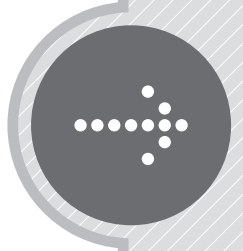


수능특강 수학영역 수학 I

정답과
풀이



01 지수와 로그

유제

본문 5~13쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 ② | 2 6 | 3 ④ | 4 ① | 5 ① |
| 6 ④ | 7 ① | 8 8 | 9 ② | 10 6 |

Level 1 기초 연습

본문 14~15쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ② | 2 ③ | 3 ① | 4 ② | 5 ④ |
| 6 ④ | 7 ② | 8 ④ | 9 ⑤ | |

Level 2 기본 연습

본문 16~17쪽

- | | | | | |
|-------|-----|------|------|-----|
| 1 ⑤ | 2 ③ | 3 ③ | 4 17 | 5 ① |
| 6 174 | 7 ④ | 8 36 | | |

Level 3 실력 완성

본문 18쪽

- | | | |
|-----|-----|-----|
| 1 ④ | 2 9 | 3 ③ |
|-----|-----|-----|

02 지수함수와 로그함수

유제

본문 21~29쪽

- | | | | | |
|------|-----|-----|------|------|
| 1 ② | 2 5 | 3 ④ | 4 14 | 5 3 |
| 6 17 | 7 8 | 8 ① | 9 ⑤ | 10 4 |

Level 1 기초 연습

본문 30~31쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ① | 2 ③ | 3 ② | 4 ④ | 5 ③ |
| 6 3 | 7 ④ | 8 ⑤ | 9 ② | |

Level 2 기본 연습

본문 32~33쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 ② | 2 ⑤ | 3 ④ | 4 ① | 5 30 |
| 6 ④ | 7 ③ | | | |

Level 3 실력 완성

본문 34쪽

- | | | |
|-----|------|-----|
| 1 ② | 2 11 | 3 ③ |
|-----|------|-----|

03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

- | | | | | |
|------|-------|------|------|------|
| 1 ⑤ | 2 150 | 3 ② | 4 ⑤ | 5 2 |
| 6 26 | 7 ④ | 8 40 | 9 20 | 10 ② |

Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ⑤ | 2 ① | 3 ④ | 4 ② | 5 ① |
| 6 ④ | 7 ④ | 8 ② | | |

Level 2 기본 연습

본문 48~50쪽

- | | | | | |
|-------|--------|-----|------|------|
| 1 4 | 2 ① | 3 ④ | 4 12 | 5 ⑤ |
| 6 ③ | 7 ④ | 8 ④ | 9 ② | 10 ③ |
| 11 11 | 12 113 | | | |

Level 3 실력 완성

본문 51쪽

- | | | |
|------|------|------|
| 1 87 | 2 98 | 3 11 |
|------|------|------|

04 사인법칙과 코사인법칙

유제

본문 55~61쪽

- 1 ③ 2 75 3 ② 4 55 5 12
6 1 7 ③ 8 4

Level

1 기초 연습

본문 62~63쪽

- 1 ⑤ 2 ① 3 ④ 4 ⑤ 5 ④
6 ② 7 ④ 8 ⑤

Level

2 기본 연습

본문 64~66쪽

- 1 ② 2 ⑤ 3 ② 4 ⑤ 5 ②
6 ② 7 ④ 8 ④ 9 ③

Level

3 실력 완성

본문 67쪽

- 1 128 2 ⑤ 3 ④

05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

- 1 ② 2 ④ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 6 7 ⑤ 8 62

Level

1 기초 연습

본문 78~80쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ① 4 ⑤ 5 ⑤
6 ③ 7 ③ 8 ③ 9 ① 10 ④
11 ① 12 15

Level

2 기본 연습

본문 81~83쪽

- 1 ② 2 ④ 3 ④ 4 ① 5 ②
6 ③ 7 ⑤ 8 ① 9 ① 10 ⑤
11 19 12 ①

Level

3 실력 완성

본문 84쪽

- 1 3 2 ④ 3 768

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제

본문 87~97쪽

- 1 ① 2 80 3 ④ 4 ① 5 58
6 ② 7 ③ 8 89 9 ② 10 503
11 ③

Level

1 기초 연습

본문 98~99쪽

- 1 ⑤ 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 7
6 ⑤ 7 ① 8 24

Level

2 기본 연습

본문 100~101쪽

- 1 ④ 2 110 3 ② 4 ④ 5 ④
6 ② 7 ③

Level

3 실력 완성

본문 102쪽

- 1 17 2 ④ 3 101

01 지수와 로그

유제

분문 5~13쪽

1 ②	2 6	3 ④	4 ①	5 ①
6 ④	7 ①	8 8	9 ②	10 6

1 $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$
 $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
 따라서 $\sqrt[3]{-64} + \frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = -4 + 3 = -1$

