수능특강

수학영역 **기하**

정답과 풀이

01 포물선

유제 본문 5~9쪽

1 ③ 2 153 3 4 4 ① 5 ⑤ 6 ⑤

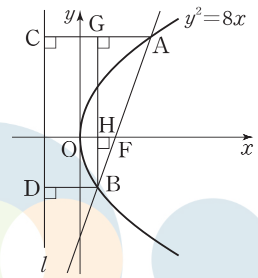
1 포물선 $x^2=4y$의 초점은 F(0, 1)이고 준선의 방정식은 $y=-1$이다.
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P가 포물선 $x^2=4y$ 위의 점이므로
$a^2=4b$
포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=b+1=5$이므로
$b=4$
$a^2=16$
따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

답 ③

2 포물선 $y^2=8x$의 초점은 F(2, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
$\overline{\mathrm{AC}}=6$이므로 점 A의 x좌표는 4이고, 점 A는 포물선 $y^2=8x$ 위의 제1사분면에 있는 점이므로 점 A의 좌표는 $(4,\ 4\sqrt{2})$이다.
두 점 $\mathrm{A}(4,\ 4\sqrt{2})$, F(2, 0)을 지나는 직선의 방정식은
$y=2\sqrt{2}(x-2)$
이므로 점 B의 x좌표는
$\{2\sqrt{2}(x-2)\}^2=8x$에서
$x^2-5x+4=0,\ (x-1)(x-4)=0$
$x=1$ 또는 $x=4$
$x<4$이므로 $x=1$이고,
점 B는 포물선 $y^2=8x$ 위의 제4사분면에 있는 점이므로 점 B의 좌표는 $(1,\ -2\sqrt{2})$
포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BF}}$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=6$, $\overline{\mathrm{BD}}=3$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=6+3=9$
$\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$
따라서
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2=9^2+(6\sqrt{2})^2=153$

답 153

다른 풀이



그림과 같이 점 B에서 선분 AC와 x축에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.
포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AC}}=6$
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BD}}$
이때 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BD}}=a$라 하면 $y^2=8x$에서 초점은 F(2, 0)이므로
$\overline{\mathrm{FH}}=4-a$
$\overline{\mathrm{AG}}=6-a$
삼각형 BFH와 삼각형 BAG가 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{BF}} : \overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{FH}} : \overline{\mathrm{AG}}$
$a : (a+6)=(4-a) : (6-a)$
$(a+6)(4-a)=a(6-a)$
$a=3$
삼각형 BAG에서
$\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{FA}}=3+6=9$
$\overline{\mathrm{AG}}=3$
$\overline{\mathrm{BG}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BA}}^2-\overline{\mathrm{AG}}^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$
따라서
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2&=\overline{\mathrm{BA}}^2+\overline{\mathrm{BG}}^2\\&=9^2+(6\sqrt{2})^2\\&=153\end{aligned}$$

3 포물선 $(x-a)^2=by+c$는 포물선 $x^2=by$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼 평행이동한 것이다.
포물선 $x^2=by$의 초점의 좌표가 $\left(0,\ \frac{b}{4}\right)$이고 준선의 방정식이 $y=-\frac{b}{4}$이므로 포물선 $(x-a)^2=by+c$의 초점의 좌표는 $\left(a,\ \frac{b}{4}-\frac{c}{b}\right)$이고 준선의 방정식은 $y=-\frac{b}{4}-\frac{c}{b}$이다.
즉, $a=2$, $\frac{b}{4}-\frac{c}{b}=2$이고, $k=-\frac{b}{4}-\frac{c}{b}$이다.
$a+b+c=10$에서 $c=8-b$이므로

$\frac{b}{4}-\frac{8-b}{b}=2$

$b^2-4b-32=0$, $(b+4)(b-8)=0$

$b=-4$ 또는 $b=8$

$b=8$일 때 $c=0$이므로 $c\neq0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $b=-4$, $c=12$이므로

$k=-\frac{-4}{4}-\frac{12}{-4}=4$

답 4

다른 풀이

포물선 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 준선 $y=k$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (x, k)이다.

점 $(2, 2)$를 F라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=|y-k|$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-2)^2=(4-2k)y+k^2-4$

즉, $a=2$, $b=4-2k$, $c=k^2-4$이므로

$a+b+c=k^2-2k+2=10$에서

$k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

$k=-2$ 또는 $k=4$

이때 $k=-2$이면 $c=0$이 되어 $c\neq0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $k=4$

4 $y=x+n$을 $y^2=kx$에 대입하면

$(x+n)^2=kx$

$x^2+(2n-k)x+n^2=0$ ...... ㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

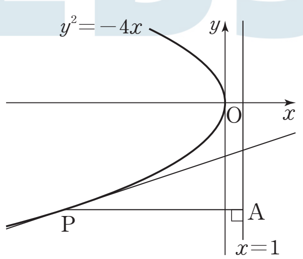
$D=(2n-k)^2-4n^2=k^2-4nk=k(k-4n)<0$

$0<k<4n$에서 $f(n)=4n-1$

따라서 $f(1)+f(2)+f(3)=3+7+11=21$

답 ①

5



포물선 $y^2=-4x$의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$이고, 준선 l의 방정식은 $x=1$이다.

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점이므로 $b^2=-4a$이고, $a\le0$이다.

점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발 A에 대하여 $\overline{PA}=10$이므로

$-a+1=10$에서 $a=-9$

$b^2=-4a=36$에서 $b=-6$ 또는 $b=6$

이때 점 P에서의 접선의 기울기가 양수이므로 점 P의 좌표는 $(-9, -6)$이다.

따라서 점 P에서의 접선의 방정식은

$-6y=2\times(-1)(x-9)$, 즉 $y=\frac{1}{3}x-3$

이므로 접선의 y절편은 -3이다.

답 ⑤

6 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$y_1y=6(x+x_1)$

이고, 점 $A(-3, a)$가 이 접선 위에 있으므로

$ay_1=6(-3+x_1)$ ...... ㉠

또 점 (x_1, y_1)은 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

${y_1}^2=12x_1$ ...... ㉡

㉠에서 $y_1=\frac{6(-3+x_1)}{a}$이고, 이 식을 ㉡에 대입하면

$\frac{36(x_1-3)^2}{a^2}=12x_1$

$3{x_1}^2-(18+a^2)x_1+27=0$

이때 선분 PQ의 중점 M의 x좌표가 5이므로 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 10이다.

즉, $\frac{18+a^2}{3}=10$이므로 $a^2=12$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{3}$

이차방정식 $3{x_1}^2-30x_1+27=0$, 즉 ${x_1}^2-10x_1+9=0$에서

$(x_1-1)(x_1-9)=0$

$x_1=1$ 또는 $x_1=9$

㉠에서

$x_1=1$일 때 $y_1=-2\sqrt{3}$이고, $x_1=9$일 때 $y_1=6\sqrt{3}$

즉, 점 M의 좌표는 $(5, 2\sqrt{3})$이고, 점 A의 좌표가 $(-3, 2\sqrt{3})$이므로

$\overline{AM}=5-(-3)=8$

따라서 $a^2=12$, $b=8$이므로

$a^2+b^2=12+64=76$

답 ⑤

참고

㉠에서 $x_1=\dfrac{ay_1+18}{6}$이고, 이 식을 ㉡에 대입하면

$y_1{}^2=12\times\dfrac{ay_1+18}{6}$, $y_1{}^2-2ay_1-36=0$

즉, 두 점 P, Q의 y좌표의 곱은 -36이다.

접점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식이 $y_1y=6(x+x_1)$이므로 두 점 P, Q의 y좌표를 각각 α, β라 하면 두 접선의 기울기의 곱은

$\dfrac{6}{\alpha}\times\dfrac{6}{\beta}=\dfrac{36}{\alpha\beta}=-\dfrac{36}{36}=-1$

에서 두 접선은 서로 수직이다.

즉, $\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{\pi}{2}$이고, 세 점 P, A, Q는 중심이 M, 지름이 선분 PQ인 원 위에 있다.

Level 1 기초 연습

본문 10~11쪽

1 ②	2 20	3 ②	4 24	5 ③
6 ⑤	7 ③	8 ⑤		

1 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 점 P의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.

한편, 포물선의 정의에 의하여 선분 BF의 길이는 점 B와 직선 $x=-1$ 사이의 거리와 같고, $\overline{\mathrm{BF}}=4$이므로 점 B의 x좌표는 3이다. 점 B가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $y^2=12$에서 점 B의 y좌표는 $2\sqrt{3}$이다.

즉, 점 B의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{3})$이다.

이때 두 점 P, B를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$

이 직선이 포물선 $y^2=4x$와 만나는 두 점이 A, B이므로

$\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1)\right\}^2=4x$에서

$3x^2-10x+3=0$, $(3x-1)(x-3)=0$

$x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3$

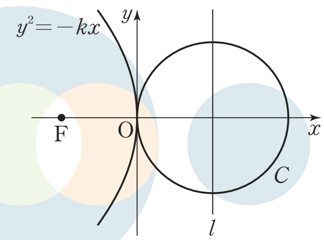
즉, 점 A의 x좌표는 $\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 포물선의 정의에 의하여 선분 AF의 길이는 점 A와 직선 $x=-1$ 사이의 거리와 같으므로 선분 AF의 길이는

$1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

답 ②

2



원과 포물선이 만나는 한 점을 A라 하면 포물선의 정의에 의하여 점 A와 준선 사이의 거리는 선분 AF의 길이와 같으므로 포물선과 만나는 점이 존재하는 원의 넓이가 최소이려면 이 원의 중심은 점 F를 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이어야 하고 원점 O에 대하여 반지름의 길이는 선분 FO의 길이와 같아야 한다.

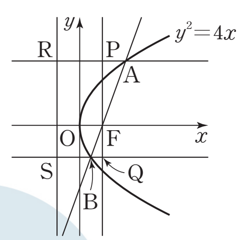
한편, $\overline{\mathrm{PF}}$의 최댓값이 15이므로

$3\times\overline{\mathrm{FO}}=15$, $\overline{\mathrm{FO}}=5$

따라서 $y^2=-kx=4\times\left(-\dfrac{k}{4}\right)x$이므로 점 F의 좌표는 $\left(-\dfrac{k}{4},\ 0\right)$이고, $\dfrac{k}{4}=5$에서 $k=20$

답 20

3



포물선 $y^2=4x$에서 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

그림과 같이 초점 F를 지나고 y축에 평행한 직선이 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 만나는 점을 P, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선과 만나는 점을 Q라 하자.

또 준선과 직선 PA가 만나는 점을 R, 준선과 직선 BQ가 만나는 점을 S라 하자.

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AF}}=3$, $\overline{\mathrm{BS}}=\overline{\mathrm{BF}}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=1$, $\overline{\mathrm{BQ}}=2-\overline{\mathrm{BF}}$

이때 삼각형 APF와 삼각형 BQF가 서로 닮음이므로

$\overline{AP}:\overline{BQ}=\overline{AF}:\overline{BF}$에서

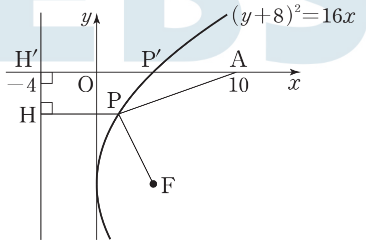
$1:(2-\overline{BF})=3:\overline{BF}$

$3(2-\overline{BF})=\overline{BF}$

$\overline{BF}=\frac{3}{2}$

답 ②

4



포물선 $(y+8)^2=16x$는 포물선 $y^2=16x$를 y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이므로 점 F는 포물선 $y^2=16x$의 초점 $(4,\ 0)$을 y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다.

즉, 점 F의 좌표는 $(4,\ -8)$이고 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

한편, 점 P와 점 A에서 준선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}\ge\overline{AH'}=4+10=14$

그러므로 $\overline{AP}+\overline{PF}$의 값이 최소가 되는 점 P, 즉 점 P′은 선분 AH′과 포물선이 만나는 점이다.

삼각형 AP′F의 둘레의 길이는

$\overline{AP'}+\overline{P'F}+\overline{FA}=14+\overline{FA}$

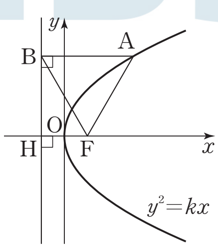
이고, 점 F와 점 A의 좌표가 각각 $(4,\ -8)$, $(10,\ 0)$이므로

$\overline{FA}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

따라서 삼각형 AP′F의 둘레의 길이는 24이다.

답 24

5



포물선 $y^2=kx$의 초점은 $F\left(\frac{k}{4},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은

$x=-\frac{k}{4}$이다.

점 F에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{FH}=2\times\frac{k}{4}=\frac{k}{2}$

한편, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AB}=\overline{AF}$이고, 주어진 조건에서 $\overline{AF}=\overline{BF}$이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다.

$\angle ABF=\angle BFH=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 BFH에서 $\cos(\angle BFH)=\frac{\overline{FH}}{\overline{BF}}$

$\frac{1}{2}=\frac{\frac{k}{2}}{\overline{BF}}$, 즉 $\overline{BF}=k$

따라서 삼각형 ABF의 넓이가 $10\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times k^2=10\sqrt{3}$, $k^2=40$

$k>0$이므로 $k=2\sqrt{10}$

답 ③

6 $y=kx+1$을 $y^2=12x$에 대입하면

$(kx+1)^2=12x$, $k^2x^2+2(k-6)x+1=0$

이때 k는 자연수이므로 $k\ne0$이다.

x에 대한 이차방정식 $k^2x^2+2(k-6)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(k-6)^2-k^2=-12k+36$

$1\le k<3$이면 $\frac{D}{4}>0$이므로 $f(k)=2$

$k=3$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 $f(3)=1$

$k>3$이면 $\frac{D}{4}<0$이므로 $f(k)=0$

따라서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+2+1+0=5$

답 ⑤

7 꼭짓점이 원점이고 준선의 방정식이 $x=4$인 포물선의 초점의 좌표는 $(-4,\ 0)$이므로 이 포물선의 방정식은

$y^2=-16x$이다.

포물선 $y^2=-16x$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2\times(-4)\times(x+a)$, 즉 $by=-8(x+a)$

이 접선의 기울기가 -2이므로

$y=-\frac{8}{b}x-\frac{8a}{b}$에서 $-\frac{8}{b}=-2$, $b=4$

또 점 $(a,\ 4)$가 포물선 $y^2=-16x$ 위의 점이므로

$16=-16a$에서 $a=-1$

따라서 $a+b=-1+4=3$

답 ③

다른 풀이

꼭짓점이 원점이고 준선의 방정식이 $x=4$인 포물선의 초점의 좌표는 $(-4,\ 0)$이므로 이 포물선의 방정식은

$y^2=-16x$이다.

포물선 $y^2=-16x$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x+\frac{-4}{-2}$, 즉 $y=-2x+2$

이 직선이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$b=-2a+2$ ...... ㉠

또 점 $(a,\ b)$는 포물선 $y^2=-16x$ 위의 점이므로

$b^2=-16a$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2a+2)^2=-16a$, $a^2-2a+1=-4a$, $(a+1)^2=0$

$a=-1$, $b=4$

따라서 $a+b=-1+4=3$

8 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$y_1y=2\times\frac{1}{2}\times(x+x_1)$, 즉 $y_1y=x+x_1$

이 직선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로 $x_1=2$

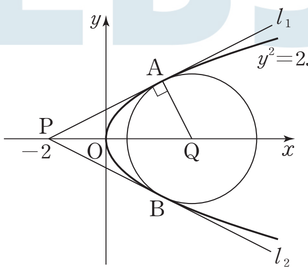
이때 점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=2x$ 위의 점이므로

${y_1}^2=2x_1$에서 ${y_1}^2=4$

$y_1=2$ 또는 $y_1=-2$

즉, 두 접점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(2,\ -2)$이다.

점 $(-2,\ 0)$을 P, 원의 중심을 Q, 점 $(2,\ 2)$를 A라 하면 직선 PA의 방정식은 $2y=x+2$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+1$이므로 직선 PA의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.



삼각형 APQ에서 $\angle \mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{2}$이고 $\tan(\angle \mathrm{APQ})=\frac{1}{2}$

이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{5}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 구하는 원의 넓이는 5π

답 ⑤

다른 풀이

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$y_1y=2\times\frac{1}{2}\times(x+x_1)$, 즉 $y_1y=x+x_1$

이 직선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로 $x_1=2$

이때 점 $(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=2x$ 위의 점이므로

${y_1}^2=2x_1$에서 ${y_1}^2=4$

$y_1=2$ 또는 $y_1=-2$

즉, 두 접점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(2,\ -2)$이다.

또 점 $(-2,\ 0)$을 P, 원의 중심을 Q, 점 $(2,\ 2)$를 A라 하면 직선 PA의 방정식은

$2y=x+2$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+1$

직선 PA와 수직이고 점 A를 지나는 직선이 x축과 만나는 점이 Q이므로 직선 PA와 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-2(x-2)$, 즉 $y=-2x+6$

$y=0$을 대입하면 $x=3$이므로 점 Q의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

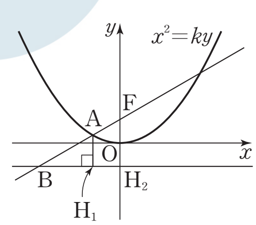
따라서 $\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{(3-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$이므로 구하는 원의 넓이는 5π

Level 2 기본 연습

본문 12~13쪽

1 27	2 ②	3 ④	4 ③	5 ④
6 ②				

1



점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H_1, 포물선의 준선이 y축과 만나는 점을 H_2라 하고, 두 점 A, F를 지나는 직선이 포물선의 준선과 만나는 점을 B라 하자.
포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH_1}=\overline{AF}=\sqrt{3}$이고,

$\angle BAH_1=\angle AFO=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABH_1에서

$$\overline{BA}=\frac{\overline{AH_1}}{\cos\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$$

포물선 $x^2=ky$의 초점은 $F\left(0,\ \frac{k}{4}\right)$, 준선의 방정식은

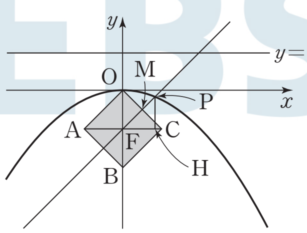
$y=-\frac{k}{4}$이므로 삼각형 FBH_2에서

$$\overline{BF}=\frac{\overline{FH_2}}{\cos\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{k}{4}+\frac{k}{4}\right)=k$$

따라서 $k=\overline{BF}=\overline{BA}+\overline{AF}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$이므로
$k^2=27$

답 27

2

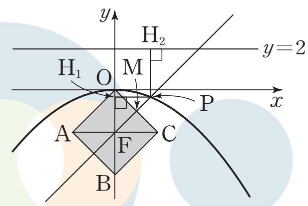


정사각형 OABC에서 $\overline{OA}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{OF}=2$이고, 점 F의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.
점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 H라 하고 $\overline{PH}=t$라 하면 $\angle MFC=\frac{\pi}{4}$이므로 $\overline{FH}=t$이다.
즉, 점 F의 좌표가 $(0,\ -2)$이므로 점 P의 좌표는 $(t,\ -2+t)$
한편, 꼭짓점이 O이고 초점이 F인 포물선에서 $\overline{OF}=2$이므로 직선 $y=2$는 이 포물선의 준선이고 포물선의 정의에 의하여 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리는 선분 PF의 길이와 같다.
이때 점 P의 좌표가 $(t,\ -2+t)$이므로 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리는 $2-(-2+t)=4-t$이고,
$\overline{PF}=\sqrt{2}t$
즉, $4-t=\sqrt{2}t$에서 $t>0$이므로 $t=-4+4\sqrt{2}$

따라서 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리는
$4-t=4-(-4+4\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$

답 ②

다른 풀이



정사각형 OABC에서 $\overline{OA}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{OF}=2$이고, 점 F의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.
점 P에서 y축과 직선 $y=2$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, $\overline{PF}=k$라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{PH_2}=\overline{PF}=k$

삼각형 PH_1F에서 $\angle PFH_1=\frac{\pi}{4}$이므로

$\overline{PH_1}=k\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}k$, $\overline{PH_1}=\overline{FH_1}$

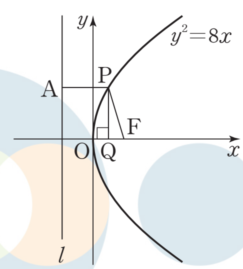
점 F와 직선 $y=2$ 사이의 거리는 4이므로

$$\overline{FH_1}+\overline{PH_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}k+k=4$$

$$k=\frac{8}{\sqrt{2}+2}=8-4\sqrt{2}$$

따라서 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리는
$\overline{PH_2}=8-4\sqrt{2}$

3



포물선 $y^2=8x$의 초점은 $F(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 준선 l과 만나는 점을 A라 할 때, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PA}=\overline{PF}=3$이고, 원점 O와 준선 l 사이의 거리가 2이므로 점 Q의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

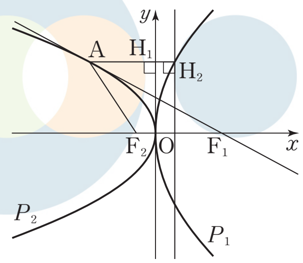
이때 점 F와 점 Q를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점을 각각 F′, Q′이라 하면 점 F′과 점 Q′의 좌표는 각각
$(0,\ 0)$, $(-1,\ 0)$
꼭짓점이 F′이고 초점이 Q′인 포물선의 방정식은
$y^2=-4x$이고, 이 포물선을 다시 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선을 C라 하면 포물선 C의 방정식은
$y^2=-4(x-2)$
직선 l의 방정식이 $x=-2$이므로
$y^2=-4(x-2)$에 $x=-2$를 대입하면
$y^2=-4\times(-2-2)=16$
$y=4$ 또는 $y=-4$
즉, 포물선 C가 직선 l과 만나는 두 점 사이의 거리는 8이다.

답 ④

4 포물선 P_1: $x^2+4x-4y+16=0$은
$x^2+4x+4=4y-12$
$(x+2)^2=4(y-3)$
이므로 포물선 P_1은 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$이고 준선의 방정식은 $y=-1$이므로 포물선 P_1의 초점 F_1의 좌표는 $(-2,\ 4)$이고 준선의 방정식은 $y=2$이다.
포물선 P_2: $(y+a)^2=4x-16$은
$(y+a)^2=4(x-4)$
이므로 포물선 P_2는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $y^2=4x$의 초점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이므로 포물선 P_2의 초점 F_2의 좌표는 $(5,\ -a)$이고 준선의 방정식은 $x=3$이다.
두 포물선 P_1, P_2의 준선의 교점 $(3,\ 2)$를 중심으로 하는 원이 두 점 F_1, F_2를 지나므로 원의 중심 $(3,\ 2)$와 두 점 F_1, F_2에 이르는 거리가 같다.
즉, $\sqrt{(-2-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(-a-2)^2}$
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$(a+2)^2=25$
$a+2=-5$ 또는 $a+2=5$
$a=-7$ 또는 $a=3$
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은
$-7\times3=-21$

답 ③

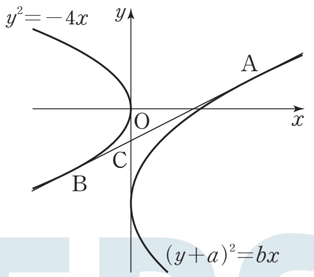
5



포물선 P_1: $y^2=28x$의 초점은 $F_1(7,\ 0)$ …… ㉠
이고 준선의 방정식은 $x=-7$이다.
포물선 P_2: $y^2=kx$의 초점은 $F_2\left(\frac{k}{4},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{k}{4}$이다.
점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 A는 포물선 $y^2=kx$ 위에 있으므로 ${y_1}^2=kx_1$
또 점 $A(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$y_1y=2\times\frac{k}{4}(x+x_1)$, 즉 $y_1y=\frac{k}{2}(x+x_1)$
이 접선이 점 $F_1(7,\ 0)$을 지나므로 $0=\frac{k}{2}(7+x_1)$
$k\neq0$이므로 $x_1=-7$
점 A에서 y축과 포물선 P_2의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AH_2}=\overline{AF_2}=9$이고,
$\overline{AH_2}=\overline{AH_1}+\overline{H_1H_2}=7+\overline{H_1H_2}=9$
에서 $\overline{H_1H_2}=2$
즉, 포물선 P_2: $y^2=kx$의 준선의 방정식이 $x=2$이므로
포물선 P_2의 초점은 $F_2(-2,\ 0)$ …… ㉡
$\frac{k}{4}=-2$이므로 $k=-8$
점 $A(-7,\ y_1)$은 포물선 P_2: $y^2=-8x$ 위의 점이므로
${y_1}^2=56$
$y_1>0$이므로 $y_1=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$
즉, 점 A의 좌표는 $(-7,\ 2\sqrt{14})$ …… ㉢
따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서 삼각형 AF_2F_1의 넓이는
$\frac{1}{2}\times9\times2\sqrt{14}=9\sqrt{14}$

답 ④

6



두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.
$\overline{AC}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$이므로
선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점
$\left(\dfrac{2x_2+x_1}{2+1},\ \dfrac{2y_2+y_1}{2+1}\right)$이 점 C$(0,\ -2)$이다.
즉, $2x_2+x_1=0$, $2y_2+y_1=-6$이므로
$x_1=-2x_2$, $y_1=-2y_2-6$ ······ ㉠
또 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점 B$(x_2,\ y_2)$에서의 접선의 방정식은 $y_2y=-2(x+x_2)$이고,
점 B가 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점이므로
${y_2}^2=-4x_2$ ······ ㉡
점 C$(0,\ -2)$가 직선 $y_2y=-2(x+x_2)$ 위의 점이므로
$-2y_2=-2x_2$, 즉 $x_2=y_2$
㉡에서 ${y_2}^2=-4y_2$
$y_2\neq 0$이므로 $y_2=-4$, $x_2=-4$
이것을 ㉠에 대입하면 $x_1=8$, $y_1=2$
즉, 점 A의 좌표는 $(8,\ 2)$, 점 B의 좌표는 $(-4,\ -4)$이고,
직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x-2$이다.
한편, 직선 $y=\dfrac{1}{2}x-2$는 포물선 $(y+a)^2=bx$의 접선이므로 $x=2y+4$를 $(y+a)^2=bx$에 대입하면
$(y+a)^2=b(2y+4)$
$y^2+2(a-b)y+a^2-4b=0$
y에 대한 이차방정식 $y^2+2(a-b)y+a^2-4b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-b)^2-a^2+4b=b^2+4b-2ab$$
$$=b(b+4-2a)=0$$

$b>0$이므로 $b=2a-4$
이때 점 A$(8,\ 2)$는 포물선 $(y+a)^2=bx$ 위의 점이므로
$(2+a)^2=8b$, $(2+a)^2=8(2a-4)$
$a^2-12a+36=0$, $(a-6)^2=0$
$a=6$, $b=8$
따라서 $a+b=6+8=14$

답 ②

참고

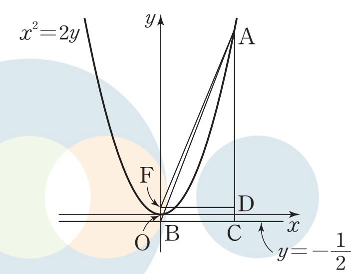
포물선 $(y+a)^2=bx$의 꼭짓점을 D, 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=\overline{CD}$이므로 점 D의 좌표는 $(0,\ -6)$이다.
즉, $a=6$
한편, 점 A$(8,\ 2)$가 포물선 $(y+6)^2=bx$ 위의 점이므로
$64=8b$에서 $b=8$
따라서 $a+b=6+8=14$

Level 3 실력 완성

본문 14쪽

1 ⑤ **2** 146 **3** 72

1

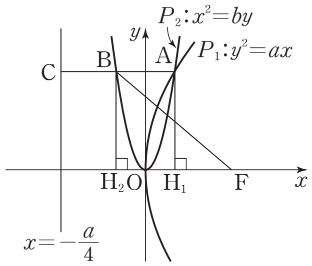


포물선 $x^2=2y$의 초점은 F$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$, 준선의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{2}$이다.
점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 준선과 만나는 점을 C, 점 F를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 AC와 만나는 점을 D라 하면 삼각형 AFD에서 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AF}=\overline{AC}=13$이므로 점 A의 y좌표는 $13-\dfrac{1}{2}=\dfrac{25}{2}$
점 A의 x좌표를 x_1이라 하면
${x_1}^2=2\times\dfrac{25}{2}=25$이고 $x_1>0$이므로 $x_1=5$
$\overline{AC}=13$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{5^2+13^2}=\sqrt{194}$
그러므로 중심이 A이고 초점 F를 지나는 원의 반지름의 길이를 r이라 할 때,
선분 PB의 길이의 최댓값은
$\overline{AB}+r=\overline{AB}+\overline{AF}=\sqrt{194}+13$
선분 PB의 길이의 최솟값은
$\overline{AB}-r=\overline{AB}-\overline{AF}=\sqrt{194}-13$

따라서 $\sqrt{194}-13\le\overline{PB}\le\sqrt{194}+13$에서
$\sqrt{13^2}-13<\sqrt{194}-13<\sqrt{14^2}-13$
$\sqrt{13^2}+13<\sqrt{194}+13<\sqrt{14^2}+13$
이므로 $\overline{PB}$의 값이 자연수일 때 $1\le\overline{PB}\le 26$
이때 선분 PB의 길이가 자연수 k $(1\le k\le 26)$인 점 P는 각각 2개씩 존재하므로 구하는 점 P의 개수는
$26\times 2=52$

답 ⑤

2



포물선 P_1: $y^2=ax$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{a}{4}$이다.

점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 포물선 P_2는 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{AB}=2x_1$이고, $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AC}=4x_1$

직선 $x=-\frac{a}{4}$는 포물선 P_1의 준선이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC}=4x_1$이고, $\frac{a}{4}=\overline{BC}+\frac{\overline{AB}}{2}=3x_1$

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면
$\overline{FH_2}=\frac{a}{4}+\frac{\overline{AB}}{2}=4x_1$
$\overline{FH_1}=2x_1$이므로 $\overline{AH_1}=2\sqrt{3}x_1$
즉, 점 A의 좌표는 $(x_1,\ 2\sqrt{3}x_1)$ ...... ㉠
삼각형 BH_2F에서 $\overline{BH_2}=2\sqrt{3}x_1$, $\overline{FH_2}=4x_1$이므로
$\overline{BF}=2\sqrt{7}x_1=4\sqrt{7}$에서 $x_1=2$
㉠에서 점 A의 좌표가 $(2,\ 4\sqrt{3})$이고, 점 A는 두 포물선 P_1: $y^2=ax$, P_2: $x^2=by$의 교점이므로
$(4\sqrt{3})^2=2a$에서 $a=24$
$2^2=4\sqrt{3}b$에서 $b=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
따라서 $6(a+b^2)=6\times\left(24+\frac{1}{3}\right)=146$

답 146

다른 풀이

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로
$\overline{CM}=\overline{BC}+\overline{BM}=\overline{AB}+\overline{AM}=3\overline{AM}$
즉, $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{1}{3}\times\frac{a}{4}=\frac{a}{12}$이므로 세 점 A, B, F의 좌표는 각각 $\left(\frac{a}{12},\ \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$, $\left(-\frac{a}{12},\ \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$, $\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$이다.
이때 $\overline{BF}=\sqrt{\left(-\frac{a}{12}-\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{6}a=4\sqrt{7}$에서
$a=24$
점 $A(2,\ 4\sqrt{3})$은 포물선 $x^2=by$ 위의 점이므로 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$
따라서 $6(a+b^2)=6\times\left(24+\frac{1}{3}\right)=146$

3

점 A의 좌표를 $(p,\ q)$ $(p>0,\ q>0)$이라 하고, 포물선 P_1의 방정식을
$(y-q)^2=t(x-p)$ $(t<0)$
이라 하면 포물선 P_1이 원점을 지나므로
$q^2=-tp$ ...... ㉠
포물선 P_2의 방정식을 $y^2=kx$ $(k>0)$이라 하면 포물선 P_2가 점 $A(p,\ q)$를 지나므로
$q^2=kp$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $-tp=kp$에서 $p\ne 0$이므로 $t=-k$
즉, 포물선 P_1의 방정식은 $(y-q)^2=-k(x-p)$이고, 포물선 P_1은 포물선 P_2를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 사각형 AF_1OF_2는 직사각형이다. 점 $F_2(p,\ 0)$이 포물선 $y^2=kx$의 초점이고 꼭짓점이 원점이므로 $k=4p$이다.
이때 $k=4p$를 ㉡에 대입하면
$q^2=4p^2$, $q=2p$
직선 OA의 방정식은 $y=2x$이다.
한편, 기울기가 2인 포물선 P_2 : $y^2=4px$의 접선의 방정식은
$y=2x+\frac{p}{2}$, 즉 $2x-y+\frac{p}{2}=0$
직선 $2x-y+\frac{p}{2}=0$ 위의 점 $\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리는
$$\frac{\left|-\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{p}{2\sqrt{5}}$$
이므로 삼각형 ACO의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AO}}\times\frac{p}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}p\times\frac{p}{2\sqrt{5}}=\frac{p^2}{4}$

두 점 A, O가 각각 포물선 P_1, P_2의 꼭짓점이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최댓값도 $\frac{p^2}{4}$이다.

