을 만족시키는 자연수 b의 최솟값은 2이다.

따라서 $a+b+c$의 최솟값은 $a=5$, $b=2$, $c=2$일 때 9이다.

답 ②

8 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이고,

함수 $g(x)=\sin\frac{5}{3}\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{5}{3}\pi}=\frac{6}{5}$이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}x$

$=-f(x)$

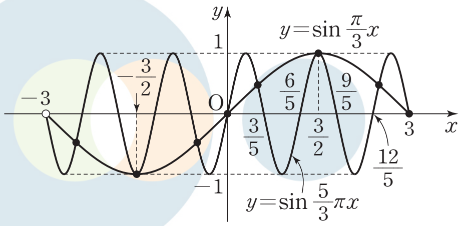
$g(-x)=\sin\left(-\frac{5}{3}\pi x\right)$

$=-\sin\frac{5}{3}\pi x$

$=-g(x)$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 모두 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $-3<x\le 3$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$-3<x\le 3$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같이 8개의 점에서 만나므로

$n=8$

8개의 점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_8이라 하면

$-3<x_1<x_2=-\frac{3}{2}<x_3<x_4=0<x_5$

$<x_6=\frac{3}{2}<x_7<x_8=3$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 모두 원점에 대하여 대칭이므로

$x_1=-x_7$, $x_2=-x_6=-\frac{3}{2}$, $x_3=-x_5$

따라서 8개의 점의 x좌표의 합 S는

$S=(x_1+x_7)+(x_2+x_6)+(x_3+x_5)+x_4+x_8$

$=0+0+0+0+3$

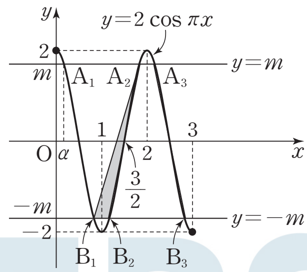
$=3$

이므로

$n\times S=8\times 3=24$

답 ②

9



함수 $y=2\cos\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로

$\overline{A_1A_3}=2$

함수 $y=2\cos\pi x$의 그래프는 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이고, 두 직선 $y=m$, $y=-m$은 x축에 대하여 대칭이므로 점 A_1과 점 B_3, 점 A_2와 점 B_2, 점 A_3과 점 B_1은 각각 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\overline{A_1A_2}=\overline{B_2B_3}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{A_2A_3}+\overline{B_2B_3}&=\overline{A_2A_3}+\overline{A_1A_2}\\&=\overline{A_1A_3}\\&=2\end{aligned}$$

사각형 $A_2B_2B_3A_3$의 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times(\overline{A_2A_3}+\overline{B_2B_3})\times 2m&=\frac{1}{2}\times 2\times 2m\\&=2m\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$m=\sqrt{3}$

점 A_1의 x좌표를 $\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$이라 하면

$2\cos\alpha\pi=\sqrt{3}$

$\cos\alpha\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\alpha\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha\pi=\frac{\pi}{6}$

$\alpha=\frac{1}{6}$

따라서 삼각형 $A_2B_1B_2$의 넓이를 S라 하면

$\overline{B_1B_2}=2\alpha=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\overline{B_1B_2}\times 2m\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

답 ②

10 등식 $\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{n+2}{3}\pi-\theta\right)\right|$가 θ에 대한 항등식이므로 θ에 $\frac{2}{3}\pi+\theta$를 대입하면

$|\sin(\pi+\theta)|=\left|\sin\left(\frac{n}{3}\pi-\theta\right)\right|$

이때 $|\sin(\pi+\theta)|=|-\sin\theta|=|\sin\theta|$이므로

$|\sin\theta|=\left|\sin\left(\frac{n}{3}\pi-\theta\right)\right|$ …… ㉠

자연수 m에 대하여 ㉠은 다음과 같다.

(i) $n=3m-2$일 때

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{n}{3}\pi-\theta\right)\right|&=\left|\sin\left(\frac{3m-2}{3}\pi-\theta\right)\right|\\&=\left|\sin\left\{m\pi-\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\right|\\&=\left|\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right|\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$|\sin\theta|=\left|\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right|$

이고 이 등식은 θ에 대한 항등식이 아니다.

(ii) $n=3m-1$일 때

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{n}{3}\pi-\theta\right)\right|&=\left|\sin\left(\frac{3m-1}{3}\pi-\theta\right)\right|\\&=\left|\sin\left\{m\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right|\\&=\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$|\sin\theta|=\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|$

이고 이 등식은 θ에 대한 항등식이 아니다.

(iii) $n=3m$일 때

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{n}{3}\pi-\theta\right)\right|&=\left|\sin\left(\frac{3m}{3}\pi-\theta\right)\right|\\&=|\sin(m\pi-\theta)|\\&=|\sin\theta|\end{aligned}$$

이므로 ㉠이 θ의 값에 관계없이 항상 성립한다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 등식이 θ에 대한 항등식이려면 $n=3m$, 즉 n은 3의 배수이어야 한다.

따라서 두 자리의 자연수 n의 값은 12, 15, 18, …, 99이고 그 개수는 30이다.

답 30

11 $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=\pi\cos x$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(\pi\cos x)\\&=\sin(2\pi\cos x)\end{aligned}$$

방정식 $(f \circ g)(x)=0$에서

$\sin(2\pi\cos x)=0$ ······ ㉠

이때 $n\pi<x<(n+1)\pi$에서

$-1<\cos x<1$

$-2\pi<2\pi\cos x<2\pi$이므로 방정식 ㉠의 근은

$2\pi\cos x=-\pi$ 또는 $2\pi\cos x=0$ 또는 $2\pi\cos x=\pi$

즉, $\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

이때 $n\pi<x<(n+1)\pi$에서 세 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$의 근은 각각 하나씩 존재하고,

방정식 $\cos x=0$의 근은 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

두 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{1}{2}$의 근을 각각 α, β라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

$\alpha+\beta=2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

$n\pi<x<(n+1)\pi$에서 방정식 $(f \circ g)(x)=0$의 모든 실근은 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, α, β이고, 그 합이 $\frac{51}{2}\pi$이므로

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\alpha+\beta&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\\&=3\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{51}{2}\pi\end{aligned}$$

따라서 $n=8$

답 8

12 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2+(2\sin\theta)x-\cos^2\theta+2\sin\theta\geq 0$

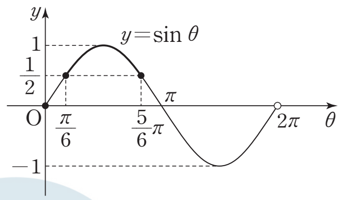
이 성립하려면 이차방정식

$x^2+(2\sin\theta)x-\cos^2\theta+2\sin\theta=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\leq 0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\sin^2\theta-(-\cos^2\theta+2\sin\theta)\\&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\\&=1-2\sin\theta\leq 0\end{aligned}$$

$\sin\theta\geq\frac{1}{2}$

$0\leq\theta<2\pi$이므로 $\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$3(\beta-\alpha)=3\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=2\pi$

답 ②

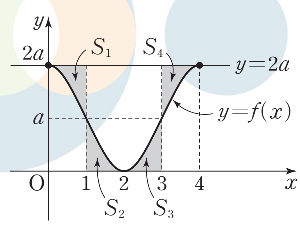
Level 3 실력 완성

본문 51쪽

1 ⑤　　2 ③　　3 7　　4 ⑤

1 $a>0$이므로 함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi}{2}x+a$는 $x=0$ 또는 $x=4$일 때 최댓값 $f(0)=f(4)=2a$를 갖고, $x=2$일 때 최솟값 $f(2)=0$을 갖는다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$ $(0\leq x\leq 1)$의 그래프와 두 직선 $x=1$, $y=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=3$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3, 함수 $y=f(x)$ $(3\leq x\leq 4)$의 그래프와 두 직선 $x=3$, $y=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_4라 하자.

두 점 $(0, 2a)$, $(2, 0)$은 점 $(1, a)$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=f(x)$ $(0\leq x\leq 2)$의 그래프도 점 $(1, a)$에 대하여 대칭이므로 $S_1=S_2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $S_1=S_4$, $S_2=S_3$

따라서 $S_1=S_2=S_3=S_4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이는 네 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2a)$, $(1, 2a)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같다. 이 넓이가 8이므로

$2\times 2a=8$, $a=2$

이때 $S_1=S_2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 네 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 2a)$, $(0,\ 2a)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로

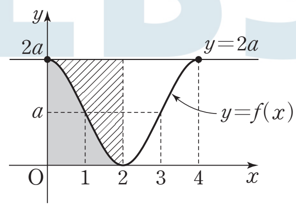
$S=1\times 2a=4$

따라서 $a+S=2+4=6$

답 ⑤

다른 풀이

S를 다음과 같이 구할 수도 있다.



넓이 S는 함수 $y=f(x)$ $(0\le x\le 2)$의 그래프와 두 직선 $x=2$, $y=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, 이것은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times 8=4$

2 $\sin^2\left(\frac{11}{10}\pi-x\right)=\sin^2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)\right\}$

$$=\cos^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)$$

$$=1-\sin^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)$$

이므로

$$f(x)=\sin^2\left(\frac{11}{10}\pi-x\right)+\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+k$$

$$=\left\{1-\sin^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)\right\}+\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+k$$

$$=-\sin^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+k+1$$

이때 $0\le x\le\frac{5}{2}\pi$에서 $-1\le\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)\le 1$

$\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)=t$ $(-1\le t\le 1)$이라 하면

$f(x)=-t^2+t+k+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$

이므로 함수 $f(x)$는 $t=\frac{1}{2}$, 즉 $\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖고, $t=-1$, 즉 $\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)=-1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$k-1=0$에서 $k=1$이고 함수 $f(x)$의 최댓값 M은

$M=k+\frac{5}{4}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

한편, $0\le x\le\frac{5}{2}\pi$에서 $-\frac{3}{5}\pi\le x-\frac{3}{5}\pi\le\frac{19}{10}\pi$이고 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$ $\left(0\le\alpha\le\frac{5}{2}\pi\right)$에서 최댓값을 가지므로

$\sin\left(\alpha-\frac{3}{5}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$\alpha-\frac{3}{5}\pi=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\alpha-\frac{3}{5}\pi=\frac{5}{6}\pi$

$\alpha=\frac{23}{30}\pi$ 또는 $\alpha=\frac{43}{30}\pi$

함수 $f(x)$가 $x=\beta$ $\left(0\le\beta\le\frac{5}{2}\pi\right)$에서 최솟값을 가지므로

$\sin\left(\beta-\frac{3}{5}\pi\right)=-1$

$\beta-\frac{3}{5}\pi=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\beta-\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{2}\pi$

$\beta=\frac{\pi}{10}$ 또는 $\beta=\frac{21}{10}\pi$

이때 $\frac{\alpha}{\beta}$의 값은 $\alpha=\frac{23}{30}\pi$, $\beta=\frac{21}{10}\pi$일 때 최소이므로

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{k}{M}\ge\frac{\frac{23}{30}\pi}{\frac{21}{10}\pi}+\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{23}{63}+\frac{4}{9}=\frac{17}{21}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{17}{21}$이다.

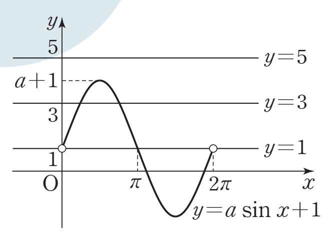
답 ③

3 a, b가 자연수이므로 $0<x<2\pi$에서

함수 $y=a\sin x+b$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $a+b$를 갖고, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 최솟값 $-a+b$를 갖는다.