답 ②

2 a 는 2의 여섯제곱근 중 양수이므로
 $a = \sqrt[6]{2}$ ㉠
 $a \times \sqrt[6]{18}$ 은 자연수 n 의 세제곱근이므로
 $(a \times \sqrt[6]{18})^3 = n$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $n = (\sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{18})^3$
 $= (\sqrt[6]{36})^3$
 $= (\sqrt[3]{6})^3$
 $= 6$

답 6

3 $\sqrt[3]{24} \times 9^{-\frac{2}{3}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{-\frac{2}{3}}$
 $= (2^{3 \times \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}) \times 3^{2 \times (-\frac{2}{3})}$
 $= 2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{4}{3}}$
 $= 2 \times 3^{\frac{1}{3} + (-\frac{4}{3})}$
 $= 2 \times 3^{-1}$
 $= \frac{2}{3}$

답 ④

4 $3^x = 4$ 에서 $3 = 4^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{2}{x}}$
 $36^y = 8$ 에서 $36 = 8^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{3}{y}}$
 따라서 $2^{\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{y}} = \frac{2^{\frac{4}{x}}}{2^{\frac{3}{y}}} = \frac{(2^{\frac{2}{x}})^2}{2^{\frac{3}{y}}} = \frac{3^2}{36} = \frac{1}{4}$

답 ①

5 $\log_3 12 + 2 \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 12 + \log_3 \frac{9}{4}$
 $= \log_3 \left(12 \times \frac{9}{4} \right)$
 $= \log_3 3^3$
 $= 3 \log_3 3$
 $= 3$

답 ①

6 $\frac{1}{2} \log_2 a = \log_2 \frac{b}{a}$ 에서
 $\frac{1}{2} \log_2 a = \log_2 b - \log_2 a$
 $\frac{3}{2} \log_2 a = \log_2 b$

$\log_2 a^{\frac{3}{2}} = \log_2 b$

$a^{\frac{3}{2}} = b$ ㉠

또 $b^3 = c^4$ 에서

$c = b^{\frac{3}{4}}$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$c = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{9}{8}}$

따라서 $\log_a c = \log_a a^{\frac{9}{8}} = \frac{9}{8} \log_a a = \frac{9}{8}$

답 ④

7 $\log_5 16 \times \log_2 \frac{1}{5} = \log_5 16 \times (-\log_2 5)$
 $= \frac{\log_2 16}{\log_2 5} \times (-\log_2 5)$
 $= -\log_2 16$
 $= -4 \log_2 2$
 $= -4$

답 ①

8 $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c = \frac{2}{3}$
 따라서
 $b^{\log_a 4} = 4^{\log_a b} = 4^{\frac{1}{\log_b c}}$
 $= 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}}$
 $= 2^3 = 8$

답 8

9 $\log \sqrt[3]{8.1} = \log \sqrt[3]{\frac{81}{10}}$
 $= \log \left(\frac{81}{10} \right)^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{1}{3} (\log 81 - \log 10)$
 $= \frac{1}{3} (4 \log 3 - 1)$
 $= \frac{1}{3} (4 \times 0.4771 - 1)$
 $= \frac{1}{3} \times 0.9084$
 $= 0.3028$

답 ②

10 $\log \sqrt[5]{N^3} = \log (N^3)^{\frac{1}{5}} = \log N^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \log N$ 이므로
 $\log \sqrt[5]{N^3} = 1.5612$ 에서
 $\frac{3}{5} \log N = 1.5612$
 $\log N = 1.5612 \times \frac{5}{3}$
 $= 2.6020$
 $= 2 + 2 \times 0.3010$
 $= \log 10^2 + 2 \log 2$
 $= \log (4 \times 10^2)$
 $N = 4 \times 10^2$
 따라서 $a = 4, n = 2$ 이므로
 $a + n = 4 + 2 = 6$