따라서 사각형 ACOB의 넓이의 최댓값은 $\frac{p^2}{4}\times 2=\frac{p^2}{2}$이므로

조건 (다)에서 $\frac{p^2}{2}=18$, $p^2=36$

$p>0$이므로 $p=6$

이때 사각형 $\mathrm{AF_1OF_2}$는 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{AF_2}}\times\overline{\mathrm{OF_2}}=2p\times p=12\times 6=72$

답 72

참고

$k=4p=2q$이므로 포물선 P_1의 방정식

$(y-q)^2=-k(x-p)$는

$(y-2p)^2=-4p(x-p)$

이때 기울기가 2인 포물선 P_1의 접선의 방정식을

$y=2x+s$ (s는 실수)로 놓고, $x=\frac{y-s}{2}$를 포물선 P_1의 방정식 $(y-2p)^2=-4p(x-p)$에 대입하면

$y^2-2py-2ps=0$

y에 대한 이차방정식 $y^2-2py-2ps=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=p^2+2ps=p(p+2s)=0$

$p\neq 0$이므로 $s=-\frac{p}{2}$

따라서 기울기가 2인 포물선 P_1의 접선의 방정식은

$y=2x-\frac{p}{2}$, 즉 $2x-y-\frac{p}{2}=0$

직선 $2x-y-\frac{p}{2}=0$ 위의 점 $\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{p}{2\sqrt{5}}$$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AO}}\times\frac{p}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}p\times\frac{p}{2\sqrt{5}}=\frac{p^2}{4}$

02 타원

유제

본문 17~21쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ③ 4 24 5 9
6 ④

1 두 초점이 F(2, 0), F′(−2, 0)이고 점 (3, 0)을 지나는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하면 이 타원이 점 (3, 0)을 지나므로

$\frac{9}{a^2}=1$, $a^2=9$

$a>0$이므로 $a=3$

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{FF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\cos(\angle\mathrm{FPF'})$

$16=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\frac{1}{4}$

$16=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})^2-\frac{5}{2}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$

이때 타원의 장축의 길이는 $2a=2\times 3=6$이므로 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6$

따라서 $36-\frac{5}{2}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=16$이므로

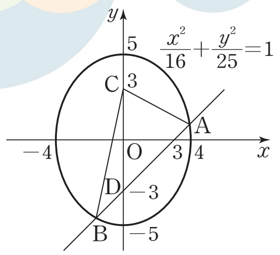
$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=8$

답 ④

2 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$의 두 초점의 좌표를 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=25-16=9$이므로 두 초점의 좌표는 (0, 3), (0, −3)이다.

직선 $x-y-3=0$은 x절편이 3, y절편이 −3이므로 점 (0, −3)을 D라 하면 직선 $x-y-3=0$은 점 D를 지나고, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{AC}}$
$=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{BC}}$



이때 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$의 장축의 길이는 $2\times5=10$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{AD}+\overline{AC}=10$, $\overline{BC}+\overline{BD}=10$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$10+10=20$

답 ⑤

3 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$

이라 하면 $c^2=18-9=9$이므로 두 초점은

$F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$이다.

타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 두 초점의 좌표가

$(3+m, n)$, $(-3+m, n)$이므로

$3+m=-2$, $n=4$ 또는 $-3+m=-2$, $n=4$

즉, $m=-5$, $n=4$ 또는 $m=1$, $n=4$

따라서 $m>0$이므로 $m+n=1+4=5$

답 ③

4 조건 (가)와 조건 (나)에서 타원의 중심의 좌표가 $(0, -5)$이므로 이 타원은 중심이 원점인 타원을 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때 직선 FF′이 x축에 평행하고 장축의 길이가 26이므로 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{13^2}+\frac{(y+5)^2}{a}=1$ $(0<a<13^2)$

으로 놓을 수 있다.

타원 $\frac{x^2}{169}+\frac{(y+5)^2}{a}=1$이 원점을 지나므로 $a=25$이고, $169-25=144$이므로 타원 $\frac{x^2}{169}+\frac{(y+5)^2}{25}=1$의 두 초점의 좌표는 $(12, -5)$, $(-12, -5)$이다.

따라서 $\overline{FF'}=24$

답 24

5 기울기가 $\frac{1}{3}$인 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{18\times\frac{1}{9}+8}$, $y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{10}$

$x-3y\pm3\sqrt{10}=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하므로 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-3y\pm3\sqrt{10}=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $|r|$과 같다.

$\frac{|\pm3\sqrt{10}|}{\sqrt{1+9}}=|r|$에서 $|r|=3$이므로 $r^2=9$

답 9

6 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{2}+y_1y=1$

이 접선이 점 $A(0, 3)$을 지나므로 $y_1=\frac{1}{3}$

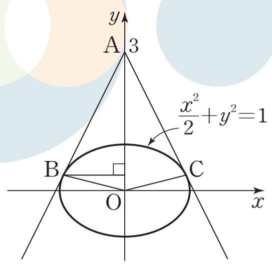
또 점 (x_1, y_1)은 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점이므로

$\frac{{x_1}^2}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1$에서

$x_1=-\frac{4}{3}$ 또는 $x_1=\frac{4}{3}$

즉, $B\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 또는

$B\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $C\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$



이때 점 B와 y축 사이의 거리가 $\frac{4}{3}$이므로 삼각형 ABO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{4}{3}=2$

따라서 두 삼각형 ABO, AOC의 넓이가 같으므로 사각형 ABOC의 넓이는 4이다.

답 ④

다른 풀이

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{2}+y_1y=1$

이 접선이 점 $A(0, 3)$을 지나므로 $y_1=\frac{1}{3}$

또 점 (x_1, y_1)은 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^{\,2}}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1$에서

$x_1=-\frac{4}{3}$ 또는 $x_1=\frac{4}{3}$

즉, 두 접점의 좌표는 $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$이다.

이때 $B\left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$이라 하면 두 점 B, C에서의 접선의 방정식은 각각

$2x-y+3=0$, $2x+y-3=0$

이때 원점과 직선 $2x-y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

이고, $\overline{AB}=\sqrt{\left\{0-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}^2+\left(3-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$이므로 삼각형 ABO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{3}=2$

따라서 두 삼각형 ABO, AOC의 넓이가 같으므로 사각형 ABOC의 넓이는 4이다.

Level 1 기초 연습

본문 22~23쪽

1 ④	2 ①	3 ③	4 ④	5 ③
6 ②	7 ①	8 ①		

1 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$의 장축의 길이가 6이므로 $2a=6$에서 $a=3$

타원의 방정식이 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$이고, 점 $\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$가 타원 위의 점이므로 $\frac{1}{9}+\frac{16}{9b^2}=1$, $\frac{16}{9b^2}=\frac{8}{9}$, $b^2=2$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$이다.

이때 두 초점의 좌표를 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$

따라서 $F(\sqrt{7},\ 0)$, $F'(-\sqrt{7},\ 0)$ 또는

$F(-\sqrt{7},\ 0)$, $F'(\sqrt{7},\ 0)$이므로

$\overline{FF'}=2\sqrt{7}$

답 ④

2 장축의 길이가 $2\times8=16$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=16$ …… ㉠

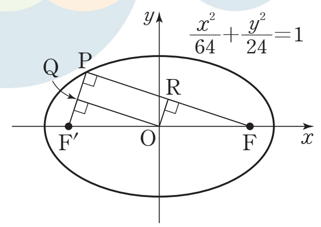
점 F의 좌표를 $(c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=64-24=40$이므로 점 F의 좌표는 $(2\sqrt{10},\ 0)$이고, $\overline{FO}=2\sqrt{10}$

한편, 두 삼각형 FOR, FF′P에서

$\angle FRO=\angle FPF'=\frac{\pi}{2}$, $\angle OFR$이 공통이므로 두 삼각형은 서로 닮음이고, $\overline{OF'}=\overline{OF}$이므로 닮음비는 1 : 2이다.

즉, $\overline{PF'}=2\overline{OR}$, $\overline{PF}=2\overline{OQ}$



㉠에서

$\overline{PF'}+\overline{PF}=2\overline{OR}+2\overline{OQ}=16$

이므로 $\overline{OR}+\overline{OQ}=8$

삼각형 ORF에서 $\angle ORF=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{OR}^2+\overline{RF}^2=\overline{FO}^2$에서

$\overline{OR}^2+\overline{RF}^2=40$

$(\overline{OR}+\overline{RF})^2-2\times\overline{OR}\times\overline{RF}=40$

이때 $\overline{PR}=\overline{RF}=\overline{OQ}$이므로

$8^2-2\times\overline{OR}\times\overline{PR}=40$, $\overline{OR}\times\overline{PR}=12$

따라서 사각형 PQOR은 $\angle RPQ=\angle ORP=\frac{\pi}{2}$인 직사각형이므로 이 사각형의 넓이는

$\overline{OR}\times\overline{PR}=12$

답 ①

3 장축의 길이가 $2\times6=12$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$이고, 조건에서 $\overline{PF}=2\overline{PF'}$이므로

$\overline{PF}=8$, $\overline{PF'}=4$

한편, 삼각형 PFF′에서 $\angle FPF'=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{FF'}=\sqrt{\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

이때 점 F의 좌표를 $(0,\ c)$ $(c>0)$이라 하면 $c=2\sqrt{5}$이므로

$36-a^2=20$에서

$a^2=16$

답 ③

4 장축의 길이가 $2\times4=8$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=8$이고, 조건에서 $\overline{\mathrm{PF}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=6$

점 F의 좌표를 $(c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 $c^2=16-7=9$이므로 점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{F'F}}=6$

즉, 삼각형 PF′F는 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{F'F}}$인 이등변삼각형이므로 점 F′에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=1$이고

$\overline{\mathrm{F'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=\sqrt{36-1}=\sqrt{35}$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{35}=\sqrt{35}$

답 ④

5 타원 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$의 두 초점의 좌표를

$(c,\ 0),\ (-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 $c^2=10-1=9$이므로

두 초점의 좌표는 $(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$이다.

타원 $\frac{(x+3)^2}{10}+(y+3)^2=1$은 타원 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 타원 $\frac{(x+3)^2}{10}+(y+3)^2=1$의 두 초점의 좌표는

$(0,\ -3),\ (-6,\ -3)$이다.

따라서 삼각형 OF′F의 둘레의 길이는

$\sqrt{(-6)^2+(-3)^2}+6+3=9+3\sqrt{5}$

답 ③

6 $5x^2+y^2+10x-6y+9=0$에서

$5(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)=5$

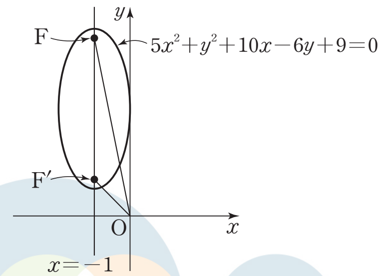
$(x+1)^2+\frac{(y-3)^2}{5}=1$

이므로 이 타원은 타원 $x^2+\frac{y^2}{5}=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

타원 $x^2+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표를

$(0,\ c),\ (0,\ -c)\ (c>0)$이라 하면 $c^2=5-1=4$이므로 두 초점의 좌표는 $(0,\ 2),\ (0,\ -2)$이다.

그러므로 타원 $5x^2+y^2+10x-6y+9=0$의 두 초점의 좌표는 $(-1,\ 5),\ (-1,\ 1)$이다.

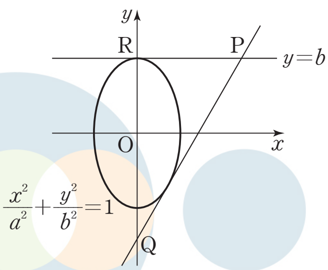


따라서 $\mathrm{F}(-1,\ 5),\ \mathrm{F'}(-1,\ 1)$이라 하면 삼각형 OFF′에서 $\overline{\mathrm{FF'}}=5-1=4$이고, 점 O와 직선 $x=-1$ 사이의 거리는 1이므로 삼각형 OFF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times1=2$

답 ②

7



타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(1,\ -\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x}{a^2}-\frac{\sqrt{3}y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{\sqrt{3}b^2}{3a^2}x-\frac{\sqrt{3}b^2}{3}$ …… ㉠

한편, $\sin(\angle\mathrm{OQP})=\frac{1}{2}$이므로 $\angle\mathrm{OQP}=\frac{\pi}{6}$

점 $(0,\ b)$를 R이라 하면 $\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{3}$이므로 직선 PQ와 직선 $y=b$가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 직선 PQ의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이다.

㉠에서 $\frac{\sqrt{3}b^2}{3a^2}=\sqrt{3}$이므로 $b^2=3a^2$

점 $(1,\ -\sqrt{3})$이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1,\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{3a^2}=1$

$a^2=2,\ b^2=6$

따라서 $a^2+b^2=2+6=8$

답 ①

8 타원 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $(4,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{20}-\frac{y}{5}=1$, 즉 $y=x-5$ ······ ㉠

기울기가 1이고 포물선 $y^2=ax$에 접하는 접선의 방정식은

$y=x+\frac{a}{4}$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $\frac{a}{4}=-5$

따라서 $a=-20$

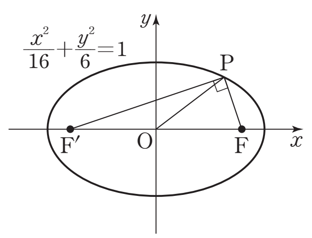
답 ①

Level **2** **기본 연습** 본문 24~25쪽

1 ①	**2** ④	**3** 10	**4** 45	**5** ①
6 ③				

1 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=16-6=10$이므로 $F(\sqrt{10},\ 0)$, $F'(-\sqrt{10},\ 0)$이고, $\overline{FF'}=2\sqrt{10}$

이때 $\overline{OF'}=\overline{OF}=\overline{OP}=\sqrt{10}$이므로 세 점 P, F′, F는 중심이 O인 한 원 위에 있고 $\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$이다.



즉, 직각삼각형 FPF′에서 $\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=(2\sqrt{10})^2$

이때 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF'}+\overline{PF}=8$이므로

$\overline{PF'}=8-\overline{PF}$를 $\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=40$에 대입하면

$(8-\overline{PF})^2+\overline{PF}^2=40$, $\overline{PF}^2-8\overline{PF}+12=0$

$(\overline{PF}-2)(\overline{PF}-6)=0$

$\overline{PF'}>\overline{PF}$이므로 $\overline{PF'}=6$, $\overline{PF}=2$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PF'}=\frac{1}{2}\times2\times6=6$

이고 삼각형 OPF′의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6=3$

답 ①

2 장축의 길이가 $2\times7=14$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=14$

$\overline{PF}=12$이므로 $\overline{PF'}=2$

이때 $\overline{QF'}=1$이므로 $\overline{PQ}=1$

$\angle PFQ=\angle QFF'$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PF}:\overline{FF'}=\overline{PQ}:\overline{QF'}$

$12:\overline{FF'}=1:1$에서 $\overline{FF'}=12$

따라서 점 F의 좌표는 $(6,\ 0)$이므로

$49-a=36$, $a=13$

답 ④

3 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을

$F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=9-5=4$이므로 두 초점은 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$이고, $\overline{FF'}=4$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=6$이므로

$\overline{PF}=6-\overline{PF'}$

$\overline{AP}-\overline{PF}=\overline{AP}-(6-\overline{PF'})$

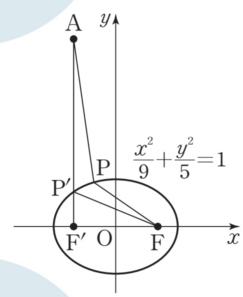
$=\overline{AP}+\overline{PF'}-6$

이때 $\overline{AP}+\overline{PF'}\geq\overline{AF'}$이므로

$\overline{AP}-\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PF'}-6$

$\geq\overline{AF'}-6=9-6=3$

에서 $m=3$



한편, 점 P′은 직선 $x=-2$ 위에 있으므로

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 $x=-2$를 대입하면 $y^2=\frac{25}{9}$

점 P′은 제2사분면 위의 점이므로 점 P′의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{3}\right)$

따라서 삼각형 P′F′F의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$

이므로

$m\times S=3\times\frac{10}{3}=10$

답 10

4 삼각형 PHF에서 $\cos(\angle \mathrm{FPF'})=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{2}{3}$

이때 $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{8}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}}=4$

삼각형 PF'F에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{F'F}}^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\cos(\angle \mathrm{FPF'})$

$(2\sqrt{5})^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2+4^2-2\times\overline{\mathrm{PF'}}\times4\times\frac{2}{3}$

$3\overline{\mathrm{PF'}}^2-16\overline{\mathrm{PF'}}-12=0$

$(\overline{\mathrm{PF'}}-6)(3\overline{\mathrm{PF'}}+2)=0$

$\overline{\mathrm{PF'}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=6$

타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로

$2a=4+6=10$

$a=5$이므로 $a^2=25$

초점 F의 x좌표를 c라 하면 $c^2=a^2-b^2$에서

$\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=25-b^2$, $b^2=20$

따라서 $a^2+b^2=25+20=45$

답 45

5 두 점 $\mathrm{A}(3, 2)$, $\mathrm{B}(5, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-2x+8$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-3)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$

한편, 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 -2인 접선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{4\times4+9}$, 즉 $y=-2x\pm5$

이때 삼각형 APB의 넓이가 최소가 되려면 점 P는 직선 $y=-2x+5$ 위에 있어야 하고, 최대가 되려면 점 P는 직선 $y=-2x-5$ 위에 있어야 한다.

두 직선 $y=-2x+8$, $y=-2x+5$ 사이의 거리는 점 $(0, 8)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|8-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

즉, 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{3\sqrt{5}}{5}=3$

두 직선 $y=-2x+8$, $y=-2x-5$ 사이의 거리는 점 $(0, 8)$과 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|8+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{13\sqrt{5}}{5}$

즉, 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{13\sqrt{5}}{5}=13$

따라서

$n=3$일 때, $f(3)=1$

$n=13$일 때, $f(13)=1$

$4\le n\le12$일 때, $f(n)=2$

$n\ge14$일 때, $f(n)=0$

이므로 $\sum_{n=3}^{15}f(n)=1+2\times9+1=20$

답 ①

6 타원 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점 F, F'의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=24-8=16$이므로

$\mathrm{F}(4, 0)$, $\mathrm{F'}(-4, 0)$

타원 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$ $(a<0, b>0)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{24}+\frac{by}{8}=1$, 즉 $y=-\frac{a}{3b}x+\frac{8}{b}$

이므로 이 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3b}{a}(x-a)+b$, 즉 $y=\frac{3b}{a}x-2b$

이 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표가 $\frac{2a}{3}$이고

$-2\sqrt{6}<a<0$에서

$-4<-\frac{4\sqrt{6}}{3}<\frac{2a}{3}<0$

이므로 점 Q는 선분 FF' 위에 있다.

이때 $\overline{\mathrm{F'Q}}=\frac{2a}{3}+4$, $\overline{\mathrm{FQ}}=4-\frac{2a}{3}$이고

$\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{FQ}}=1:(2+\sqrt{3})$이므로

$\left(\frac{2a}{3}+4\right):\left(4-\frac{2a}{3}\right)=1:(2+\sqrt{3})$

$4-\frac{2a}{3}=(2+\sqrt{3})\times\left(\frac{2a}{3}+4\right)$

$(3+\sqrt{3})a=-6-6\sqrt{3}$

$a=-2\sqrt{3}$, $a^2=12$

점 $\mathrm{P}(-2\sqrt{3}, b)$가 타원 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\frac{12}{24}+\frac{b^2}{8}=1$, $\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}$, $b^2=4$

따라서 $a^2+b^2=12+4=16$

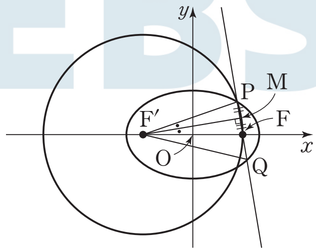
답 ③

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 73　　2 ①　　3 ④

1 타원의 두 초점이 $F'(-6,\ 0)$, $F(6,\ 0)$이므로 $\overline{F'F}=12$이고, 중심이 F'이고 반지름의 길이가 $\overline{F'F}$인 원 위에 점 P가 있으므로 $\overline{F'F}=\overline{PF'}=12$이다.



즉, 삼각형 $PF'F$는 이등변삼각형이므로 $\angle PF'F$의 이등분선은 선분 PF를 수직이등분한다.
선분 PF의 중점을 M이라 하면

$\cos(\angle PFF')=\dfrac{\overline{FM}}{12}=\dfrac{1}{6}$이므로 $\overline{FM}=2$, $\overline{PF}=4$

$\overline{PF'}=12$, $\overline{PF}=4$이므로 타원의 장축의 길이는 16이다.
한편, $\overline{QF}=a$라 하면 $\overline{QF'}=16-a$
삼각형 QFF'에서

$\cos(\angle QFF')=\cos(\pi-\angle PFF')=-\dfrac{1}{6}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$(16-a)^2=12^2+a^2-2\times12\times a\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)$

$a=\dfrac{28}{9}$

따라서 $\overline{PQ}=4+\dfrac{28}{9}=\dfrac{64}{9}$이므로

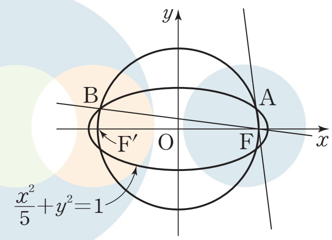
$p=9$, $q=64$에서 $p+q=9+64=73$

답 73

2 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=5-1=4$이므로 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$

선분 FF′을 지름으로 하는 원이 타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$과 만나는 점 중에서 제1사분면에 있는 점을 C, 제2사분면에 있는 점을 D라 하면 $\angle FCF'=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle FDF'=\dfrac{\pi}{2}$이다.

이때 점 P의 y좌표가 0 또는 양수이고 $\cos(\angle F'PF)\le0$이므로 점 P는 타원 위에 있으면서 점 C와 점 D 사이의 제1사분면 또는 제2사분면 위에 있거나 점 C 또는 점 D 또는 점 $(0,\ 1)$과 일치한다. 직선 FP의 기울기가 최소인 점 P가 A, 직선 FP의 기울기가 최대인 점 P가 B이므로 점 C가 A이고 점 D가 B이다.



선분 FF′을 지름으로 하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=4$이고,

$x^2=4-y^2$을 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$에 대입하면

$\dfrac{4-y^2}{5}+y^2=1$에서 $y^2=\dfrac{1}{4}$이고, $y>0$이므로 $y=\dfrac{1}{2}$

$x=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

즉, $A\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

따라서 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OF}=2$, $\overline{AB}=2\times\dfrac{\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}$이므로

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle AOB)=\dfrac{2^2+2^2-(\sqrt{15})^2}{2\times2\times2}=-\dfrac{7}{8}$

답 ①

다른 풀이

두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=5-1=4$이므로 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$

조건을 만족시키는 점 A는 $\angle FAF'=\dfrac{\pi}{2}$인 제1사분면에 있는 점이고, 점 B는 $\angle FBF'=\dfrac{\pi}{2}$인 제2사분면에 있는 점이다. 또한 점 A와 점 B는 y축에 대하여 대칭이다.

한편, $\overline{F'A}^2+\overline{FA}^2=4^2$이고, 타원의 정의에 의하여
$\overline{F'A}+\overline{FA}=2\sqrt{5}$이므로
$(\overline{F'A}+\overline{FA})^2=\overline{F'A}^2+\overline{FA}^2+2\times\overline{F'A}\times\overline{FA}$에서
$20=16+2\times\overline{F'A}\times\overline{FA}$
$\overline{F'A}\times\overline{FA}=2$
점 A의 y좌표를 y_1이라 하면 삼각형 $AF'F$에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{F'A}\times\overline{FA}=\dfrac{1}{2}\times\overline{F'F}\times y_1$

$\dfrac{1}{2}\times2=\dfrac{1}{2}\times4\times y_1$, $y_1=\dfrac{1}{2}$

점 A는 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 위의 점이므로

$\frac{x^2}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$, $x^2=\frac{15}{4}$

$x=-\frac{\sqrt{15}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{15}}{2}$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OF}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\times\frac{\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}$이므로

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{15})^2}{2\times2\times2}=-\frac{7}{8}$

3 타원 E_1: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=16-12=4$이므로 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F'}(-2, 0)$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=4$이다.

점 P는 타원 E_1 위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=8$이고, 조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PF'}}=8$이므로

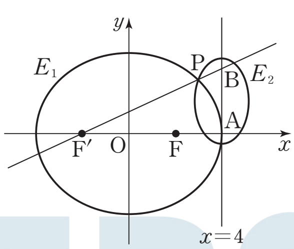
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}$

즉, 점 P의 x좌표는 3이다.

점 P는 타원 E_1: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점이므로

$\frac{9}{16}+\frac{y^2}{12}=1$에서 $y^2=\frac{21}{4}$

$y>0$에서 $y=\frac{\sqrt{21}}{2}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(3, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$이다.



이때 직선 PF′의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{21}}{10}(x+2)$이고, 이 식에

$x=4$를 대입하면 $y=\frac{3\sqrt{21}}{5}$이므로 점 B의 좌표는

$\left(4, \frac{3\sqrt{21}}{5}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(4-3)^2+\left(\frac{3\sqrt{21}}{5}-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2}=\frac{11}{10}$,

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(3-4)^2+\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\frac{5}{2}+\frac{11}{10}=\frac{18}{5}$

따라서 타원 E_2의 장축의 길이는 $\frac{18}{5}$이다.

답 ④

03 쌍곡선

유제 본문 29~33쪽

1 27　2 ②　3 ①　4 ⑤　5 ③
6 23

1 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=6$ …… ㉠

이때 $2(\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}})=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{PF}}=9$, $\overline{\mathrm{PF'}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=9\times3=27$

답 27

2 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}|=4$이고 $\overline{\mathrm{PF}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}>3$이다.

즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=7$

한편, 초점 F의 y좌표를 c라 하면 $c^2=12+4=16$에서

$c=4$ 또는 $c=-4$

즉, $\overline{\mathrm{FF'}}=8$

따라서 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}=3+7+8=18$

답 ②

3 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$2a=2\sqrt{2}$에서 $a=\sqrt{2}$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표를

$(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$2c=4\sqrt{2}$에서 $c=2\sqrt{2}$

$2+b^2=c^2$에서 $2+b^2=8$, $b=\sqrt{6}$

따라서 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{6}=1$의 두 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$이고, $\tan\theta_1\times\tan\theta_2$의 값은 두 점근선의 기울기의 곱이므로

$\tan\theta_1\times\tan\theta_2=-3$

답 ①

4 두 초점의 좌표가 $(2,\ 1)$, $(2,\ -7)$이므로

쌍곡선 $\dfrac{(x-a)^2}{b^2}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=-1$의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+2}{2},\ \dfrac{1-7}{2}\right)$, 즉 $(2,\ -3)$

쌍곡선 $\dfrac{(x-a)^2}{b^2}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=-1$은 쌍곡선

$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 중심의 좌표는 $(a,\ -3)$이다.

즉, $a=2$

쌍곡선 $\dfrac{(x-a)^2}{b^2}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=-1$의 두 초점의 좌표가 $(2,\ 1)$, $(2,\ -7)$이므로 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$의 두 초점의 좌표는 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$이다.

즉, $b^2+4=16$에서 $b^2=12$

따라서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식이 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$이므로 쌍곡선

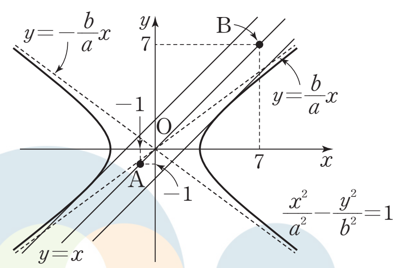
$\dfrac{(x-2)^2}{12}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$y+3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-3$

이고, 이 직선의 x절편은 $2+3\sqrt{3}$이다.

답 ⑤

5



두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이 $y=x$이고, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$이다.

$0<b<a$에서 $\dfrac{b}{a}<1$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 만나지 않는다.