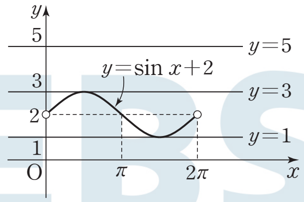
b의 값에 따라 $p+q+r=3$이 되도록 하는 10보다 작은 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 다음과 같다.

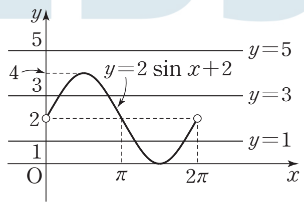
(i) $b=1$일 때



$p=1$, $q=2$, $r=0$, 즉 $a+b=a+1=4$이어야 하므로
$a=3$
즉, 순서쌍 (a, b)는 $(3, 1)$

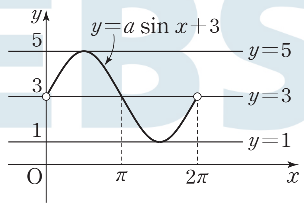
(ii) $b=2$일 때





$a=1$이면 $p=1$, $q=1$, $r=0$이고
$a\geq2$이면 $p=2$, $q=2$, $r\geq0$이므로
$p+q+r=3$을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

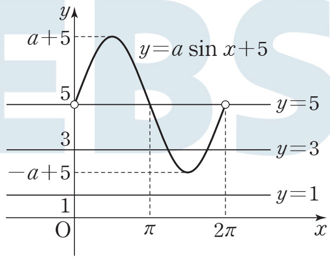
(iii) $b=3$일 때



$p=q=r=1$, 즉 $a+b=a+3=5$이어야 하므로 $a=2$
즉, 순서쌍 (a, b)는 $(2, 3)$

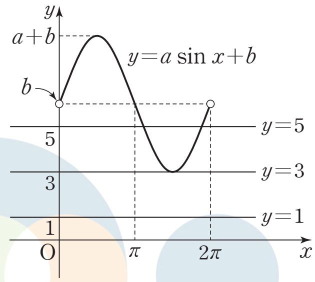
(iv) $b=4$일 때
(ii)의 $b=2$일 때와 마찬가지로 조건을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(v) $b=5$일 때



$p=0$, $q=2$, $r=1$, 즉 $-a+b=-a+5=2$이어야 하므로 $a=3$
즉, 순서쌍 (a, b)는 $(3, 5)$

(vi) $6\leq b<10$일 때

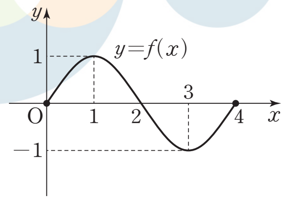


$p=0$, $q=1$, $r=2$, 즉 $-a+b=3$이어야 하므로
$a=b-3$이고 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(3, 6)$, $(4, 7)$, $(5, 8)$, $(6, 9)$

(i)~(vi)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b)는
$(3, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 7)$, $(5, 8)$, $(6, 9)$
이고 그 개수는 7이다.

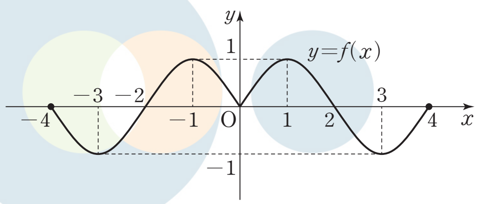
답 7

4 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $0\leq x\leq4$에서
함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



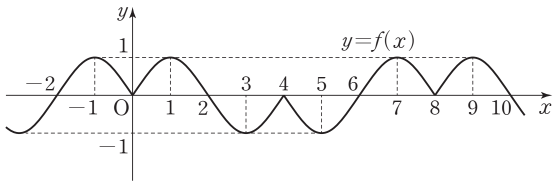
[그림 1]

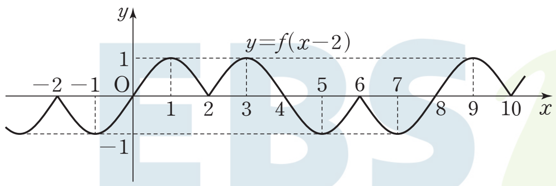
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$, 즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $-4\leq x\leq4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

모든 실수 x에 대하여 $f(x+8)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=f(x-2)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.





[그림 3]

한편, 방정식 $|f(x)+f(x-2)|=2$에서

$f(x)+f(x-2)=-2$ 또는 $f(x)+f(x-2)=2$

이때 모든 실수 x에 대하여 $-1\le f(x)\le 1$이므로

$f(x)=f(x-2)=-1$ 또는 $f(x)=f(x-2)=1$

이어야 한다.

(i) $f(x)=f(x-2)=-1$일 때

$0\le x\le 8$에서 $f(x)=f(x-2)=-1$, 즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-2)$의 그래프가 직선 $y=-1$과 동시에 만나도록 하는 x의 값은 5뿐이다.

두 함수 $f(x)$, $f(x-2)$의 주기는 모두 8이므로

$0<x<20$에서 $f(x)=f(x-2)=-1$을 만족시키는 x의 값은 5, 13이다.

(ii) $f(x)=f(x-2)=1$일 때

$0\le x\le 8$에서 $f(x)=f(x-2)=1$, 즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-2)$의 그래프가 직선 $y=1$과 동시에 만나도록 하는 x의 값은 1뿐이다.

두 함수 $f(x)$, $f(x-2)$의 주기는 모두 8이므로

$0<x<20$에서 $f(x)=f(x-2)=1$을 만족시키는 x의 값은 1, 9, 17이다.

(i), (ii)에 의하여 $0<x<20$일 때, 방정식 $|f(x)+f(x-2)|=2$의 모든 근은 1, 5, 9, 13, 17이므로 그 합은

$1+5+9+13+17=45$

답 ⑤

04 사인법칙과 코사인법칙

유제

본문 55~61쪽

1 6 **2** 5 **3** 19 **4** 2 **5** 11
6 ⑤ **7** ②

1 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 π이므로

$A+B+C=\pi$

$A+B=\pi-C$

$\sin(A+B)=\frac{1}{3}$에서

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C=\frac{1}{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

따라서

$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{4}{2\times\frac{1}{3}}=6$

답 6

2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R $(R>0)$이라 하면 조건 (나)에 의하여

$\pi R^2=9\pi$

$R^2=9$

$R>0$이므로 $R=3$

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 조건 (가)에 의하여

$a+b+c=10$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\times 3=6$

따라서

$\sin A=\frac{a}{6}$, $\sin B=\frac{b}{6}$, $\sin C=\frac{c}{6}$

이므로

$3(\sin A+\sin B+\sin C)=3\times\frac{a+b+c}{6}=3\times\frac{10}{6}=5$

답 5

3 직각이등변삼각형 ABM에서

$\overline{AB}=\overline{BM}=a\ (a>0)$이라 하면

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BM}^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

점 M은 선분 BC의 중점이므로

$\overline{CM}=\overline{BM}=a$

$\overline{BC}=\overline{BM}+\overline{CM}=a+a=2a$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$

삼각형 AMC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CM}^2=\overline{AC}^2+\overline{AM}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AM}\times\cos(\angle CAM)$

$a^2=(\sqrt{5}a)^2+(\sqrt{2}a)^2-2\times\sqrt{5}a\times\sqrt{2}a\times\cos(\angle CAM)$

$$\cos(\angle CAM)=\frac{(\sqrt{5}a)^2+(\sqrt{2}a)^2-a^2}{2\times\sqrt{5}a\times\sqrt{2}a}$$

$$=\frac{6a^2}{2\sqrt{10}a^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2(\angle CAM)=\frac{9}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=9$이므로

$p+q=10+9=19$

답 19

4 $\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+4\overline{CA}$에서

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-4\overline{CA}$ ...... ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$-4\overline{CA}=-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$\overline{AB}\cos A=2$

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+8\overline{CA}$에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-8\overline{CA}$ ...... ㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서

$-8\overline{CA}=-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$

$\overline{BC}\cos C=4$

따라서

$$\frac{\overline{BC}\cos C}{\overline{AB}\cos A}=\frac{4}{2}=2$$

답 2

5 $\angle B=\frac{2}{3}\pi$에서 $\cos B=-\frac{1}{2}$이고, 코사인법칙에 의하여

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$이므로

$$\cos B=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}$$

$$=\frac{n^2+(n+2)^2-(n+4)^2}{2\times n\times(n+2)}$$

$$=\frac{(n+2)(n-6)}{2n(n+2)}$$

$$=\frac{n-6}{2n}=-\frac{1}{2}$$

$n-6=-n$

$n=3$

따라서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=7$이므로 코사인법칙에 의하여

$$14\cos A=14\times\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$$

$$=14\times\frac{3^2+7^2-5^2}{2\times3\times7}$$

$$=11$$

답 11

참고

길이가 각각 n, $n+2$, $n+4$인 세 선분이 삼각형의 세 변이려면

$n+(n+2)>n+4$, 즉 $n>2$이어야 한다.

6 $\cos A\cos B\cos C=0$에서

$\cos A=0$ 또는 $\cos B=0$ 또는 $\cos C=0$

즉, 삼각형 ABC의 내각 중 하나는 직각이다.

$(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos C-\cos A)=0$에서

$\cos A=\cos B$ 또는 $\cos B=\cos C$ 또는 $\cos C=\cos A$

즉, 삼각형 ABC의 내각 중 적어도 두 각의 크기가 서로 같다.

이때 삼각형 ABC의 한 내각이 직각이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하고

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이므로 등식 $\sin A=k(\sin B-\sin C)$에서

$$\frac{a}{2R}=k\left(\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}\right)$$

$a=k(b-c)$ …… ㉠

한편, 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로 세 변의 길이의 비는

$a:b:c=1:1:\sqrt{2}$ 또는 $a:b:c=1:\sqrt{2}:1$

또는 $a:b:c=\sqrt{2}:1:1$

이때 등식 ㉠이 성립하도록 하는 양수 k가 존재하려면

$a:b:c=1:\sqrt{2}:1$, 즉 $a=c$, $b=\sqrt{2}a$이어야 하므로 등식 ㉠에서

$a=k(\sqrt{2}a-a)$

$k=\frac{a}{(\sqrt{2}-1)a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

답 ⑤

7 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin(\angle BAC)$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\angle BAC)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\angle BAC>\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$

$\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점이 P이므로

$\angle PAB=\angle PAC=\frac{1}{2}(\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 PAB, PAC의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AC}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times2\times\overline{AP}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\overline{AP}\times\frac{5\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서

$\overline{AP}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{5\sqrt{3}}=\frac{6}{5}$

답 ②

Level 1 기초 연습

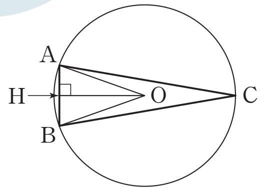
본문 62~63쪽

1 ③	2 ②	3 ②	4 ④	5 ④
6 ③	7 ③	8 ①		

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{2}{2\times\frac{1}{3}}=3$



외접원의 중심 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\times2=1$

$\overline{OA}=3$이므로 직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$

$=\sqrt{3^2-1^2}$

$=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

답 ③

2 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$

이므로

$\sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

점 M이 선분 BC의 중점이므로

$\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times2=1$

직각삼각형 ABM에서

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BM}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$

삼각형 AMC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AM}}{\sin C}=2R$

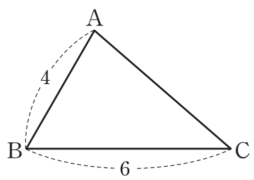
$R=\dfrac{\overline{AM}}{2\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3}{2}$

따라서 삼각형 AMC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}\pi$

답 ②

3



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

이때 $\overline{CA}=x$ $(x>0)$이라 하면

$6^2=4^2+x^2-2\times4\times x\times\dfrac{1}{8}$

$x^2-x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0$

$x>0$이므로 $x=5$, 즉 $\overline{CA}=5$

따라서

$\cos B=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}$

$=\dfrac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}$

$=\dfrac{9}{16}$

답 ②

4 점 D는 길이가 6인 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\dfrac{2}{3}\overline{BC}=\dfrac{2}{3}\times6=4$

$\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD}=6-4=2$

점 M이 선분 AC의 중점이므로

$\overline{AM}=\overline{CM}=3$

$\angle ABD=\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=6^2+4^2-2\times6\times4\times\dfrac{1}{2}=28$

$\overline{AD}=2\sqrt{7}$

또한 $\angle DCM=\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 MDC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DM}^2=\overline{CD}^2+\overline{CM}^2-2\times\overline{CD}\times\overline{CM}\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\dfrac{1}{2}=7$

$\overline{DM}=\sqrt{7}$

따라서

$\overline{AD}\times\overline{DM}=2\sqrt{7}\times\sqrt{7}=14$

답 ④

참고

선분 AD의 길이를 구한 후, 선분 DM의 길이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

두 삼각형 ABD, MCD에서

$\overline{AB}:\overline{MC}=\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$

$\angle ABD=\angle MCD=\dfrac{\pi}{3}$

이므로 두 삼각형 ABD, MCD는 닮음비가 2 : 1인 서로 닮은 도형이다.