답 6

Level 1 기초 연습 본문 14~15쪽

1 ②	2 ③	3 ①	4 ②	5 ④
6 ④	7 ②	8 ④	9 ⑤	

1 $\sqrt[3]{8^5} \times 4^{-3} = \{(2^3)^5\}^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{-3}$
 $= 2^5 \times 2^{-6}$
 $= 2^{5+(-6)}$
 $= 2^{-1}$
 $= \frac{1}{2}$

답 ②

2 $3^{\sqrt{3}+1} \times \frac{1}{9} = 3^{\sqrt{3}+1} \times 3^{-2}$
 $= 3^{(\sqrt{3}+1)-2}$
 $= 3^{\sqrt{3}-1}$
 따라서
 $\left(3^{\sqrt{3}+1} \times \frac{1}{9} \right)^{\sqrt{3}+1} = (3^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$
 $= 3^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
 $= 3^{3-1}$
 $= 3^2$
 $= 9$

답 ③

3 a 는 -64 의 세제곱근 중에서 실수이므로
 $a = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$
 또 실수 b 의 네제곱근 중에서 양수인 것이 $\sqrt{5}$ 이므로
 방정식 $x^4 = b$ 의 근 중에서 양수인 것이 $\sqrt{5}$ 이다.
 즉, $b = (\sqrt{5})^4 = (5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^2 = 25$
 따라서 $a + b = -4 + 25 = 21$

답 ①

참고
 -64 의 세제곱근을 x 라 하면
 $x^3 = -64$
 $x^3 + 64 = 0$
 $(x+4)(x^2 - 4x + 16) = 0$
 $x = -4$ 또는 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

4 $6^x = 27$ 에서 $27^{\frac{1}{x}} = 6$
 $4^y = 27$ 에서 $27^{\frac{1}{y}} = 4$
 따라서
 $27^{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}} = \frac{(27^{\frac{1}{x}})^2}{27^{\frac{1}{y}}} = \frac{6^2}{4} = 9$
 이므로
 $3^{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{y}\right)} = 3^2$
 즉, $3^{\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{y}\right)} = 2$ 이므로
 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$

답 ②

5 $\log_x (-x^2 + 4x + 12)$ 에서
 x 가 로그의 밑이므로
 $x > 0, x \neq 1 \dots \dots \textcircled{7}$

$-x^2+4x+12$ 가 로그의 진수이므로

$$-x^2+4x+12 > 0$$

$$x^2-4x-12 < 0$$

$$(x+2)(x-6) < 0$$

$$-2 < x < 6 \quad \dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 6$$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4, 5이고, 그 합은

$$2+3+4+5=14$$

답 ④

6 $\log_3 54 - \log_3 \frac{2}{3} = \log_3 \left(54 \times \frac{3}{2} \right)$
 $= \log_3 81$
 $= 4 \log_3 3$
 $= 4$

답 ④

7 $(\log_2 9 + 4 \log_4 2) \times \log_6 4$
 $= (\log_2 9 + 2 \log_2 2) \times \log_6 4$
 $= (\log_2 9 + \log_2 4) \times \log_6 4$
 $= \log_2 36 \times \log_6 4$
 $= \frac{2 \log_2 6}{\log_2 2} \times \frac{2 \log_2 2}{\log_2 6}$
 $= 4$

답 ②

8 $3^a = \sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$
 $b = \log_7 64 = 6 \log_7 2$
 따라서
 $9^{ab} = (3^a)^{2b} = (7^{\frac{1}{4}})^{12 \log_7 2}$
 $= 7^{\frac{1}{4} \times 12 \log_7 2}$
 $= 7^{3 \log_7 2}$
 $= 7^{\log_7 8}$
 $= 8^{\log_7 7}$
 $= 8$

답 ④

9 $1210 = 1.21 \times 10^3 = 1.1^2 \times 10^3$
 따라서
 $\log 1210 = \log (1.1^2 \times 10^3)$
 $= 2 \log 1.1 + 3 \log 10$

$$= 2a + 3$$

답 ⑤

Level 2

기본 연습

본문 16~17쪽

1 ⑤	2 ③	3 ③	4 17	5 ①
6 174	7 ④	8 36		

1 $(\sqrt[3]{2^{10}})^{\frac{n}{8}} = \{(2^{10})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{n}{8}} = 2^{\frac{10}{3} \times \frac{n}{8}} = 2^{\frac{5n}{12}}$
 n 이 자연수이므로 $(\sqrt[3]{2^{10}})^{\frac{n}{8}}$, 즉 $2^{\frac{5n}{12}}$ 의 값이 자연수이려면 $\frac{5n}{12}$ 은 자연수이어야 한다.
 즉, n 은 12의 배수이다.
 따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 12이다.