한편, $\overline{AB}=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$이고, 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값이 8이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값이 $\sqrt{2}$이어야 한다.
점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선 $y=x$ 사이의 거리와 같다.
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은
$y=x\pm\sqrt{a^2-b^2}$
이때 직선 $y=x$에서 두 직선 $y=x+\sqrt{a^2-b^2}$, $y=x-\sqrt{a^2-b^2}$에 이르는 거리는 서로 같다.
따라서 직선 $y=x$ 위의 점 $(0, 0)$과 직선 $x-y+\sqrt{a^2-b^2}=0$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이므로
$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
$a^2-b^2=4$

답 ③

6 $3x^2-2y^2+6=0$에서 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=-1$
점 $A(1, 0)$에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=-1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은
$\frac{x_1x}{2}-\frac{y_1y}{3}=-1$
점 $A(1, 0)$이 이 접선 위의 점이므로 $x_1=-2$
또 점 (x_1, y_1)은 쌍곡선 위의 점이므로
$\frac{{x_1}^2}{2}-\frac{{y_1}^2}{3}=-1$에서 $2-\frac{{y_1}^2}{3}=-1$
$y_1=3$ 또는 $y_1=-3$
즉, 접점의 좌표는 $(-2, 3)$, $(-2, -3)$이다.
이때 점 $(-2, 3)$을 B, 원의 중심 $(-a, 0)$을 D라 하면
삼각형 ABD에서 $\angle ABD=\frac{\pi}{2}$이고,
$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+3^2}=3\sqrt{2}$
$\overline{BD}=\sqrt{(-2+a)^2+3^2}$
$\overline{AD}=1+a$
이므로
$18+\{(-2+a)^2+3^2\}=(1+a)^2$에서 $a=5$
$r=\overline{BD}=3\sqrt{2}$
따라서 $a+r^2=5+18=23$

답 23

Level 1 기초 연습

본문 34~35쪽

1 ③	2 ①	3 ②	4 20	5 ⑤
6 ③	7 ③	8 ②		

1 $\overline{OF'}=\overline{OF}$이므로 $2\overline{OF'}=\overline{FF'}$이고, 직선 OQ와 직선 PF가 평행하므로
$\overline{PF}=2\overline{OQ}=2$, $\overline{PF'}=2\overline{QF'}=10$
쌍곡선의 정의에 의하여 주축의 길이는 $\overline{PF'}-\overline{PF}$의 값과 같으므로
$\overline{PF'}-\overline{PF}=10-2=8$

답 ③

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=9+16=25$이므로
$F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$이고, $\overline{FF'}=10$이다.
점 P는 선분 FF′을 지름으로 하는 원 위의 점이므로
$\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$
직각삼각형 PF′F에서
$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=\overline{FF'}^2=100$
점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF}-\overline{PF'}=6$
양변을 제곱하면 $(\overline{PF}-\overline{PF'})^2=36$
$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2-2\times\overline{PF}\times\overline{PF'}=36$
$100-2\times\overline{PF}\times\overline{PF'}=36$
$\overline{PF}\times\overline{PF'}=32$
따라서 삼각형 PF′F의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PF'}=\frac{1}{2}\times32=16$

답 ①

3 쌍곡선 $\frac{x^2}{24}-y^2=-1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(0, c)$, $(0, -c)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=24+1=25$이므로
$F(0, 5)$, $F'(0, -5)$
점 P의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$이라 하면 두 직선 PF, PF′이 서로 수직이므로
$\frac{b-5}{a}\times\frac{b+5}{a}=-1$

즉, $a^2+b^2=25$ …… ㉠

한편, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{24}-y^2=-1$ 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{24}-b^2=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{a^2}{24}-(25-a^2)=-1$

$a^2=\dfrac{24\times24}{25}$에서 $a>0$이므로 $a=\dfrac{24}{5}$이고,

$b^2=\dfrac{49}{25}$에서 $b>0$이므로 $b=\dfrac{7}{5}$

따라서 점 P의 좌표가 $\left(\dfrac{24}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$이므로 직선 OP의 기울기는

$$\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{24}{5}}=\dfrac{7}{24}$$

답 ②

다른 풀이

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{24}-y^2=-1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=24+1=25$이므로 $\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F'}(0,\ -5)$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=10$이다.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$이고, 직선 PF와 직선 PF′은 서로 수직이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{FF'}}^2$

$(\overline{\mathrm{PF}}+2)^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=100$에서

$\overline{\mathrm{PF}}^2+2\overline{\mathrm{PF}}-48=0$, $(\overline{\mathrm{PF}}+8)(\overline{\mathrm{PF}}-6)=0$

$\overline{\mathrm{PF}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=6$

$\overline{\mathrm{PF'}}=8$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, $\angle\mathrm{PFF'}=\theta$라 하자.

$a=\overline{\mathrm{PF}}\times\sin\theta=6\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{5}$

$b=5-\overline{\mathrm{PF}}\times\cos\theta=5-6\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{5}$

따라서 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{24}{5}}=\dfrac{7}{24}$

4 $c^2=1+15=16$에서 $c>0$이므로 $c=4$

즉, 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이다.

이때 $\overline{\mathrm{FH}}=3\overline{\mathrm{F'H}}$이고 점 H의 x좌표를 k라 하면

$\overline{\mathrm{FH}}<\overline{\mathrm{FF'}}$에 의해 $k>-4$이므로

$4-k=3(k+4)$, $k=-2$

즉, 점 P의 x좌표는 -2이고 점 P가 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$ 위의 제3사분면에 있으므로

$4-\dfrac{y^2}{15}=1$, $y^2=45$에서 $y=-3\sqrt{5}$

즉, 점 P의 좌표는 $(-2,\ -3\sqrt{5})$이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{0-(-3\sqrt{5})\}^2}=\sqrt{36+45}=9$

$\overline{\mathrm{OF}}=4$

$\overline{\mathrm{PO}}=\sqrt{(-2)^2+(-3\sqrt{5})^2}=\sqrt{4+45}=7$

따라서 삼각형 PFO의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{PO}}=9+4+7=20$

답 20

5 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{k^2}=-1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은 $y=\dfrac{k}{\sqrt{3}}x$이므로 이 직선에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{k}x$, 즉 $\sqrt{3}x+ky=0$

한 초점 F의 y좌표를 c라 하면

$c^2=3+k^2$

점 $\mathrm{F}(0,\ c)$와 직선 $\sqrt{3}x+ky=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\dfrac{|kc|}{\sqrt{3+k^2}}=\dfrac{k\sqrt{3+k^2}}{\sqrt{3+k^2}}=2$

$k=2$

따라서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=-1$의 주축의 길이는

$2\times2=4$

답 ⑤

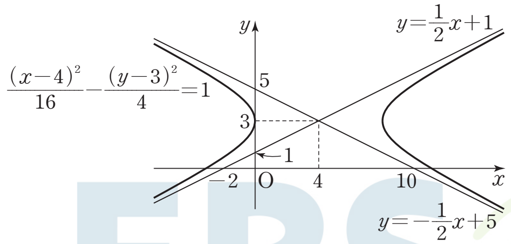
6 $x^2-8x-4y^2+24y-36=0$에서

$(x-4)^2-4(y-3)^2=16$, $\dfrac{(x-4)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

쌍곡선 $\dfrac{(x-4)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 쌍곡선 $\dfrac{(x-4)^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$의 두 점근선의 방정식은

$y-3=\dfrac{2}{4}(x-4)$, $y-3=-\dfrac{2}{4}(x-4)$

즉, $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=-\frac{1}{2}x+5$이다.



이때 두 점근선의 교점의 좌표가 $(4, 3)$이므로 두 점근선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(10+2)\times3=18$

답 ③

7 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{3x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{3b^2}{2a^2}x-\frac{b^2}{2}$이므로

$\frac{3b^2}{2a^2}=\frac{3}{2}$에서 $\frac{b^2}{a^2}=1$, $a^2=b^2$

한편, 점 $(3, 2)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$에서 $\frac{5}{a^2}=1$

$a^2=5$, $b^2=5$

따라서 $a^2+b^2=5+5=10$

답 ③

8 점 $\mathrm{P}(2, 1)$에서 쌍곡선 $2x^2-y^2=-1$에 그은 접선의 접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$2x_1x-y_1y=-1$

점 $\mathrm{P}(2, 1)$이 이 접선 위의 점이므로 $4x_1-y_1=-1$

또 점 (x_1, y_1)은 쌍곡선 위의 점이므로 $2{x_1}^2-{y_1}^2=-1$에서

$2{x_1}^2-(4x_1+1)^2=-1$

$7{x_1}^2+4x_1=0$, $x_1(7x_1+4)=0$

$x_1=0$ 또는 $x_1=-\frac{4}{7}$

즉, 두 접점의 좌표는 $(0, 1)$, $\left(-\frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$이다.

이때 $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$라 하면 점 A를 접점으로 하는 접선의 방정식은 $y=1$이므로 점 $\mathrm{B}\left(-\frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$와 직선 $y=1$ 사이의 거리는 $1-\left(-\frac{9}{7}\right)=\frac{16}{7}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}=2$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\frac{16}{7}=\frac{16}{7}$

답 ②

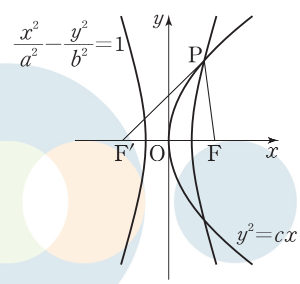
Level 2 기본 연습

본문 36~37쪽

1 ①	**2** ②	**3** ③	**4** ①	**5** 28
6 ③				

1 포물선 $y^2=cx$의 초점이 $\mathrm{F}(2, 0)$이므로

$y^2=4\times\frac{c}{4}\times x$에서 $\frac{c}{4}=2$, $c=8$



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F'}(-2, 0)$이므로 $a^2+b^2=4$ …… ㉠

점 P의 좌표를 (α, β)라 하면 삼각형 PF′F의 넓이가 $4\sqrt{6}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\beta=4\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}\times4\times\beta=4\sqrt{6}$, $\beta=2\sqrt{6}$

이때 점 P가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$(2\sqrt{6})^2=8\alpha$에서 $\alpha=3$

즉, 점 P의 좌표는 $(3, 2\sqrt{6})$이다.

점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{9}{a^2}-\frac{24}{b^2}=1$, $9b^2-24a^2=a^2b^2$ …… ㉡

㉠에서 $a^2=4-b^2$이므로 ㉡에 대입하면

$9b^2-24(4-b^2)=(4-b^2)b^2$

$b^4+29b^2-96=0$, $(b^2-3)(b^2+32)=0$

$b^2>0$이므로 $b^2=3$, $a^2=1$

따라서 $a^2-b^2+c=1-3+8=6$

답 ①

2 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF}-\overline{PF'}=2a$이므로

$\overline{PF}=\overline{PF'}+2a$

$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+(\overline{PF'}+2a)$

$=\overline{AP}+\overline{PF'}+2a\ge\overline{AF'}+2a$

이때 $\overline{AF'}=\sqrt{(2+3)^2+12^2}=13$이므로 $\overline{AP}+\overline{PF}$의 최솟값은 $13+2a$이다.

즉, $13+2a=17$에서 $a=2$

두 점 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$이 초점이므로

$a^2+b^2=9$에서 $4+b^2=9$, $b^2=5$

따라서 $a^2\times b^2=4\times5=20$

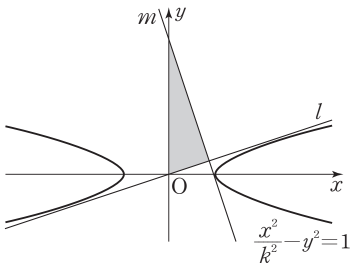
답 ②

3 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{k^2}-y^2=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은 $y=\dfrac{x}{k}$이고, 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-k$이다.

기울기가 $-k$이고 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{k^2}-y^2=1$에 접하는 직선 중 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=-kx+\sqrt{k^2\times k^2-1}$, 즉 $y=-kx+\sqrt{k^4-1}$

이고, 이 직선의 y절편은 $\sqrt{k^4-1}$이다.



이때 두 직선 l, m의 교점의 x좌표는

$\dfrac{x}{k}=-kx+\sqrt{k^4-1}$에서

$\left(\dfrac{1}{k}+k\right)x=\sqrt{k^4-1}$, $x=\dfrac{k\sqrt{k^4-1}}{k^2+1}$

즉, 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{k^4-1}\times\frac{k\sqrt{k^4-1}}{k^2+1}=\frac{k(k^4-1)}{2(k^2+1)}$$
$$=\frac{k(k^2-1)(k^2+1)}{2(k^2+1)}$$
$$=\frac{k(k^2-1)}{2}$$

따라서 $\dfrac{k(k^2-1)}{2}=12$에서

$k^3-k-24=0$, $(k-3)(k^2+3k+8)=0$

k는 실수이므로 $k=3$

답 ③

4 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 4이므로

$2a=4$에서 $a=2$

$\overline{FF'}=6$이므로 $a^2+b^2=9$에서 $b^2=5$

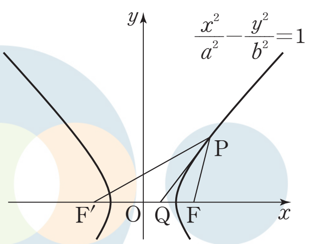
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$

$\overline{PF'}=2\overline{PF}$이므로 $\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}=8$

이때 $\angle F'PQ=\angle FPQ$이므로

$\overline{F'Q}:\overline{FQ}=\overline{PF'}:\overline{PF}=2:1$

즉, $\overline{F'Q}=\overline{FF'}\times\dfrac{2}{3}=6\times\dfrac{2}{3}=4$



삼각형 PF′F에서 $\overline{PF'}=8$, $\overline{PF}=4$, $\overline{F'F}=6$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle PF'F)=\frac{8^2+6^2-4^2}{2\times8\times6}=\frac{7}{8}$$

삼각형 PF′Q에서 $\overline{PF'}=8$, $\overline{F'Q}=4$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{PF'}^2+\overline{F'Q}^2-2\times\overline{PF'}\times\overline{F'Q}\times\cos(\angle PF'F)$

$=8^2+4^2-2\times8\times4\times\dfrac{7}{8}=24$

$\overline{PQ}>0$이므로 $\overline{PQ}=2\sqrt{6}$

따라서 $\dfrac{\overline{PQ}}{a^2-b^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{4-5}=-2\sqrt{6}$

답 ①

5 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(6, 2)$에서의 접선 l의 방정식은

$\dfrac{6x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}=1$, 즉 $y=\dfrac{3b^2}{a^2}x-\dfrac{b^2}{2}$

점 R은 선분 PQ를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle \mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$ 이고, 직선 QR의 방정식은 $y=-\frac{a^2}{3b^2}x$이다.

점 Q$(-6, 2)$가 직선 $y=-\frac{a^2}{3b^2}x$ 위에 있으므로

$2=-\frac{a^2}{3b^2}\times(-6)$, $a=b$

한편, 점 P$(6, 2)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{36}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$, $\frac{36}{a^2}-\frac{4}{a^2}=1$

$a^2=32$, $b^2=32$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를

각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=32+32=64$

에서 F$(8, 0)$, F′$(-8, 0)$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=16$이므로 사각형

PQF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(12+16)\times2=28$

답 28

6 점 P$(2, 1)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$에서 $4b^2-a^2=a^2b^2$ …… ㉠

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

양변을 제곱하면 $(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}})^2=4a^2$

$\overline{\mathrm{PF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}}^2=4a^2$

$\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=4a^2+8$

이때 두 점 F, F′의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$

이라 하면

$(2-c)^2+1+(2+c)^2+1=4a^2+8$에서

$c^2=2a^2-1$

또 $a^2+b^2=c^2$이므로 $a^2+b^2=2a^2-1$에서

$b^2=a^2-1$

이 식을 ㉠에 대입하면

$4(a^2-1)-a^2=a^2(a^2-1)$

$a^4-4a^2+4=0$, $(a^2-2)^2=0$

$a^2=2$, $b^2=1$, $c=\sqrt{3}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 P$(2, 1)$에서의 접선 l의 방정

식이 $\frac{2x}{2}-y=1$, 즉 $x-y-1=0$이므로

$d_1=\frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}}$, $d_2=\frac{|-\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}}$

따라서

$d_1\times d_2=\frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}}\times\frac{|-\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2}=1$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 38쪽

1 ③	2 ①	3 32

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$의 두 초점을 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$

$(c>0)$이라 하면 $c=\sqrt{9+7}=4$이므로 F$(4, 0)$, F′$(-4, 0)$

이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=8$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$ …… ㉠

삼각형 PF′F의 넓이가 삼각형 PFQ의 넓이의 4배이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=4\overline{\mathrm{PQ}}$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=4\overline{\mathrm{PF}}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $\overline{\mathrm{PF'}}=8$, $\overline{\mathrm{PF}}=2$

이때 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=8$이므로 이등변삼각형 PF′F에서

$\angle \mathrm{FPF'}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{8}$이다.

삼각형 QPF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{QF}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos(\pi-\theta)$

$=2^2+2^2-2\times2\times2\times\left(-\frac{1}{8}\right)=9$

이므로 $\overline{\mathrm{QF}}=3$

답 ③

2 두 점 F$(4, -2)$, F′$(-8, -2)$에 대하여 선분 FF′의 중점의 좌표가 $(-2, -2)$이므로 쌍곡선의 방정식은

$\frac{(x+2)^2}{a^2}-\frac{(y+2)^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ …… ㉠

에서 $p=2$, $q=2$이고, 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y+2)^2=36$ …… ㉡

㉠, ㉡을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 각각 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$과 원 $x^2+y^2=36$이 된다.
또 여섯 개의 점 A, B, C, D, F, F′을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′, C′, D′, G, G′이라 하면 두 점 G, G′은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점이고 그 좌표는 각각 $(6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=36$ …… ㉢

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 점근선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이므로 원 $x^2+y^2=36$에 대입하면

$x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}=36$, $(a^2+b^2)x^2=36a^2$

$36x^2=36a^2$, $x^2=a^2$

$x=-a$ 또는 $x=a$

즉, 점 A′의 x좌표는 a이므로 점 A′의 좌표는 $(a,\ b)$이다.

$\cos(\angle\mathrm{AFD})=-\frac{2}{3}$에서

$\sin(\angle\mathrm{AFD})=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$이고,

$\angle\mathrm{AFD}=\angle\mathrm{A'GD'}$이므로

$\sin(\angle\mathrm{A'GD'})=\frac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 A′D′G에서 $\overline{\mathrm{A'D'}}=2b$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{A'D'}}}{\sin(\angle\mathrm{A'GD'})}=\overline{\mathrm{GG'}}$

$\frac{2b}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=12$에서 $b=2\sqrt{5}$

㉢에서 $a^2=36-b^2=36-20=16$이므로 $a=4$

따라서

$\frac{a^2-b^2}{p+q}=\frac{16-20}{2+2}=-1$

답 ①

3 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 점근선의 방정식은

$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직이므로 $\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$

$b^2=a^2$에서 $a=b$

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이고 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 위의 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{a^2}=1$, 즉 $y=\frac{x_1}{y_1}x-\frac{a^2}{y_1}$

$\frac{x_1}{y_1}=-2$에서 $y_1=-\frac{1}{2}x_1$이므로 두 점 A, B는 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위에 있다.

또 접점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{{x_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{a^2}=1$이고, $x_1=-2y_1$을 대입하면

$\frac{4{y_1}^2}{a^2}-\frac{{y_1}^2}{a^2}=1$, ${y_1}^2=\frac{a^2}{3}$

$y_1=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ 또는 $y_1=\frac{a}{\sqrt{3}}$

즉, $\mathrm{A}\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{2a}{\sqrt{3}},\ -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{3}}$

이때 점 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x$, 즉 $x+2y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{3}+2\sqrt{3}|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=3a$

따라서 $3a=12$에서 $a=4$이므로

$a^2+b^2=2a^2=32$

답 32

04 벡터의 연산

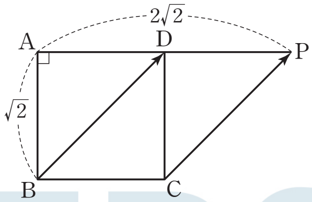
유제 본문 41~49쪽

1 ④	2 ②	3 ①	4 ⑤	5 ①
6 3	7 ②	8 ④	9 ⑤	10 ⑤

1 정사각형 ABCD의 대각선의 길이가 $|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=2$이므로 정사각형의 한 변의 길이는

$\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AC}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CP}$에서 사각형 BCPD는 평행사변형이므로 점 P는 선분 AD를 $2:1$로 외분하는 점이다.



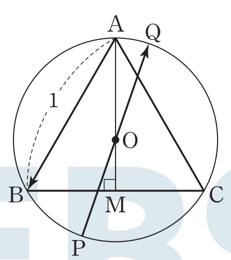
이때 $\angle BAP=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{BP}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+8}=\sqrt{10}$

따라서 $|\overrightarrow{BP}|=\overline{BP}=\sqrt{10}$

답 ④

2 $\overrightarrow{AB}$가 단위벡터이므로 $\overline{AB}=1$이다.



한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하면 점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 원의 지름과 같으므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은

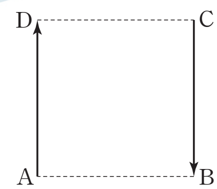
$2\overline{AO}=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 ②

참고

정삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$에서 $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3



$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}$이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$

$=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AD}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}$

따라서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=1$

답 ①

다른 풀이

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$이므로

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

따라서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=1$

4 마름모 ABCD는 평행사변형이므로 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$이다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=\overline{AC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$이므로

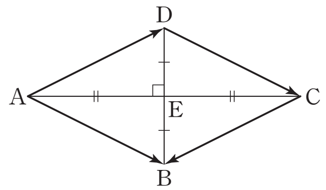
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DB}|=\overline{DB}$

그러므로 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$에서

$\overline{AC}=2\overline{DB}$

마름모의 두 대각선은 서로 수직이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 교점을 E라 하면

$\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{BD}=2:1$



$\overline{\mathrm{DE}}=k$, $\overline{\mathrm{AE}}=2k$라 하면 직각삼각형 AED에서

$k^2+(2k)^2=2^2$, 즉 $k=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

이므로

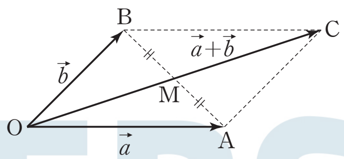
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{AE}}=2\times 2k=4k$

$\quad=4\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤

참고

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$에 대하여 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$이다.



그런데 평행사변형의 두 대각선은 서로 이등분하므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이 성립한다.
한편, 선분 AB의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이 성립함을 다음과 같이 보일 수도 있다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})+(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}})+(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\\&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}})\ (\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}\text{이므로})\\&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\vec{0}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\end{aligned}$$

5 $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$,

$\vec{q}-\vec{p}=(3\vec{a}+k\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$

$\quad=(3-2)\vec{a}+(k+1)\vec{b}=\vec{a}+(k+1)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}-\vec{p}$는 영벡터가 아니므로 이 두 벡터가 서로 평행하려면 $t\vec{p}=\vec{q}-\vec{p}$를 만족시키는 실수 t가 존재해야 한다.

즉, $t(2\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}+(k+1)\vec{b}$

$2t\vec{a}-t\vec{b}=\vec{a}+(k+1)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$2t=1$, $-t=k+1$

따라서 $t=\dfrac{1}{2}$이므로

$k=-t-1=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$

답 ①

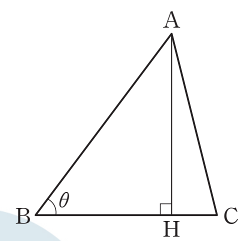
6 예각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$에서

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=\dfrac{3}{5}$

점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\theta=5\times\dfrac{4}{5}=4$,

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta=5\times\dfrac{3}{5}=3$



한편,

$t\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BX}}$ …… ㉠

라 하면 점 X는 직선 BC 위의 점이고,

$f(t)=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}-t\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|$

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|$의 값이 최소인 경우는 점 X가 점 H와 일치할 때이고,

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{BC}}}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ …… ㉡

또 점 X가 점 H와 일치할 때 ㉠에서 $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이므로 ㉡에서

$t=\dfrac{3}{4}$, 즉 $\alpha=\dfrac{3}{4}$

$f(t)=|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|$의 최솟값은 $m=\overline{\mathrm{AH}}=4$

따라서 $\alpha\times m=\dfrac{3}{4}\times 4=3$

답 3

7 $\overline{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\vec{b}-\vec{a}|=2$

$\overline{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\vec{c}-\vec{a}|$

이므로 $\vec{c}-\vec{a}=(3\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}=2(\vec{a}-\vec{b})$

따라서

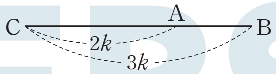
$\overline{\mathrm{AC}}=|\vec{c}-\vec{a}|=|2(\vec{a}-\vec{b})|=2|\vec{a}-\vec{b}|=2\times 2=4$

답 ②

다른 풀이

$\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}=\dfrac{2\vec{b}-3\vec{a}}{2-3}$이므로 점 C는 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점이다.

즉, $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$이고 $\overline{AB}<\overline{BC}$이므로 세 점 A, B, C의 위치 관계는 그림과 같다.



이때 $\overline{AC}=2k$, $\overline{BC}=3k$ $(k>0)$이라 하면

$\overline{AB}=\overline{BC}-\overline{AC}=3k-2k=k$

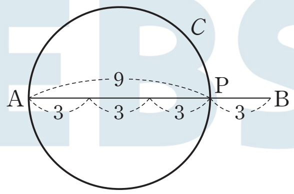
이므로 $\overline{AB}=2$에서 $k=2$이다.

따라서 $\overline{AC}=2k=4$

8 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}=\dfrac{3\times\vec{b}+1\times\vec{a}}{3+1}$에서 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이다.

이때 $\overline{AB}=12$이므로 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$에서

$\overline{AP}=\dfrac{3}{3+1}\overline{AB}=\dfrac{3}{4}\times12=9$



두 점 A, P를 지나는 원을 C라 하면 원 C는 점 A와 점 P를 지나므로 원 C의 반지름의 길이가 최소일 때는 선분 AP가 원 C의 지름일 때이다.

따라서 원 C의 반지름의 길이의 최솟값은 $\dfrac{9}{2}$이다.

답 ④

9 $2\vec{a}-\vec{b}=2(2,\ 3)-(-1,\ 1)=(4,\ 6)-(-1,\ 1)$
$=(4-(-1),\ 6-1)=(5,\ 5)$

이므로

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

답 ⑤

10 원점 O에 대하여

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$
$=(2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OP})+(3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OP})$
$=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OP}$ …… ㉠

이때

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=2(4,\ 0)+3(0,\ 2)$
$=(8,\ 0)+(0,\ 6)$
$=(8,\ 6)$

이므로 점 C(8, 6)에 대하여

$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ …… ㉡

한편,

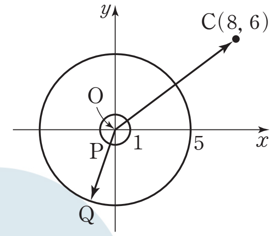
$5\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$ …… ㉢

라 하면 점 Q는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원과 반직선 OP가 만나는 점이다.

㉠, ㉡, ㉢에서

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QC}$

이므로 $|2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|=\overline{QC}$



이때 $\overline{QC}$의 값이 최소인 경우는 점 Q가 선분 OC 위에 있을 때이고, 이때

$\overline{QC}=\overline{OC}-\overline{OQ}=10-5=5$

이므로 $|2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$의 최솟값은 5이다.

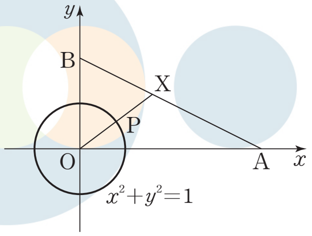
답 ⑤

다른 풀이 1

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=5\left(\dfrac{2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}}{5}\right)$에서 $\dfrac{2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}}{5}=\overrightarrow{PX}$

라 하면 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=5\overrightarrow{PX}$

즉, $\overrightarrow{PX}=\dfrac{2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}}{2+3}$이므로 점 X는 선분 BA를 2 : 3으로 내분하는 점이다.



두 점 A(4, 0), B(0, 2)에 대하여 선분 BA를 2 : 3으로 내분하는 점 X의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times4+3\times0}{2+3},\ \dfrac{2\times0+3\times2}{2+3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$

$\overline{\mathrm{OX}}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{10}{5}=2$이므로 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{OX}}-1=2-1=1$

따라서 $|2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|5\overrightarrow{\mathrm{PX}}|=5|\overrightarrow{\mathrm{PX}}|$의 최솟값은

$5\times1=5$

다른 풀이2

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)$라 하면 $a^2+b^2=1$

이때

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OP}})+(3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-5\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=2(4,\ 0)+3(0,\ 2)-5(a,\ b)\\&=(8,\ 0)+(0,\ 6)-(5a,\ 5b)\\&=(8-5a,\ 6-5b)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}|&=\sqrt{(8-5a)^2+(6-5b)^2}\\&=5\sqrt{\left(a-\frac{8}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2}\quad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

㉠에서 $\sqrt{\left(a-\frac{8}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2}$의 값은 점 $(a,\ b)$와 점 $\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)$ 사이의 거리와 같다.

점 X의 좌표를 $\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)$이라 하면

$\overline{\mathrm{OX}}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{10}{5}=2$

이므로 $\sqrt{\left(a-\frac{8}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{OX}}-1=2-1=1$

따라서 ㉠에서

$|2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=5\sqrt{\left(a-\frac{8}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2}$

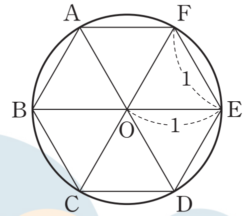
의 최솟값은 $5\times1=5$

Level 1 기초 연습

본문 50~51쪽

1 ③	2 ④	3 ③	4 ②	5 ④
6 ③	7 ①	8 18		

1 단위벡터는 크기가 1인 벡터이다.



정육각형 ABCDEF의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면 삼각형 OAB가 정삼각형이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 정육각형의 한 변의 길이는 1이다.

그러므로 정육각형의 각 변의 양 끝 점을 시점과 종점으로 하는 벡터는 모두 단위벡터이다.

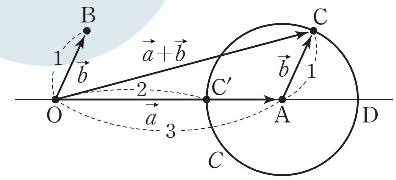
이때 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{FA}}$이므로 서로 다른 단위벡터의 개수는 6이다.

답 ③

2 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$라 하면 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$에서

$\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OB}}=1$

이때 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$라 하면 그림에서 점 C는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\overline{\mathrm{OB}}=1$인 원 C 위의 점이다.



이때 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|=3-1=2$가 성립하려면 점 C는 원 C와 선분 OA의 교점 C′과 일치해야 한다.

즉, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$이다.

한편, 직선 OA가 원 C와 만나는 점 중 C′이 아닌 점을 D라 하면 $-\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이므로

$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

따라서 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AD}}=3+1=4$

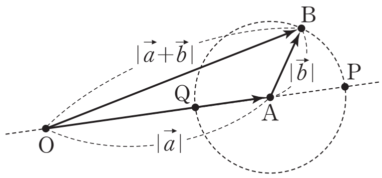
답 ④

참고

임의의 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음이 성립한다.

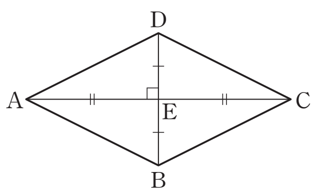
$||\vec{a}|-|\vec{b}||\le|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

이때 등식 $||\vec{a}|-|\vec{b}||=|\vec{a}+\vec{b}|$는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 반대 방향일 때 성립하고, 등식 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 같은 방향일 때 성립한다.



즉, 그림과 같이 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$라 하면 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$이므로 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\vec{b}|$인 원과 직선 OA의 두 교점을 P, Q ($\overline{OQ}<\overline{OP}$)라 하면 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 최댓값과 최솟값은 각각
$\overline{OP}=|\vec{a}|+|\vec{b}|$, $\overline{OQ}=||\vec{a}|-|\vec{b}||$

3



마름모 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면
$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{ED}$이므로
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{ED}=2(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})=2\overrightarrow{AD}$
이때 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|=6$에서 $|2\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AD}|=6$이므로
$|\overrightarrow{AD}|=\overline{AD}=3$
마름모 ABCD의 모든 변의 길이는 서로 같으므로
$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\overline{AD}=3$

답 ③

4 정팔각형의 8개의 변의 길이는 모두 같고 $\overline{AB}/\!/\overline{EF}$이므로
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$
또 $-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{ED}$, $-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$이므로
$\overrightarrow{FX}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
$=(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED})+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
$=(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{FB}$
따라서 $\overrightarrow{FX}=\overrightarrow{FB}$이므로 점 X와 일치하는 점은 B이다.

답 ②

5 점 M은 선분 BC의 중점이므로 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\vec{b}$

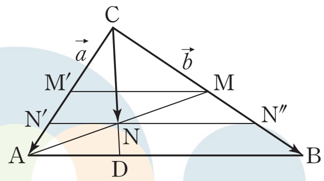
따라서 $\overrightarrow{CN}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$에서

$p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{4}$이므로 $p+q=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 ④

다른 풀이

선분 AC의 중점을 M′이라 하고, 두 선분 AM′, BM의 중점을 각각 N′, N″이라 하자.