따라서

$\overline{DM}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{7}=\sqrt{7}$

5 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^2+1=3$에서 $x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

즉, $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$이다.

$\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{3}$, $\overline{AB}=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos(\angle AOB)$

$\cos(\angle AOB)=\dfrac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{OB}}$

$=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=-\dfrac{1}{3}$

따라서

$$\sin(\angle AOB)=\sqrt{1-\cos^2(\angle AOB)}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

답 ④

다른 풀이

원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^2+1=3$에서

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

즉, $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{2}, 1)$이다.

$\overline{AB}=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$이므로 삼각형 AOB의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{3}$이므로

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin(\angle AOB)$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sin(\angle AOB)$$
$$=\frac{3}{2}\sin(\angle AOB) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{3}{2}\sin(\angle AOB)=\sqrt{2}$$

따라서

$$\sin(\angle AOB)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

6 삼각형 ABD에서 $\angle ADB=\theta$라 하면 사각형 ABCD가 사다리꼴이므로 $\angle DBC=\theta$이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{BD}}$$
$$=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\times 2\times 4}=\frac{11}{16}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\cos\theta$$
$$=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{11}{16}=10$$

따라서 $\overline{CD}=\sqrt{10}$

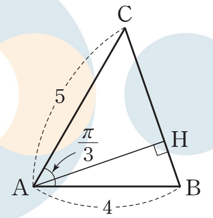
답 ③

7 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{3}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin A=5\sqrt{3}$$

$$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

삼각형 ABC가 예각삼각형이므로 $\angle A=\frac{\pi}{3}$



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{2}$$
$$=21$$

$\overline{BC}=\sqrt{21}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{3}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{21}\times\overline{AH}=5\sqrt{3}$$

$$\overline{AH}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{21}}=\frac{10\sqrt{7}}{7}$$

따라서

$$\overline{AH}^2=\left(\frac{10\sqrt{7}}{7}\right)^2=\frac{100}{7}$$

답 ③

8 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

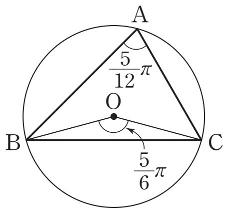
$$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$$

$$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{3}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\angle A=\pi-(\angle B+\angle C)$$
$$=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{5}{12}\pi$$

점 O가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 원주각과 중심각의 관계에 의하여

$$\angle BOC=2\times(\angle A)=2\times\frac{5}{12}\pi=\frac{5}{6}\pi$$



따라서 삼각형 OBC의 넓이를 S라 하면

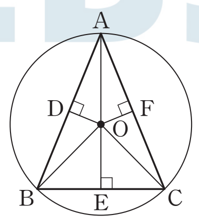
$$S=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\sin\frac{5}{6}\pi$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

답 ①

Level
2 기본 연습
본문 64~66쪽

1 ③	2 ②	3 ③	4 ⑤	5 ②
6 ③	7 ④	8 ③	9 ③	

1



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=3$

세 점 D, E, F는 삼각형 ABC의 외접원의 중심 O에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발이므로

$\overline{AB}=2\overline{AD}$, $\overline{BC}=2\overline{BE}$, $\overline{AC}=2\overline{AF}$

이때 $\overline{OD}:\overline{OF}=1:1$이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고, 세 점 A, O, E는 한 직선 위에 있다.

$\overline{OD}:\overline{OE}:\overline{OF}=1:2:1$이므로

$\overline{OD}=\overline{OF}=h$, $\overline{OE}=2h\ (h>0)$이라 하면

직각삼각형 OAD에서

$\overline{AD}^2=\overline{OA}^2-\overline{OD}^2=9-h^2$이므로

$\overline{AB}^2=(2\overline{AD})^2=4(9-h^2)$

직각삼각형 OBE에서

$\overline{BE}^2=\overline{OB}^2-\overline{OE}^2=9-4h^2$

이때 $\overline{AE}=\overline{OA}+\overline{OE}=3+2h$이므로 직각삼각형 ABE에서

$\overline{AB}^2=\overline{BE}^2+\overline{AE}^2$

$4(9-h^2)=(9-4h^2)+(3+2h)^2$

$2h^2+6h-9=0$

$h=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}}{2}$

$h>0$이므로

$h=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$

한편,

$$\overline{BC}^2=(2\overline{BE})^2$$
$$=4(9-4h^2)$$
$$=4\left\{9-4\times\left(\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$$
$$=36(2\sqrt{3}-3)$$

이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times3$

$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{6}$

따라서

$\sin^2 A=\dfrac{\overline{BC}^2}{36}=2\sqrt{3}-3$

답 ③

2 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$

이므로

$\overline{BC}=2R\sin A$

$\overline{CA}=2R\sin B$

$$\frac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{R^2}=\frac{2R\sin A\times2R\sin B}{R^2}$$
$$=4\sin A\sin B$$

조건 (나)의 $\sin A+\sin B=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B=\dfrac{8}{5}$ …… ㉠

이때 조건 (가)의 $\sin A=\cos B$를 ㉠에 대입하면

$\cos^2 B+\sin^2 B+2\sin A\sin B=\dfrac{8}{5}$

$1+2\sin A\sin B=\dfrac{8}{5}$

$\sin A \sin B=\frac{3}{10}$

따라서

$\frac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{R^2}=4\sin A\sin B$

$=4\times\frac{3}{10}$

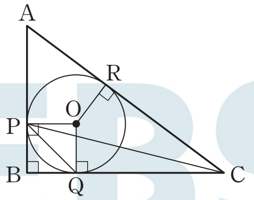
$=\frac{6}{5}$

답 ②

3 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$에서 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

직각삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하고, 직각삼각형 ABC의 내접원이 선분 AC와 만나는 점을 R이라 하면

$\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=r$



직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{r}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

이므로

$\frac{r}{2}\times(3+4+5)=\frac{1}{2}\times3\times4$

$r=1$

이때 사각형 OPBQ는 정사각형이므로

$\overline{PB}=\overline{BQ}=r=1$

직각삼각형 PBQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BQ}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

이고 $\angle BQP=\frac{\pi}{4}$

직각삼각형 PBC에서

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

또한 $\overline{CQ}=\overline{BC}-\overline{BQ}=4-1=3$

$\sin(\angle QCP)=\sin(\angle BCP)=\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

삼각형 PQC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CQ}}{\sin(\angle CPQ)}=\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QCP)}$

$\frac{3}{\sin(\angle CPQ)}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin(\angle CPQ)=\frac{3}{\sqrt{34}}$

이므로

$\sin(\angle CPQ)\times\sin(\angle QCP)=\frac{3}{\sqrt{34}}\times\frac{1}{\sqrt{17}}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{34}$

답 ③

4 조건 (가)의 $\sin A=\sin C$를 만족시키려면 $A=C$ 또는 $A=\pi-C$이어야 한다. 이때 $A=\pi-C$, 즉 $A+C=\pi$이면 $B=0$이 되어 삼각형 ABC가 될 수 없다.

따라서 $A=C$

$A=C$를 조건 (나)의 $\cos A+2\cos B=3\cos C$에 대입하면

$\cos A+2\cos B=3\cos A$

$\cos A=\cos B$

$A=B$

따라서 세 내각의 크기가 모두 같으므로 삼각형 ABC는 정삼각형이고, $A=B=C=\frac{\pi}{3}$이다.

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a $(a>0)$이라 하면 이 삼각형의 넓이가 12이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=12$

$a^2=16\sqrt{3}$

정삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=2R$

$R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 S라 하면

$S=\pi R^2$

$=\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$

$=\frac{\pi}{3}a^2$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

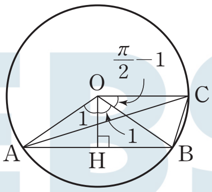
답 ⑤

5 주어진 원의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=2$

이때 삼각형 OAB에서 $\angle AOB=\theta$라 하면 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이가 4이므로

$2\theta=4$, $\theta=2$



삼각형 OAB가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 AB를 수직이등분하고

$\angle AOH=\angle BOH=\frac{1}{2}\times(\angle AOB)=1$

직각삼각형 OAH에서

$\sin 1=\frac{\overline{AH}}{\overline{OA}}$

$\overline{AH}=\overline{OA}\sin 1=2\sin 1$

$\overline{AB}=2\overline{AH}=4\sin 1$

한편, 두 직선 AB, OC가 평행하고 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로

$\angle AOC=\angle AOH+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+1$

$\angle BOC=\frac{\pi}{2}-\angle BOH=\frac{\pi}{2}-1$

삼각형 OAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OC}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\\&=2^2+2^2+2\times2\times2\times\sin 1\\&=8(1+\sin 1)\end{aligned}$$

삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의하여

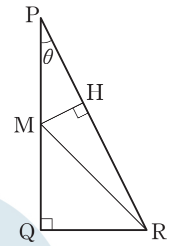
$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\\&=2^2+2^2-2\times2\times2\times\sin 1\\&=8(1-\sin 1)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2\times\overline{BC}^2}&=\frac{(4\sin 1)^2}{8(1+\sin 1)\times8(1-\sin 1)}\\&=\frac{\sin^2 1}{4(1-\sin^2 1)}\\&=\frac{\sin^2 1}{4\cos^2 1}\\&=\frac{1}{4}\tan^2 1\end{aligned}$$

답 ②

6



직각삼각형 PQR에서 $\overline{PQ}=2a\,(a>0)$이라 하면 점 M이 선분 PQ의 중점이므로

$\overline{PM}=\overline{MQ}=\overline{QR}=a$

$$\begin{aligned}\overline{PR}&=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2}\\&=\sqrt{(2a)^2+a^2}\\&=\sqrt{5}a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{MR}&=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{QR}^2}\\&=\sqrt{a^2+a^2}\\&=\sqrt{2}a\end{aligned}$$

삼각형 PQR에서 $\angle QPR=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 PMR의 외접원의 넓이가 50π이므로 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$이다.

삼각형 PMR에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{MR}}{\sin\theta}=10\sqrt{2}$

$\overline{MR}=10\sqrt{2}\sin\theta$

$\sqrt{2}a=10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$

$a=2\sqrt{5}$

따라서

$\overline{MH}=\overline{PM}\sin\theta=2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=2$

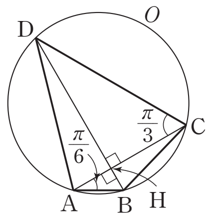
답 ③

7 원주각의 성질에 의하여 $\angle ABD=\angle ACD=\frac{\pi}{3}$

두 선분 AC, BD가 만나는 점을 H라 하면 삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\angle AHB&=\pi-(\angle CAB+\angle ABD)\\&=\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

이므로 두 직선 AC, BD는 수직으로 만난다.