답 ⑤

2 a 는 64의 n 제곱근이므로
 $a^n = 64 = 2^6$
 a 가 정수이므로 2 이상의 자연수 n 은 6의 약수이다.
 즉, $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=6$ 이다.
 (i) $n=2$ 일 때
 $a^2 = 64$ 에서
 $a = -8$ 또는 $a = 8$
 따라서 두 수 n, a 의 순서쌍 (n, a) 는 $(2, -8), (2, 8)$ 이고, 그 개수는 2이다.
 (ii) $n=3$ 일 때
 $a^3 = 64$ 에서
 $a^3 - 64 = 0$
 $(a-4)(a^2+4a+16) = 0$
 $a = 4$ 또는 $a = -2 \pm 2\sqrt{3}i$
 a 는 정수이므로 $a = 4$
 따라서 두 수 n, a 의 순서쌍 (n, a) 는 $(3, 4)$ 이고, 그 개수는 1이다.
 (iii) $n=6$ 일 때
 $a^6 = 64$ 에서
 $a^6 - 64 = 0$
 $(a^3+8)(a^3-8) = 0$
 $(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4) = 0$
 $a = -2$ 또는 $a = 2$ 또는 $a = 1 \pm \sqrt{3}i$ 또는 $a = -1 \pm \sqrt{3}i$
 a 는 정수이므로 $a = -2$ 또는 $a = 2$

따라서 두 수 n, a 의 순서쌍 (n, a) 는 $(6, -2), (6, 2)$
이고, 그 개수는 2이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (n, a) 의 개수는
 $2+1+2=5$

답 ③

3 $a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}=3$ 의 양변을 제곱하면

$$a^{-1}+2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}=9$$

이때 $a^{-1}+b^{-1}=5$ 이므로

$$5+2a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}=9$$

$$a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}=2$$

$$(ab)^{-\frac{1}{2}}=2$$

$$\{(ab)^{-\frac{1}{2}}\}^{-2}=2^{-2}$$

$$ab=\frac{1}{4}$$

따라서

$$a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(b^{-1}+a^{-1})$$

$$=(ab)^{\frac{1}{2}}(a^{-1}+b^{-1})$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \times 5$$

$$=\frac{1}{2} \times 5$$

$$=\frac{5}{2}$$

답 ③

4 함수 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 B의 y 좌표가 $\sqrt[4]{8}$ 이므로

점 B의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}\sqrt{x}=\sqrt[4]{8} \text{에서}$$

$$x^{\frac{1}{2}}=2 \times 2^{\frac{3}{4}}$$

$$x=2^{\frac{7}{2}}$$

삼각형 AOB의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AB}$$

$$=\frac{1}{2} \times \sqrt[4]{8} \times 2^{\frac{7}{2}}$$

$$=2^{-1+\frac{3}{4}+\frac{7}{2}}$$

$$=2^{\frac{13}{4}}$$

$$\log_2 S=\log_2 2^{\frac{13}{4}}=\frac{13}{4}$$

따라서 $p=4, q=13$ 이므로

$$p+q=4+13=17$$

답 17

5 이차방정식 $x^2-(\log_a \frac{a^3}{4})x-2=0$ 의 두 근이 $\log_2 a,$

$\log_a b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_a b = \log_a \frac{a^3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 a \times \log_a b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②에서

$$\frac{\log a}{\log 2} \times \frac{\log b}{\log a} = -2$$

$$\log b = -2 \log 2 = \log \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{4}$$

$b = \frac{1}{4}$ 을 ①에 대입하면

$$\log_2 a + \log_a \frac{1}{4} = \log_a \frac{a^3}{4}$$

$$\log_2 a - 2 \log_a 2 = 3 - 2 \log_a 2$$

$$\log_2 a = 3$$

$$a = 2^3 = 8$$

$$\text{따라서 } ab = 8 \times \frac{1}{4} = 2$$

답 ①

6 두 점 A(-1, 1), B($\log_3 a, \log_3 b$)를 지나는 직선과 직

선 $y=\frac{1}{2}x-1$ 이 서로 평행하므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{2}$
이다.