$\overrightarrow{CN'}=\overrightarrow{CM'}+\overrightarrow{M'N'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM'}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$

이므로 $\overrightarrow{CN'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}=\frac{3}{4}\vec{a}$

마찬가지로 $\overrightarrow{CN''}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$이므로 $\overrightarrow{CN''}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{3}{4}\vec{b}$

점 N은 선분 N′N″ 위에 있으므로 점 N은 선분 N′N″의 내분점이다. 이때 점 N이 선분 N′N″을 $m : n$ ($m>0$, $n>0$)으로 내분한다고 하면

$\overrightarrow{CN}=\dfrac{m\overrightarrow{CN''}+n\overrightarrow{CN'}}{m+n}=\dfrac{m\left(\frac{3}{4}\vec{b}\right)+n\left(\frac{3}{4}\vec{a}\right)}{m+n}$

$=\dfrac{3n}{4(m+n)}\vec{a}+\dfrac{3m}{4(m+n)}\vec{b}$

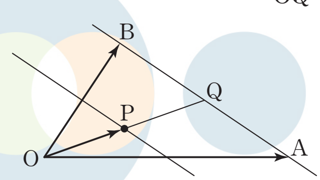
이므로 $p=\dfrac{3n}{4(m+n)}$, $q=\dfrac{3m}{4(m+n)}$

따라서 $p+q=\dfrac{3n+3m}{4(m+n)}=\dfrac{3(m+n)}{4(m+n)}=\dfrac{3}{4}$

참고

위의 (다른 풀이)에서 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

서로 다른 세 점 O, A, B와 점 P에 대하여 직선 OP와 직선 AB가 만나는 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 두 실수 p, q에 대하여 $p+q=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$가 성립한다.



6 $-\vec{a}+3\vec{b}=-(-2, -3)+3(0, 1)$
$=(2, 3)+(0, 3)=(2, 6)$
이므로 벡터 $-\vec{a}+3\vec{b}$의 y성분은 6이다.

답 ③

7 $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$에서

$(5, 1)=p(3, -1)+q(2, -2)$

$=(3p, -p)+(2q, -2q)$

$=(3p+2q, -p-2q)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3p+2q=5$이고 $-p-2q=1$

위의 두 등식을 연립하여 풀면 $p=3$, $q=-2$이므로

$p+q=3+(-2)=1$

답 ①

8 (i) $|\overrightarrow{AP}|$의 최솟값

x축 위의 점 P와 점 A$(1, 4)$ 사이의 거리인 $\overline{AP}$는 점 P의 좌표가 $(1, 0)$일 때 최소이므로 $|\overrightarrow{AP}|$의 최솟값은

$m_1=4-0=4$

(ii) $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{5}{2}\right)$이다.

이때 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=-2\overrightarrow{PM}$이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=|-2\overrightarrow{PM}|=2|\overrightarrow{PM}|$

이때 x축 위의 점 P와 점 $\mathrm{M}\left(3, \frac{5}{2}\right)$ 사이의 거리인 $\overline{MP}$는 점 P의 좌표가 $(3, 0)$일 때 최솟값 $\frac{5}{2}$를 가지므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=2|\overrightarrow{PM}|$의 최솟값은

$m_2=2\times\frac{5}{2}=5$

(iii) $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G의 좌표는

$\left(\frac{1+5+3}{3}, \frac{4+1+4}{3}\right)$, 즉 $(3, 3)$

$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$이므로

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-3\overrightarrow{PG}$

이고, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|=|-3\overrightarrow{PG}|=3|\overrightarrow{PG}|$

이때 x축 위의 점 P와 점 G$(3, 3)$ 사이의 거리 $\overline{GP}$는 점 P의 좌표가 $(3, 0)$일 때 최솟값 3을 가지므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|=3|\overrightarrow{PG}|$의 최솟값은

$m_3=3\times3=9$

(i), (ii), (iii)에서

$m_1+m_2+m_3=4+5+9=18$

답 18

다른 풀이

점 P의 좌표를 $(x, 0)$이라 하자.

(i) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x, 0)-(1, 4)=(x-1, -4)$이므로

$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x-1)^2+(-4)^2}\geq4$

(단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

그러므로 $|\overrightarrow{AP}|$의 최솟값은 $m_1=4$

(ii) $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(x, 0)-(5, 1)=(x-5, -1)$에서

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=(x-1, -4)+(x-5, -1)$

$=(2x-6, -5)$

이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(2x-6)^2+(-5)^2}\geq5$

(단, 등호는 $x=3$일 때 성립)

그러므로 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은 $m_2=5$

(iii) $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=(x, 0)-(3, 4)=(x-3, -4)$에서

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$

$=(x-1, -4)+(x-5, -1)+(x-3, -4)$

$=(3x-9, -9)$

이므로

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|=\sqrt{(3x-9)^2+(-9)^2}\geq9$

(단, 등호는 $x=3$일 때 성립)

그러므로 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $m_3=9$

(i), (ii), (iii)에서

$m_1+m_2+m_3=4+5+9=18$

Level 2 기본 연습

본문 52~53쪽

1 ①	2 ⑤	3 ③	4 ③	5 ④
6 ③	7 ⑤			

1 사각형의 꼭짓점의 개수는 4이므로 사각형의 서로 다른 두 꼭짓점을 각각 시점과 종점으로 하는 벡터의 개수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$ …… ㉠

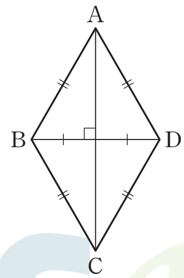
조건 (나)에서 ㉠의 벡터 중 서로 다른 단위벡터의 개수가 8이므로 사각형 ABCD의 4개의 변과 2개의 대각선 중에서 길이가 1이고 서로 평행하지 않은 선분의 개수는 4 $(=8\div2)$이어야 한다. …… ㉡

조건 (가)에서 두 점 A, C는 선분 BD의 수직이등분선 위의 점이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{CB}=\overline{CD}$

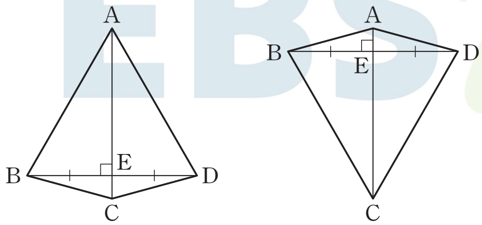
(i) $\overline{AB}=\overline{CB}$일 때

사각형 ABCD는 마름모이다.

이때 ㉡을 만족시키려면 마름모 ABCD의 한 변의 길이가 1이고 두 대각선의 길이도 모두 1이어야 하는데, 이는 불가능하다.



(ii) $\overline{AB}\neq\overline{CB}$일 때



사각형 ABCD가 ㉡을 만족시키려면

$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{AC}=1$ …… ㉢

또는

$\overline{CB}=\overline{CD}=\overline{AC}=\overline{BD}=1$ …… ㉣

이어야 한다.

이때 두 대각선의 교점을 E라 하면 ㉢에서

$\overline{AB}=1$, $\overline{BE}=\frac{1}{2}$

이므로 직각삼각형 ABE에서

$\overline{AE}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overline{CE}=\overline{AC}-\overline{AE}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

직각삼각형 BCE에서

$\overline{BC}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}=2-\sqrt{3}$

한편, ㉣의 경우에도 마찬가지로 $\overline{BC}=1$, $\overline{AB}^2=2-\sqrt{3}$ 이다.

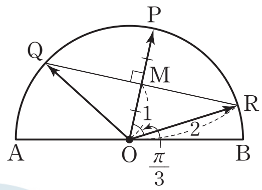
따라서

$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(2-\sqrt{3})+1=3-\sqrt{3}$

답 ①

2 선분 QR의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OM}$이므로 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$이 성립하려면 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$이어야 한다.

그러므로 두 선분 QR, OP는 서로 수직이등분해야 한다.



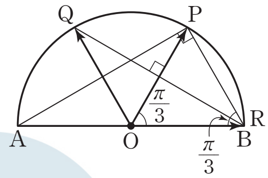
이때 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{1}{2}\times2=1$, $\overline{OQ}=\overline{OR}=2$이므로 두 직각삼각형 OMQ, ORM에서 $\angle MOQ=\angle ROM=\frac{\pi}{3}$

$\overline{AP}$의 값이 최대인 경우는 점 R이 점 B와 일치할 때이고,

이때 삼각형 ABP는 $\angle ABP=\frac{\pi}{3}$인 직각삼각형이므로

$|\overrightarrow{AP}|$의 최댓값은

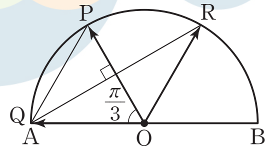
$M=\overline{AP}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$



$\overline{AP}$의 값이 최소인 경우는 점 Q가 점 A와 일치할 때이다.

이때 삼각형 AOP는 정삼각형이므로 $|\overrightarrow{AP}|$의 최솟값은

$m=\overline{AP}=\overline{OA}=2$



따라서 $M\times m=2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$

답 ⑤

3 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ …… ㉠

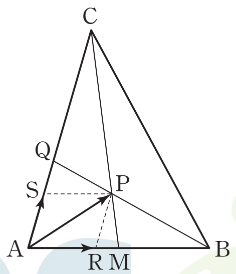
점 P는 선분 CM을 3 : 1로 내분하므로

$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}}{3+1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ …… ㉢

따라서 점 P를 지나고 두 직선 AC, AB에 평행한 직선이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 R, S라 하면 사각형 ARPS는 평행사변형이므로



$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}$

한편, $\overrightarrow{AR}=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AS}=\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AC}}\overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AC}}\overrightarrow{AC}$ …… ㉣

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$는 서로 평행하지 않으므로 ㉢, ㉣에서

$\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{4}$

이때 두 삼각형 ABQ, RBP는 서로 닮은 도형이므로

$\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{QP}}{\overline{QB}}=\dfrac{3}{8}$에서 $\dfrac{\overline{QP}}{\overline{QP}+\overline{BP}}=\dfrac{3}{8}$

$8\overline{QP}=3\overline{QP}+3\overline{BP}$, $5\overline{QP}=3\overline{BP}$

즉, $\overline{BP}:\overline{QP}=5:3$이므로 점 P는 선분 BQ를 $5:3$으로 내분하는 점이다.

따라서 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{5\overrightarrow{AQ}+3\overrightarrow{AB}}{5+3}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AQ}$이므로

$m=\dfrac{3}{8}$, $n=\dfrac{5}{8}$이고,

$m-n=-\dfrac{1}{4}$

답 ③

다른 풀이

점 M은 선분 AB의 중점이고, 점 P는 선분 CM을 $3:1$로 내분하므로

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ …… ㉠

두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ}$는 서로 평행하므로 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AC}$이고, 점 P는 선분 BQ를 $0<s<1$인 실수 s에 대하여 $s:(1-s)$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AQ}$

$\quad=(1-s)\overrightarrow{AB}+(s\times t)\overrightarrow{AC}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$는 서로 평행하지 않으므로

$1-s=\dfrac{3}{8}$, $s\times t=\dfrac{1}{4}$

$s=\dfrac{5}{8}$, $t=\dfrac{2}{5}$

따라서 $m=1-s=\dfrac{3}{8}$, $n=s=\dfrac{5}{8}$이므로

$m-n=-\dfrac{1}{4}$

4 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여

$\overrightarrow{PG}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$

$\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CG}$에서

$-\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}-4\overrightarrow{PC}=3(\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{PC})$

$=3\left(\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}-\overrightarrow{PC}\right)$

$=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-3\overrightarrow{PC}$

이므로

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

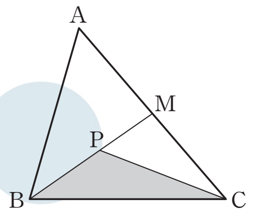
$\overrightarrow{PB}=-\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})$ …… ㉠

선분 AC의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$이므로 ㉠에서

$\overrightarrow{PB}=-\dfrac{2}{3}(2\overrightarrow{PM})=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{PM}$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$은 서로 반대 방향이고, $|\overrightarrow{PB}|:|\overrightarrow{PM}|=4:3$이므로 점 P는 선분 BM을 $4:3$으로 내분하는 점이다.

삼각형 ABC의 넓이가 S이므로 삼각형 MBC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}S$이고, 삼각형 PBC의 넓이는 삼각형 MBC의 넓이의 $\dfrac{4}{7}$배이므로



$T=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{2}{7}S$

따라서 $\dfrac{T}{S}=\dfrac{2}{7}$

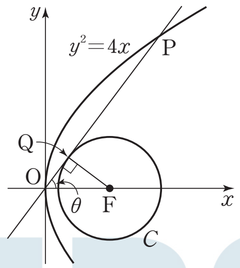
답 ③

5 조건 (나)의 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ $(k>0)$에서 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$는 서로 평행하므로 세 점 O, P, Q는 한 직선 위에 있고,

$k=\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$ …… ㉠

또 조건 (가)에서 점 Q의 y좌표는 양수이므로 두 점 P, Q는 제1사분면에 있다.

이때 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P에 대하여 점 Q가 오직 하나 존재하므로 직선 OP는 원 C와 점 Q에서 접해야 한다.



포물선 $y^2=4x$의 초점은 F$(1,\ 0)$이고 원 C의 반지름의 길이는 $\frac{4}{5}$이므로 직각삼각형 OFQ에서

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{1^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\angle$FOQ$=\theta$라 하면 $\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{FQ}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$이므로 직선 OP의 기울기는 $\frac{4}{3}$이고, 직선 OP의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x$이다.

$y^2=4x$에 $y=\frac{4}{3}x$를 대입하면 $\frac{16}{9}x^2=4x$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{9}{4}$이므로 점 P의 x좌표는 $\frac{9}{4}$이다.

한편, $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=\frac{3}{5}$이므로 점 Q의 x좌표는

$\overline{\mathrm{OQ}}\cos\theta=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

이때 두 선분 OP, OQ의 길이의 비는 두 점 P, Q의 x좌표의 비와 같다.

즉, $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{9}{4}:\frac{9}{25}=25:4$

이므로 ㉠에서

$k=\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\frac{25}{4}$

답 ④

6 직각삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OB}}^2}=\sqrt{52-16}=6$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}=3$

그러므로 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 모두 3이고,

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

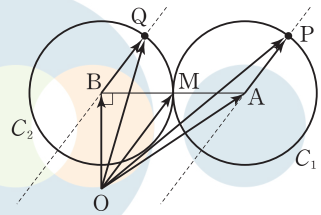
이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}})\\&=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|&\le|2\overrightarrow{\mathrm{OM}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\\&=2|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\\&=2\times5+3+3=16\end{aligned}$$

(단, 등호는 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$가 모두 같은 방향일 때 성립한다.)



따라서 위의 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$가 모두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$과 같은 방향일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$는 최댓값 16을 갖는다.

답 ③

7 타원 E의 초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면 $c^2=9-5=4$이므로 $c=2$이고, 선분 OF의 중점 M의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

또 타원 E의 장축의 한 끝점 A의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

한편,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\quad\cdots\cdots\text{㉠}\end{aligned}$$

이고, $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{MF}}=\overline{\mathrm{FA}}=1$이므로

$-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2\overrightarrow{\mathrm{MO}}=\overrightarrow{\mathrm{FO}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

이때

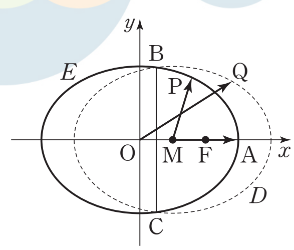
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\quad\cdots\cdots$ ㉡

이므로 ㉠, ㉡에서

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

그러므로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}$, 즉 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이다.

이때 점 P는 타원 E 위를 움직이므로 점 Q가 나타내는 도형 D는 타원 E를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 타원이고, 두 타원 E, D는 선분 OM의 수직이등분선에 대하여 서로 대칭이다.



즉, 두 타원 E, D의 교점을 B, C라 하면 두 점 B, C의 x좌표는 모두 $\frac{1}{2}$이다.

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{\frac{1}{4}}{9}+\frac{y^2}{5}=1$, $y^2=5\times\left(1-\frac{1}{36}\right)=\frac{175}{36}$

이므로 $y=\pm\frac{5\sqrt{7}}{6}$

따라서 두 점 B, C의 y좌표는 각각 $\frac{5\sqrt{7}}{6}$, $-\frac{5\sqrt{7}}{6}$이므로 두 교점 B, C 사이의 거리는

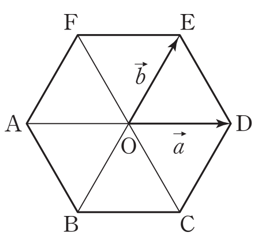
$2\times\frac{5\sqrt{7}}{6}=\frac{5\sqrt{7}}{3}$

답 ⑤

Level 3 **실력 완성** 본문 54쪽

1 ② 2 ③ 3 13

1



정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{OD}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OE}$라 하자.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OE}=\vec{b}$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$
$=\vec{b}-\vec{a}+\vec{b}=2\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{OD}=-2\vec{a}$

이므로

$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{DA}=\vec{b}+(2\vec{b}-\vec{a})-(-2\vec{a})$
$=\vec{b}+2\vec{b}-\vec{a}+2\vec{a}=\vec{a}+3\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{a}+\vec{b}$

한편, 조건 (가)를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$가 되기 위한 필요조건은

$\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$ (p, q는 $|p|\le 2$, $|q|\le 2$인 정수) …… ㉠

따라서 $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{DA}+\vec{x}=k\overrightarrow{AE}$에서

$\vec{a}+3\vec{b}+p\vec{a}+q\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{b})$

이므로 $(1+p)\vec{a}+(3+q)\vec{b}=k\vec{a}+k\vec{b}$ …… ㉡

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로 ㉡이 성립하려면 $1+p=k$이고 $3+q=k$이어야 한다.

즉, $1+p=3+q$에서 $q=p-2$이므로

$\vec{x}=p\vec{a}+(p-2)\vec{b}$

㉠에서 $|p|\le 2$, $|p-2|\le 2$이어야 하므로 정수 p의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 2이다.

$p=0$이면 $\vec{x}=-2\vec{b}=\overrightarrow{EB}$

$p=1$이면 $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}$

$p=2$이면 $\vec{x}=2\vec{a}=\overrightarrow{AD}$

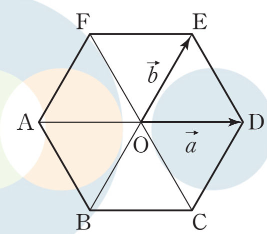
따라서 주어진 조건을 만족시키는 서로 다른 벡터는 $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{ED}(=\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{AD}$의 3개이다.

답 ②

참고

위의 풀이에서

$\vec{x}=p\vec{a}+(p-2)\vec{b}=p(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{b}$ …… ㉠

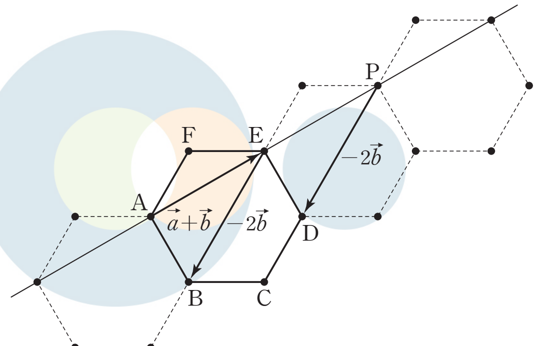


[그림 1]

이때 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}$이므로 벡터 $p(\vec{a}+\vec{b})$는 벡터 $\overrightarrow{AE}$와 평행하고, $-2\vec{b}=\overrightarrow{EB}$이다.

따라서 $\vec{x}=\overrightarrow{AX}$라 하면 ㉠에서

$\overrightarrow{AX}=p\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$ …… ㉡



[그림 2]

이때 벡터 $\overrightarrow{AX}$가 조건 (가), (나)를 만족시키는 경우는 ㉡에서 다음과 같다.

(ⅰ) $p=0$일 때

$\overrightarrow{AX}=\vec{0}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EB}$

(ⅱ) $p=1$일 때

$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}$

한편, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$이므로 $\overrightarrow{AX}$가 될 수 있는 벡터는 $\overrightarrow{AB}(=\overrightarrow{ED})$이다.

(ⅲ) $p=2$일 때

[그림 2]의 점 P에 대하여

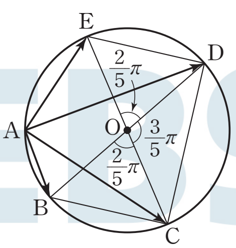
$\overrightarrow{AX}=2\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}$

한편, $p\neq 0$, $p\neq 1$, $p\neq 2$인 모든 실수 p에 대하여 ㉡을 만족시키고 정육각형 ABCDEF의 꼭짓점인 점 X는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 서로 다른 벡터는

$\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AB}(=\overrightarrow{ED})$, $\overrightarrow{AD}$의 3개이다.

2



원의 중심을 O라 하면 원주각의 성질에 의하여

$\angle BOC=2\times\frac{\pi}{5}=\frac{2}{5}\pi$

$\angle COD=2\times\frac{3}{10}\pi=\frac{3}{5}\pi$

$\angle DOE=2\times\frac{\pi}{5}=\frac{2}{5}\pi$

이때

$\angle BOC+\angle COD=\frac{2}{5}\pi+\frac{3}{5}\pi=\pi$

$\angle COD+\angle DOE=\frac{3}{5}\pi+\frac{2}{5}\pi=\pi$

이므로 두 선분 BD, CE는 모두 원의 지름이고, 두 선분의 중점은 모두 점 O이다.

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE})\\&=2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{AO}=4\overrightarrow{AO}\end{aligned}$$

이고, $|\overrightarrow{AO}|=1$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|=|4\overrightarrow{AO}|=4|\overrightarrow{AO}|=4\times 1=4$

답 ③

3

타원 E: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이므로 $c^2=25-16=9$이고 $c>0$이므로 $c=3$

타원 E가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\frac{x^2}{25}+\frac{0}{16}=1$, $x^2=25$

에서 $x=\pm 5$이므로 점 A의 좌표는 $(5, 0)$이다.

한편, 타원 E의 장축의 길이는 $2\times 5=10$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{F'P}+\overline{FP}=2\times 5=10$

$\overrightarrow{F'Q}=\left(1+\frac{|\overrightarrow{FP}|}{|\overrightarrow{F'P}|}\right)\overrightarrow{F'P}$에서

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{F'Q}|&=\left|\left(1+\frac{|\overrightarrow{FP}|}{|\overrightarrow{F'P}|}\right)\overrightarrow{F'P}\right|=\left(1+\frac{|\overrightarrow{FP}|}{|\overrightarrow{F'P}|}\right)\times|\overrightarrow{F'P}|\\&=|\overrightarrow{F'P}|+|\overrightarrow{FP}|=\overline{F'P}+\overline{FP}=10\end{aligned}$$

이고, $1+\frac{|\overrightarrow{FP}|}{|\overrightarrow{F'P}|}$는 1보다 큰 실수이므로

$\overrightarrow{F'Q}=\left(1+\frac{|\overrightarrow{FP}|}{|\overrightarrow{F'P}|}\right)\overrightarrow{F'P}$인 점 Q는 반직선 F′P 위에 있고

$\overline{F'Q}=10$이다.

즉, 점 Q는 점 $F'(-3, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원 위의 점이므로 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$(x+3)^2+y^2=100$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FQ}$에서 $\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AR}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{FQ}$, $\overrightarrow{AR}$은 서로 같다.

이때 점 $A(5, 0)$은 점 $F(3, 0)$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로 점 R은 점 Q를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이다.

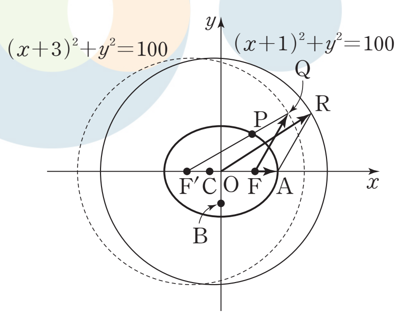
그러므로 점 R이 나타내는 도형은 원 $(x+3)^2+y^2=100$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원

$\{(x-2)+3\}^2+y^2=100$

즉, $(x+1)^2+y^2=100$ ...... ㉠

원 ㉠의 중심을 C, 반지름의 길이를 r이라 하면

$C(-1, 0)$, $r=10$이다.



따라서 점 $B(0, -2\sqrt{2})$에 대하여

$\overline{BC}=\sqrt{(-1)^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

이므로 점 B와 원 ㉠ 위의 점 R 사이의 거리인 $|\overrightarrow{BR}|$의 최댓값은

$\overline{BC}+r=3+10=13$

답 13

참고

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FQ}$에서

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OF})=\overrightarrow{OQ}+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OF})$

$=\overrightarrow{OQ}+\{(5, 0)-(3, 0)\}=\overrightarrow{OQ}+(2, 0)$

이므로 점 R은 점 Q를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 위의 점이다.

05 벡터의 내적

유제 본문 57~63쪽

1 ①	2 ⑤	3 ①	4 ⑤	5 ②
6 ②	7 ②	8 ①		

1 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2, 1)-(1, 3)=(-3, -2)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-1, 2)-(-2, 1)=(1, 1)$

이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-3, -2)\cdot(1, 1)$

$=(-3)\times1+(-2)\times1=-5$

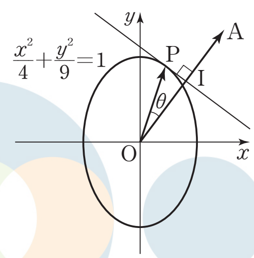
답 ①

2 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$인 경우가 존재하므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최댓값을 구하기 위해서는 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$인 경우만 생각해도 충분하다.

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$일 때, 점 P를 지나고 직선 OA에 수직인 직선과 직선 OA의 교점을 I라 하면 $|\overrightarrow{OP}|\cos\theta=|\overrightarrow{OI}|$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OI}|$

이때 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$로 일정하므로 $|\overrightarrow{OI}|$의 값이 최대일 때 $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OI}|$도 최대이다.



$|\overrightarrow{OI}|$의 값이 최대인 경우는 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 직선 OA와 수직일 때이다.

직선 OA의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 OA에 수직인 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이어야 한다.

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 $-\frac{3}{4}$이며 제1사분면을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{3}{4}x+\sqrt{4\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2+9}$$

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3\sqrt{5}}{2}$, 즉 $3x+4y-6\sqrt{5}=0$ …… ㉠

직선 ㉠과 직선 OA의 교점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OH}}$는 원점과 직선 ㉠ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|-6\sqrt{5}|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최댓값은

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=5\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=6\sqrt{5}$$

답 ⑤

다른 풀이

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3, 4)\cdot(x, y)=3x+4y=k$

$3x=k-4y$ …… ㉠

㉠을 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, 즉 $9x^2+4y^2-36=0$에 대입하면

$(k-4y)^2+4y^2-36=0$

$20y^2-8ky+k^2-36=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=16k^2-20(k^2-36)=-4k^2+720\ge 0$$

에서 $k^2\le 180$

따라서 $-6\sqrt{5}\le k\le 6\sqrt{5}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최댓값은 $6\sqrt{5}$이다.

3 벡터의 내적의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=(-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{BC}})=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=10+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=15\end{aligned}$$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=5$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$

답 ①

4
$$\begin{aligned}|2\vec{a}-\vec{b}|^2&=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})\\&=4(\vec{a}\cdot\vec{a})-2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(\vec{b}\cdot\vec{a})+\vec{b}\cdot\vec{b}\\&=4|\vec{a}|^2-4(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2\\&=4\times2^2-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+|\vec{b}|^2\\&=16-4\times2|\vec{b}|\times\frac{1}{2}+|\vec{b}|^2\\&=16-4|\vec{b}|+|\vec{b}|^2\\&=21\end{aligned}$$

이므로

$|\vec{b}|^2-4|\vec{b}|-5=0$

$(|\vec{b}|-5)(|\vec{b}|+1)=0$

$|\vec{b}|\ge 0$이므로 $|\vec{b}|=5$

답 ⑤

다른 풀이

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하고, $2\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$이라 하면

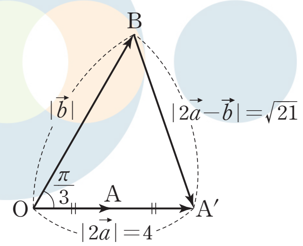
$\overline{\mathrm{OA'}}=2|\vec{a}|=2\times2=4$

한편, $2\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA'}}$이므로

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\overline{\mathrm{BA'}}=\sqrt{21}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\angle\mathrm{A'OB}=\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$



삼각형 OA′B에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{A'B}}^2=\overline{\mathrm{OA'}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$21=16+|\vec{b}|^2-2\times4|\vec{b}|\times\frac{1}{2}$$

$|\vec{b}|^2-4|\vec{b}|-5=0$, $(|\vec{b}|-5)(|\vec{b}|+1)=0$

$|\vec{b}|\ge 0$이므로 $|\vec{b}|=5$

5 원점 O에 대하여 직선 AB의 방향벡터는

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4, -1)-(2, 3)=(2, -4)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(k, 1)\cdot(2, -4)=2k-4=0$

따라서 $k=2$

답 ②

6 점 A$(1,\ 2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(3,\ 4)$인 직선 l의 방정식은

$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}$

$4(x-1)=3(y-2)$

$4x-3y+2=0$

한편, 직선 l 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 원점 O와 직선 l 사이의 거리와 같다.

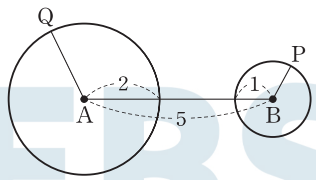
따라서 $|\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 $\frac{|2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{2}{5}$

답 ②

7 $|\overrightarrow{AB}|=5$이므로 선분 AB의 길이는 5이다.

$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BP}|=1$이므로 점 P는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AQ}|^2=4$에서 $|\overrightarrow{AQ}|=2$이므로 점 Q는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.



이때

$\overline{PQ}\ge\overline{AB}-\overline{PB}-\overline{AQ}=5-1-2=2$

(단, 등호는 두 점 P, Q가 선분 AB 위에 있을 때 성립한다.)

이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최솟값은 2이다.

답 ②

8 원점을 O라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$라 하면

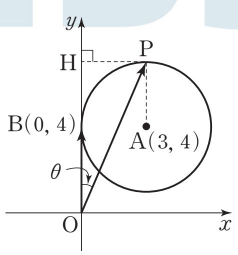
$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}-\vec{b}|$에서

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BA}|$

이때 $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(0-3)^2+(4-4)^2}=3$이므로 $|\overrightarrow{AP}|=3$

따라서 점 P는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.



두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 그림에서 θ는 예각이다.

따라서 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\vec{p}\cdot\vec{b}=|\vec{p}||\vec{b}|\cos\theta$

$=\overline{OB}\times\overline{OH}=4\times\overline{OH}$

$\le 4\times(4+3)=28$

(단, 등호는 점 P의 좌표가 $(3,\ 7)$일 때 성립한다.)

이므로 $\vec{p}\cdot\vec{b}$의 최댓값은 28이다.