$\overline{AB}=2$이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{6}$

$=2\times\frac{1}{2}$

$=1$

$\overline{AH}=\overline{AB}\cos\frac{\pi}{6}$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}$

$\overline{CH}=a\,(a>0)$이라 하면

$\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{CH}=\sqrt{3}+a$

이고 직각삼각형 CDH에서

$\overline{CD}=\dfrac{\overline{CH}}{\cos\frac{\pi}{3}}=2a$

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면 S는 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이의 합과 같으므로

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times2\times(\sqrt{3}+a)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+a)\times2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{4a+(a^2+1)\sqrt{3}}{2}$

이때 $S=\dfrac{21\sqrt{3}}{2}$이므로

$\dfrac{4a+(a^2+1)\sqrt{3}}{2}=\dfrac{21\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3}a^2+4a-20\sqrt{3}=0$

$(\sqrt{3}a+10)(a-2\sqrt{3})=0$

$\sqrt{3}a+10>0$이므로

$a=2\sqrt{3}$

즉, $\overline{CH}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 BCH에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{13}$

원 O의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle CAB)}=2R$

$R=\dfrac{\overline{BC}}{2\sin(\angle CAB)}$

$=\dfrac{\sqrt{13}}{2\sin\frac{\pi}{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{13}}{2\times\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{13}$

따라서 원 O의 넓이는

$\pi\times R^2=\pi\times(\sqrt{13})^2=13\pi$

답 ④

다른 풀이

$\overline{BH}=1$, $\overline{AH}=\sqrt{3}$을 구한 후 $\dfrac{4a+(a^2+1)\sqrt{3}}{2}=\dfrac{21\sqrt{3}}{2}$을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

$\overline{CH}=a\ (a>0)$이라 하면 직각삼각형 CDH에서

$\overline{DH}=\overline{CH}\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}a$이고

$\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{CH}=\sqrt{3}+a$

$\overline{BD}=\overline{BH}+\overline{DH}=1+\sqrt{3}a$

한편, $\sin(\angle AHB)=\sin\frac{\pi}{2}=1$이고 사각형 ABCD의 넓이가 $\dfrac{21\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin(\angle AHB)$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+a)\times(1+\sqrt{3}a)\times1$

$=\dfrac{4a+(a^2+1)\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{21\sqrt{3}}{2}$

8 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{5}$

$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{4}{5}$

선분 AB를 $1:m$으로 내분하는 점이 P이므로

$\overline{AP}=\dfrac{\overline{AB}}{m+1}=\dfrac{3}{m+1}$

선분 CA를 $1:m$으로 내분하는 점이 Q이므로

$\overline{AQ}=\frac{m\overline{AC}}{m+1}=\frac{5m}{m+1}$

$\overline{PQ}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$이므로 삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\cos A$

$$\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{m+1}\right)^2+\left(\frac{5m}{m+1}\right)^2-2\times\frac{3}{m+1}\times\frac{5m}{m+1}\times\frac{3}{5}$$

$\frac{45}{4}=\frac{25m^2-18m+9}{(m+1)^2}$

$45(m+1)^2=4(25m^2-18m+9)$

$55m^2-162m-9=0$

$(m-3)(55m+3)=0$

$55m+3>0$이므로

$m=3$

따라서 $\overline{AP}=\frac{3}{4}$, $\overline{AQ}=\frac{15}{4}$이므로 삼각형 APQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{15}{4}\times\frac{4}{5}$

$=\frac{9}{8}$

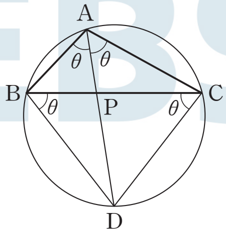
답 ③

9 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$

$=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}$

$=-\frac{1}{4}$



$\angle BAD=\angle DAC=\theta$라 하면 원주각의 성질에 의하여 $\angle DBC=\angle DCB=\theta$이므로 삼각형 BDC는 $\overline{BD}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이다.

$\cos(\angle BDC)=\cos(\pi-A)=-\cos A=\frac{1}{4}$이므로

$\overline{BD}=\overline{CD}=a\ (a>0)$이라 하면 삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle BDC)$

$4^2=a^2+a^2-2\times a\times a\times\frac{1}{4}$

$a^2=\frac{32}{3}$

$a>0$이므로

$a=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

즉, $\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

한편,

$\sin(\angle BDC)=\sqrt{1-\cos^2(\angle BDC)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 삼각형 BDC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle BDC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\frac{4\sqrt{15}}{3}$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 67쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ④

1 ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$

$=(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=4$

이므로

$\overline{AB}=2$ (참)

ㄴ. $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$$

$$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{5}$$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$ (참)

ㄷ. 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$이므로

$$\sin B=\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}\sin C$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

두 삼각형 ABP, ACP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle PAB)}=\frac{\overline{AP}}{\sin B},$$

$$\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\overline{AP}}{\sin C}$$

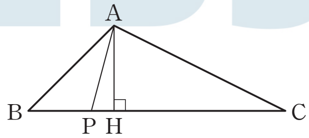
이므로

$$\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle PAB)\times\sin(\angle CAP)}$$

$$=\frac{\overline{AP}}{\sin B}\times\frac{\overline{AP}}{\sin C}$$

$$=\frac{\overline{AP}^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$=\sqrt{10}\,\overline{AP}^2$$



이때 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH}=\overline{AB}\sin B=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

따라서

$$\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle PAB)\times\sin(\angle CAP)}=\sqrt{10}\,\overline{AP}^2$$

$$\geq\sqrt{10}\,\overline{AH}^2$$

$$=\sqrt{10}\times(\sqrt{2})^2$$

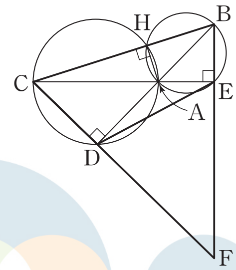
$$=2\sqrt{10}$$

이므로 $\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle PAB)\times\sin(\angle CAP)}$의 값은 점 P가 점 H와 일치할 때 최솟값 $2\sqrt{10}$을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle ADC=\angle AHC=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 ACD의 외접원은 선분 AC를 지름으로 하고 점 H를 지난다.

또한 $\angle AEB=\angle AHB=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 AEB의 외접원은 선분 AB를 지름으로 하고 점 H를 지난다. 따라서 삼각형 ACD의 외접원과 삼각형 AEB의 외접원이 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 $\overline{AH}$이므로

$$\overline{AH}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}$$

$$=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 ACH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}$$

$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

그러므로

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}$

$=\frac{4\sqrt{5}}{5}+\frac{6\sqrt{5}}{5}$

$=2\sqrt{5}$

이때 두 삼각형 ABH, CBD가 서로 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{AH}=\overline{CB}:\overline{CD}$

즉, $2:\frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}:\overline{CD}$

$\overline{CD}=2$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}$

$=2$

따라서 삼각형 ACD는 $\overline{AD}=\overline{CD}$인 직각이등변삼각형이므로 $\angle ACD=\angle DAC=\frac{\pi}{4}$이다.

이때 $\angle BAE=\angle DAC=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 AEB도 직각이등변삼각형이고

$\overline{AE}=\overline{BE}=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

한편, $\angle CDB=\angle CEB=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 BCD의 외접원은 점 E를 지나고, 원주각의 성질에 의하여

$\angle CBD=\angle CED$, $\angle BCE=\angle BDE$

두 삼각형 ABC, AED가 서로 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{DE}$

즉, $2:2\sqrt{5}=\sqrt{2}:\overline{DE}$

$\overline{DE}=\sqrt{10}$

또한 삼각형 CFE에서 $\angle ECF=\frac{\pi}{4}$, $\angle CEF=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle DFE=\frac{\pi}{4}$

따라서 삼각형 DFE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{DE}}{\sin(\angle DFE)}=2R$

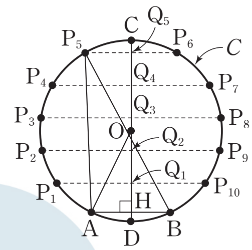
$R=\frac{\sqrt{10}}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 외접원의 넓이는

$\pi\times R^2=5\pi$

답 ③

3



원 C의 중심을 O라 하고 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 AB를 수직이등분하므로

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 2=1$

$\overline{OA}=3$이므로 직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$

$=\sqrt{3^2-1^2}$

$=2\sqrt{2}$

원 C와 직선 OH가 만나는 두 점을 C, D $(\overline{DH}<\overline{CH})$라 하면

$\overline{CH}=\overline{OC}+\overline{OH}=3+2\sqrt{2}$

$\overline{DH}=\overline{OD}-\overline{OH}=3-2\sqrt{2}$

이때 $2<2\sqrt{2}<3$이므로

$5<\overline{CH}<6$, $0<\overline{DH}<1$ …… ㉠

한편, 원 C 위의 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H_1이라 하고 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH_1}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times\overline{PH_1}$

$=\overline{PH_1}$

이므로 삼각형 PAB의 넓이가 자연수이려면 $\overline{PH_1}$, 즉 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 자연수이어야 한다.

㉠에 의하여 선분 CH 위에 $\overline{HQ_1}=1$, $\overline{HQ_2}=2$, $\overline{HQ_3}=3$, $\overline{HQ_4}=4$, $\overline{HQ_5}=5$인 다섯 개의 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5를 잡고, 선분 CD에 수직이며 점 Q_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$를 지나는 직선과 원 C의 교점을 고려하면 열 개의 점 P_1, P_2, P_3, …, P_{10}이 존재한다. 이때 두 점 P_1과 P_{10}, 두 점 P_2와 P_9, 두 점 P_3과 P_8, 두 점 P_4와 P_7, 두 점 P_5와 P_6은 모두 직선 CH에 대하여 대칭이고, 두 점 A, B도 직선 CH에 대하여 대칭이므로 $\overline{AP_6}=\overline{BP_5}$이다.

원 C의 반지름의 길이가 3이므로 삼각형 P_5AB에서 $\angle AP_5B=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2\times 3$

$\sin\theta=\dfrac{\overline{AB}}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

삼각형 P_5AB는 밑변의 길이가 $\overline{AB}=2$, 높이가 5이므로 삼각형 P_5AB의 넓이는 5이다.

따라서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AP_5}\times\overline{BP_5}\times\sin\theta=5$

$\overline{AP_5}\times\overline{BP_5}=\dfrac{10}{\sin\theta}=\dfrac{10}{\frac{1}{3}}=30$

또한

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로 삼각형 P_5AB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AP_5}^2+\overline{BP_5}^2-2\times\overline{AP_5}\times\overline{BP_5}\times\cos\theta$

$$\begin{aligned}\overline{AP_5}^2+\overline{BP_5}^2&=\overline{AB}^2+2\times(\overline{AP_5}\times\overline{BP_5})\times\cos\theta\\&=2^2+2\times30\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=4+40\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}(\overline{AP_5}+\overline{AP_6})^2&=(\overline{AP_5}+\overline{BP_5})^2\\&=\overline{AP_5}^2+\overline{BP_5}^2+2\times\overline{AP_5}\times\overline{BP_5}\\&=(4+40\sqrt{2})+2\times30\\&=64+40\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ④

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 71~77쪽

1 ④	2 84	3 152	4 ③	5 ③
6 ⑤	7 384	8 242		

1 $a_3+a_6=3$ …… ㉠

$a_6+a_9=17$ …… ㉡

㉡에서 ㉠을 빼면

$a_9-a_3=14$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_9-a_3=6d=14$

이므로

$d=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$

㉠에서

$$\begin{aligned}a_3+a_6&=(a_1+2d)+(a_1+5d)\\&=2a_1+7d\\&=2a_1+\frac{49}{3}\\&=3\end{aligned}$$

이므로

$2a_1=3-\dfrac{49}{3}=-\dfrac{40}{3}$

$a_1=-\dfrac{20}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}a_n&=-\frac{20}{3}+(n-1)\times\frac{7}{3}\\&=\frac{7n-27}{3}\end{aligned}$$

이고,

$\dfrac{7n-27}{3}>100$

에서

$7n>327$

즉, $n>\dfrac{327}{7}=46+\dfrac{5}{7}$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 47이다.