$$\frac{\log_3 b - 1}{\log_3 a - (-1)} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$2 \log_3 b - 2 = \log_3 a + 1$$

$$2 \log_3 b - \log_3 a = 3$$

$$\log_3 \frac{b^2}{a} = 3$$

$$\frac{b^2}{a} = 3^3$$

$$a = \frac{b^2}{27} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\log_2 a + \log_2 27b = 3$ 에서

$$\log_2 27ab = 3$$

$$27ab = 2^3 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$27 \times \frac{b^2}{27} \times b = 8$$

$$b^3 = 8$$

$b > 0$ 이므로 $b=2$

$b=2$ 를 ㉠에 대입하면

$a = \frac{4}{27}$

따라서 $81(a+b) = 81\left(\frac{4}{27} + 2\right) = 174$

답 174

7 $81^x = 12^y = k$ ($k > 0$)이라 하자.

$81^x = k$ 에서 $3^{4x} = k$, $3 = k^{\frac{1}{4x}}$

$12^y = k$ 에서 $12 = k^{\frac{1}{y}}$

$\frac{1}{4x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ 이고

$k^{\frac{1}{4x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{4x}} \times k^{\frac{1}{y}} = 3 \times 12 = 36$ 이므로

$k^{\frac{2}{3}} = 6^2$

$k = (6^2)^{\frac{3}{2}} = 6^{2 \times \frac{3}{2}} = 6^3 = 216$

$81^x = 216$ 에서 $x = \log_{81} 216$

$12^y = 216$ 에서 $y = \log_{12} 216$

따라서

$4x \log_6 9 = 4 \times \log_{81} 216 \times \log_6 9$
 $= 4 \times \frac{3 \log 6}{4 \log 3} \times \frac{2 \log 3}{\log 6} = 6,$

$y \log_6 12 = \log_{12} 216 \times \log_6 12$
 $= \frac{3 \log 6}{\log 12} \times \frac{\log 12}{\log 6} = 3$

이므로 $4x \log_6 9 + y \log_6 12 = 6 + 3 = 9$

답 ④

8 조건 (가)에서

$\log_{10} 314 - \log_{10} 3.14 = \log_{10} \frac{314}{3.14} = \log_{10} 100 = 2$

이므로

$\log_2 a - \log_2 b = 2$

$\log_2 \frac{a}{b} = 2$

$\frac{a}{b} = 2^2 = 4$

$a = 4b$ ㉠

조건 (나)에서

$\sqrt[4]{2^a} \times \sqrt[3]{4^{-b}} = 6$

$2^{\frac{a}{4}} \times 2^{-\frac{2b}{3}} = 6$

$2^{\frac{a}{4} - \frac{2b}{3}} = 6$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2^{b - \frac{2b}{3}} = 6$

$2^{\frac{b}{3}} = 6$

$\frac{b}{3} = \log_2 6$

$b = 3 \log_2 6$

$b = 3 \log_2 6$ 을 ㉠에 대입하면

$a = 12 \log_2 6$

따라서

$a + b = 12 \log_2 6 + 3 \log_2 6 = 15 \log_2 6$

이므로

$(\sqrt[15]{4})^{a+b} = 4^{\frac{a+b}{15}} = 4^{\frac{15 \log_2 6}{15}} = 4^{\log_2 6}$
 $= 6^{\log_2 4} = 6^{2 \log_2 2} = 6^2 = 36$

답 36

Level 3

실력 완성

본문 18쪽

1 ④ 2 9 3 ③

1 원 $(x - \log_2 a)^2 + (y - \log_2 b)^2 = 2$ 와 직선 $x + y - 1 = 0$ 이 접하므로 원의 중심 $(\log_2 a, \log_2 b)$ 와 직선 $x + y - 1 = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\frac{|\log_2 a + \log_2 b - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$ 에서

$|\log_2 a + \log_2 b - 1| = 2$

$\log_2 a + \log_2 b - 1 = 2$ 또는 $\log_2 a + \log_2 b - 1 = -2$

$\log_2 ab = 3$ 또는 $\log_2 ab = -1$

$ab = 8$ 또는 $ab = \frac{1}{2}$

이때 $a > 1, b > 1$ 이므로 $ab > 1$ 이다.