답 ①

Level **1** **기초 연습** 본문 64~65쪽

1 ④	**2** ⑤	**3** ①	**4** ②	**5** ④
6 ④	**7** ④	**8** ③		

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ -1)\cdot(3,\ -2)$

$=2\times3+(-1)\times(-2)=6+2=8$

답 ④

2 $\vec{a}+\vec{b}=(x,\ 2)+(3,\ 1)=(x+3,\ 3)$

$\vec{c}-\vec{b}=(1,\ x)-(3,\ 1)=(-2,\ x-1)$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=(x+3,\ 3)\cdot(-2,\ x-1)$

$=(x+3)\times(-2)+3(x-1)$

$=-2x-6+3x-3$

$=x-9=0$

따라서 $x=9$

답 ⑤

3 $|\vec{a}+2\vec{b}|=3$이므로

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(2\vec{b})+(2\vec{b})\cdot\vec{a}+(2\vec{b})\cdot(2\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{b}\cdot\vec{a})+4(\vec{b}\cdot\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+4|\vec{b}|^2$

$=1^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+4\times2^2$

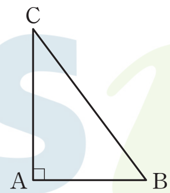
$=17+4(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$=9$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{9-17}{4}=-2$

답 ①

4 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$이므로 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$



이때

$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=3,\ |\overrightarrow{BC}|=\overline{BC}=5$

이므로 직각삼각형 ABC에서

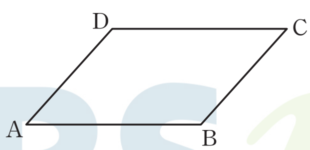
$\overline{AC}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$

답 ②

5 평행사변형 ABCD에서



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로

$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|=3$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=8+|\overrightarrow{BC}|^2\\&=8+3^2=17\end{aligned}$$

답 ④

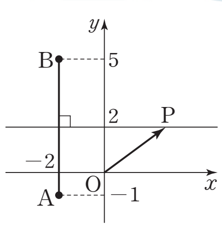
6 원점을 O라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{OA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB},\ \vec{p}=\overrightarrow{OP}$라 하면

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$에서

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|$

즉, $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$이므로 점 P는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는 $(-2,\ 2)$이고 선분 AB는 y축에 평행하므로 점 P는 직선 $y=2$ 위의 점이다.



이때

$\vec{p}\cdot\vec{p}=|\vec{p}|^2=\overline{OP}^2\geq2^2=4$

(단, 등호는 점 P의 좌표가 $(0,\ 2)$일 때 성립한다.)

이므로 $\vec{p}\cdot\vec{p}$의 최솟값은 4이다.

답 ④

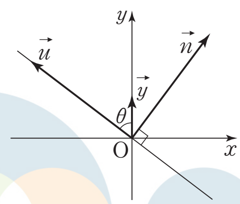
7 법선벡터가 $\vec{n}=(3,\ 4)$인 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a,\ b)$라 하면 $\vec{n}\perp\vec{u}$이므로

$\vec{n}\cdot\vec{u}=(3,\ 4)\cdot(a,\ b)=3a+4b=0$

즉, $b=-\dfrac{3}{4}a$이므로 $a=-4,\ b=3$일 때

$\vec{u}=(-4,\ 3)$

이때 y축의 방향벡터를 $\vec{y}=(0,\ 1)$이라 하면 θ는 두 벡터 $\vec{u}=(-4,\ 3),\ \vec{y}=(0,\ 1)$이 이루는 예각의 크기와 같다.



따라서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{y}|}{|\vec{u}||\vec{y}|}=\frac{|(-4,\ 3)\cdot(0,\ 1)|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-4\times0+3\times1|}{5\times1}=\frac{3}{5}$$

답 ④

다른 풀이

y축은 x축과 수직이므로 y축의 법선벡터는 $\vec{x}=(1,\ 0)$으로 놓을 수 있다.

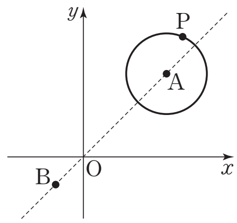
이때 두 직선이 이루는 각의 크기는 두 직선의 법선벡터가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{x}|}{|\vec{n}||\vec{x}|}=\frac{|(3,\ 4)\cdot(1,\ 0)|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{|3\times1+4\times0|}{5\times1}=\frac{3}{5}$$

8 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$라 하면 $|\vec{a}-\vec{p}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{PA}|$이고,

$|\vec{b}|=|(-1,\ -1)|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{a}-\vec{p}|=|\vec{b}|$에서 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{2}$이므로 점 P는 점 A(3, 3)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위의 점이다.



이때 $|\vec{p}-\vec{b}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BP}|$이고,

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$이므로

$\overline{BP}\le\overline{AB}+\overline{AP}=4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

(단, 등호는 점 A가 선분 BP 위에 있을 때 성립한다.)

따라서 $|\vec{p}-\vec{b}|$의 최댓값은 $5\sqrt{2}$이다.

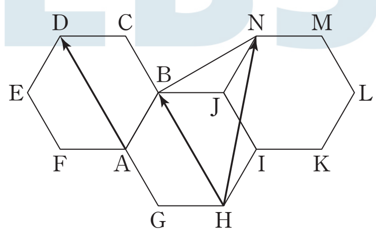
답 ③

Level 2 기본 연습

본문 66~67쪽

1 ③	2 ④	3 ②	4 ⑤	5 ①
6 ③	7 ①			

1



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HB}$이다.

이때 $\overline{BN}\,/\!/\,\overline{AJ}$이고 $\overline{AJ}\perp\overline{HB}$이므로 $\overline{BN}\perp\overline{HB}$

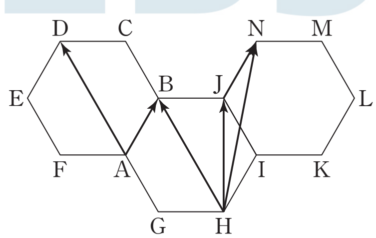
따라서 점 N에서 직선 HB에 내린 수선의 발이 점 B이고

$\overline{HB}=2\overline{BJ}=2\times2=4$이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HN}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HN}=|\overrightarrow{HB}|\,|\overrightarrow{HB}|=4^2=16$

답 ③

다른 풀이



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HB}$이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HN}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HN}$

$=\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JN})$

$=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{JN}$ …… ㉠

이때 직각삼각형 HJB에서

$\angle HBJ=\frac{1}{2}\angle ABJ=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

이므로

$\overline{HJ}=\overline{BJ}\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$, $\angle JHB=\frac{\pi}{6}$

그러므로

$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HJ}=|\overrightarrow{HB}|\,|\overrightarrow{HJ}|\cos\frac{\pi}{6}=4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$ …… ㉡

또 $\overrightarrow{JN}=\overrightarrow{AB}$이고, $\angle DAB=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{JN}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{3}=4\times2\times\frac{1}{2}=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

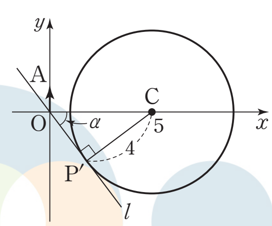
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HN}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{JN}=12+4=16$

2 원 $(x-5)^2+y^2=16$의 중심을 C라 하면 C$(5,\ 0)$이고 반지름의 길이는 4이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OP}|\cos\theta$

에서 $\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OP}|}=\cos\theta$이므로 $\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OP}|}$의 값이 최소이려면 θ가 최대이어야 한다.



θ가 최대일 때는 그림과 같이 원점을 지나는 직선 l이 원 $(x-5)^2+y^2=16$과 제4사분면에서 접할 때이고, 이때의 접점이 P′이다.

$\angle P'OC=\alpha$라 하면 직각삼각형 OP′C에서

$\sin\alpha=\dfrac{\overline{CP'}}{\overline{OC}}=\dfrac{4}{5}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}$

이때 직선 l의 기울기는 음수이므로 직선 l의 방정식은

$y=-(\tan\alpha)x$, 즉 $y=-\dfrac{4}{3}x$ …… ㉠

㉠을 원의 방정식에 대입하면

$(x-5)^2+\dfrac{16}{9}x^2=16$, $9(x-5)^2+16x^2=144$

$25x^2-90x+225=144$, $25x^2-90x+81=0$

$(5x-9)^2=0$

$x=\dfrac{9}{5}$이므로 점 P′의 좌표는

$\left(\dfrac{9}{5},\ -\dfrac{4}{3}\times\dfrac{9}{5}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{9}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$

따라서

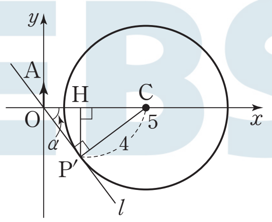
$\overrightarrow{AP'}\cdot\overrightarrow{AP'}=|\overrightarrow{AP'}|^2=\left(\dfrac{9}{5}-0\right)^2+\left(-\dfrac{12}{5}-1\right)^2$

$=\dfrac{81}{25}+\dfrac{289}{25}=\dfrac{370}{25}=\dfrac{74}{5}$

답 ④

참고1

위 풀이에서 점 P′의 좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.



직각삼각형 OP′C에서 $\overline{OP'}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

점 P′에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 OP′H, OCP′은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{OH}:\overline{HP'}:\overline{OP'}=3:4:5$에서

$\overline{OH}:\overline{HP'}:3=3:4:5$

$\overline{OH}=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$, $\overline{HP'}=3\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{5}$

따라서 제4사분면의 점 P′의 좌표는

$(\overline{OH},\ -\overline{HP'})$, 즉 $\left(\dfrac{9}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$

참고2

위 풀이에서 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

이때 $\overline{OP'}=\overline{OC}\times\cos\alpha=5\times\dfrac{3}{5}=3$이고,

$\theta=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$이므로

$\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$

그러므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP'}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP'}|\cos\theta$

$=1\times3\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{12}{5}$

한편, $\overrightarrow{AP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OA}$이므로

$|\overrightarrow{AP'}|^2=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP'}|^2$

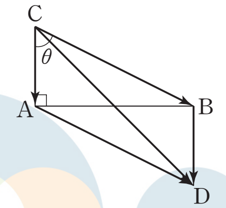
$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP'})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP'})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OP'}$

$=|\overrightarrow{OA}|^2-2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP'})+|\overrightarrow{OP'}|^2$

$=1^2-2\times\left(-\dfrac{12}{5}\right)+3^2=\dfrac{74}{5}$

3 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$이므로 사각형 ADBC는 평행사변형이다.



두 벡터 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle BCA$이므로

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\theta=\overline{CA}\times\overline{CA}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}$이므로 $|\overrightarrow{BD}|=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$에서

$\overline{CA}=\overline{CA}\times\overline{CA}$

즉, $\overline{CA}=1$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2$

$=1^2+(\sqrt{5})^2=6$

답 ②

4 점 A(2, 1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1,\ 2)$인 직선 l의 방정식은

$1\times(x-2)+2(y-1)=0$, 즉 $x+2y-4=0$

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BP}|^2=k$, 즉 $|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{k}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 C는 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원이므로 원 C의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=k$

이때 직선 l이 원 C와 오직 한 점에서 만나므로 접해야 한다.
즉, 원 C의 중심 B$(3,\ -1)$과 직선 $x+2y-4=0$ 사이의 거리는 원 C의 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$와 같아야 한다.

따라서 $\sqrt{k}=\dfrac{|3+2\times(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$이므로

$k=\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{9}{5}$

답 ⑤

5 점 P를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 직선 AB와 만나는 점을 H라 하자.
점 P가 점 A와 일치하면 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
점 P가 점 A와 일치하지 않을 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

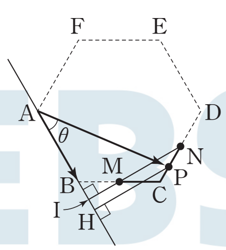
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(|\overrightarrow{AP}|\cos\theta)|\overrightarrow{AB}|$$

$$=\begin{cases}|\overrightarrow{AH}| & \left(0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -|\overrightarrow{AH}| & \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)\end{cases}$$

$k\le0$이면 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\ge k$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB, BC, CD, DE를 모두 포함하게 된다. 이때 점 P가 나타내는 도형의 길이는 4 이상이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $k>0$, 즉 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$이어야 하고, 이때

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AH}|\ge k$
를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이가 1이어야 한다.
…… ㉠



한편, 두 선분 BC, CD의 중점을 각각 M, N이라 하고, 점 N에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 M은 선분 NI 위에 있고, $\overline{CM}+\overline{CN}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$이므로 ㉠을 만족시키려면 점 P는 선분 CM 또는 선분 CN 위에 있어야 한다.
따라서 $k=\overline{AI}$이고

$\overline{AI}=\overline{AB}+\overline{BI}=1+\overline{BM}\cos\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}$

이므로 $k=\dfrac{5}{4}$

답 ①

6 $\overrightarrow{PF}+4\overrightarrow{QF}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{PF}=-4\overrightarrow{QF}$이므로 점 F는 선분 PQ를 $4:1$로 내분하는 점이다.
즉, $\overline{PF}:\overline{FQ}=4:1$이므로
$\overline{FQ}=k$, $\overline{PF}=4k$ (k는 양의 상수)
로 놓을 수 있다.
타원 E의 장축의 길이는 12이므로 타원의 정의에 의하여
$\overline{PF'}=12-4k$, $\overline{F'Q}=12-k$
이때 $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{F'Q}|$에서
$4k+k=12-k$
즉, $k=2$이므로
$\overline{PF'}=4$, $\overline{PF}=8$, $\overline{FQ}=2$, $\overline{F'Q}=10$
이등변삼각형 PF′Q에서 $\angle$QPF′$=\theta$라 하고, 선분 PF′의 중점을 M이라 하면 $\angle$PMQ$=\dfrac{\pi}{2}$이므로

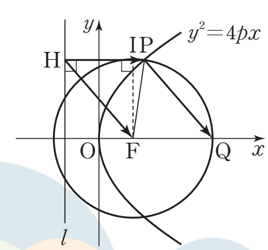
$$\cos\theta=\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}}=\frac{\frac{1}{2}\times4}{10}=\frac{1}{5}$$

따라서

$$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PF'}=|\overrightarrow{PF}||\overrightarrow{PF'}|\cos\theta=8\times4\times\frac{1}{5}=\frac{32}{5}$$

답 ③

7



두 점 P, Q는 중심이 F이고 반지름의 길이가 7인 원 위에 있으므로 $\overline{PF}=\overline{QF}=7$ …… ㉠
포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{QF}=\overline{PH}$이고 두 직선 QF, PH는 서로 평행하므로 사각형 FQPH는 평행사변형이고, 이때 $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{PQ}$
…… ㉢
㉢에서 $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HF}=42$
두 벡터 $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{HF}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, 점 F에서 직선 HP에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HF}=|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{HF}|\cos\theta$

$\qquad=|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{HI}|=7|\overrightarrow{HI}|=42$

에서 $|\overrightarrow{HI}|=6$

이때 원점 O에 대하여 $\overline{HI}=2\overline{OF}=6$,

$\overline{IP}=\overline{HP}-\overline{HI}=7-6=1$이므로 직각삼각형 IFP에서

$\overline{FI}=\sqrt{\overline{FP}^2-\overline{IP}^2}=\sqrt{49-1}=4\sqrt{3}$

이고, 직각삼각형 HFI에서

$\overline{HF}=\sqrt{\overline{FI}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{48+36}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

따라서 $|\overrightarrow{FP}-\overrightarrow{FQ}|=|\overrightarrow{QP}|=|\overrightarrow{FH}|=2\sqrt{21}$

답 ①

Level 3 **실력 완성** 본문 68~69쪽

1 ①	2 20	3 ②	4 ⑤	5 ①

1 원의 중심을 원점 O로 하고 직선 UR을 x축으로 하는 좌표평면을 설정하면 네 점 A, B, Q, S의 좌표는 각각

$(-\sqrt{3}, -1)$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(1, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$

이므로

$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ}=(-\sqrt{3}-1, -1+\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OB}=(1-\sqrt{3}, \sqrt{3}+1)$

따라서

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{BS}=(-\sqrt{3}-1, -1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3}, \sqrt{3}+1)$

$\qquad=(-\sqrt{3}-1)(1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$

$\qquad=\{(-\sqrt{3})^2-1^2\}+\{(\sqrt{3})^2-1^2\}$

$\qquad=2+2=4$

답 ①

다른 풀이 1

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{QS}=0$에서 $\overline{AB}\perp\overline{QS}$ …… ㉠

선분 PS는 원의 지름이므로 $\overline{PQ}\perp\overline{QS}$ …… ㉡

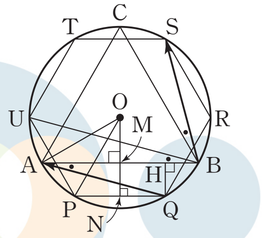
㉠, ㉡에서 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{PQ}$

마찬가지로 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{RS}$, $\overline{CA}\,/\!/\,\overline{TU}$

정삼각형 ABC와 정육각형 PQRSTU가 이와 같은 조건을 만족시키려면 세 점 A, B, C는 각각 세 호 UP, QR, ST를 이등분하는 점이고, 세 호 QB, SC, UA의 길이가 서로 같으므로 원주각의 크기도 서로 같다. 즉,

$\angle QAB=\angle SBC=\angle UBA=\dfrac{\pi}{12}$ …… ㉢

이므로 엇각의 성질에 의하여 두 직선 AQ, UB는 서로 평행하고, 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{BS}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{BU}$, $\overrightarrow{BS}$가 이루는 각의 크기와 같다.



㉢에서 $\angle SBU=\angle CBA=\dfrac{\pi}{3}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{BS}$가 이루는 각의 크기도 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

한편, 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 두 선분 AB, PQ에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 선분 AB, PQ의 중점이다.

$\overline{OA}=\overline{OP}=2$이고, $\angle AOM=\angle NPO=\dfrac{\pi}{3}$이므로 서로 합동인 두 직각삼각형 OAM, PON에서

$\overline{AM}=\overline{ON}=\overline{OA}\sin\dfrac{\pi}{3}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{OM}=\overline{PN}=\overline{OA}\cos\dfrac{\pi}{3}=2\times\dfrac{1}{2}=1$

점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{MH}=\overline{NQ}=\overline{PN}=1$이므로

$\overline{AH}=\overline{AM}+\overline{MH}=\sqrt{3}+1$

$\overline{QH}=\overline{NM}=\overline{ON}-\overline{OM}=\sqrt{3}-1$

그러므로 직각삼각형 AQH에서

$\overline{AQ}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=2\sqrt{2}$

한편, 두 삼각형 AQB, BSC는 서로 합동이므로

$\overline{BS}=\overline{AQ}=2\sqrt{2}$

따라서

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{BS}=|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{BS}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=4$

다른 풀이 2

원의 중심을 O라 하면 점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\angle AOB=\dfrac{1}{3}\times2\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

정육각형 PQRSTU에서 두 삼각형 OQR, ORS는 모두 정삼각형이므로 $\angle QOR=\angle ROS=\dfrac{\pi}{3}$

이때 직선 OB는 $\angle QOR$의 이등분선이므로

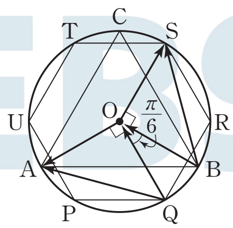
$\angle QOB=\angle BOR=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

그러므로

$\angle BOS = \angle BOR + \angle ROS = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

$\angle AOQ = \angle AOB - \angle QOB = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\angle AOS = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{6}\pi$



따라서

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{BS} = (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OS})$

$= \overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OS}$

$= |\overrightarrow{QO}||\overrightarrow{BO}|\cos\frac{\pi}{6} + |\overrightarrow{QO}||\overrightarrow{OS}|\cos\left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right)$

$+ |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{BO}|\cos\left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right)$

$+ |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OS}|\cos\frac{5}{6}\pi$

$= 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 \times \frac{1}{2}$

$+ 2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 4$

2 $m_1 < m_2$라고 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

원 $x^2 + y^2 = 15$의 중심은 원점 O이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$이다.

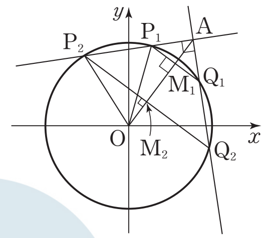
이때 $\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$이고, $5 > \sqrt{15}$이므로 점 A는 원 $x^2 + y^2 = 15$의 외부에 있다.

한편, $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$이고, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$에서 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$이므로 삼각형 APQ는 $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}|$

그런데 주어진 조건에서 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}|$의 값은 두 개이므로 삼각형 APQ가 $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이 되도록 하는 두 점 P, Q의 순서쌍은 그림과 같이 (P_1, Q_1), (P_2, Q_2)의 2개가 존재한다.



선분 P_1Q_1의 중점을 M_1, 선분 P_2Q_2의 중점을 M_2라 하고, $\overline{AM_1} = a$, $\overline{AM_2} = b$라 하면

$\overline{P_1M_1} = a$, $\overline{OM_1} = 5 - a$, $\overline{P_2M_2} = b$, $\overline{OM_2} = 5 - b$

이므로 직각삼각형 OM_1P_1에서

$(\sqrt{15})^2 = (5-a)^2 + a^2$, $2a^2 - 10a + 10 = 0$

$a^2 - 5a + 5 = 0$ ...... ㉠

마찬가지로 직각삼각형 OM_2P_2에서

$b^2 - 5b + 5 = 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 a, b는 이차방정식 $x^2 - 5x + 5 = 0$의 두 실근이고, $a < b$이다.

즉, $a = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$이므로

$m_1 = |\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AQ_1}| = 2|\overrightarrow{AM_1}| = 2a = 5 - \sqrt{5}$

$m_2 = |\overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AQ_2}| = 2|\overrightarrow{AM_2}| = 2b = 5 + \sqrt{5}$

따라서 $m_1 \times m_2 = (5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5}) = 25 - 5 = 20$

답 20

참고

두 점 P_1, Q_1의 위치가 서로 바뀌거나, 두 점 P_2, Q_2의 위치가 서로 바뀌는 경우도 가능하고, 이 경우에도 $m_1 \times m_2 = 20$이다.

3 선분 AB의 중점을 M이라 하면 M(2, 1)이고, $\overline{MA} = \overline{MB} = \sqrt{2}$이다.

한편,

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$

$= (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB})$

$= \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

$= |\overrightarrow{PM}|^2 + \overrightarrow{PM} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

이고,

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

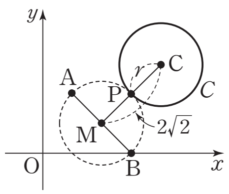
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|\cos\pi$

$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times (-1) = -2$

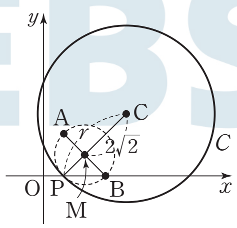
이므로

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PM}|^2 - 2$ ...... ㉠

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값이 0이므로 ㉠에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$의 최솟값은 2이어야 한다.
원 C의 중심을 C라 하면 C$(4,\ 3)$이므로
$\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{(2-4)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$
원 C의 반지름의 길이는 r이므로 원 C 위의 임의의 점 P에 대하여
$|\overline{\mathrm{CM}}-r|\le\overline{\mathrm{PM}}\le\overline{\mathrm{CM}}+r$
즉, $|2\sqrt{2}-r|\le\overline{\mathrm{PM}}\le2\sqrt{2}+r$ …… ㉡
㉡에서 $|2\sqrt{2}-r|\le\overline{\mathrm{PM}}$의 등호가 성립할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$은 최솟값을 갖고, $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$의 최솟값은 2이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.
(ⅰ) 점 P가 선분 CM 위에 있을 때



$2\sqrt{2}-r=\sqrt{2}$에서 $r=\sqrt{2}$
(ⅱ) 점 M이 선분 CP 위에 있을 때



$r-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$에서 $r=3\sqrt{2}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 최솟값이 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 모든 양수 r의 값의 곱은
$\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$

답 ②

참고

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값이 0인 경우는 위의 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원이 원 C와 한 점에서 만날 때이다.

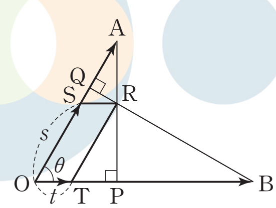
4 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=3\times4\times\cos\theta=12\cos\theta$
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6$이므로 $12\cos\theta=6$에서
$\cos\theta=\frac{1}{2}$

점 O를 원점으로 하고 반직선 OB를 x축의 양의 방향으로 하는 좌표축을 설정하자.
$\overline{\mathrm{OB}}=4$이므로 점 B의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.
$\overline{\mathrm{OA}}=3$이고 $\cos\theta=\frac{1}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이고, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이므로 점 Q의 좌표는 $(1,\ \sqrt{3})$이다.
이때 직선 AP의 방정식은 $x=\frac{3}{2}$이고 직선 BQ의 방정식은
$y-0=\frac{0-\sqrt{3}}{4-1}(x-4)$, 즉 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$
이므로 두 직선 AP, BQ의 교점 R의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$이다.
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$에서
$\left(\frac{3}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)=m\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+n(4,\ 0)$
이므로
$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}m+4n$이고 $\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}m$
따라서 $m=\frac{5}{9}$, $n=\frac{1}{6}$이므로
$m+n=\frac{5}{9}+\frac{1}{6}=\frac{13}{18}$

답 ⑤

다른 풀이

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=3\times4\times\cos\theta=12\cos\theta$
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6$이므로 $12\cos\theta=6$에서
$\cos\theta=\frac{1}{2}$
이때 두 직각삼각형 AOP, BQO에서
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=4\times\frac{1}{2}=2$



그림과 같이 점 R을 지나고 두 직선 OB, OA와 평행한 직선이 두 선분 OA, OB와 만나는 점을 각각 S, T라 하고, $\overline{\mathrm{OS}}=s$, $\overline{\mathrm{OT}}=t$라 하면

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT}$ …… ㉠

이때

$\overrightarrow{OS}=\dfrac{|\overrightarrow{OS}|}{|\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OA}=\dfrac{s}{3}\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OT}=\dfrac{|\overrightarrow{OT}|}{|\overrightarrow{OB}|}\overrightarrow{OB}=\dfrac{t}{4}\overrightarrow{OB}$

이므로 ㉠에서

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{s}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{4}\overrightarrow{OB}$ …… ㉡

한편, $\overline{QS}=2-s$, $\overline{TP}=\dfrac{3}{2}-t$이고 두 직각삼각형 RQS, RTP에서

$\cos(\angle QSR)=\cos(\angle RTP)=\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

이므로

$\overline{SR}=2\overline{QS}=4-2s$, $\overline{TR}=2\overline{TP}=3-2t$ …… ㉢

이때 평행사변형 OTRS에서 $\overline{SR}=t$, $\overline{TR}=s$이므로 ㉢에서

$4-2s=t$이고 $3-2t=s$

$t=4-2s$를 $s=3-2t$에 대입하여 정리하면

$s=3-2(4-2s)=-5+4s$

$s=\dfrac{5}{3}$, $t=4-2\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{2}{3}$

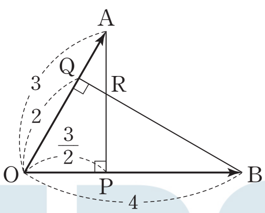
㉡에서 $\overrightarrow{OR}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$

따라서 $m=\dfrac{5}{9}$, $n=\dfrac{1}{6}$이므로

$m+n=\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{18}$

참고

주어진 조건에서 주어진 그림은 다음과 같다.



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|=3\times2=6$

이때 $\overrightarrow{OA}\cdot(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})=m|\overrightarrow{OA}|^2+n\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=9m+6n=6$ …… ㉠

마찬가지로 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|=4\times\dfrac{3}{2}=6$이므로

$\overrightarrow{OB}\cdot(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB})=m\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+n|\overrightarrow{OB}|^2$

$=6m+16n=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$m=\dfrac{5}{9}$, $n=\dfrac{1}{6}$

5 선분 BP의 중점을 P′이라 하면 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BP'}$이므로

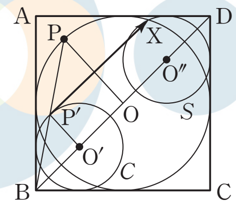
$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BP}+k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$에서

$\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BP'}+k\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BX}-\overrightarrow{BP'}=k\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{P'X}=k\overrightarrow{BD}$ …… ㉠

선분 BD의 중점을 O, 선분 BO의 중점을 O′이라 하자.



점 P가 선분 BD 위에 있지 않을 때 두 삼각형 BPO와 BP′O′은 닮음비가 2 : 1인 서로 닮은 도형이므로

$\overline{O'P'}=\dfrac{1}{2}\overline{OP}=\dfrac{1}{2}\times2=1$ …… ㉡

한편, 점 P가 선분 BD 위에 있을 때도 ㉡이 성립한다.

그러므로 점 P′은 점 O′을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점이다.

㉠에서 점 X는 점 P′을 지나고 직선 BD와 평행한 직선 위의 점이므로 점 X가 나타내는 도형은 원 C를 벡터 $\overrightarrow{BD}$의 방향으로 평행이동한 원 S이다.

이때 원 S 위의 모든 점이 정사각형 ABCD의 둘레 또는 그 내부에 있도록 하는 실수 k가 최대인 경우는 그림과 같이 원 S가 두 선분 AD와 CD에 동시에 접하게 될 때이다.

이때의 원 S의 중심을 O″이라 하면 실수 k의 최댓값은

$K=\dfrac{|\overrightarrow{O'O''}|}{|\overrightarrow{BD}|}$

그런데 $\overline{BO'}=\overline{O'O}=\overline{OO''}=\overline{O''D}$이므로

$\overline{O'O''}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$에서 $K=\dfrac{\overline{O'O''}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{2}$

이때

$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC}$

$=(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OC})$

$=|\overrightarrow{XO}|^2+\overrightarrow{XO}\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=|\overrightarrow{XO}|^2+0-|\overrightarrow{OA}|^2$

$=|\overrightarrow{XO}|^2-(2\sqrt{2})^2$

이고,

$|\overrightarrow{XO}|\le\overline{OO''}+1=\sqrt{2}+1$

(단, 등호는 점 O″이 선분 OX 위에 있을 때 성립한다.)

이므로

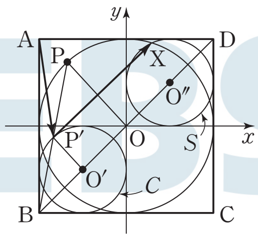
$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{CX}\le(\sqrt{2}+1)^2-8=2\sqrt{2}-5$

따라서 $\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{CX}$의 최댓값은 $2\sqrt{2}-5$이다.

답 ①

참고

그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 x축이 직선 BC와 평행하도록 좌표축을 설정하자.



점 X의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 A, C의 좌표는 각각 $(-2, 2)$, $(2, -2)$이므로

$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=(a, b)-(-2, 2)=(a+2, b-2)$,

$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}=(a, b)-(2, -2)=(a-2, b+2)$

이고,

$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{CX}=(a+2, b-2)\cdot(a-2, b+2)$

$=(a^2-4)+(b^2-4)=a^2+b^2-8$

한편, 점 O″의 좌표는 $(1, 1)$이므로 점 $\mathrm{X}(a, b)$는

원 S: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 위에 있고,

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OX}\le\overline{OO''}+1=\sqrt{2}+1$

(단, 등호는 점 O″이 선분 OX 위에 있을 때 성립한다.)

따라서 a^2+b^2의 최댓값이 $(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$이므로

$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{CX}$의 최댓값은

$(\sqrt{2}+1)^2-8=2\sqrt{2}-5$

06 공간도형

유제 본문 73~81쪽

1 ② 2 6 3 ⑤ 4 ⑤ 5 ④
6 ②

1 직선 AB와 평행한 직선은 직선 DE, 직선 GH, 직선 JK이므로 $a=3$

직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 CI, 직선 DJ, 직선 EK, 직선 FL, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 KL, 직선 LG이므로 $b=8$

따라서 $2a+b=2\times3+8=14$

답 ②

참고

6개의 점 A, B, C, D, E, F는 모두 한 평면 위에 있으므로 직선 AB와 평행하지 않고 평면 ABCDEF 위에 있는 직선 BC, 직선 CD, 직선 EF, 직선 FA는 모두 직선 AB와 한 점에서 만난다. 또 4개의 점 A, B, H, G는 모두 한 평면 위에 있으므로 직선 AB와 평행하지 않고 평면 ABHG 위에 있는 직선 AG, 직선 BH는 모두 직선 AB와 한 점에서 만난다. 따라서 정육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AB와 한 점에서 만나는 직선의 개수는 6이다.