답 ④

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -3이고, 모든 항이 정수이므로

$a_n=-3n+k$ (k는 정수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여

$a_{19}\geq 0$, $a_{20}<0$

이므로

$-3\times 19+k\geq 0$, $-3\times 20+k<0$

에서

$57\leq k<60$

k는 정수이므로

$k=57$ 또는 $k=58$ 또는 $k=59$

이때

$a_{10}=-30+k$

이므로

$a_{10}=27$ 또는 $a_{10}=28$ 또는 $a_{10}=29$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_{10}의 값의 합은

$27+28+29=84$

답 84

3 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$S_{19}=\dfrac{19(a_1+a_{19})}{2}$

한편, a_1과 a_{19}의 등차중항이 a_{10}이므로

$a_1+a_{19}=2a_{10}=2\times 8=16$

따라서

$S_{19}=\dfrac{19\times 16}{2}=152$

답 152

4 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=105$에서

$$\frac{6(a_5+a_{10})}{2}=3(a_5+a_{10})$$
$$=105$$

즉, $a_5+a_{10}=35$ …… ㉠

$a_1=-2$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 ㉠에서

$(-2+4d)+(-2+9d)=35$

$13d=39$

$d=3$

따라서

$a_{10}-a_5=5d=5\times 3=15$

답 ③

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$$\frac{5a_2}{a_3+a_4}=\frac{5}{\dfrac{a_3}{a_2}+\dfrac{a_4}{a_2}}$$
$$=\frac{5}{r+r^2}$$
$$=16$$

이므로

$16r^2+16r-5=0$

$(4r-1)(4r+5)=0$

$r>0$이어야 하므로

$r=\dfrac{1}{4}$

따라서

$\dfrac{a_3}{a_5}=\dfrac{1}{r^2}=\left(\dfrac{1}{r}\right)^2=4^2=16$

답 ③

6 $a_n=3\times(\sqrt{3})^{n-1}$

$=3\times 3^{\frac{n-1}{2}}$

$=3^{\frac{n+1}{2}}$

이므로

$\log_3(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10})$

$=\log_3(3^1\times 3^{\frac{3}{2}}\times 3^2\times\cdots\times 3^{\frac{11}{2}})$

$=\log_3 3^1+\log_3 3^{\frac{3}{2}}+\log_3 3^2+\cdots+\log_3 3^{\frac{11}{2}}$

$=1+\dfrac{3}{2}+2+\cdots+\dfrac{11}{2}$

$=\dfrac{10\left(1+\dfrac{11}{2}\right)}{2}$

$=\dfrac{65}{2}$

답 ⑤

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$S_5-S_4=12$에서

$a_5=12$

$S_8-S_4=180$에서

$a_5+a_6+a_7+a_8=180$

이때 $r=1$이면

$a_5+a_6+a_7+a_8=4\times a_5=4\times 12=48$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $r\neq 1$이므로

$$a_5+a_6+a_7+a_8=\frac{a_5(r^4-1)}{r-1}$$
$$=\frac{12(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1}$$
$$=180$$

에서

$r^3+r^2+r-14=0$

$(r-2)(r^2+3r+7)=0$

r은 실수이므로

$r=2$

따라서

$a_{10}=a_5\times r^5=12\times 2^5=384$

답 384

8 $a_1=1$이고 공비가 음수이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}>0$, $a_{2n}<0$이다.

그러므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r<0)$이라 하면

$$S_8+T_8=2a_1+2a_3+2a_5+2a_7$$
$$=2(1+r^2+r^4+r^6)$$
$$=80$$

에서

$r^6+r^4+r^2-39=0$

$r^2=t$라 하면

$t^3+t^2+t-39=0$

$(t-3)(t^2+4t+13)=0$

$t^2+4t+13>0$이므로

$t=3$

즉, $r^2=3$

$r<0$이므로

$r=-\sqrt{3}$

따라서

$$S_{10}=\frac{1-(-\sqrt{3})^{10}}{1-(-\sqrt{3})}$$
$$=-\frac{242}{1+\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{242(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$$
$$=121-121\sqrt{3}$$

이므로

$p-q=121-(-121)=242$

답 242

Level **1** **기초 연습** 본문 78~80쪽

1 ④	2 ②	3 ④	4 ⑤	5 ①
6 ④	7 ②	8 83	9 ③	10 ④
11 ①	12 ②			

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_6-a_3=3d$$
$$=7-(-2)$$
$$=9$$

이므로

$d=3$

따라서

$a_{10}=a_3+7d=-2+7\times 3=19$

답 ④

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$$a_1+a_3=a_1+(a_1+2d)$$
$$=2a_1+2d$$
$$=2$$

이므로

$a_1+d=1$ ······ ㉠

$$a_5+a_7=(a_1+4d)+(a_1+6d)$$
$$=2a_1+10d$$
$$=34$$

이므로

$a_1+5d=17$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1=-3$, $d=4$

이므로

$$a_n=-3+(n-1)\times 4$$
$$=4n-7$$

따라서

$a_{10}=4\times 10-7=33$

답 ②

3 $2a-1$이 a와 a^2-6의 등차중항이므로

$2(2a-1)=a+(a^2-6)$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$a>0$이므로

$a=4$

답 ④

4 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_7-a_5=2d=4$에서

$d=2$

이때 $a_3=a_1+2d=a_1+4=7$이므로

$a_1=3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{10(2\times3+9\times2)}{2}=120$

답 ⑤

5 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=58$이므로

$S_{10}=\dfrac{10(2\times58+9d)}{2}$

$=5(116+9d)$

$S_{20}=\dfrac{20(2\times58+19d)}{2}$

$=10(116+19d)$

$S_{10}=S_{20}$이므로

$5(116+9d)=10(116+19d)$

$116+9d=232+38d$

$29d=-116$

$d=-4$

따라서

$a_{10}=58+9\times(-4)=22$

답 ①

6 $a_1=S_1=3-2+1=2$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(3\times10^2-2\times10+1)-(3\times9^2-2\times9+1)$

$=55$

따라서

$a_1+a_{10}=2+55=57$

답 ④

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $a_1=2$이므로

$3a_1-a_2+3a_3=a_4$에서

$6-2r+6r^2=2r^3$

$r^3-3r^2+r-3=0$

$(r-3)(r^2+1)=0$

r은 실수이므로 $r=3$

따라서

$a_2+a_3=2\times3+2\times3^2=6+18=24$

답 ②

다른 풀이

$3a_1-a_2+3a_3=a_4$에서

$3(a_1+a_3)=a_2+a_4$ …… ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_2=a_1r$, $a_4=a_3r$

이므로

$a_2+a_4=r(a_1+a_3)$

즉, ㉠에서

$3(a_1+a_3)=r(a_1+a_3)$

$a_1+a_3=a_1+a_1r^2=2(1+r^2)\neq0$

이므로

$r=3$

따라서

$a_2+a_3=3a_1+9a_1=12a_1=12\times2=24$

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\neq0)$이라 하면

$a_n=a_1\times r^{n-1}$

이므로

$a_n+a_{n+1}=a_1\times r^{n-1}+a_1\times r^n$

$=a_1r^{n-1}(1+r)=2\times3^{n-1}$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1(1+r)=2$ …… ㉡

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_1r(1+r)=6$ …… ㉢

㉢÷㉡을 하면

$r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$4a_1=2$

$a_1=\dfrac{1}{2}$

따라서

$a_5=\dfrac{1}{2}\times3^4=\dfrac{81}{2}$

이므로

$p+q=2+81=83$

답 83

9 $a+3$이 $a-1$과 $4a+6$의 등비중항이므로

$(a+3)^2=(a-1)(4a+6)$

$3a^2-4a-15=0$

$(3a+5)(a-3)=0$

$a>0$이므로

$a=3$

답 ③

10 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $r\neq1$이므로

$$S_5=\frac{a_1(r^5-1)}{r-1}$$

$$S_{10}=\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{a_1(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}$$

이때 $\frac{S_{10}}{S_5}=r^5+1$이므로

$r^5+1=10$에서 $r^5=9$

따라서

$$\frac{a_{10}}{a_5}=\frac{a_5\times r^5}{a_5}=r^5=9$$

답 ④

참고

$a_1=0$이면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이므로 $\frac{S_{10}}{S_5}=10$이 될 수 없다. 즉, $a_1\neq0$

이때 $r=1$이면 $\frac{S_{10}}{S_5}=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $r\neq1$

또 $r=0$이면 $\frac{S_{10}}{S_5}=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $r\neq0$이므로 $a_5\neq0$

11 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 주어진 조건에 의하여 $r\neq1$이므로

$$S_6=\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_{12}=\frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}=\frac{a_1(r^6-1)(r^6+1)}{r-1}=32 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$r^6+1=8$

$r^6=7$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{a_1}{r-1}\times6=4$이므로

$$\frac{a_1}{r-1}=\frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}S_{18}&=\frac{a_1(r^{18}-1)}{r-1}\\&=\frac{a_1}{r-1}\times\{(r^6)^3-1\}\\&=\frac{2}{3}\times(7^3-1)\\&=228\end{aligned}$$

답 ①

12 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\frac{a_{10}}{a_4}=r^6=\frac{\frac{2}{3}}{6}=\frac{1}{9}$$

이고 $r>0$이므로

$$r^3=\frac{1}{3}$$

이때 $a_4=a_1r^3=\frac{1}{3}a_1=6$이므로

$a_1=18$

한편, $a_n=18\times r^{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}b_n&=a_{3n-2}\\&=18\times r^{3n-3}\\&=18\times(r^3)^{n-1}\\&=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1=18$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$$\begin{aligned}\frac{18\left(1-\frac{1}{3^5}\right)}{1-\frac{1}{3}}&=27\left(1-\frac{1}{3^5}\right)\\&=27-\frac{1}{9}\\&=\frac{242}{9}\end{aligned}$$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 81~83쪽

1 ③	2 ③	3 ⑤	4 30	5 ③
6 ③	7 ②	8 ①	9 12	10 ③
11 ③	12 ④			

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq0)$이라 하자.

$d>0$이면 $a_1=20<a_{11}<a_{21}$에서

$|a_{11}|<|a_{21}|$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

즉, $d<0$이고 $a_1=20>a_{11}>a_{21}$

이때 $|a_{11}|=|a_{21}|$이 성립하려면

$a_{11}>0$, $a_{21}<0$이어야 한다.

즉, $a_{11}=-a_{21}$이므로

$a_{11}+a_{21}=0$

이때 $a_1=20$이므로

$(20+10d)+(20+20d)=40+30d=0$

즉, $d=-\frac{4}{3}$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=20+(n-1)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{-4n+64}{3}$

따라서 $a_m=\frac{-4m+64}{3}=-16$에서

$m=28$

답 ③

2 $x^3-(a+1)x^2+(a-2)x+2a=0$에서

$(x+1)(x-2)(x-a)=0$

이므로 주어진 삼차방정식의 세 근은 -1, 2, a이다.