즉, $ab = 8$ ㉠

또 $5 \log_a 2 = \log_b 2$ 에서

$\frac{5}{\log_2 a} = \frac{1}{\log_2 b}$

$\frac{\log_2 a}{\log_2 b} = 5$

$\log_b a = 5$

$a = b^5$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b^5 \times b = 8$

$b^6 = 2^3$

$b > 1$ 이므로 $b = 2^{\frac{1}{2}}$
 $b = 2^{\frac{1}{2}}$ 을 ㉠에 대입하면
 $a = (2^{\frac{1}{2}})^5 = 2^{\frac{5}{2}}$
 따라서
 $(\sqrt[5]{a} \times \sqrt[4]{b})^8 = a^{\frac{8}{5}} \times b^2$
 $= (2^{\frac{5}{2}})^{\frac{8}{5}} \times (2^{\frac{1}{2}})^2$
 $= 2^{4+1}$
 $= 2^5 = 32$

답 ④

2 직각삼각형 QAO에서 $\overline{OQ} = x$ 라 하면 $\angle PAB = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{AQ} = \frac{\overline{OQ}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x$$

삼각형 QAO의 넓이가 $\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{OQ} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3}x \times x = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

$$x^2 = \sqrt[4]{3}$$

$$x = \sqrt[8]{3}$$

직각삼각형 QAO에서

$$\overline{AO} = \frac{\overline{OQ}}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt[8]{3}$$

$\angle POB = 2\angle PAB = 60^\circ$ 이므로 삼각형 POB는 정삼각형이다.

이때 $\overline{PR} \perp \overline{OB}$ 이므로 $\overline{BR} = \overline{OR}$ 이다.

$$\overline{BR} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AO} = \sqrt[8]{3}$$

$$\overline{AR} = 2\overline{AO} - \overline{BR} = 4\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{3} = 3\sqrt[8]{3}$$

이므로

$$\log_3(\overline{AR} \times \overline{BR}) = \log_3(3\sqrt[8]{3} \times \sqrt[8]{3}) = \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$$

따라서 $p = 4, q = 5$ 이므로

$$p + q = 4 + 5 = 9$$

다른 풀이

직각삼각형 QAO에서 $\overline{OQ} = x$ 라 하면 $\angle PAB = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{AQ} = \frac{\overline{OQ}}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x$$

삼각형 QAO의 넓이가 $\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{OQ} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

답 9

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3}x \times x = \frac{\sqrt[4]{27}}{2}$$

$$x^2 = \sqrt[4]{3}$$

$$x = \sqrt[8]{3}$$

직각삼각형 QAO에서

$$\overline{AO} = \frac{\overline{OQ}}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt[8]{3}$$

$\triangle AOQ \sim \triangle ABP$ 이고 $\overline{AB} = 2\overline{AO}$ 이므로

$$\overline{BP} = 2\overline{OQ} = 2\sqrt[8]{3}$$

$\triangle AOQ \cong \triangle PBR$ 이므로

$$\overline{BR} = \overline{OQ} = \sqrt[8]{3}$$

이때

$$\overline{AR} = 2\overline{AO} - \overline{BR} = 4\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{3} = 3\sqrt[8]{3}$$

이므로

$$\log_3(\overline{AR} \times \overline{BR}) = \log_3(3\sqrt[8]{3} \times \sqrt[8]{3}) = \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$$

따라서 $p = 4, q = 5$ 이므로

$$p + q = 4 + 5 = 9$$

3 조건 (가)에서

$\log_2(8a - a^2) = m$ (m 은 자연수)라 하면

$$8a - a^2 = 2^m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, $\log_2(8a - a^2)$ 에서

$$8a - a^2 > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a(a - 8) < 0$$

$$0 < a < 8$$

$$8a - a^2 = -(a - 4)^2 + 16 \text{이므로}$$

$$0 < 8a - a^2 \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $0 < 2^m \leq 16$

m 이 자연수이므로 m 의 값은 1, 2, 3, 4이다.

(i) $m = 1$ 일 때

$$8a - a^2 = 2$$

조건 (나)에서 b 는 2의 n 제곱근이므로

$$b^n = 2$$

위 등식을 만족시키는 정수 b 와 2 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.