이때 직선 AB와 평행한 직선의 개수는 3이고, 정육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL의 모든 모서리를 연장한 직선의 개수는 18이므로 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는

$18-1-6-3=8$

2 정사각뿔 E$-$ABCD의 모든 모서리의 길이가 같고 사면체 F$-$ABE가 정사면체이므로

$\overline{EF}=\overline{AD}$, $\overline{AF}=\overline{DE}$

이때 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{EF}$이므로 사각형 ADEF는 평행사변형이다. 마찬가지로 사각형 FBCE도 평행사변형이다. 즉, 직선 EF와 평행한 직선은

직선 AD, 직선 BC이므로 $a=2$

또 직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BE, 직선 BC, 직선 CD, 직선 CE이므로 $b=4$

따라서 $a+b=2+4=6$

답 6

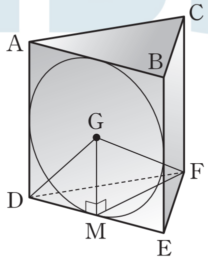
참고

직선 AB, 직선 AD, 직선 AE, 직선 BF, 직선 EF는 직선 AF와 한 점에서 만나고, 직선 DE는 직선 AF와 평행하다.

3 세 옆면이 모두 정사각형이므로

$\overline{AD}\perp\overline{DF}$, $\overline{AD}\perp\overline{DE}$

따라서 직선 AD는 평면 DEF와 수직이다.



이때 선분 DE의 중점을 M이라 하면 직선 GM은 직선 AD와 평행하므로 직선 GM은 평면 DEF와 수직이다. 즉, 점 G에서 평면 DEF에 내린 수선의 발은 점 M과 일치한다.

$\overline{AB}=2a$ $(a>0)$이라 하면

$\overline{GM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=a$, $\overline{FM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}a$

이므로 직각삼각형 GMF에서

$\overline{GF}=\sqrt{\overline{GM}^2+\overline{FM}^2}=2a$

직선 GF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기 α는

$\alpha=\angle GFM$이므로

$\sin\alpha=\sin(\angle GFM)=\frac{\overline{GM}}{\overline{GF}}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

한편, 사각형 ADFC가 정사각형이므로 두 직선 AC, DF는 평행하고 두 직선 AC, GF가 이루는 각의 크기 β는 두 직선 DF, GF가 이루는 각의 크기와 같으므로 $\beta=\angle GFD$이고

$\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\overline{AB}=\sqrt{2}a$

삼각형 GDF에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\beta=\cos(\angle GFD)=\frac{\overline{GF}^2+\overline{DF}^2-\overline{DG}^2}{2\times\overline{GF}\times\overline{DF}}=\frac{(2a)^2+(2a)^2-(\sqrt{2}a)^2}{2\times2a\times2a}=\frac{6a^2}{8a^2}=\frac{3}{4}$$

따라서 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

답 ⑤

4 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=5$이고

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$

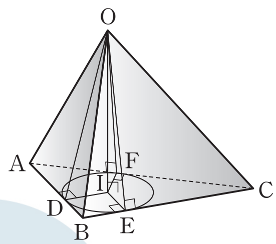
이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 ABI, BCI, CAI의 넓이의 합과 같으므로

$6=\frac{r}{2}(3+4+5)=6r$, $r=1$

삼각형 ABC의 내접원이 세 선분 AB, BC, CA와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하면 내접원의 성질에 의하여

$\overline{ID}\perp\overline{AB}$, $\overline{IE}\perp\overline{BC}$, $\overline{IF}\perp\overline{CA}$

이고, $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=1$이다.



이때 $\overline{OI}\perp$(평면 ABC)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OD}\perp\overline{AB}$, $\overline{OE}\perp\overline{BC}$, $\overline{OF}\perp\overline{CA}$

이고 세 직각삼각형 ODI, OEI, OFI가 합동이므로

$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$

이고 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이를 각각

S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_1:S_2:S_3=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=3:4:5$

세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이를 각각 $3a$, $4a$, $5a$ $(a>0)$이라 하면 사면체 O−ABC의 겉넓이가 30이므로

$6+3a+4a+5a=30$

$12a=24$, $a=2$

즉, 삼각형 OAB의 넓이는 6이고 $\overline{AB}=3$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OD}=6$에서 $\frac{1}{2}\times3\times\overline{OD}=6$, $\overline{OD}=4$

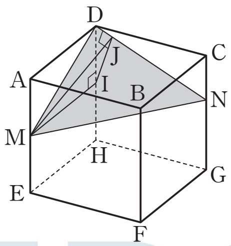
따라서 직각삼각형 ODI에서

$\overline{OI}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{DI}^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

답 ⑤

5 정육면체의 한 모서리의 길이를 $6a$ $(a>0)$이라 하자.

점 M에서 평면 DHGC에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 선분 DH의 중점이고 $\overline{MI}=6a$



점 I에서 직선 DN에 내린 수선의 발을 J라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{MJ}}\perp\overline{\mathrm{DN}}$이므로 $\alpha=\angle\mathrm{MJI}$

$\cos\alpha=\frac{3}{7}$이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

에서 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

이때 $\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{MI}}}{\overline{\mathrm{IJ}}}$이므로 $\overline{\mathrm{IJ}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}\times 6a=\frac{9}{\sqrt{10}}a$

직각삼각형 DIJ에서

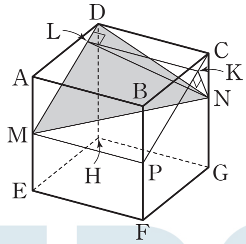
$\overline{\mathrm{DJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DI}}^2-\overline{\mathrm{IJ}}^2}=\sqrt{(3a)^2-\left(\frac{9}{\sqrt{10}}a\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}a$

두 삼각형 DIJ, NDC는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{IJ}}:\overline{\mathrm{DJ}}=\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{NC}}$

$$\overline{\mathrm{NC}}=\frac{\overline{\mathrm{DJ}}\times\overline{\mathrm{DC}}}{\overline{\mathrm{IJ}}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}a\times 6a}{\frac{9}{\sqrt{10}}a}=2a$$

한편, 선분 BF의 중점을 P라 하면 평면 DMC는 점 P를 지난다.



점 N에서 직선 CP에 내린 수선의 발을 K, 점 N에서 직선 DM에 내린 수선의 발을 L이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{KL}}\perp\overline{\mathrm{DM}}$이고 $\beta=\angle\mathrm{KLN}$

두 삼각형 BPC, KCN은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{PC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CN}}:\overline{\mathrm{KN}}$

이때 $\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2}=3\sqrt{5}a$이므로

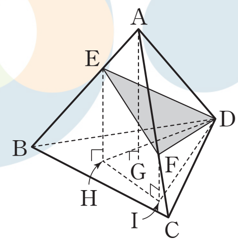
$$\overline{\mathrm{KN}}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CN}}}{\overline{\mathrm{PC}}}=\frac{6a\times 2a}{3\sqrt{5}a}=\frac{4}{\sqrt{5}}a$$

$\overline{\mathrm{KL}}=6a$이므로

$$\tan\beta=\frac{\overline{\mathrm{KN}}}{\overline{\mathrm{KL}}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}a}{6a}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

답 ④

6



정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 $3a\ (a>0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AD}}=3a$, $\overline{\mathrm{AE}}=a$, $\angle\mathrm{DAE}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos(\angle\mathrm{DAE})$

$\quad=(3a)^2+a^2-2\times 3a\times a\times\frac{1}{2}=7a^2$

$\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{7}a$

마찬가지로 $\overline{\mathrm{DF}}=\sqrt{7}a$

한편, $\overline{\mathrm{AE}}=a$, $\overline{\mathrm{AF}}=2a$, $\angle\mathrm{EAF}=\frac{\pi}{3}$이므로

$\angle\mathrm{AEF}=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{3}a$

$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DF}}$이므로 선분 EF의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{DM}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$

이때 $\overline{\mathrm{EM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 직각삼각형 DEM에서

$\overline{\mathrm{DM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DE}}^2-\overline{\mathrm{EM}}^2}=\sqrt{(\sqrt{7}a)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{5}{2}a$

삼각형 DEF의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EF}}\times\overline{\mathrm{DM}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}a\times\frac{5}{2}a=\frac{5\sqrt{3}}{4}a^2$

한편, 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 삼각형 BCD의 무게중심 G와 일치한다. 점 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 ABG, EBH가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{BG}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{BA}}=2:3$

점 F에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 I라 하면 두 삼각형 ACG, FCI가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{CI}}:\overline{\mathrm{CG}}=\overline{\mathrm{CF}}:\overline{\mathrm{CA}}=1:3$

따라서 삼각형 HID의 넓이는 세 삼각형 GDH, GHI, GID의 넓이의 합과 같고 세 삼각형 GDH, GHI, GID의 넓이는 각각 삼각형 GBC의 넓이의

$\frac{1}{3}$배, $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$배, $\frac{2}{3}$배

이다. 이때 삼각형 GBC의 넓이는

$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3a)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

이므로 삼각형 HID의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$
$$=\frac{11}{9}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{11\sqrt{3}}{12}a^2$$

따라서 평면 DEF가 평면 BCD와 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{11\sqrt{3}}{12}a^2}{\frac{5\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{11}{15}$$

답 ②

Level
1 기초 연습

본문 82~83쪽

1 ③	**2** ③	**3** ④	**4** ③	**5** 19
6 ①	**7** ③	**8** 26		

1 두 정사각뿔 O_1-ABCD, O_2-CDEF로 이루어진 입체도형의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 O_1C, 직선 O_1D, 직선 O_2C, 직선 O_2D, 직선 O_2E, 직선 O_2F이므로 $a=6$

8개의 점 A, B, C, D, E, F, O_1, O_2 중 서로 다른 세 점을 지나는 평면 중에서 직선 AB와 평행한 평면은 직선 AB와 평행한 직선을 포함하므로 직선 CD 또는 직선 EF를 포함해야 한다.

직선 CD를 포함하고 직선 AB와 평행한 평면은 평면 O_1CD, 평면 O_2CD이고, 직선 EF를 포함하고 직선 AB와 평행한 평면은 평면 O_1EF, 평면 O_2EF이므로 $b=4$

따라서 $a+b=6+4=10$

답 ③

참고

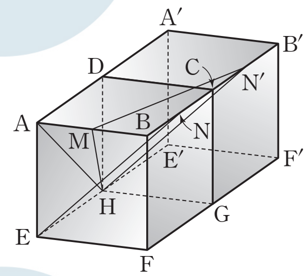
이 입체도형의 모든 모서리를 연장한 서로 다른 직선의 개수는 13이다.

이때 직선 O_1A, 직선 AE, 직선 O_1B, 직선 BF는 직선 AB와 한 점에서 만나고, 직선 CD, 직선 EF는 직선 AB와 평행하므로 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는

$13-1-4-2=6$

2 그림과 같이 정육면체 ABCD$-$EFGH와 크기가 같은 정육면체 DCB′A′$-$HGF′E′을 면 DHGC를 공유하도록 붙이고 선분 CB′의 중점을 N′이라 하면 두 직선 EN, HN′은 서로 평행하다.

따라서 $\angle\mathrm{MHN'}=\theta$ 또는 $\angle\mathrm{MHN'}=\pi-\theta$



정육면체 ABCD$-$EFGH의 한 모서리의 길이를 $2a$ $(a>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{2}a$, $\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=a$

이므로 직각삼각형 AHM에서

$\overline{\mathrm{HM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}a)^2+a^2}=3a$

두 삼각형 AHM, BEN은 서로 합동이므로

$\overline{\mathrm{EN}}=\overline{\mathrm{HM}}=3a$

이때 사각형 NEHN′이 평행사변형이므로

$\overline{\mathrm{HN'}}=\overline{\mathrm{EN}}=3a$

또 $\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BN'}}=\overline{\mathrm{BC}}+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CB'}}=3a$이므로

직각삼각형 MBN′에서

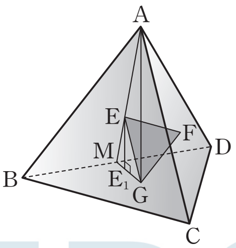
$\overline{\mathrm{MN'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BM}}^2+\overline{\mathrm{BN'}}^2}=\sqrt{a^2+(3a)^2}=\sqrt{10}a$

따라서 삼각형 MHN′에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=|\cos(\angle\mathrm{MHN'})|$$
$$=\frac{\overline{\mathrm{HM}}^2+\overline{\mathrm{HN'}}^2-\overline{\mathrm{MN'}}^2}{2\times\overline{\mathrm{HM}}\times\overline{\mathrm{HN'}}}$$
$$=\frac{(3a)^2+(3a)^2-(\sqrt{10}a)^2}{2\times3a\times3a}=\frac{4}{9}$$

답 ③

3 정사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 삼각형 BCD의 무게중심과 일치한다.



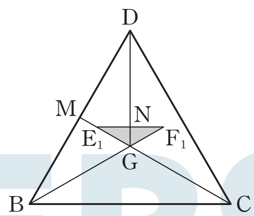
점 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 E_1이라 하자. 선분 BD의 중점을 M이라 하면 점 E는 삼각형 ABD의 무게중심이므로 $\overline{AM} : \overline{EM}=3 : 1$

두 삼각형 EME_1, AMG가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MG} : \overline{ME_1}=3 : 1$

즉, 점 E_1은 삼각형 GBD의 무게중심과 일치한다.

마찬가지로 점 F에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 F_1이라 하면 점 F_1은 삼각형 GCD의 무게중심과 일치한다.



$\angle GBM=\frac{\pi}{6}$, $\overline{BM}=3$이므로

$\overline{MG}=\overline{BM}\tan(\angle GBM)=3\tan\frac{\pi}{6}=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

$\overline{E_1G}=\frac{2}{3}\overline{MG}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{F_1G}=\overline{E_1G}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

두 선분 E_1F_1, DG의 교점을 N이라 하자.

$\angle E_1GN=\angle F_1GN=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle E_1GF_1=\frac{2}{3}\pi$

삼각형 EFG의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 E_1F_1G이므로 넓이는

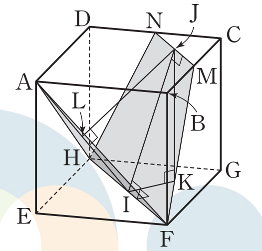
$$\frac{1}{2}\times\overline{E_1G}\times\overline{F_1G}\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

4 정육면체의 한 모서리의 길이를 $4a$ $(a>0)$이라 하자.

$\overline{AH}=\overline{AF}=\overline{HF}=4\sqrt{2}a$이므로 삼각형 AHF는 정삼각형이고, 선분 HF의 중점을 I라 하면 $\overline{AI}\perp\overline{HF}$이고

$\overline{AI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AH}=2\sqrt{6}a$



$\overline{CM}=\overline{CN}$이므로 선분 MN의 중점을 J라 하면 $\overline{CJ}\perp\overline{MN}$

이고 $\overline{CJ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{CM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\times4a=\sqrt{2}a$

또 $\overline{AM}=\overline{AN}$이므로 $\overline{AJ}\perp\overline{MN}$

즉, 점 J는 두 선분 AC, MN의 교점이고

$\overline{AJ}=\overline{AC}-\overline{CJ}=4\sqrt{2}a-\sqrt{2}a=3\sqrt{2}a$

한편, 점 J에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 K라 하면 $\overline{JK}=4a$이고 점 K는 선분 EG 위의 점이며

$\overline{IK}=\overline{IG}-\overline{KG}=\frac{1}{2}\overline{EG}-\overline{CJ}$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}a-\sqrt{2}a=\sqrt{2}a$

직각삼각형 JIK에서

$\overline{IJ}=\sqrt{\overline{JK}^2+\overline{IK}^2}=\sqrt{(4a)^2+(\sqrt{2}a)^2}=3\sqrt{2}a$

또 $\overline{KI}\perp\overline{HF}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IJ}\perp\overline{HF}$

따라서 평면 AHF와 평면 MNHF가 이루는 예각의 크기 θ는 $\theta=\angle AIJ$

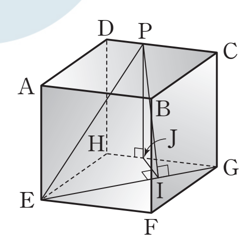
한편, $\overline{AJ}=\overline{IJ}$에서 삼각형 AIJ는 이등변삼각형이고 선분 AI의 중점을 L이라 하면 $\overline{AI}\perp\overline{JL}$

따라서

$$\cos\theta=\cos(\angle JIL)=\frac{\overline{IL}}{\overline{IJ}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AI}}{\overline{IJ}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}a}{3\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

5 점 P와 직선 EG 사이의 거리가 $\sqrt{11}$이므로 점 P에서 직선 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{PI}=\sqrt{11}$



점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 J라 하면 점 J는 선분 GH 위의 점이고, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IJ}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$

직각삼각형 PJI에서

$\overline{\mathrm{IJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PI}}^2-\overline{\mathrm{PJ}}^2}=\sqrt{(\sqrt{11})^2-3^2}=\sqrt{2}$

$\angle\mathrm{IGJ}=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\overline{\mathrm{GJ}}=\frac{\overline{\mathrm{IJ}}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$$

$\overline{\mathrm{HJ}}=\overline{\mathrm{GH}}-\overline{\mathrm{GJ}}=3-2=1$

직각삼각형 EJH에서

$\overline{\mathrm{EJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EH}}^2+\overline{\mathrm{HJ}}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

직선 PE와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기 θ는

$\theta=\angle\mathrm{PEJ}$이므로

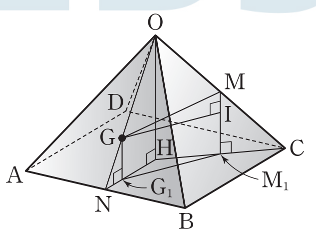
$$\tan^2\theta=\left(\frac{\overline{\mathrm{PJ}}}{\overline{\mathrm{EJ}}}\right)^2=\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{9}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=9$이므로

$p+q=10+9=19$

답 19

6 꼭짓점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점이다.



선분 AB의 중점을 N, 두 점 G, M에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{M_1}$이라 하자.

점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{ON}}:\overline{\mathrm{GN}}=3:1$

두 삼각형 ONH, $\mathrm{GNG_1}$이 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{HN}}:\overline{\mathrm{G_1N}}=3:1$

$\overline{\mathrm{HG_1}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{HN}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times6=2$

또 $\overline{\mathrm{OC}}:\overline{\mathrm{MC}}=2:1$이고 두 삼각형 OHC, $\mathrm{MM_1C}$가 서로 닮은 도형이므로 $\overline{\mathrm{HC}}:\overline{\mathrm{M_1C}}=2:1$

$$\overline{\mathrm{HM_1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{HC}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times6=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\angle\mathrm{G_1HM_1}=\frac{3}{4}\pi$이므로 삼각형 $\mathrm{HG_1M_1}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{G_1M_1}}^2=\overline{\mathrm{HG_1}}^2+\overline{\mathrm{HM_1}}^2-2\times\overline{\mathrm{HG_1}}\times\overline{\mathrm{HM_1}}\times\cos(\angle\mathrm{G_1HM_1})$$
$$=2^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times2\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\cos\frac{3}{4}\pi$$
$$=\frac{29}{2}$$

$\overline{\mathrm{G_1M_1}}=\frac{\sqrt{58}}{2}$

한편, $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{HC}}^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{GG_1}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{MM_1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OH}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

점 G에서 직선 $\mathrm{MM_1}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 사각형 $\mathrm{GG_1M_1I}$가 직사각형이므로

$\overline{\mathrm{IM_1}}=\overline{\mathrm{GG_1}}$

$\overline{\mathrm{MI}}=\overline{\mathrm{MM_1}}-\overline{\mathrm{IM_1}}=\overline{\mathrm{MM_1}}-\overline{\mathrm{GG_1}}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

직선 GM과 평면 ABCD가 이루는 예각의 크기 θ는 $\angle\mathrm{MGI}$와 같으므로

$$\tan\theta=\tan(\angle\mathrm{MGI})=\frac{\overline{\mathrm{MI}}}{\overline{\mathrm{GI}}}=\frac{\overline{\mathrm{MI}}}{\overline{\mathrm{G_1M_1}}}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{58}}{2}}=\frac{\sqrt{29}}{29}$$

답 ①

7 조건 (나)에서 세 점 A, B, C는 한 직선 위의 점이 아니다.

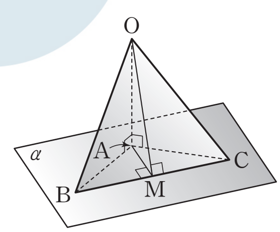
조건 (가)에서 두 평면 OAB, OAC가 모두 평면 α에 수직이므로 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\alpha$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=2$이고

$\angle\mathrm{BMA}=\frac{\pi}{2}$ …… ㉡

이므로 직각삼각형 ABM에서

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BM}}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$



또 ㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고 삼각형 OBC의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$4\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{OM}}=2\overline{\mathrm{OM}}$

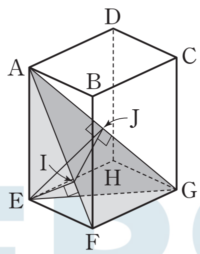
$\overline{\mathrm{OM}}=2\sqrt{3}$

점 O와 평면 α 사이의 거리는 선분 OA의 길이와 같고, 직각삼각형 OAM에서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OM}}^2-\overline{\mathrm{AM}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$

답 ③

8 직선 FG가 평면 AEFB에 수직이므로 평면 AFG는 평면 AEFB에 수직이다. 따라서 점 E에서 평면 AFG에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 두 평면 AFG, AEFB의 교선인 직선 AF 위에 있다.



$\overline{\mathrm{AE}}=5$, $\overline{\mathrm{EF}}=3$이므로 직각삼각형 AEF에서

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{EF}}^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

$\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{EI}}$에서 $\overline{\mathrm{EI}}=\frac{\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{15}{\sqrt{34}}$

또 $\overline{\mathrm{FG}}=4$이므로 직각삼각형 EFG에서

$\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EF}}^2+\overline{\mathrm{FG}}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{EG}}$이므로 직각이등변삼각형 AEG에서

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AE}}=5\sqrt{2}$

점 E에서 직선 AG에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{\mathrm{EJ}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{AE}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IJ}}\perp\overline{\mathrm{AG}}$이므로 두 평면 AFG, AEG가 이루는 예각의 크기 θ는 $\theta=\angle\mathrm{EJI}$

따라서

$$\sin^2\theta=\left(\frac{\overline{\mathrm{EI}}}{\overline{\mathrm{EJ}}}\right)^2=\frac{\left(\frac{15}{\sqrt{34}}\right)^2}{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\frac{3^2\times5^2}{34}}{\frac{5^2}{2}}=\frac{9}{17}$$

즉, $p=17$, $q=9$이므로

$p+q=17+9=26$

답 26

Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

1 ②	2 ②	3 ⑤	4 ④	5 ②
6 ①	7 ③	8 ⑤		

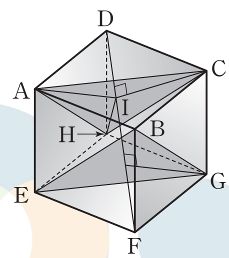
1 정육면체 ABCD−EFGH의 모든 모서리의 길이가 같으므로 $\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{DC}}$

또 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{CF}}$이고 선분 DF가 공통이므로 세 삼각형 DAF, DHF, DCF는 모두 합동이다.

따라서 세 점 A, H, C에서 선분 DF에 내린 수선의 발은 모두 일치하고, 이 점을 I라 하면

$\overline{\mathrm{DF}}\perp\overline{\mathrm{AI}}$, $\overline{\mathrm{DF}}\perp\overline{\mathrm{HI}}$, $\overline{\mathrm{DF}}\perp\overline{\mathrm{CI}}$

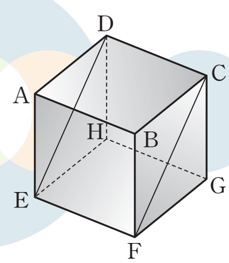
이므로 직선 DF는 평면 ACH에 수직이다. 마찬가지로 직선 DF는 평면 BEG에 수직이다.



따라서 평면 AHC 또는 평면 BEG에 포함되는 직선과 직선 DF는 서로 수직이므로 정육면체 ABCD−EFGH의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 직선 DF에 수직인 직선은

직선 AC, 직선 AH, 직선 CH, 직선 BE, 직선 BG, 직선 EG이므로 $a=6$

한편, 직선 DE는 직선 CF와 평행하므로 직선 DE를 포함하는 평면 중 두 점 C, F를 지나지 않는 평면은 직선 CF와 평행하다.



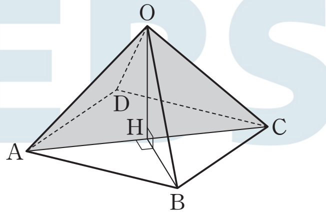
즉, 정육면체 ABCD−EFGH의 서로 다른 세 꼭짓점을 지나는 평면 중에서 직선 CF와 평행한 평면은

평면 AEHD, 평면 DEB, 평면 DEG이므로 $b=3$

따라서 $a+b=6+3=9$

답 ②

2 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$이므로 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 밑면의 두 대각선 AC, BD의 교점과 같다.



이때 정사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD는 서로 수직으로 만나므로 $\overline{AH}\perp\overline{BH}$이고 $\overline{OH}\perp\overline{BH}$이므로 점 B에서 평면 OAC에 내린 수선의 발은 점 H와 일치하고, 삼각형 OAB의 평면 OAC 위로의 정사영은 삼각형 OAH와 같다.

삼각형 OAB의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{OA}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$

한편, $\overline{AC}=\sqrt{2}\,\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 $\overline{OA}=\overline{OC}=6$이므로

$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$이고

$\overline{OH}=\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times6=3\sqrt{2}$

삼각형 OAH의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=9$

평면 OAB와 평면 OAC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{S_2}{S_1}=\frac{9}{9\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

삼각형 OAC의 넓이를 S라 하면

$S=2S_2=2\times9=18$

삼각형 OAC의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

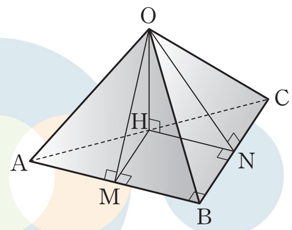
$S'=S\times\cos\theta=18\times\frac{\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}$

답 ②

3 조건 (가)에서 두 삼각형 OAB, OBC가 모두 정삼각형이고 변 OB는 공통이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$

조건 (나)에서 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.

또 $\overline{OA}=\overline{BA}$이고 $\overline{OC}=\overline{BC}$이므로 두 삼각형 AOC, ABC는 서로 합동이다. 즉, 삼각형 AOC는 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.



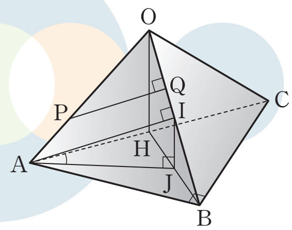
두 선분 AB, BC의 중점을 각각 M, N이라 하고 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{BC}\perp\overline{ON}$

에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{HM}$, $\overline{BC}\perp\overline{HN}$

이므로 점 H는 두 선분 AB, BC를 각각 수직이등분하는 직선의 교점이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$이므로 점 H는 선분 AC의 중점이다.



$\overline{OA}=6a\ (a>0)$이라 하면 두 점 P, Q는 각각 두 선분 OA, BO를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{OP}=\frac{2}{3}\overline{OA}=4a$, $\overline{OQ}=\frac{1}{3}\overline{OB}=2a$

이때 $\angle POQ=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle PQO=\frac{\pi}{2}$

선분 OB의 중점을 I라 하면 두 삼각형 OPQ, OAI는 서로 닮은 도형이므로 $\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{AI}$

따라서 직선 PQ가 평면 ABC와 이루는 예각의 크기는 직선 AI가 평면 ABC와 이루는 예각의 크기와 같다.

$\overline{AI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OA}=3\sqrt{3}a$

이고 점 I에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{IJ}=\frac{1}{2}\overline{OH}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OA}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$

직각삼각형 AIJ에서

$\overline{AJ}=\sqrt{\overline{AI}^2-\overline{IJ}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3}a)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}a$

따라서 $\cos\theta=\cos(\angle \mathrm{IAJ})=\dfrac{\overline{\mathrm{AJ}}}{\overline{\mathrm{AI}}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{10}}{2}a}{3\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

답 ⑤

4 $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{22}$이므로 직각삼각형 CPB에서

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}=\sqrt{(\sqrt{22})^2-2^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{DE}}=2$, $\overline{\mathrm{DP}}=\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 PDE에서

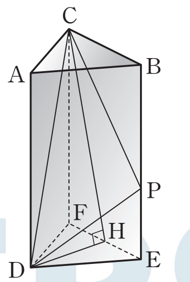
$\overline{\mathrm{EP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DP}}^2-\overline{\mathrm{DE}}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$

따라서

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{EP}}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BE}}=4\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 CAD에서

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$



두 평면 DEF, CFEB가 서로 수직이므로 점 D에서 평면 CFEB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 EF 위의 점이고, 삼각형 DEF가 정삼각형이므로 점 H는 선분 EF의 중점이다.

직각삼각형 CFH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CF}}^2+\overline{\mathrm{FH}}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{33}$

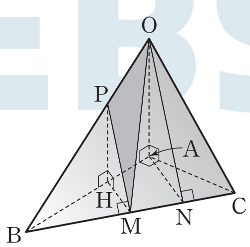
직선 CD와 평면 CFEB가 이루는 예각의 크기 θ는

$\theta=\angle \mathrm{DCH}$이므로

$\cos\theta=\cos(\angle \mathrm{DCH})=\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

답 ④

5



점 P를 지나고 직선 OA와 평행한 직선은 선분 AB와 만난다. 이 점을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$에서 직선 OA는 평면 ABC와 수직이므로 직선 OA와 평행한 직선 PH는 평면 ABC와 수직이다.

이때 $\overline{\mathrm{PM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3}$, $\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$

두 삼각형 ABC, MBH는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{MB}}:\overline{\mathrm{BH}}$

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{MB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}{6}=4$

또 두 삼각형 OBA, PBH는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{BO}}:\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BH}}=6:4=3:2$

$\overline{\mathrm{BO}}:\overline{\mathrm{PO}}=3:1$

즉, 삼각형 OPM의 넓이는 삼각형 OBM의 넓이의 $\dfrac{1}{3}$배이고, 삼각형 OBM의 넓이는 삼각형 OBC의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$배이므로 삼각형 OPM의 넓이는 삼각형 OBC의 넓이의 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}$배, 즉 $\dfrac{1}{6}$배이다. 삼각형 OPM의 넓이가 3이므로 삼각형 OBC의 넓이는

$3\times 6=18$

점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{ON}}=18$

$\overline{\mathrm{ON}}=3\sqrt{3}$

직선 OA는 평면 ABC와 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AN}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AN}}$에서

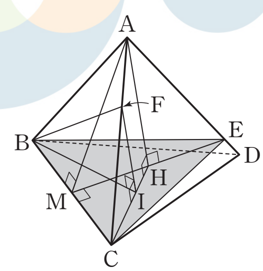
$\overline{\mathrm{AN}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{6\times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=3$

직각삼각형 OAN에서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{ON}}^2-\overline{\mathrm{AN}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=3\sqrt{2}$

답 ②

6 선분 BC의 중점을 M이라 하자.



$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{DM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$에서 평면 AMD가 직선 BC에 수직이므로 $\overline{\mathrm{EM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고, 두 평면 ABC, BCE가 이루는 예각의 크기 α는

$\alpha=\angle\mathrm{AME}$

정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 $6a$ $(a>0)$이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=6a$에서

$$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{3}a$$

점 A에서 평면 BCE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AM}}\sin(\angle\mathrm{AMH})=\overline{\mathrm{AM}}\times\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$=3\sqrt{3}a\times\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=3\sqrt{3}a\times\frac{\sqrt{7}}{3}=\sqrt{21}a$$

한편, 평면 BCE는 직선 AH에 수직이므로 평면 BCE는 직선 AH를 포함하는 평면 ACH에 수직이다.