$a=-1$ 또는 $a=2$이면 조건을 만족시킬 수 없으므로

$a\neq-1$, $a\neq2$

(i) $a<-1$인 경우

-1이 a와 2의 등차중항이므로

$-2=a+2$

$a=-4$

(ii) $-1<a<2$인 경우

a가 -1과 2의 등차중항이므로

$2a=-1+2$

$a=\frac{1}{2}$

(iii) $a>2$인 경우

2가 -1과 a의 등차중항이므로

$4=-1+a$

$a=5$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$-4+\frac{1}{2}+5=\frac{3}{2}$

답 ③

3 ㄱ. [반례] $a_n=-n+2$이면

$a_1+a_2=1+0=1$, $a_3=-1$

이므로 $a_1+a_2>a_3$이지만

$a_4+a_5=(-2)+(-3)=-5$, $a_6=-4$

이므로 $a_4+a_5<a_6$이다. (거짓)

ㄴ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_1\neq a_2$이므로

$d\neq0$

즉,

$a_3a_5+a_4a_6-a_3a_6-a_4a_5$

$=a_3(a_5-a_6)-a_4(a_5-a_6)$

$=(a_3-a_4)(a_5-a_6)$

$=d^2\neq0$

이므로

$a_3a_5+a_4a_6\neq a_3a_6+a_4a_5$ (참)

ㄷ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_2>a_1$이므로

d는 양의 실수이다.

이때

$a_5^2-a_1a_9=a_5^2-(a_5-4d)(a_5+4d)$

$=a_5^2-a_5^2+16d^2=16d^2>0$

이므로

$a_5^2>a_1a_9$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

4 자연수 n에 대하여

$b_n=a_{2n-1}$, $c_n=a_{2n}$

이라 하자.

$b_n=a_{2n-1}$

$=(-1)^{2n-1}\{3(2n-1)-1\}$

$=-(6n-4)$

$=-6n+4$

이고

$c_n=a_{2n}$

$=(-1)^{2n}(3\times2n-1)$

$=6n-1$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -2, 공차가 -6인 등차수열이고, 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이다.

따라서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$=b_1+c_1+b_2+c_2+\cdots+b_{10}+c_{10}$

$=(b_1+b_2+\cdots+b_{10})+(c_1+c_2+\cdots+c_{10})$

$=\frac{10\{2\times(-2)+9\times(-6)\}}{2}+\frac{10(2\times5+9\times6)}{2}$

$=5\times(-58)+5\times64$

$=30$

답 30

다른 풀이

$b_n=a_{2n-1}$, $c_n=a_{2n}$이라 하면

$b_n=-6n+4$, $c_n=6n-1$이므로

$b_n+c_n=3$

따라서
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$
$=(b_1+c_1)+(b_2+c_2)+(b_3+c_3)+\cdots+(b_{10}+c_{10})$
$=3\times10$
$=30$

5 a_1과 a_9의 등차중항이 a_5이므로
$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9\times\dfrac{a_1+a_9}{2}=9a_5$
$S_9<0$이므로 $a_5<0$
또 a_2와 a_{10}의 등차중항이 a_6이므로
$a_6=\dfrac{a_2+a_{10}}{2}>0$
이때 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 $a_5<0<a_6$이면 $n\le5$일 때 $a_n<0$, $n\ge6$일 때 $a_n>0$이다.
따라서 $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 ③

6 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d $(d>0)$이므로
$b_n=(a_{n+2})^2-(a_n)^2$
$=(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n)$
$=2d\times2a_{n+1}$
$=4d(-1+nd)$
$=4d^2n-4d$
즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $4d^2-4d$이고 공차가 $4d^2$인 등차수열이다.
그러므로
$S_{10}=\dfrac{10(8d^2-8d+36d^2)}{2}$
$=10(22d^2-4d)$
$=1860$
에서
$11d^2-2d-93=0$
$(11d+31)(d-3)=0$
$d>0$이므로
$d=3$

답 ③

7 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
모든 자연수 n에 대하여
$S_{n+2}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}$
$=a_1+nd+a_1+(n+1)d$
$=(2a_1+d)+2dn$
$=112-16n$
이므로
$2d=-16$에서 $d=-8$
$2a_1+d=112$에서
$2a_1=112-d=112+8=120$
$a_1=60$
그러므로
$S_n=\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$
$=\dfrac{n\{2\times60+(n-1)\times(-8)\}}{2}$
$=\dfrac{n(-8n+128)}{2}$
$=-4n(n-16)$
따라서 $S_1=S_{15}$, $S_2=S_{14}$, $S_3=S_{13}$, $\cdots$, $S_7=S_9$이므로 조건을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)는
$(1, 15)$, $(2, 14)$, $(3, 13)$, $\cdots$, $(7, 9)$
이고 그 개수는 7이다.

답 ②

8 자연수 n에 대하여
$a_{2n+1}=S_{2n+1}-S_{2n}=5n-1$ …… ㉠
$a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}=-4n+3$ …… ㉡
㉡에서 $a_2=-1$이고 $a_1=a_2$이므로 $a_1=a_2=-1$
즉, ㉠에서 $a_1=-1$이고 $a_{2n+1}=5n-1$이므로
$a_{2n-1}=5n-6$
따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 -1, 공차가 5인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 -1, 공차가 -4인 등차수열이므로
S_{2n}
$=\dfrac{n\{-2+(n-1)\times5\}}{2}+\dfrac{n\{-2+(n-1)\times(-4)\}}{2}$
$=\dfrac{n(5n-7)}{2}+\dfrac{n(-4n+2)}{2}$
$=\dfrac{n(n-5)}{2}$
S_{2n-1}
$=\dfrac{n\{-2+(n-1)\times5\}}{2}$
$+\dfrac{(n-1)\{-2+(n-2)\times(-4)\}}{2}$
$=\dfrac{n(5n-7)}{2}+\dfrac{(n-1)(-4n+6)}{2}$
$=\dfrac{n^2+3n-6}{2}$

$S_{2n}<0$일 때 $0<n<5$이므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

즉, $S_k<0$을 만족시키는 짝수 k의 값은 2, 4, 6, 8

S_{2n-1}에서 $S_1=-1<0$이고

$n\ge 2$이면 $n^2+3n-6>0$이므로 $S_{2n-1}>0$

즉, $S_k<0$을 만족시키는 홀수 k의 값은 1

따라서 $S_k<0$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값은

1, 2, 4, 6, 8이고 그 합은

$1+2+4+6+8=21$

답 ①

9 세 수 2, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 a는 2와 b의 등비중항이다.

즉, $a^2=2b$ …… ㉠

또 세 수 a, b, 12가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 b는 a와 12의 등차중항이다.

즉, $2b=a+12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2-a-12=0$, $(a+3)(a-4)=0$

$a>0$이므로 $a=4$

$2b=a^2=4^2=16$이므로

$b=8$

따라서

$a+b=4+8=12$

답 12

10 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$(a_4+a_5)-(a_3+a_4)=a_5-a_3=2d=8$

이므로

$d=4$

$a_3+a_4=0$에서

$$\begin{aligned}(a_1+2d)+(a_1+3d)&=2a_1+5d\\&=2a_1+5\times 4\\&=2a_1+20\\&=0\end{aligned}$$

이므로 $a_1=-10$

즉, $a_n=-10+(n-1)\times 4=4n-14$이므로

$a_p=4p-14$

$a_{p+2}=4(p+2)-14=4p-6$

$a_{p+q}=4(p+q)-14$

이때 세 수 a_p, a_{p+2}, a_{p+q}가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(4p-6)^2=(4p-14)(4p+4q-14)$

이것을 전개하여 정리하면

$2pq-8p-7q+20=0$

$2p(q-4)-7(q-4)=8$

$(2p-7)(q-4)=8$ …… ㉠

$q>2$이므로

$q-4>-2$

즉, $q-4=-1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8$

p가 자연수이므로

$2p-7=1$ 또는 $2p-7=-1$

그러므로 ㉠을 만족시키려면

$2p-7=1$, $q-4=8$이어야 한다.

따라서 $p=4$, $q=12$이므로

$p+q=4+12=16$

답 ③

11 ㄱ. 조건 (가)에 의하여

$a_3a_6=a_1r^2\times a_1r^5=a_1{}^2\times r^7>0$

이고, $a_1{}^2>0$이므로 $r^7>0$

즉, $r>0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}a_2-a_3+a_4-a_5&=a_1r-a_1r^2+a_1r^3-a_1r^4\\&=a_1r(1-r)(1+r^2)>0\end{aligned}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때 $a_1>0$, $r>0$이므로 $a_n>0$이고 ㉠에서

$1-r>0$, 즉 $r<1$

$\dfrac{a_6}{a_4}=r^2$, $\dfrac{a_3}{a_2}=r$이고

$0<r<1$일 때 $r^2<r$이므로

$\dfrac{a_6}{a_4}<\dfrac{a_3}{a_2}$

따라서 $a_2a_6<a_3a_4$ (거짓)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 양수이고 공비 r이 $0<r<1$인 등비수열이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}<a_n$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

12 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>1)$이라 하자.

$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_3}{a_2}+\dfrac{a_3}{a_4}+\dfrac{a_5}{a_4}+\dfrac{a_5}{a_6}+\dfrac{a_7}{a_6}=10$에서

$\dfrac{1}{r}+r+\dfrac{1}{r}+r+\dfrac{1}{r}+r=10$

$3r^2-10r+3=0$

$(3r-1)(r-3)=0$

$r>1$이므로 $r=3$

이때 $a_4=a_1\times 3^3=2$이므로

$a_1=\frac{2}{27}$이고

$$S_n=\frac{\frac{2}{27}(3^n-1)}{3-1}$$

$$=\frac{1}{27}(3^n-1)>3^{10}$$

에서 $3^n-1>3^{13}$

$n\geq 14$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 14이다.

답 ④

Level 3 **실력 완성** 본문 84쪽

1 48 2 ② 3 449

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1<0$이면 $S_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1>0$

또 $a_2<0$이면 $S_3=3a_2<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1>a_2>0$이므로 2 이상의 자연수 k에 대하여 $S_k=M_1$이라 하면 $n\leq k$일 때 $a_n>0$이고 $n>k+1$일 때 $a_n<0$이다.

(i) $S_k=M_1$, $S_{k-1}=M_2$, $S_{k+1}=M_3$인 경우

$M_1-M_2=S_k-S_{k-1}=a_k=2$

$M_2-M_3=S_{k-1}-S_{k+1}=-a_k-a_{k+1}=1$

즉, $a_{k+1}=-3$이므로

$d=-5$

이고

$a_1=a_k-(k-1)\times(-5)$

$=5k-3$

이때

$$S_n=\frac{n\{2(5k-3)+(n-1)\times(-5)\}}{2}$$

$$=\frac{n(10k-5n-1)}{2}$$

이므로 $S_n<0$에서

$n>2k-\frac{1}{5}$

즉, $S_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 $2k$이므로 자연수 n의 최솟값이 21이라는 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $S_k=M_1$, $S_{k+1}=M_2$, $S_{k-1}=M_3$인 경우

$M_1-M_2=S_k-S_{k+1}=-a_{k+1}=2$

이므로

$a_{k+1}=-2$

$M_2-M_3=S_{k+1}-S_{k-1}=a_{k+1}+a_k=1$

이므로

$a_k=3$

즉, $d=-5$이고

$a_1=a_k-(k-1)\times(-5)=5k-2$

이때

$$S_n=\frac{n\{2(5k-2)+(n-1)\times(-5)\}}{2}$$

$$=\frac{n(10k-5n+1)}{2}$$

이므로 $S_n<0$에서

$n>2k+\frac{1}{5}$

즉, $S_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 $2k+1$이므로

$2k+1=21$

$k=10$

따라서

$a_1=5\times 10-2=48$

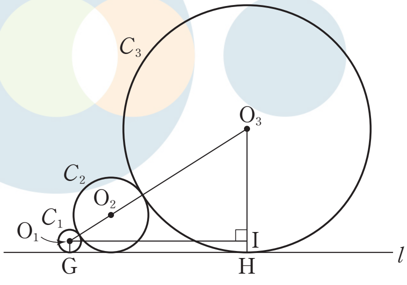
답 48

2 조건 (가)에 의하여 세 점 O_1, O_2, O_3은 한 직선 위에 있다.