(ii) $m = 2$ 일 때

$$8a - a^2 = 4$$

조건 (나)에서 b 는 4의 n 제곱근이므로

$$b^n = 4$$

$n = 2$ 일 때, $b^2 = 4$ 에서 $b = -2$ 또는 $b = 2$

$n \geq 3$ 일 때, $b^n = 4$ 를 만족시키는 정수 b 와 3 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.

한편, 이차방정식 $8a - a^2 = 4$, 즉 $a^2 - 8a + 4 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (-4)^2 - 4 = 12 > 0$$

이므로 이차방정식 $a^2 - 8a + 4 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 세 수 a, b, n 의 순서쌍 (a, b, n) 의 개수는 4이다.

(iii) $m=3$ 일 때

$$8a - a^2 = 8$$

조건 (나)에서 b 는 8의 n 제곱근이므로

$$b^n = 8$$

$n=2$ 일 때, $b^2=8$ 을 만족시키는 정수 b 는 존재하지 않는다.

$n=3$ 일 때, $b^3=8$ 에서 $b=2$

$n \geq 4$ 일 때, $b^n=8$ 을 만족시키는 정수 b 와 4 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.

한편, 이차방정식 $8a - a^2 = 8$, 즉 $a^2 - 8a + 8 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-4)^2 - 8 = 8 > 0$$

이므로 이차방정식 $a^2 - 8a + 8 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 세 수 a, b, n 의 순서쌍 (a, b, n) 의 개수는 2이다.

(iv) $m=4$ 일 때

$$8a - a^2 = 16$$

조건 (나)에서 b 는 16의 n 제곱근이므로

$$b^n = 16$$

$n=2$ 일 때, $b^2=16$ 에서 $b=-4$ 또는 $b=4$

$n=3$ 일 때, $b^3=16$ 을 만족시키는 정수 b 는 존재하지 않는다.

$n=4$ 일 때, $b^4=16$ 에서 $b=-2$ 또는 $b=2$

$n \geq 5$ 일 때, $b^n=16$ 을 만족시키는 정수 b 와 5 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.

한편, 이차방정식 $8a - a^2 = 16$, 즉 $a^2 - 8a + 16 = 0$ 에서 $(a-4)^2 = 0$, 즉 $a=4$

이때 세 수 a, b, n 의 순서쌍 (a, b, n) 의 개수는 4이다.

(i)~(iv)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, n) 의 개수는 $4+2+4=10$

답 ③

02 지수함수와 로그함수

유제

본문 21~29쪽

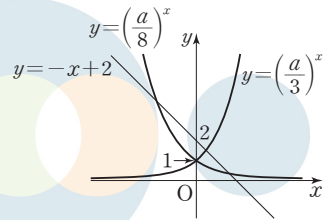
1 ②	2 5	3 ④	4 14	5 3
6 17	7 8	8 ①	9 ⑤	10 4

1 함수 $y = \left(\frac{a}{8}\right)^x$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 이 곡선과 직선 $y = -x + 2$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $0 < \frac{a}{8} < 1$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 0 < a < 8 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

함수 $y = \left(\frac{a}{3}\right)^x$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 이 곡선과 직선 $y = -x + 2$ 가 한 점에서 만나려면 $\frac{a}{3} > 1$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } a > 3 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$



$$\text{㉠, ㉡에서 } 3 < a < 8$$

따라서 자연수 a 는 4, 5, 6, 7이고, 그 개수는 4이다.

답 ②

2 $\overline{AB} = 1$ 이므로 양수 k 에 대하여 $A(k, 64)$, $B(k+1, 64)$ 로 놓을 수 있다.

점 A가 함수 $y = (2a)^x$ 의 그래프 위의 점이므로 $(2a)^k = 64 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$

점 B가 함수 $y = a^x$ 의 그래프 위의 점이므로 $a^{k+1} = 64 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$

$$\text{㉠, ㉡에서 } (2a)^k = a^{k+1}$$

$$a^k > 0 \text{이므로 } 2^k = a$$

$a = 2^k$ 을 ㉡에 대입하면

$$(2^k)^{k+1} = 64$$

$$2^{k^2+k} = 2^6$$

$$k^2 + k = 6$$

$$(k+3)(k-2) = 0$$

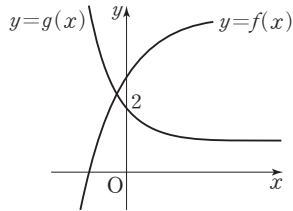
$$k > 0 \text{이므로 } k = 2$$

따라서 A(2, 64), B(3, 64)이므로
 $\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2 = (3^2 + 64^2) - (2^2 + 64^2) = 5$

답 5

3 함수 $f(x) = -2^{-3x+6} + k$, 즉 $f(x) = -\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2} + k$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

또 함수 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



함수 $f(x) = -2^{-3x+6} + k$ 의 그래프와 함수 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ 의 그래프가 제2사분면에서 만나려면 $f(0) > 2$ 이어야 한다.