따라서 점 F에서 평면 BCE에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 평면 BCE와 평면 ACH의 교선 CH 위의 점이다.

두 삼각형 ACH, FCI가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{FI}}:\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{FC}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:3$

$$\overline{\mathrm{FI}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{AH}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}a$$

또 $\overline{\mathrm{AB}}=6a$, $\overline{\mathrm{AF}}=2a$, $\angle\mathrm{BAF}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BF}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AF}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\cos(\angle\mathrm{BAF})$$

$$=(6a)^2+(2a)^2-2\times6a\times2a\times\frac{1}{2}$$

$$=28a^2$$

$\overline{\mathrm{BF}}=2\sqrt{7}a$

직선 BF와 평면 BCE가 이루는 예각의 크기 β는

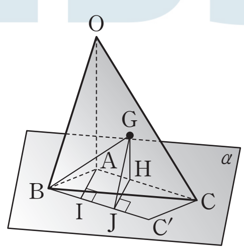
$\beta=\angle\mathrm{FBI}$

이므로

$$\sin\beta=\sin(\angle\mathrm{FBI})=\frac{\overline{\mathrm{FI}}}{\overline{\mathrm{BF}}}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}a}{2\sqrt{7}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

7



평면 α 위의 점 C′을 사각형 ABC′C가 평행사변형이 되도록 잡으면 두 직선 BG, AC가 이루는 예각의 크기 θ는 두 직선 BG, BC′이 이루는 예각의 크기와 같으므로

$\theta=\angle\mathrm{GBC'}$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\alpha$이므로 평면 OAC는 평면 α에 수직이고, 점 G에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AC 위의 점이다.

두 점 A, H에서 직선 BC′에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자.

$\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이고 두 직선 AC, BC′이 서로 평행하므로

$$\angle\mathrm{ABC'}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

$$\overline{\mathrm{AI}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{\mathrm{HJ}}=\overline{\mathrm{AI}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OA}}=1$$

직각삼각형 GJH에서

$$\overline{\mathrm{GJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{GH}}^2+\overline{\mathrm{HJ}}^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

또

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AC}}=\frac{2}{3}$$

$$\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{\mathrm{IJ}}=\overline{\mathrm{AH}}=\frac{2}{3}$$

$$\overline{\mathrm{BJ}}=\overline{\mathrm{BI}}+\overline{\mathrm{IJ}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$$

삼수선의 정리에 의하여 $\angle\mathrm{BJG}=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 GBJ에서

$$\overline{\mathrm{GB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{GJ}}^2+\overline{\mathrm{BJ}}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{6}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

따라서 $\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{GBJ})=\dfrac{\overline{\mathrm{BJ}}}{\overline{\mathrm{GB}}}=\dfrac{\frac{7}{6}}{\frac{2\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

답 ③

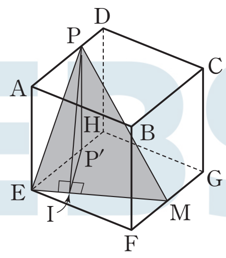
8 두 점 E, M은 평면 EFGH 위의 점이므로 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 P′이라 할 때, 삼각형 PEM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 P′EM이다.

이때 점 P′은 선분 EH 위의 점이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{EP'}}$이다.

정육면체의 한 모서리의 길이가 2이고 삼각형 P′EM의 넓이가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{EP'}\times\overline{EF}=\frac{1}{2}\times\overline{EP'}\times2=\overline{EP'}=\sqrt{2}$

즉, $\overline{AP}=\sqrt{2}$



점 P에서 선분 EM에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{P'I}\perp\overline{EM}$

직각삼각형 EFM에서

$\overline{EM}=\sqrt{\overline{EF}^2+\overline{FM}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

삼각형 P′EM의 넓이가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{EM}\times\overline{P'I}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{P'I}=\sqrt{2}$

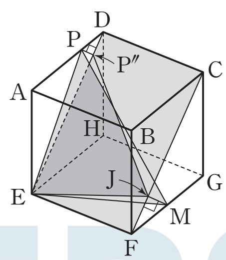
$\overline{P'I}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

직각삼각형 PIP′에서

$\overline{PI}=\sqrt{\overline{PP'}^2+\overline{P'I}^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{35}}{5}$

따라서 삼각형 PEM의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{EM}\times\overline{PI}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{35}}{5}=\sqrt{7}$



평면 CEF는 점 D를 지나므로 점 P에서 평면 CEF에 내린 수선의 발을 P″이라 하면 점 P″은 선분 DE 위의 점이고, 점 M에서 평면 CEF에 내린 수선의 발을 J라 하면 점 J는 선분 CF 위의 점이다.

$\overline{AD}=2$, $\overline{AP}=\sqrt{2}$에서

$\overline{DP}=\overline{AD}-\overline{AP}=2-\sqrt{2}$

$\overline{DP''}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{DP}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

$\overline{DE}=\sqrt{2}\,\overline{AD}=2\sqrt{2}$이므로

$\overline{EP''}=\overline{DE}-\overline{DP''}=2\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1$

점 J와 직선 DE 사이의 거리는 정육면체의 모서리의 길이 2와 같으므로 삼각형 P″EJ의 넓이를 S'이라 하면

$S'=\frac{1}{2}\times\overline{EP''}\times2=\sqrt{2}+1$

따라서 두 평면 PEM, CEF가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\cos^2\theta=\left(\frac{S'}{S}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{7}$

답 ⑤

Level

3 실력 완성

본문 86쪽

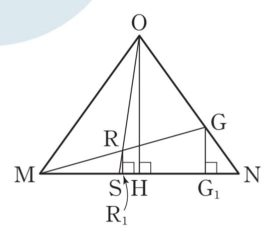
1 750 **2** ⑤ **3** 16

1 선분 CD의 중점을 N이라 하자.

마름모는 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로 마름모 GPMQ에 대하여 두 대각선 MG, PQ의 대각선의 교점을 R이라 하면 점 R은 선분 MG의 중점이고

$\overline{PQ}\perp\overline{MG}$, $\overline{PR}=\overline{QR}$

이므로 직선 PQ는 점 R을 지나고 평면 OMN에 수직이다.



두 점 O, G에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 H, $\mathrm{G_1}$이라 하면 두 삼각형 OHN, $\mathrm{GG_1N}$이 서로 닮은 도형이고

$\overline{OH}:\overline{GG_1}=\overline{ON}:\overline{GN}=3:1$

이므로 $\overline{GG_1}=\frac{1}{3}\,\overline{OH}$ …… ㉠

두 직선 OR, MN의 교점을 S라 하고 점 R에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 $\mathrm{R_1}$이라 하면 두 삼각형 $\mathrm{MGG_1}$, $\mathrm{MRR_1}$은 서로 닮은 도형이고

$\overline{GG_1}:\overline{RR_1}=\overline{MG}:\overline{MR}=2:1$

이므로 $\overline{RR_1}=\frac{1}{2}\,\overline{GG_1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{RR_1}=\frac{1}{2}\overline{GG_1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overline{OH}=\frac{1}{6}\overline{OH}$

$\overline{OH}:\overline{RR_1}=6:1$

또 두 삼각형 SHO, SR_1R은 서로 닮은 도형이고

$\overline{SO}:\overline{SR}=\overline{OH}:\overline{RR_1}=6:1$

이므로 $\overline{OR}:\overline{OS}=5:6$ …… ㉢

직선 PQ가 점 R을 지나고 평면 OMN에 수직, 즉 평면 ABCD에 평행하므로 직선 OP가 선분 AD와 만나는 점을 P_2, 직선 OQ가 선분 BC와 만나는 점을 Q_2라 하면 두 삼각형 OPQ, OP_2Q_2는 서로 닮은 도형이고 ㉢에서 두 삼각형 OPQ, OP_2Q_2의 닮음비는 $5:6$이다.

따라서 $\overline{PQ}=\frac{5}{6}\overline{P_2Q_2}=\frac{5}{6}\times6=5$

두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하면

$\overline{P_1Q_1}=\overline{PQ}=5$

또 $\overline{NG_1}=\frac{1}{3}\overline{NH}=\frac{1}{3}\times3=1$이므로

$\overline{MG_1}=\overline{MN}-\overline{NG_1}=6-1=5$

사각형 GPMQ의 평면 ABCD 위로의 정사영은 사각형 $G_1P_1MQ_1$이고 $\overline{G_1M}\perp\overline{P_1Q_1}$이므로 사각형 $G_1P_1MQ_1$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$

따라서 $60\times S=60\times\frac{25}{2}=750$

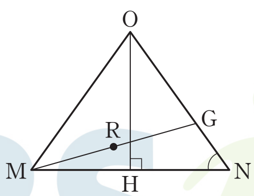
답 750

다른 풀이 1

선분 CD의 중점을 N이라 하자.

$\overline{OM}=\overline{ON}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{OA}=3\sqrt{3}$

점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점과 같고



$\overline{HN}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$

$\cos(\angle ONH)=\frac{\overline{HN}}{\overline{ON}}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

점 G가 삼각형 OCD의 무게중심이므로

$\overline{NG}=\frac{1}{3}\overline{ON}=\sqrt{3}$

삼각형 GMN에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{MG}^2=\overline{MN}^2+\overline{NG}^2-2\times\overline{MN}\times\overline{NG}\times\cos(\angle GNM)$

$=6^2+(\sqrt{3})^2-2\times6\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=27$

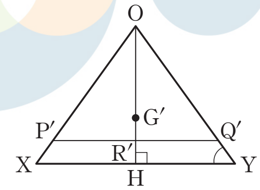
$\overline{MG}=3\sqrt{3}$

한편, 마름모는 두 대각선이 서로를 수직이등분하므로 마름모 GPMQ에 대하여 두 대각선 MG, PQ의 대각선의 교점을 R이라 하면 점 R은 선분 MG의 중점이고

$\overline{PQ}\perp\overline{MG}$, $\overline{PR}=\overline{QR}$

이므로 직선 PQ는 점 R을 지나고 평면 OMN에 수직이다.

두 선분 AD, BC의 중점을 각각 X, Y라 하고, 네 점 G, R, P, Q에서 평면 OXY에 내린 수선의 발을 각각 G′, R′, P′, Q′이라 하자.



점 R이 선분 MG의 중점이므로

$\overline{R'H}=\frac{1}{2}\overline{G'H}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overline{OH}=\frac{1}{6}\overline{OH}$

에서 $\overline{OR'}=\overline{OH}-\overline{R'H}=\frac{5}{6}\overline{OH}$

두 삼각형 OP′Q′, OXY가 서로 닮은 도형이므로

$\overline{P'Q'}=\frac{5}{6}\overline{XY}=5$

즉, $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}=5$이므로 마름모 GPMQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{MG}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times5=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

한편, 삼각형 GMN에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle GMN)=\frac{\overline{MG}^2+\overline{MN}^2-\overline{NG}^2}{2\times\overline{MG}\times\overline{MN}}$

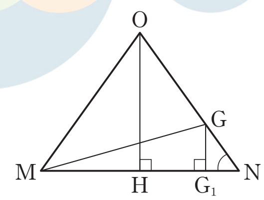
$=\frac{(3\sqrt{3})^2+6^2-(\sqrt{3})^2}{2\times3\sqrt{3}\times6}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

두 평면 GPMQ, ABCD가 이루는 예각의 크기가 ∠GMN과 같으므로 구하는 정사영의 넓이 S는

$S=\frac{15\sqrt{3}}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{9}=\frac{25}{2}$

따라서 $60\times S=60\times\frac{25}{2}=750$

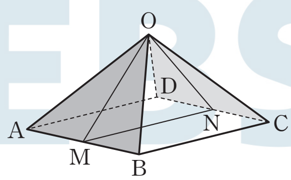
다른 풀이 2



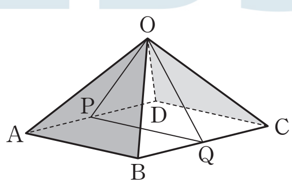
선분 CD의 중점을 N이라 하자. 두 점 O, G에서 평면

ABCD에 내린 수선의 발을 각각 H, G_1이라 하면 두 삼각형 OHN, GG_1N이 서로 닮은 도형이고
$\overline{HN}:\overline{G_1N}=\overline{ON}:\overline{GN}=3:1$이므로
$\overline{G_1N}=\frac{1}{3}\overline{HN}=1$
$\overline{MG_1}=\overline{MN}-\overline{G_1N}=6-1=5$
두 선분 AD, BC의 중점을 각각 X, Y라 하자. 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 OXY에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 직선 PQ는 두 평면 GPMQ, ABCD의 교선인 직선 AB에 평행하므로
$\overline{P_1Q_1}=\overline{PQ}=\overline{P'Q'}=5$
따라서 사각형 GPMQ의 평면 ABCD 위로의 정사영인 도형 $G_1P_1MQ_1$의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times\overline{MG_1}\times\overline{P_1Q_1}=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$
따라서 $60\times S=60\times\frac{25}{2}=750$

2 $\overline{AB}=4a\ (a>0)$이라 하자.



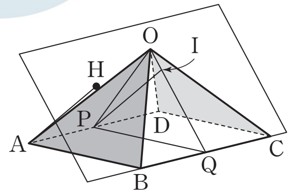
조건 (가)에서 두 삼각형 OAB, OCD가 정삼각형이므로 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면
$\overline{OM}=\overline{ON}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=2\sqrt{3}a$
두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로 두 평면 OAB, OCD의 교선을 l이라 하면 $l /\!/ \overline{AB}$, $l /\!/ \overline{CD}$
이때 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{ON}\perp\overline{CD}$이므로 $\overline{OM}\perp l$, $\overline{ON}\perp l$
조건 (나)에서 두 평면 OAB, OCD가 서로 수직이므로
$\overline{OM}\perp\overline{ON}$
즉, $\angle MON=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{OM}=\overline{ON}$이므로
$\overline{MN}=\sqrt{2}\,\overline{OM}=2\sqrt{6}a$



두 선분 AD, BC의 중점을 각각 P, Q라 하자.
$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{MN}=\sqrt{6}a$
$\overline{OA}=\overline{OD}$에서 $\overline{AD}\perp\overline{OP}$이므로 직각삼각형 OAP에서
$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{(4a)^2-(\sqrt{6}a)^2}=\sqrt{10}a$
마찬가지로 $\overline{OQ}=\sqrt{10}a$이고 $\overline{PQ}=\overline{AB}=4a$이므로 삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle POQ)=\frac{\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-\overline{PQ}^2}{2\times\overline{OP}\times\overline{OQ}}=\frac{(\sqrt{10}a)^2+(\sqrt{10}a)^2-(4a)^2}{2\times\sqrt{10}a\times\sqrt{10}a}=\frac{1}{5}$$

$$\sin(\angle POQ)=\sqrt{1-\cos^2(\angle POQ)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$



점 A에서 평면 OBC에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 평면 OBC에 내린 수선의 발을 I라 하면 사각형 AHIP는 직사각형이므로

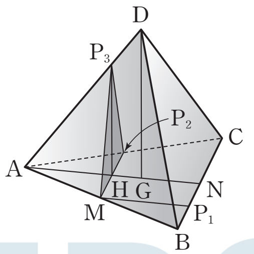
$$\overline{AH}=\overline{PI}=\overline{OP}\sin(\angle POQ)=\sqrt{10}a\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{4\sqrt{15}}{5}a$$

직선 OA와 평면 OBC가 이루는 예각의 크기 θ는
$\theta=\angle AOH$이므로

$$\sin\theta=\sin(\angle AOH)=\frac{\overline{AH}}{\overline{OA}}=\frac{\frac{4\sqrt{15}}{5}a}{4a}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

답 ⑤

3 서로 평행한 두 직선은 한 평면을 결정하므로 두 직선 AN, MP가 서로 평행하도록 하는 점 P를 P_1이라 하면 점 P_1은 직선 AN과 점 M을 포함하는 평면 위의 점이다.
이때 점 M이 선분 AB의 중점이므로 점 P가 선분 BN의 중점일 때, 두 직선 AN, MP는 서로 평행하다. 즉, 점 P_1은 선분 BN의 중점이다.
한편, $\overline{AN}\perp\overline{BC}$이고 점 M이 선분 AB의 중점이므로 점 P가 선분 AC의 중점일 때, 두 직선 AN, MP는 서로 수직이다. 이때의 점 P를 P_2라 하자.



두 직선 AN, MP가 서로 수직이 되도록 하는 점 P 중에서 P_2가 아닌 점을 P_3이라 하면 평면 MP_2P_3은 직선 AN에 수직이다. 즉, 점 P_3은 직선 MP_2를 포함하고 직선 AN에 수직인 평면이 정사면체 ABCD의 모서리와 만나는 점 중 M, P_2가 아닌 점이고 이 점은 선분 AD 위의 점이다.

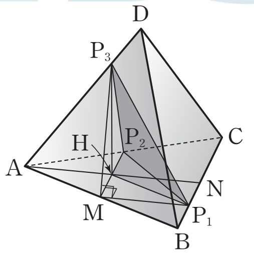
점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 하면 $\overline{AN}\perp\overline{DG}$이고 $\overline{AN}\perp$(평면 MP_2P_3)이므로 평면 MP_2P_3은 직선 DG에 평행하다. 이때 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하고, $\overline{AM}=\overline{AP_2}$에서 $\overline{P_3M}=\overline{P_3P_2}$이며 점 P_3에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 MP_2의 중점과 일치하므로 점 H는 선분 AN 위의 점이다.

이때 $\overline{AM}:\overline{AB}=\overline{AH}:\overline{AN}$에서 점 H는 선분 AN의 중점이고, 점 G는 선분 AN을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{AH}:\overline{AG}=3:4$

두 삼각형 AP_3H, ADG는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AP_3}:\overline{AD}=\overline{AH}:\overline{AG}=3:4$



정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 $4a$ $(a>0)$이라 하면

$\overline{MP_2}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2a$

$\overline{MP_1}=\frac{1}{2}\overline{AN}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}a$

$\angle P_2MP_1=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 P_2MP_1에서

$\overline{P_1P_2}=\sqrt{\overline{MP_2}^2+\overline{MP_1}^2}=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{7}a$

두 삼각형 P_3AP_2, P_1CP_2는 합동이므로

$\overline{AP_2}=\overline{CP_2}$, $\overline{AP_3}=\overline{CP_1}$, $\angle P_3AP_2=\angle P_1CP_2=\frac{\pi}{3}$에서

$\overline{P_3P_2}=\overline{P_1P_2}=\sqrt{7}a$

또 $\overline{P_3M}=\overline{P_3P_2}$이고 $\angle P_3MP_1=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 P_3MP_1에서

$\overline{P_1P_3}=\sqrt{\overline{P_3M}^2+\overline{MP_1}^2}=\sqrt{(\sqrt{7}a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{10}a$

삼각형 $P_3P_2P_1$이 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}$인 이등변삼각형이므로

$$\cos(\angle P_2P_1P_3)=\frac{\frac{1}{2}\overline{P_1P_3}}{\overline{P_1P_2}}=\frac{\frac{1}{2}\times\sqrt{10}a}{\sqrt{7}a}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(\angle P_2P_1P_3)=\sqrt{1-\cos^2(\angle P_2P_1P_3)}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

삼각형 $P_3P_2P_1$의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}\times\sin(\angle P_2P_1P_3)$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}a\times\sqrt{10}a\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}a^2$$

한편, 삼각형 $P_3P_2P_1$의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HP_2P_1이므로 삼각형 HP_2P_1의 넓이를 S'이라 하면

$\overline{HP_2}=\frac{1}{2}\overline{MP_2}=a$에서

$$S'=\frac{1}{2}\times\overline{HP_2}\times\overline{MP_1}=\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

평면 $P_1P_2P_3$과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$$\cos^2\theta=\left(\frac{S'}{S}\right)^2=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right)^2}{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}a^2\right)^2}=\frac{1}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=1$이므로 $p+q=15+1=16$

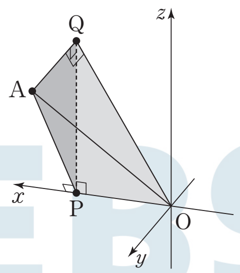
답 16

07 공간좌표

유제 본문 89~97쪽

1 ④	2 ③	3 ④	4 4	5 ⑤
6 6	7 ③	8 47	9 3	10 ①

1 점 P는 점 A$(3, a, 5)$에서 x축에 내린 수선의 발이므로 점 P의 좌표는 $(3, 0, 0)$
점 Q는 점 A에서 zx평면에 내린 수선의 발이므로 점 Q의 좌표는 $(3, 0, 5)$
원점 O의 좌표는 $(0, 0, 0)$이므로 세 점 O, P, Q의 y좌표는 모두 0이다. 즉, 세 점 O, P, Q는 모두 zx평면 위의 점이다.



이때 $\angle OPQ=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times3\times5=\frac{15}{2}$

점 A와 zx평면 사이의 거리가 a이므로 사면체 OAPQ의 부피는

$\frac{1}{3}\times S\times a=\frac{1}{3}\times\frac{15}{2}\times a=\frac{5}{2}a$

사면체 OAPQ의 부피가 10이므로

$\frac{5}{2}a=10,\ a=4$

답 ④

2 점 A$(\sqrt{3}, a, 3)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(\sqrt{3}, a, 0)$이고 $\overline{AH}=3$
두 점 H$(\sqrt{3}, a, 0)$, O$(0, 0, 0)$은 xy평면 위의 점이므로

$\overline{OH}=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{a^2+3}$

직선 OA와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $\angle AOH$와 같으므로

$\tan(\angle AOH)=\frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}=\frac{3}{\sqrt{a^2+3}}$

직선 OA와 xy평면이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\tan\frac{\pi}{4}=1=\frac{3}{\sqrt{a^2+3}}$

에서 $\sqrt{a^2+3}=3,\ a^2=6$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{6}$

답 ③

3 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 0, 0)$으로 놓을 수 있다.

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\sqrt{(3-a)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{(1-a)^2+3^2+(-4)^2}$

$a^2-6a+14=a^2-2a+26,\ a=-3$

즉, 점 P의 좌표는 $(-3, 0, 0)$이고

$\overline{PA}=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{41}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(1-3)^2+\{3-(-1)\}^2+(-4-2)^2}$
$=\sqrt{14}$

직각삼각형 PAM에서

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{AM}^2}=3\sqrt{3}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PM}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{14}\times3\sqrt{3}=3\sqrt{42}$

답 ④

4 두 점 A$(2, 3, 1)$, C$(-2, 0, a)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, C′이라 하면 두 점 A′, C′의 좌표는 각각 $(2, 3, 0)$, $(-2, 0, 0)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-2-2)^2+(0-3)^2+(a-1)^2}$
$=\sqrt{a^2-2a+26}$

$\overline{A'C'}=\sqrt{(-2-2)^2+(0-3)^2}=5$

직선 AC가 xy평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}},\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{\sqrt{a^2-2a+26}}$

$\sqrt{2a^2-4a+52}=10,\ a^2-2a-24=0$

$(a-6)(a+4)=0$

$a>0$이므로 $a=6$

즉, 점 C의 좌표가 $(-2, 0, 6)$이고

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-2)^2+\{0-(-2)\}^2+(6-1)^2}=3\sqrt{5}$

또 점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 점 B′의 좌표가 $(2, -2, 0)$이므로

$\overline{B'C'}=\sqrt{(-2-2)^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{5}$

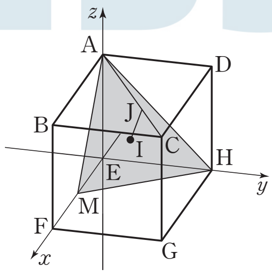
직선 BC가 xy평면과 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\cos\theta=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$

따라서 $a\times\cos\theta=6\times\frac{2}{3}=4$

답 4

5 정육면체 ABCD−EFGH를 좌표공간에 점 E가 원점과 일치하고 세 반직선 EF, EH, EA가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 놓으면 그림과 같다.



두 점 E, F의 좌표가 각각 $(0,\ 0,\ 0)$, $(6,\ 0,\ 0)$이므로 선분 EF의 중점 M의 좌표는 $(3,\ 0,\ 0)$

두 점 A, H의 좌표가 각각 $(0,\ 0,\ 6)$, $(0,\ 6,\ 0)$이므로 삼각형 AMH의 무게중심 I의 좌표는

$\left(\frac{0+3+0}{3},\ \frac{0+0+6}{3},\ \frac{6+0+0}{3}\right)$, 즉 $(1,\ 2,\ 2)$

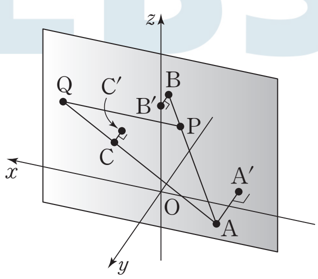
또 점 C의 좌표가 $(6,\ 6,\ 6)$이므로 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점 J의 좌표는

$\left(\frac{2\times6+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times6+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times6+1\times6}{2+1}\right)$, 즉 $(4,\ 4,\ 6)$

따라서 $\overline{IJ}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2+(6-2)^2}=\sqrt{29}$

답 ⑤

6 세 점 $A(-4,\ 3,\ 1)$, $B(0,\ -1,\ 5)$, $C(2,\ 1,\ 3)$에서 zx평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면 세 점 A′, B′, C′의 좌표는 각각 $(-4,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 0,\ 5)$, $(2,\ 0,\ 3)$이고 $\overline{AA'}=3$, $\overline{BB'}=1$, $\overline{CC'}=1$



이때 점 P는 zx평면 위의 점이므로

$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{AA'}:\overline{BB'}=3:1$

두 점 A, B의 y좌표의 부호가 서로 반대이므로 점 P는 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times0+1\times(-4)}{3+1},\ \frac{3\times(-1)+1\times3}{3+1},\ \frac{3\times5+1\times1}{3+1}\right)$, 즉 $(-1,\ 0,\ 4)$

한편, 점 Q는 zx평면 위의 점이므로

$\overline{AQ}:\overline{CQ}=\overline{AA'}:\overline{CC'}=3:1$

두 점 A, C의 y좌표의 부호가 서로 같으므로 점 Q는 선분 AC를 $3:1$로 외분하는 점이다.

따라서 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times2-1\times(-4)}{3-1},\ \frac{3\times1-1\times3}{3-1},\ \frac{3\times3-1\times1}{3-1}\right)$, 즉 $(5,\ 0,\ 4)$

그러므로 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(0-0)^2+(4-4)^2}=6$

답 6

7 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{2+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 1,\ 3)$

이때

$\overline{AC}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(1-2)^2+(3-4)^2}=\sqrt{6}$

이므로 이 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$ …… ㉠

점 P는 z축 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $(0,\ 0,\ a)$로 놓을 수 있고, 점 P가 구 ㉠ 위의 점이므로

$(0-1)^2+(0-1)^2+(a-3)^2=6$

$(a-3)^2=4$, $a-3=\pm2$

$a=1$ 또는 $a=5$

즉, 점 P의 좌표를 $(0,\ 0,\ 1)$이라 하면 점 Q의 좌표는 $(0,\ 0,\ 5)$이므로

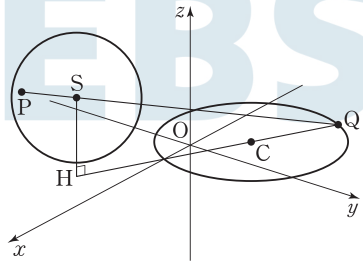
$\overline{OP}\times\overline{OQ}=1\times5=5$

답 ③

8 $x^2+y^2+z^2-12x+4y-8z+k=0$에서

$(x-6)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=56-k$

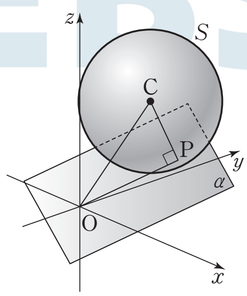
이므로 이 구는 중심의 좌표가 $(6,\ -2,\ 4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{56-k}$인 구이다. 이 구의 중심을 S라 하자.
두 점 P, Q 사이의 거리가 최대이려면 점 S는 선분 PQ 위에 있고, 이때 두 점 S, Q 사이의 거리가 최대이어야 한다.
또 점 S에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{SH}}=4$ (일정)이므로 두 점 S, Q 사이의 거리가 최대이려면 두 점 H, Q 사이의 거리가 최대이어야 한다.



점 $\mathrm{S}(6,\ -2,\ 4)$에서 xy평면에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(6,\ -2,\ 0)$
원 $(x+2)^2+(y-2)^2=20$의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(-2,\ 2,\ 0)$이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이며
$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{5}$
점 C가 선분 QH 위에 있을 때 두 점 H, Q 사이의 거리는 최대이고, 이때
$\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{CH}}+\overline{\mathrm{CQ}}=4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$
한편, $\overline{\mathrm{SH}}=4$이므로 이때 직각삼각형 SHQ에서
$\overline{\mathrm{SQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{SH}}^2+\overline{\mathrm{HQ}}^2}=\sqrt{4^2+(6\sqrt{5})^2}=14$
즉, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은
$\overline{\mathrm{SP}}+\overline{\mathrm{SQ}}=\sqrt{56-k}+14$
두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값이 17이므로
$\sqrt{56-k}+14=17,\ \sqrt{56-k}=3$
$k=47$

답 47

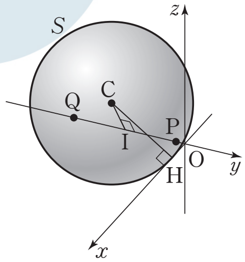
9



점 P는 구 S 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{CP}}=2$
직선 CP는 평면 α와 수직이므로 $\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{CP}}$
직각삼각형 COP에서
$\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{OP}}^2=2^2+3^2=13$
이때 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{1^2+a^2+3^2}=\sqrt{a^2+10}$이므로
$a^2+10=13,\ a^2=3$

답 3

10



점 $\mathrm{C}(2,\ -4,\ a)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H의 좌표는 $(2,\ 0,\ 0)$
구 S가 x축과 한 점에서만 만나므로 이 구의 반지름의 길이는 선분 CH의 길이와 같다. 즉, $\overline{\mathrm{CH}}=5$에서
$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(2-2)^2+\{0-(-4)\}^2+(0-a)^2}$
$=\sqrt{a^2+16}=5$
$a>0$이므로 $a=3$
점 $\mathrm{C}(2,\ -4,\ 3)$에서 y축에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 점 I의 좌표는 $(0,\ -4,\ 0)$
$\overline{\mathrm{CI}}=\sqrt{(0-2)^2+\{-4-(-4)\}^2+(0-3)^2}=\sqrt{13}$
구 S가 y축과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}=5$이므로 직각삼각형 CIP에서
$\overline{\mathrm{PI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CI}}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{13})^2}=2\sqrt{3}$
점 I는 선분 PQ의 중점이므로 구 S가 y축과 만나는 두 점 P, Q 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PI}}=4\sqrt{3}$

답 ①

다른 풀이

좌표공간의 점 $\mathrm{C}(2,\ -4,\ a)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구 S의 방정식은
$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-a)^2=25$
구 S가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(x_1,\ 0,\ 0)$이라 하면
$(x_1-2)^2+(0+4)^2+(0-a)^2=25$
$x_1^2-4x_1+a^2-5=0$ …… ㉠

구 S가 x축과 한 점에서만 만나므로 x_1에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a^2-5)=-a^2+9=0$

$a>0$이므로 $a=3$

즉, 구 S의 방정식은

$(x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=25$

구 S가 y축과 만나는 점의 좌표를 $(0, y_1, 0)$이라 하면

$(0-2)^2+(y_1+4)^2+(0-3)^2=25$

$(y_1+4)^2=12$

$y_1=-4-2\sqrt{3}$ 또는 $y_1=-4+2\sqrt{3}$

따라서 구 S가 y축과 만나는 두 점의 좌표는 각각

$(0, -4-2\sqrt{3}, 0)$, $(0, -4+2\sqrt{3}, 0)$

이므로 두 점 사이의 거리는

$|-4+2\sqrt{3}-(-4-2\sqrt{3})|=4\sqrt{3}$

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ①	2 ⑤	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ③	7 19	8 ③		

1 점 P는 점 A$(4, -2, 1)$에서 yz평면에 내린 수선의 발이므로 점 P의 좌표는 $(0, -2, 1)$

점 Q는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 점 Q의 좌표는 $(-4, 2, -1)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\overline{PQ}=\sqrt{(-4-0)^2+\{2-(-2)\}^2+(-1-1)^2}=6$

답 ①

2 점 P는 점 A$(\sqrt{2}, a, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 P의 좌표는 $(\sqrt{2}, -a, -3)$

점 Q는 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q의 좌표는 $(-\sqrt{2}, -a, -3)$

$\overline{AQ}=8$이므로

$\overline{AQ}=\sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(-a-a)^2+(-3-3)^2}$

$=2\sqrt{a^2+11}=8$

$a^2+11=16$, $a^2=5$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{5}$

답 ⑤

3 점 B$(0, 0, 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(0, 0, -2)$

점 P가 선분 AB′과 xy평면의 교점일 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소이다. 즉, xy평면 위의 점 P_1은 선분 AB′ 위의 점이다.