또 $r_1=1$이므로 조건 (나)에 의하여 공비를 r이라 하면

$r_2=r$, $r_3=r^2$

으로 놓을 수 있고, $\overline{GH}=20$이므로 $r_1<r_2<r_3$, 즉 $r>1$이다.



그림과 같이 점 O_1에서 선분 O_3H에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{O_1O_3}=1+2r+r^2$

$\overline{O_3I}=r^2-1$

이므로 직각삼각형 O_1IO_3에서

$$\begin{aligned}\overline{O_1I}^2&=(1+2r+r^2)^2-(r^2-1)^2\\&=(1+2r+r^2+r^2-1)(1+2r+r^2-r^2+1)\\&=(2r^2+2r)(2r+2)\\&=4r(r+1)^2\end{aligned}$$

이때 $\overline{O_1I}=\overline{GH}=20$이므로

$4r(r+1)^2=400$

$r^3+2r^2+r-100=0$

$(r-4)(r^2+6r+25)=0$

$r^2+6r+25>0$이므로

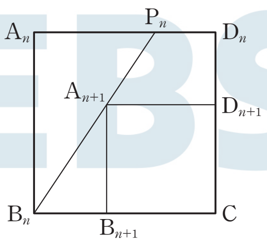
$r=4$

따라서 세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이의 합은

$\pi+16\pi+256\pi=273\pi$

답 ②

3



$\overline{A_nB_n}=b_n$이라 하자.

삼각형 $A_nB_nP_n$과 삼각형 $B_{n+1}A_{n+1}B_n$이 서로 닮음이고,

$\overline{A_nB_n} : \overline{A_nP_n}=3 : 2$이므로

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} : \overline{B_nB_{n+1}}=3 : 2$

즉, $b_{n+1} : (b_n-b_{n+1})=3 : 2$이므로

$2b_{n+1}=3b_n-3b_{n+1}$

$b_{n+1}=\dfrac{3}{5}b_n$

그러므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 5이고 공비가 $\dfrac{3}{5}$인 등비수열이다.

따라서 $b_5=5\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^4=\dfrac{81}{125}$이고

$a_5=4b_5=\dfrac{324}{125}$

이므로

$p+q=125+324=449$

답 449

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 87~97쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 952	5 ①
6 ②	7 ③	8 515	9 ⑤	10 ②

1 $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(b_n+1)&=\sum_{n=1}^{10}b_n+\sum_{n=1}^{10}1\\&=\sum_{n=1}^{10}b_n+1\times10\\&=\sum_{n=1}^{10}b_n+10\\&=4\end{aligned}$$

에서

$\sum_{n=1}^{10}b_n=-6$

이때

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}(a_n+b_n)&=\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}b_n\\&=\sum_{n=1}^{10}a_n-6\\&=7\end{aligned}$$

이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_n=7+6=13$

답 ②

2 $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}(a_n+a_{n+2})&=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=1}^{8}a_{n+2}\\&=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=3}^{10}a_n\\&=\left(\sum_{n=1}^{10}a_n-a_9-a_{10}\right)+\left(\sum_{n=1}^{10}a_n-a_1-a_2\right)\\&=2\sum_{n=1}^{10}a_n-(a_1+a_2+a_9+a_{10})\\&=2\times8-(a_1+a_2+a_9+a_{10})\\&=16-(a_1+a_2+a_9+a_{10})\\&=10\end{aligned}$$

이므로

$a_1+a_2+a_9+a_{10}=6$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{7}a_{n+1}&=\sum_{n=3}^{8}a_n\\&=\sum_{n=1}^{10}a_n-(a_1+a_2+a_9+a_{10})\end{aligned}$$

$=8-6$

$=2$

답 ②

다른 풀이

$\sum_{n=1}^{8}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=1}^{8}a_{n+2}$

$=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=3}^{10}a_n$

$=\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=3}^{8}a_n$

$=8+\sum_{n=3}^{8}a_n$

$=10$

이므로

$\sum_{n=3}^{8}a_n=2$

따라서 $\sum_{n=2}^{7}a_{n+1}=\sum_{n=3}^{8}a_n=2$

3 $\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2-\sum_{k=1}^{10}k^2=\sum_{k=1}^{10}\{(k+2)^2-k^2\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(4k+4)$

$=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4$

$=4\times\frac{10\times11}{2}+4\times10$

$=260$

답 ①

4 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

이므로

$\sum_{n=1}^{7}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{7}(3n-2)^2$

$=\sum_{n=1}^{7}(9n^2-12n+4)$

$=9\sum_{n=1}^{7}n^2-12\sum_{n=1}^{7}n+\sum_{n=1}^{7}4$

$=9\times\frac{7\times8\times15}{6}-12\times\frac{7\times8}{2}+4\times7$

$=952$

답 952

5 $\sum_{n=1}^{9}\frac{4n^2+8n+10}{4n^2+8n+3}$

$=\sum_{n=1}^{9}\left(1+\frac{7}{4n^2+8n+3}\right)$

$=9+7\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

$=9+\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=9+\frac{7}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=9+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{21}\right)$

$=10$

답 ①

6 $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3}}$

$=\sum_{n=1}^{20}\frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{(\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n-3})(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})}$

$=\sum_{n=1}^{20}\frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{(4n+1)-(4n-3)}$

$=\sum_{n=1}^{20}\frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{4}$

$=\frac{1}{4}\{(\sqrt{5}-\sqrt{1})+(\sqrt{9}-\sqrt{5})+(\sqrt{13}-\sqrt{9})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{77})\}$

$=\frac{1}{4}(-\sqrt{1}+\sqrt{81})$

$=\frac{1}{4}\times8$

$=2$

답 ②

7 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=a_n+4$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

이때

$\sum_{n=1}^{11}a_n=\frac{11(2a_1+10\times4)}{2}$

$=11(a_1+20)$

$=110$

이므로

$a_1=-10$

따라서

$a_{20}=a_1+19\times4$

$=-10+19\times4$

$=66$

답 ③

8 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$, 즉 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $a_3=1$이므로

$a_5+a_7=a_3r^2+a_3r^4=r^2+r^4=20$

$r^4+r^2-20=0$

$(r^2+5)(r^2-4)=0$

$r^2=4$

$r>0$이어야 하므로 $r=2$

이때 $a_1=\frac{a_3}{r^2}=\frac{1}{4}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{9}a_n=\frac{\frac{1}{4}(2^9-1)}{2-1}$$
$$=\frac{511}{4}$$

이므로

$p+q=4+511=515$

답 515

9 $(a_{n+1})^2+a_{n+1}=(a_n)^2+a_n$에서

$(a_{n+1})^2-(a_n)^2=a_n-a_{n+1}$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=-(a_{n+1}-a_n)$

$a_n\neq a_{n+1}$이므로

$a_{n+1}+a_n=-1$

즉, $a_{n+1}=-a_n-1$

$a_1=-5$이므로

$a_2=-a_1-1=5-1=4$

$a_3=-a_2-1=-4-1=-5$

$a_4=-a_3-1=5-1=4$

⋮

이때 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=-5$이면 $a_{n+1}=-(-5)-1=4$이고,

$a_n=4$이면 $a_{n+1}=-4-1=-5$이므로

모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}=-5$, $a_{2n}=4$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\sum_{n=1}^{10}4=4\times10=40$

답 ⑤

10 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=2$, (우변)$=1\times2=2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_k=k(k+1)$

이고, $ka_{k+1}=(k+2)a_k$에서

$a_{k+1}=\boxed{\frac{k+2}{k}}\times a_k$이므로

$a_{k+1}=\frac{k+2}{k}\times k(k+1)$

$=\boxed{(k+1)(k+2)}$

즉, $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{k+2}{k}$, $g(k)=(k+1)(k+2)$이므로

$f(6)\times g(10)=\frac{8}{6}\times11\times12$

$=176$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ③	5 ②
6 ④	7 ②	8 ①		

1 $\sum_{n=1}^{10}(a_n+3)-\sum_{n=1}^{9}(a_{n+1}-2)$

$=\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}3-\sum_{n=1}^{9}a_{n+1}+\sum_{n=1}^{9}2$

$=\sum_{n=1}^{10}a_n+3\times10-\sum_{n=2}^{10}a_n+2\times9$

$=\left(\sum_{n=1}^{10}a_n-\sum_{n=2}^{10}a_n\right)+48$

$=a_1+48$

이므로

$a_1+48=50$

따라서 $a_1=2$

답 ②

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{n+2}-a_n=2d$

이므로

$\sum_{n=1}^{10}(a_{n+2}-a_n)=\sum_{n=1}^{10}2d$

$=2d\times10$

$=20d$

$=30$

즉, $d=\frac{3}{2}$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1=5$,

공차가 $2d=2\times\frac{3}{2}=3$인 등차수열이므로

$\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}=\frac{5(2\times5+4\times3)}{2}=55$

답 ③

3 $a_n=(2n^2+3n-3)-(n^2+1)=n^2+3n-4$

이므로

$\frac{a_{2n}}{n+2}=\frac{4n^2+6n-4}{n+2}$

$=\frac{2(n+2)(2n-1)}{n+2}$

$=4n-2$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}\frac{a_{2n}}{n+2}=\sum_{n=1}^{10}(4n-2)$

$=4\sum_{n=1}^{10}n-\sum_{n=1}^{10}2$

$=4\times\frac{10\times11}{2}-2\times10$

$=200$

답 ①

4 이차방정식 $2x^2-8x+n=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16-2n$

(i) $16-2n>0$에서 $n<8$이므로

$n=1, 2, 3, \cdots, 7$일 때 $a_n=2$

(ii) $16-2n=0$에서 $n=8$이므로

$n=8$일 때 $a_n=1$

(iii) $16-2n<0$에서 $n>8$이므로

$n=9, 10, 11, \cdots$일 때 $a_n=0$

따라서

$\sum_{n=1}^{100}a_n=\sum_{n=1}^{7}a_n+a_8+\sum_{n=9}^{100}a_n$

$=\sum_{n=1}^{7}2+1+\sum_{n=9}^{100}0$

$=2\times7+1+0\times92$

$=15$

답 ③

5 $\sum_{n=1}^{6}(2n^2-an)=2\sum_{n=1}^{6}n^2-a\sum_{n=1}^{6}n$

$=2\times\frac{6\times7\times13}{6}-a\times\frac{6\times7}{2}$

$=182-21a$

이므로

$182-21a=168$

$21a=14$

따라서 $a=\frac{2}{3}$

답 ②

6 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$a_{n+1}-a_n=3$

따라서

$\sum_{n=1}^{16}\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}$

$=\sum_{n=1}^{16}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})}$

$=\sum_{n=1}^{16}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$

$=\sum_{n=1}^{16}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{3}$

$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{16}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$

$=\frac{1}{3}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})+$

$\cdots+(\sqrt{a_{17}}-\sqrt{a_{16}})\}$

$=\frac{1}{3}(-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{17}})$

$=\frac{1}{3}(-\sqrt{1}+\sqrt{1+16\times3})$

$=\frac{1}{3}\times6$

$=2$

답 ④

7 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$, 즉 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_7=3(a_4)^2$에서

$a_1r^6=3(a_1r^3)^2$

$a_1r^6=3{a_1}^2r^6$

$a_1\neq0$, $r\neq0$이므로

$1=3a_1$

따라서 $a_1=\frac{1}{3}$

답 ②

8 $a_1=4\geq0$이므로

$a_2=a_1-10=4-10=-6$

$a_2<0$이므로

$a_3=-a_2+5=6+5=11$

$a_3\geq0$이므로

$a_4=a_3-10=11-10=1$

$a_4\geq0$이므로

$a_5=a_4-10=1-10=-9$

$a_5<0$이므로

$a_6=-a_5+5=9+5=14$

$a_6\geq0$이므로

$a_7=a_6-10=14-10=4$

$a_7=a_1$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+6}=a_n$

따라서

$a_{10}=a_4=1$, $a_{20}=a_2=-6$

이므로

$a_{10}+a_{20}=1+(-6)=-5$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ⑤	2 ④	3 74	4 ⑤	5 363
6 35	7 ②	8 ④		

1 $a_m=\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}$이므로

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m}{m+1}=\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{1}{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}m$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{4}\geq100$$

에서 $n(n+1)\geq400$

$19\times20=380<400$, $20\times21=420\geq400$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 20이다.