두 점 A, B′에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$\overline{AP_1}:\overline{B'P_1}=\overline{AH}:\overline{B'I}=1:2$

즉, 점 P_1은 선분 AB′을 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 P_1의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+2\times4}{1+2}, \frac{1\times0+2\times(-3)}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times1}{1+2}\right)$,

즉 $\left(\frac{8}{3}, -2, 0\right)$

따라서 $a=\frac{8}{3}$, $b=-2$, $c=0$이므로

$a+b+c=\frac{8}{3}+(-2)+0=\frac{2}{3}$

답 ②

참고

점 I는 원점이다.

4 좌표공간의 세 점 A$(4, 0, -1)$, B$(0, 0, 3)$, C$(2, a, b)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{4+0+2}{3}, \frac{0+0+a}{3}, \frac{-1+3+b}{3}\right)$, 즉

$\left(2, \frac{a}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$

이 점이 xy평면 위의 점이므로 $\frac{b+2}{3}=0$, $b=-2$

즉, 점 G의 좌표는 $\left(2, \frac{a}{3}, 0\right)$이다. 이때 $\overline{AG}=\sqrt{6}$이므로

$\overline{AG}=\sqrt{(2-4)^2+\left(\frac{a}{3}-0\right)^2+\{0-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{\frac{a^2}{9}+5}=\sqrt{6}$

$\frac{a^2}{9}=1$, $a^2=9$

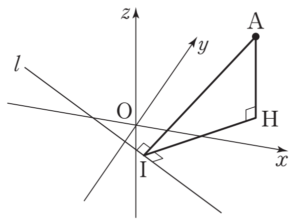
따라서

$\overline{BC}=\sqrt{(2-0)^2+(a-0)^2+(-2-3)^2}$

$=\sqrt{a^2+29}=\sqrt{38}$

답 ⑤

5



점 A(4, 2, a)에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (4, 2, 0)이고 $a>0$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=a$

점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하자. 선분 HI의 길이는 xy평면 위의 점 H(4, 2)와 직선 $l: 3x+4y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{HI}}=\frac{|3\times4+4\times2+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AI}}\perp l$이므로 점 A와 직선 l 사이의 거리는 선분 AI의 길이와 같고 $\overline{\mathrm{AI}}=6$이다.

이때 직각삼각형 AHI에서

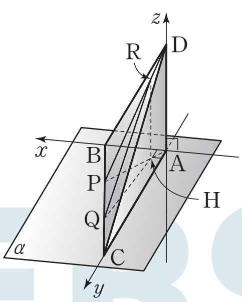
$\overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HI}}^2}=\sqrt{a^2+5^2}=\sqrt{a^2+25}=6$

$a^2=11$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{11}$

답 ④

6 $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AD}}\perp\alpha$이므로 사면체 ABCD를 좌표공간에 점 A가 원점과 일치하고 세 반직선 AB, AC, AD가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 놓으면 그림과 같다.



이때 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=12$이므로 세 점 A, B, C의 좌표는 각각 (0, 0, 0), (6, 0, 0), (0, 12, 0)이고, 양수 a에 대하여 점 D의 좌표를 (0, 0, a)로 놓을 수 있다.

점 P는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+2\times6}{1+2}, \frac{1\times12+2\times0}{1+2}, \frac{1\times0+2\times0}{1+2}\right)$, 즉

(4, 4, 0)

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

이므로 직선 PD와 평면 α가 이루는 각의 크기 θ_1에 대하여

$$\tan\theta_1=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\frac{a}{4\sqrt{2}}$$

또 점 Q는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times0+1\times6}{2+1}, \frac{2\times12+1\times0}{2+1}, \frac{2\times0+1\times0}{2+1}\right)$, 즉

(2, 8, 0)

점 R은 선분 PD를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 R의 좌표는

$\left(\frac{3\times0+1\times4}{3+1}, \frac{3\times0+1\times4}{3+1}, \frac{3\times a+1\times0}{3+1}\right)$, 즉

$\left(1, 1, \frac{3}{4}a\right)$

점 R에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (1, 1, 0)

$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{(1-2)^2+(1-8)^2}=5\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{RH}}=\frac{3}{4}a$

이므로 직선 QR과 평면 α가 이루는 각의 크기 θ_2에 대하여

$$\tan\theta_2=\frac{\overline{\mathrm{RH}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\frac{\frac{3}{4}a}{5\sqrt{2}}=\frac{3a}{20\sqrt{2}}$$

$\tan\theta_1\times\tan\theta_2=\frac{9}{10}$이므로

$$\tan\theta_1\times\tan\theta_2=\frac{a}{4\sqrt{2}}\times\frac{3a}{20\sqrt{2}}=\frac{3a^2}{160}=\frac{9}{10}$$

$a^2=\frac{9}{10}\times\frac{160}{3}=16\times3$, $a=4\sqrt{3}$

따라서 선분 AD의 길이는 $4\sqrt{3}$이다.

답 ③

7 선분 AB가 지름의 양 끝점이므로 이 구의 반지름의 길이 r에 대하여

$2r=\overline{\mathrm{AB}}$

$=\sqrt{\{-1-(-5)\}^2+\{k-(-1)\}^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{k^2+2k+21}$ …… ㉠

선분 AB의 중점을 C라 하면 점 C의 좌표는

$\left(\frac{-5-1}{2}, \frac{-1+k}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $\left(-3, \frac{k-1}{2}, 1\right)$

이 구가 원점을 지나므로 $r=\overline{\mathrm{CO}}$이다. 즉,

$$r=\overline{\mathrm{CO}}=\sqrt{(-3)^2+\left(\frac{k-1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{k^2}{4}-\frac{k}{2}+\frac{41}{4}}$$

$2r=2\sqrt{\frac{k^2}{4}-\frac{k}{2}+\frac{41}{4}}=\sqrt{k^2-2k+41}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{k^2+2k+21}=\sqrt{k^2-2k+41}$

$4k=20$, $k=5$

㉠에 대입하여 정리하면

$2r=\sqrt{5^2+2\times5+21}=2\sqrt{14}$

$r=\sqrt{14}$

따라서 $k+r^2=5+14=19$

답 19

다른 풀이

선분 AB를 지름으로 하는 원이 원점을 지나므로 원점 O에 대하여 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$

즉, $\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2$

이때

$\overline{AB}^2=\{-1-(-5)\}^2+\{k-(-1)\}^2+(2-0)^2$

$=k^2+2k+21$

$\overline{AO}^2=(-5)^2+(-1)^2+0^2=26$

$\overline{BO}^2=(-1)^2+k^2+2^2=k^2+5$

이므로

$k^2+2k+21=26+k^2+5$

$2k=10$, $k=5$

한편,

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+2k+21}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+2\times5+21}=\sqrt{14}$

따라서 $k+r^2=5+14=19$

8 $x^2+y^2+z^2-2ax+2ay-2az=0$에서

$(x-a)^2+(y+a)^2+(z-a)^2=3a^2$

이므로 이 구는 중심의 좌표가 $(a,\ -a,\ a)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}a$인 구이다.

구의 중심 $(a,\ -a,\ a)$로부터 xy평면, yz평면, zx평면까지의 거리가 모두 a로 같으므로 이 구가 xy평면, yz평면, zx평면과 만나서 생기는 세 원의 넓이는 모두 같다.

이 세 원의 넓이의 합이 π이므로 이 구와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이는 $\frac{\pi}{3}$이고 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{1}{3}}$이다.

구의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이 구가 원점 O를 지나므로

$\overline{CO}=\sqrt{3}a$, $\overline{CH}=a$, $\overline{OH}=\sqrt{\frac{1}{3}}$

이고 직각삼각형 COH에서

$\overline{CO}^2=\overline{CH}^2+\overline{OH}^2$

$3a^2=a^2+\frac{1}{3}$, $a^2=\frac{1}{6}$, $a=\frac{\sqrt{6}}{6}$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ③	2 ⑤	3 ②	4 36	5 ②
6 ④	7 27	8 37		

1 점 P는 점 $A(a,\ -\sqrt{15},\ a)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 점 P의 좌표는 $(a,\ \sqrt{15},\ -a)$이고 직선 AP는 x축에 수직이다.

점 Q는 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 점 Q의 좌표는 $(-a,\ -\sqrt{15},\ a)$이고 직선 AQ는 yz평면에 수직이다.

이때 x축이 yz평면에 수직이므로 두 직선 AP, AQ는 수직이다. 즉, $\angle PAQ=\frac{\pi}{2}$

$\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서

$\sin(\angle AQP)=\sqrt{1-\cos^2(\angle AQP)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$\tan(\angle AQP)=\frac{\sin(\angle AQP)}{\cos(\angle AQP)}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2$ ...... ㉠

이때

$\overline{AP}=\sqrt{(a-a)^2+\{\sqrt{15}-(-\sqrt{15})\}^2+(-a-a)^2}$

$=2\sqrt{a^2+15}$

$\overline{AQ}=\sqrt{(-a-a)^2+\{-\sqrt{15}-(-\sqrt{15})\}^2+(a-a)^2}=2a$

이므로 ㉠에서

$\tan(\angle AQP)=\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}=\frac{\sqrt{a^2+15}}{a}=2$

$\sqrt{a^2+15}=2a$, $3a^2=15$, $a=\sqrt{5}$

즉, $\overline{AP}=2\sqrt{a^2+15}=4\sqrt{5}$, $\overline{AQ}=2a=2\sqrt{5}$이므로 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=20$

답 ③

2 조건 (가)에서 점 P가 xy평면 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, b, 0)$으로 놓을 수 있다. 이때

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\{a-(-2)\}^2+(b-4)^2+\{0-(-8)\}^2$
$\quad=a^2+b^2+4a-8b+84$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-4)^2+\{b-(-2)\}^2+(0-4)^2$
$\quad=a^2+b^2-8a+4b+36$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$a^2+b^2+4a-8b+84=a^2+b^2-8a+4b+36$

$a-b+4=0$ …… ㉠

즉, 점 P는 xy평면의 직선 $x-y+4=0$ 위의 점이다. 이 직선을 l이라 하자.

한편, 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-2, 4, 0)$

$\overline{\mathrm{AP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P가 Q이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}\perp l$

이때 $\overline{\mathrm{AH}}\perp(xy$평면$)$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HQ}}\perp l$

xy평면 위의 점 $\mathrm{H}(-2, 4)$를 지나고 직선 l과 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$y=-(x+2)+4$, 즉 $x+y-2=0$

위의 직선의 방정식와 직선 l의 방정식 $x-y+4=0$을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=3$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-1, 3, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가)에서 점 P가 xy평면 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, b, 0)$으로 놓을 수 있다. 이때

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\{a-(-2)\}^2+(b-4)^2+\{0-(-8)\}^2$
$\quad=a^2+b^2+4a-8b+84$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-4)^2+\{b-(-2)\}^2+(0-4)^2$
$\quad=a^2+b^2-8a+4b+36$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$a^2+b^2+4a-8b+84=a^2+b^2-8a+4b+36$

$a-b+4=0$ …… ㉠

㉠에서 $b=a+4$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=a^2+b^2+4a-8b+84$
$\quad=a^2+(a+4)^2+4a-8(a+4)+84$
$\quad=2a^2+4a+68=2(a+1)^2+66$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 실수 a의 값은 -1이다. $a=-1$을 ㉠에 대입하면

$b=a+4=-1+4=3$

따라서 점 Q의 좌표는 $(-1, 3, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

3 네 점 A, B, C, D를 xy평면 위의 점

$(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(4, 4, 0)$, $(0, 4, 0)$

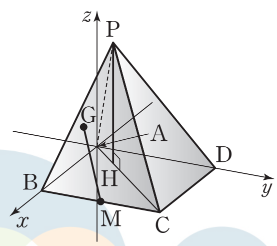
으로 놓으면 선분 AC를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4+3\times0}{1+3}, \dfrac{1\times4+3\times0}{1+3}, \dfrac{1\times0+3\times0}{1+3}\right)$, 즉

$(1, 1, 0)$

이 점을 H라 하자.

이때 사각뿔 P$-$ABCD의 높이가 4이고 점 P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발이 점 H와 같으므로 점 P의 좌표는 $(1, 1, 4)$로 놓을 수 있다.



이때 삼각형 PAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{1+0+4}{3}, \dfrac{1+0+0}{3}, \dfrac{4+0+0}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

이고, 선분 BC의 중점 M의 좌표는

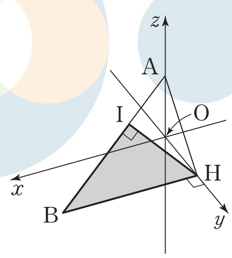
$\left(\dfrac{4+4}{2}, \dfrac{0+4}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right)$, 즉 $(4, 2, 0)$

따라서 선분 GM의 길이는

$$\overline{\mathrm{GM}}=\sqrt{\left(4-\frac{5}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{4}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{7^2+5^2+(-4)^2}=\sqrt{10}$$

답 ②

4



원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{AO}}\perp(xy$평면$)$이고 $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{BH}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}} \perp \overline{\mathrm{BH}}$

즉, 삼각형 ABH는 $\angle\mathrm{AHB}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

이때 $\overline{\mathrm{HI}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$이므로 두 직각삼각형 AIH, HIB는 서로 닮음이다. 즉, $\overline{\mathrm{AI}} : \overline{\mathrm{IH}}=\overline{\mathrm{HI}} : \overline{\mathrm{IB}}$이므로

$\overline{\mathrm{HI}}^2=\overline{\mathrm{AI}} \times \overline{\mathrm{BI}}$

조건 (가)에서 점 I가 선분 AB를 $1:2$로 내분하므로

$\overline{\mathrm{AI}}=k\ (k>0)$으로 놓으면 $\overline{\mathrm{BI}}=2k$이고

$\overline{\mathrm{HI}}^2=\overline{\mathrm{AI}} \times \overline{\mathrm{BI}}=k \times 2k=2k^2$, $\overline{\mathrm{HI}}=\sqrt{2}k$

이므로 삼각형 BHI의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BI}} \times \overline{\mathrm{HI}}=\frac{1}{2} \times 2k \times \sqrt{2}k=\sqrt{2}k^2$

한편, $\overline{\mathrm{AH}} \perp \overline{\mathrm{BH}}$이므로 평면 BHI와 xy평면이 이루는 각의 크기는 $\angle\mathrm{AHO}$와 같다.

직각삼각형 AIH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AI}}^2+\overline{\mathrm{HI}}^2}=\sqrt{k^2+(\sqrt{2}k)^2}=\sqrt{3}k$

이고 $\overline{\mathrm{OA}}=3$이므로 직각삼각형 AOH에서

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}=\sqrt{(\sqrt{3}k)^2-3^2}=\sqrt{3k^2-9}$

따라서 $\cos(\angle\mathrm{AHO})=\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}=\frac{\sqrt{3k^2-9}}{\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{k^2-3}}{k}$

조건 (나)에서 삼각형 BHI의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 $2\sqrt{5}$이므로

$$S \times \cos(\angle\mathrm{AHO})=\sqrt{2}k^2 \times \frac{\sqrt{k^2-3}}{k}$$
$$=\sqrt{2} \times k\sqrt{k^2-3}=2\sqrt{5}$$

$k\sqrt{k^2-3}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^4-3k^2-10=0$, $(k^2+2)(k^2-5)=0$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{5}$

즉, $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3k^2-9}=\sqrt{6}$

한편, 두 삼각형 AIH, HIB의 닮음비는

$\overline{\mathrm{AI}} : \overline{\mathrm{HI}}=k : \sqrt{2}k=1 : \sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{BH}}=1 : \sqrt{2}$에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{2} \times \overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{2} \times \sqrt{3}k=\sqrt{30}$

따라서 점 B의 좌표가 $(\sqrt{30}, \sqrt{6}, 0)$이므로

$a=\sqrt{30}$, $b=\sqrt{6}$이고

$a^2+b^2=(\sqrt{30})^2+(\sqrt{6})^2=36$

답 36

5 방정식 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=0$에 $x=y=z=0$을 대입하면 성립하므로 구 S는 원점 O를 지난다.

또 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$이므로 구 S의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(2, -1, 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

평면 α가 구 S 위의 두 점 O, A를 지나므로 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원을 C라 하면 선분 OA는 원 C의 현이다. 이 현이 원 C의 지름일 때, 원 C의 넓이는 최소이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$이므로 선분 OA가 지름인 원의 넓이는

$\left(\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{2}\right)^2\pi=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\pi=\frac{3}{2}\pi$

따라서 $m=\frac{3}{2}\pi$

한편, 평면 α가 구 S의 중심 C를 지날 때, 원 C의 넓이가 최대이고 이 원의 반지름의 길이는 구 S의 반지름의 길이와 같으므로

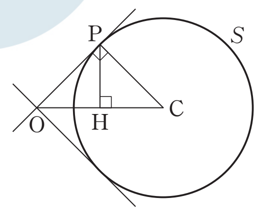
$M=(\sqrt{6})^2\pi=6\pi$

따라서 $M+m=6\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{15}{2}\pi$

답 ②

6 조건에서 직선 OP는 구 S와 점 P에서만 만나므로 직선 OP는 구 S 위의 점 P에서 접한다. 즉, $\overline{\mathrm{OP}} \perp \overline{\mathrm{CP}}$

이때 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(-2)^2+3^2+(\sqrt{5})^2}=3\sqrt{2}$



점 P에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P가 나타내는 도형은 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{PH}}$인 원이다. 이 원의 둘레의 길이가 $3\sqrt{2}\pi$이므로 원의 반지름의 길이는 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$이다. 즉, $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

구 S의 반지름의 길이를 r이라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이고 직각삼각형 POC에서

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{CP}}^2}=\sqrt{18-r^2}$

$\overline{\mathrm{OP}} \times \overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{OC}} \times \overline{\mathrm{PH}}$이므로

$r\sqrt{18-r^2}=3\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}=9$

양변을 제곱하여 정리하면

$r^2(18-r^2)=81$, $r^4-18r^2+81=0$

$(r^2-9)^2=0$, $r^2=9$

$r>0$이므로 $r=3$

구의 중심 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{CI}}=\sqrt{5}$

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$R=\sqrt{r^2-\overline{\mathrm{CI}}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

따라서 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이는

$2^2\pi=4\pi$

답 ④

7 조건 (가)에서 평면 PAO가 xy평면에 수직이고 두 점 A, O는 x축 위의 점이므로 점 P는 zx평면 위의 점이다. 즉, 점 P의 y좌표는 0이다.

조건 (나)에서 삼각형 PAO가 정삼각형이므로 삼각형 PAO의 무게중심을 G라 하면 점 G는 삼각형 PAO의 외접원의 중심이다.

선분 OA의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$이므로 두 점 C, M의 x좌표는 서로 같다. 즉, 점 M의 좌표는 $(a,\ 0,\ 0)$

이때 $a>0$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OM}}=2a$이며 조건 (나)에서 정삼각형 PAO의 넓이가 $9\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{\mathrm{OA}}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2a)^2=9\sqrt{3}$

$a^2=9\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=9$, $a=3$

한편, 점 G는 구의 중심 C에서 평면 PAO에 내린 수선의 발과 일치하고 평면 PAO는 zx평면이므로 점 G는 점 C에서 zx평면에 내린 수선의 발과 같다.

즉, 점 G의 좌표는 $(3,\ 0,\ b)$, 이때 점 M의 좌표는 $(3,\ 0,\ 0)$이고

$\overline{\mathrm{PM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{GM}}=\dfrac{1}{3}\ \overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{3}$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{3}$

따라서 $a^2\times b^2=3^2\times(\sqrt{3})^2=27$

답 27

8 구 S의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(1,\ 2,\ -3)$

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(1,\ 2,\ 0)$

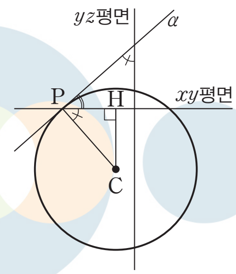
구 S의 반지름의 길이가 4이므로 원 C 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{CP}}=4$이고 $\overline{\mathrm{CH}}=3$이므로 직각삼각형 CHP에서

$\overline{\mathrm{HP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

즉, 원 C의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 원 C의 넓이는

$(\sqrt{7})^2\pi=7\pi$

한편, 평면 CHP는 y축에 수직이므로 평면 CHP에 의해 잘린 단면은 그림과 같다.



$\angle\mathrm{CPH}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{CP}}}=\dfrac{3}{4}$이고 $\overline{\mathrm{CP}}\perp\alpha$이므로

평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$이다. 따라서

원 C의 평면 α 위로의 정사영 C_1의 넓이는

$7\pi\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=7\pi\times\sin\theta=7\pi\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{21}{4}\pi$

또 xy평면과 yz평면이 서로 수직이므로 평면 α와 yz평면이 이루는 각의 크기는 θ이다.

이때 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HP}}}{\overline{\mathrm{CP}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이므로 도형 C_1의 yz평면 위로의 정사영의 넓이는

$\dfrac{21}{4}\pi\times\cos\theta=\dfrac{21}{4}\pi\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{21\sqrt{7}}{16}\pi$

따라서 $p=16$, $q=21$이므로

$p+q=16+21=37$

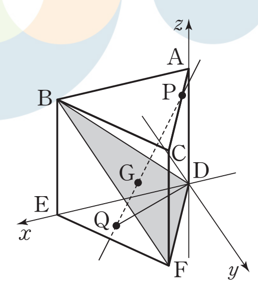
답 37

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ④ 2 26 3 288

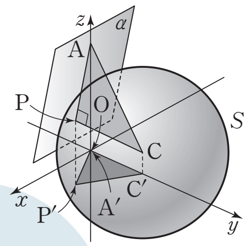
1



그림과 같이 세 점 D, A, E가 각각 좌표공간의 점
$(0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 6)$, $(6,\ 0,\ 0)$
과 일치하도록 삼각기둥 $\mathrm{ABC-DEF}$를 좌표공간에 놓으면 세 점 B, C, F의 좌표는 각각
$(6,\ 0,\ 6)$, $(3,\ 3\sqrt{3},\ 6)$, $(3,\ 3\sqrt{3},\ 0)$
삼각형 BFD의 무게중심 G의 좌표는
$\left(\dfrac{6+3+0}{3},\ \dfrac{0+3\sqrt{3}+0}{3},\ \dfrac{6+0+0}{3}\right)$, 즉 $(3,\ \sqrt{3},\ 2)$
선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\dfrac{1\times3+2\times0}{1+2},\ \dfrac{1\times3\sqrt{3}+2\times0}{1+2},\ \dfrac{1\times6+2\times6}{1+2}\right)$, 즉
$(1,\ \sqrt{3},\ 6)$
점 Q는 직선 PG가 평면 DEF와 만나는 점이므로 이 점의 z좌표는 0이고, 점 Q는 선분 PG의 연장선 위의 점이다.
이때 두 점 P, G에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 P′, G′이라 하면 $\overline{\mathrm{PP'}}=6$, $\overline{\mathrm{GG'}}=2$이고
$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{GQ}}=\overline{\mathrm{PP'}}:\overline{\mathrm{GG'}}=6:2=3:1$
이므로 점 Q는 선분 PG를 $3:1$로 외분하는 점이다. 즉, 점 Q의 좌표는
$\left(\dfrac{3\times3-1\times1}{3-1},\ \dfrac{3\times\sqrt{3}-1\times\sqrt{3}}{3-1},\ \dfrac{3\times2-1\times6}{3-1}\right)$, 즉
$(4,\ \sqrt{3},\ 0)$
따라서 $\overline{\mathrm{QD}}=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19}$

답 ④

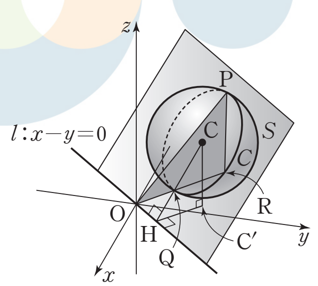
2 점 A는 z축 위의 점이므로 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A′이라 하면 점 A′은 원점이다. 또 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 점 C′의 좌표는 $(0,\ 4,\ 0)$이다.
점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P′이라 하자. 조건 (가)에서 삼각형 APC의 xy평면 위로의 정사영이 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{A'C'}}=4$이므로 삼각형 A′P′C′은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다. 따라서 점 P의 x좌표가 양수라고 가정하면 점 P′의 좌표는 $(2\sqrt{3},\ 2,\ 0)$이고 실수 p에 대하여 점 P의 좌표를 $(2\sqrt{3},\ 2,\ p)$로 놓을 수 있다.
한편, 점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하면 $\alpha\perp\overline{\mathrm{PC}}$이고 두 점 A, P가 평면 α 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AP}}\perp\overline{\mathrm{PC}}$
따라서 삼각형 APC는 $\angle\mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.
이때 조건 (가)에서 삼각형 APC가 이등변삼각형이므로 삼각형 APC는 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PC}}$이고 $\angle\mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.



점 P를 지나고 z축에 수직인 평면이 z축과 만나는 점을 $\mathrm{A_1}$, 직선 CC′과 만나는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 하면
$\overline{\mathrm{PA_1}}=\overline{\mathrm{P'A'}}=4$, $\overline{\mathrm{PC_1}}=\overline{\mathrm{P'C'}}=4$
에서 $\overline{\mathrm{PA_1}}=\overline{\mathrm{PC_1}}$이고 $\angle\mathrm{AA_1P}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{CC_1P}=\dfrac{\pi}{2}$이다.
이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PC}}$이므로 두 직각삼각형 $\mathrm{APA_1}$, $\mathrm{CPC_1}$에서
$\overline{\mathrm{AA_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{PA_1}}^2}=\sqrt{\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{PC_1}}^2}=\overline{\mathrm{CC_1}}$
즉, 점 P에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AC의 중점이다.
삼각형 APC가 $\angle\mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이므로
$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}$
이때 $\overline{\mathrm{PH}}=|2\sqrt{3}-0|=2\sqrt{3}$이므로
$\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{PH}}=4\sqrt{3}$ …… ㉠
조건 (나)에서 점 A의 z좌표가 $5\sqrt{2}$이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 0,\ 5\sqrt{2})$
점 C의 좌표가 $(0,\ 4,\ k)$이므로 ㉠에서
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(0-0)^2+(4-0)^2+(k-5\sqrt{2})^2}$
$=\sqrt{(k-5\sqrt{2})^2+16}=4\sqrt{3}$
$(k-5\sqrt{2})^2=32$
$k<5\sqrt{2}$이므로 $k-5\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$
한편, $\overline{\mathrm{PC}}=r$이므로 $r=\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{6}$
따라서 $k^2+r^2=(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2=26$

답 26

3



구 S의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 두 점 C, C′의 좌표는 각각

$(-1, 5, 4\sqrt{2})$, $(-1, 5, 0)$

xy평면 위의 직선 $x-y=0$을 l이라 하자. 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{C'H}} \perp l$

xy평면에서 직선 l의 기울기가 1이므로 직선 C′H는 점 $(-1, 5)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이다. 이 직선의 방정식을 구하면

$x+y=4$ …… ㉠

직선 l이 직선 ㉠과 만나는 점이 H이므로 연립하여 점 H의 좌표를 구하면 $(2, 2, 0)$이고

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(2-5)^2+(0-4\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$

직선 l을 포함하고 구의 중심 C를 지나는 평면을 α라 하자. 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원 C 위의 점 중에서 z좌표가 최소인 점은 원 C 위의 점과 직선 $x-y=0$ 사이의 거리가 최소인 점이므로 점 Q는 선분 CH와 원 C의 교점이다. 마찬가지로 점 P는 직선 CH와 원 C의 교점 중에서 Q가 아닌 점이다.

이때 선분 CQ의 길이는 구 S의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{CQ}}=3\sqrt{2}$

즉, 점 Q는 선분 CH를 $3:2$로 내분하는 점과 같으므로 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times2+2\times(-1)}{3+2}, \dfrac{3\times2+2\times5}{3+2}, \dfrac{3\times0+2\times4\sqrt{2}}{3+2}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{8\sqrt{2}}{5}\right)$

한편, 점 O가 평면 α 위의 점이므로 직선 OQ는 평면 α 위의 직선이고, 직선 OQ가 구 S와 만나는 점 중 Q가 아닌 점 R은 원 C 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{CQ}}=3\sqrt{2}$이고

$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{CH}}-\overline{\mathrm{CQ}}=2\sqrt{2}$

에서 $\angle\mathrm{OHQ}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 삼각형 QOH는 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{QH}}$인 직각이등변삼각형이다.

즉, $\angle\mathrm{OQH}=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\angle\mathrm{CQR}=\dfrac{\pi}{4}$ (맞꼭지각)이다.

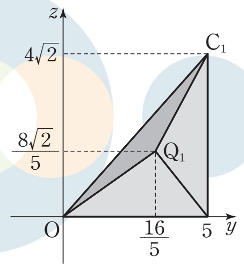
$\overline{\mathrm{QR}}=2\times\overline{\mathrm{CQ}}\times\cos\dfrac{\pi}{4}=6$

삼각형 COR의 넓이는 삼각형 COQ의 넓이의 $\dfrac{5}{2}$배이고, 삼각형 POR의 넓이는 삼각형 COR의 넓이의 2배이므로 삼각형 POR의 넓이는 삼각형 COQ의 넓이의 5배이다.

한편, 네 점 C, P, Q, R의 yz평면 위로의 정사영을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이라 하면 삼각형 POR의 yz평면 위로의 정사영은 삼각형 $\mathrm{P_1OR_1}$이고,

$\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OQ_1}}:\overline{\mathrm{OR_1}}$, $\overline{\mathrm{CQ}}:\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{C_1Q_1}}:\overline{\mathrm{C_1P_1}}$

이므로 삼각형 $\mathrm{P_1OR_1}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{C_1OQ_1}$의 넓이의 5배이다.



두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{Q_1}$의 좌표가 각각 $(0, 5, 4\sqrt{2})$, $\left(0, \dfrac{16}{5}, \dfrac{8\sqrt{2}}{5}\right)$

이므로 삼각형 $\mathrm{C_1OQ_1}$의 넓이를 k_1이라 하면

$$k_1=\frac{1}{2}\times5\times4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times5\times\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\left(5-\frac{16}{5}\right)$$

$$=10\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\frac{18\sqrt{2}}{5}=\frac{12\sqrt{2}}{5}$$

따라서 $k=5k_1=12\sqrt{2}$이므로

$k^2=(12\sqrt{2})^2=288$

답 288