답 ⑤

2 수열 $\{a_n\}$이 공차가 2인 등차수열이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=2$

이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_{11}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+20}\right)$$
$$=\frac{10}{a_1(a_1+20)}$$
$$=\frac{5}{48}$$

$a_1^2+20a_1-96=0$

$(a_1-4)(a_1+24)=0$

$a_1>0$이므로 $a_1=4$

답 ④

3 $x+n=\frac{1}{x-1}+2$에서

$x^2+(n-3)x-n+1=0$

이 이차방정식의 두 근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-n+3$, $\alpha_n\beta_n=-n+1$

따라서

$$\sum_{n=4}^{11}\frac{1}{\alpha_n^2\beta_n+\alpha_n\beta_n^2}$$
$$=\sum_{n=4}^{11}\frac{1}{\alpha_n\beta_n(\alpha_n+\beta_n)}$$
$$=\sum_{n=4}^{11}\frac{1}{(-n+1)(-n+3)}$$
$$=\sum_{n=4}^{11}\frac{1}{(n-3)(n-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{11}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{29}{45}$

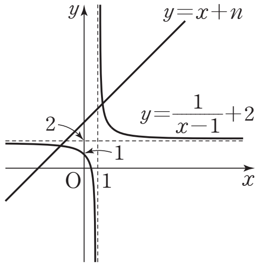
이므로

$p+q=45+29=74$

답 74

참고 1

함수 $y=\frac{1}{x-1}+2$의 그래프와 직선 $y=x+n$은 그림과 같이 모든 자연수 n에 대하여 서로 다른 두 점에서 만난다.
그러므로 이차방정식 $x^2+(n-3)x-n+1=0$은 모든 자연수 n에 대하여 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.



참고 2

$f(x)=x^2+(n-3)x-n+1$이라 하자.
이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(n-3)^2-4(-n+1)$
$=n^2-2n+5$
$=(n-1)^2+4>0$

이고, $f(1)=1+n-3-n+1=-1\neq0$이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 모든 자연수 n에 대하여 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.

4 $b_n=a_{2n-1}$이라 하면 $b_1=a_1=3$이고 모든 자연수 n에 대하여

$b_{n+1}-b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}=6$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 6인 등차수열이다.
따라서 $a_{15}=b_8=3+7\times6=45$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}+a_{2n}=5$이므로

$$a_{15}+\sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{7}(a_{2n-1}+a_{2n})+2a_{15}$$
$$=\sum_{n=1}^{7}5+2\times45$$
$$=5\times7+90$$
$$=125$$

답 ⑤

5 자연수 k에 대하여 $n=2k$일 때,

$a_{2k+1}=3a_{2k-1}$ …… ㉠

$n=2k-1$일 때,

$a_{2k}=2a_{2k-1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a_{2k+1}=3a_{2k-1}=3\times\frac{a_{2k}}{2}=\frac{3}{2}a_{2k}$

이므로

$a_{2k+2}=2a_{2k+1}=2\times\frac{3}{2}a_{2k}=3a_{2k}$ …… ㉢

㉠에 의하여 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고 공비가 3인 등비수열이고, ㉡, ㉢에 의하여 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=2a_1=2$, 공비가 3인 등비수열이다.
따라서

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{5}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{5}(1\times3^{n-1})+\sum_{n=1}^{5}(2\times3^{n-1})$$
$$=\sum_{n=1}^{5}(3^{n-1}+2\times3^{n-1})$$
$$=\sum_{n=1}^{5}3^n$$
$$=\frac{3(3^5-1)}{3-1}$$
$$=363$$

답 363

6 $a_n+a_{n+3}=10$에서

$a_{n+3}=10-a_n$

이때 $\sum_{n=1}^{3}a_n=5$이므로

$$\sum_{n=4}^{6}a_n=\sum_{n=1}^{3}a_{n+3}$$
$$=\sum_{n=1}^{3}(10-a_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{3}10-\sum_{n=1}^{3}a_n$$
$$=10\times3-5$$
$$=25$$

$$\sum_{n=7}^{9}a_n=\sum_{n=4}^{6}a_{n+3}$$
$$=\sum_{n=4}^{6}(10-a_n)$$
$$=\sum_{n=4}^{6}10-\sum_{n=4}^{6}a_n$$
$$=10\times3-25$$
$$=5$$

따라서

$\sum_{n=1}^{9} a_n = \sum_{n=1}^{3} a_n + \sum_{n=4}^{6} a_n + \sum_{n=7}^{9} a_n$

$= 5 + 25 + 5$

$= 35$

답 35

7 (i) a_5의 값은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} - a_n = 3n - 2$, 즉 $a_{n+1} = a_n + (3n-2)$

일 때 최대가 된다.

이때 $a_1 = 4$이므로

$a_2 = a_1 + 1 = 4 + 1 = 5$

$a_3 = a_2 + 4 = 5 + 4 = 9$

$a_4 = a_3 + 7 = 9 + 7 = 16$

$a_5 = a_4 + 10 = 16 + 10 = 26$

그러므로 $M = 26$

(ii) a_5의 값은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} - a_n = -(3n-2)$, 즉 $a_{n+1} = a_n - (3n-2)$

일 때 최소가 된다.

이때 $a_1 = 4$이므로

$a_2 = a_1 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 = a_2 - 4 = 3 - 4 = -1$

$a_4 = a_3 - 7 = -1 - 7 = -8$

$a_5 = a_4 - 10 = -8 - 10 = -18$

그러므로 $m = -18$

따라서 $M - m = 26 - (-18) = 44$

답 ②

8 $a_2 \times a_3 \times a_4 = c$ $(c \neq 0)$이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여

$a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = c$ …… ㉠

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} = c$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a_{n+3}}{a_n} = \frac{c}{c} = 1$, 즉 $a_{n+3} = a_n$

그러므로

$\sum_{n=1}^{100} a_n = 33 \sum_{n=1}^{3} a_n + a_{100}$

$= 33(a_1 + a_2 + a_3) + a_1$

$= 33(2 + a_2 + a_3) + 2$

$= 33(a_2 + a_3) + 68$

$= 233$

에서 $a_2 + a_3 = 5$

즉,

$a_2 \times a_3 = a_2(5 - a_2)$

$= -\left(a_2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$

에서

$a_2 \times a_3 \leq \frac{25}{4}$ $\left(\text{단, 등호는 } a_2 = a_3 = \frac{5}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

이므로

$a_2 \times a_3 \times a_4 = a_2 \times a_3 \times a_1$

$= a_2 \times a_3 \times 2 \leq \frac{25}{4} \times 2 = \frac{25}{2}$

따라서 $a_2 \times a_3 \times a_4$는 $a_2 = a_3 = \frac{5}{2}$일 때 최댓값 $\frac{25}{2}$를 갖는다.

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ③ 2 ④ 3 365

1 $a_n = \begin{cases} a_{n+1} - 4 & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ 3a_{n+1} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$

이고, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 30 이하의 자연수이므로

$a_n > 0$이어야 한다.

$a_8 = 2$에서 $a_7 > 0$이어야 하므로

$a_7 = 3a_8 = 3 \times 2 = 6$

(i) $a_6 = a_7 - 4 = 6 - 4 = 2$인 경우

$a_5 > 0$이어야 하므로

$a_5 = 3a_6 = 3 \times 2 = 6$

㉠ $a_4 = a_5 - 4 = 6 - 4 = 2$일 때

$a_3 > 0$이어야 하므로

$a_3 = 3a_4 = 3 \times 2 = 6$

$a_2 = a_3 - 4 = 6 - 4 = 2$이면

$a_1 > 0$이어야 하므로

$a_1 = 3a_2 = 3 \times 2 = 6$

$a_2 = 3a_3 = 3 \times 6 = 18$이면

$a_1 \leq 30$이어야 하므로

$a_1 = a_2 - 4 = 18 - 4 = 14$

㉡ $a_4 = 3a_5 = 3 \times 6 = 18$일 때

$a_n \leq 30$이어야 하므로

$a_3 = a_4 - 4 = 18 - 4 = 14$

$a_2 = a_3 - 4 = 14 - 4 = 10$

이때 $a_2-4=10-4=6$은 3의 배수이므로

$a_1=3a_2=30$

(ii) $a_6=3a_7=3\times6=18$인 경우

$a_n\le30$이어야 하므로

$a_5=a_6-4=18-4=14$

$a_4=a_5-4=14-4=10$

이때 $a_4-4=10-4=6$은 3의 배수이므로

$a_3=3a_4=3\times10=30$

마찬가지로 $a_n\le30$이어야 하므로

$a_2=a_3-4=30-4=26$

$a_1=a_2-4=26-4=22$

따라서 가능한 모든 a_1의 값의 합은

$6+14+30+22=72$

답 ③

2 ㄱ. $a_na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$에 $n=1$을 대입하면 $a_1a_2=a_1$

$a_1\ne0$이므로 $a_2=1$ (참)

ㄴ. $a_na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$a_{n+1}a_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}=a_na_{n+1}+a_{n+1}$$
$$=a_{n+1}(a_n+1)$$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}>0$이므로

$a_{n+2}=a_n+1$ (거짓)

ㄷ. $a_{2n+1}=a_{2n-1}+1$이므로 $a_1=3$이면

$a_{2n-1}=3+(n-1)\times1=n+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄱ에서 $a_2=1$이고 $a_{2n+2}=a_{2n}+1$이므로

$a_{2n}=1+(n-1)\times1=n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{5}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{5}(n+2)+\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=\sum_{n=1}^{5}(2n+2)$$
$$=2\sum_{n=1}^{5}n+\sum_{n=1}^{5}2$$
$$=2\times\frac{5\times6}{2}+2\times5$$
$$=40\ (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

3 $(2n-1)a_n+2S_n=2$에 $n=1$을 대입하면

$a_1+2S_1=a_1+2a_1=3a_1=2$이므로 $a_1=\frac{2}{3}$

$(2n-1)a_n+2S_n=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$(2n+1)a_{n+1}+2S_{n+1}=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡－㉠을 하면

$(2n+1)a_{n+1}-(2n-1)a_n+2(S_{n+1}-S_n)=0$

$(2n+1)a_{n+1}-(2n-1)a_n+2a_{n+1}=0$

$(2n+3)a_{n+1}=(2n-1)a_n$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+3}{2n-1}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢의 n에 5, 6, 7, 8, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_5}{a_6}\times\frac{a_6}{a_7}\times\frac{a_7}{a_8}\times\frac{a_8}{a_9}\times\frac{a_9}{a_{10}}=\frac{13}{9}\times\frac{15}{11}\times\frac{17}{13}\times\frac{19}{15}\times\frac{21}{17}$$

$$\frac{a_5}{a_{10}}=\frac{19\times21}{9\times11}=\frac{133}{33}$$

이때 $a_1=\frac{2}{3}$이므로

$$\frac{a_1a_5}{a_{10}}=\frac{2}{3}\times\frac{133}{33}=\frac{266}{99}$$

따라서 $p=99$, $q=266$이므로

$p+q=365$

답 365