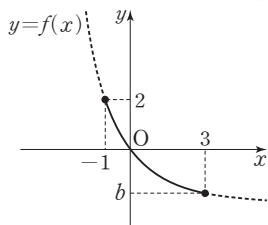
즉, $f(0) = -\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} + k = -64 + k > 2$ 에서 $k > 66$

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 67이다.

답 ④

4 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + a$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 정의역이 $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ 인 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + a$ 는 $x = -1$ 일 때 최댓값을 갖고, $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다.



함수 $f(x)$ 의 최댓값이 2이므로

$$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + a = 2 \text{에서}$$

$$4 + a = 2$$

$$a = -2$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 b 이므로

$$b = f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = -\frac{7}{4}$$

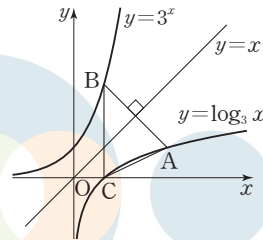
$$\text{따라서 } 4ab = 4 \times (-2) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = 14$$

답 14

5 함수 $y = \log_3 x$ 의 역함수가 함수 $y = 3^x$ 이므로 점 B는 점 A를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다.

즉, B(1, 3)이다.

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점이 C이므로 C(1, 0)이다.



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

답 3

6 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$)라 하면 $A(x_1, \log_a x_1), B(x_2, \log_a x_2)$ 로 놓을 수 있다.

선분 AB의 중점이 x 축 위에 있고 직선 $y = 8x - 17$ 과 x 축이 만나는 점의 좌표가 $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$ 이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$ 이다.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{17}{8} \text{에서}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{17}{4}$$

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} = 0 \text{에서}$$

$$\log_a x_1 x_2 = 0 \text{이므로}$$

$$x_1 x_2 = 1$$

이때 x_1, x_2 는 이차방정식 $t^2 - \frac{17}{4}t + 1 = 0$ 의 두 근이다.

즉, $4t^2 - 17t + 4 = 0$ 에서

$$(4t-1)(t-4) = 0$$

$$t = \frac{1}{4} \text{ 또는 } t = 4$$

$$\text{이므로 } x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 4$$

한편, 점 B(4, $\log_a 4$)는 직선 $y = 8x - 17$ 위의 점이므로

$$\log_a 4 = 15$$

$$\log_a 2 = \frac{15}{2}$$

$$\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2} = \frac{2}{15}$$

따라서 $p = 15, q = 2$ 이므로

$$p + q = 15 + 2 = 17$$

답 17

7 $y = 4^{-x+a} + 2$ 에서

$$4^{-x+a} = y - 2$$

$$-x + a = \log_4 (y - 2)$$

$$x = -\log_4 (y - 2) + a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\log_4 (x - 2) + a$$

$$\text{즉, } g(x) = -\log_4 (x - 2) + a$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 (6, 3)을 지나므로

$$-\log_4 (6 - 2) + a = 3$$

$$-1 + a = 3$$

$$a = 4$$

한편, 함수 $g(x) = -\log_4 (x - 2) + 4$ 의 그래프는 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = 2$ 이므로

$$b = 2$$

$$\text{따라서 } ab = 4 \times 2 = 8$$

다른 풀이

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 (6, 3)을 지나므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 (3, 6)을 지난다.

$$f(3) = 4^{-3+a} + 2 = 6 \text{에서 } 4^{-3+a} = 4$$

$$-3 + a = 1, a = 4$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선인 직선 $x = b$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 직선 $y = b$ 이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = 2$ 이므로 $b = 2$

$$\text{따라서 } ab = 4 \times 2 = 8$$

답 8

8 함수 $y = a + \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y = a + \log_{\frac{1}{2}} x$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 정의역이 $\left\{x \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 8\right\}$ 인 함수 $f(x) = a + \log_{\frac{1}{2}} x$

는 $x = \frac{1}{4}$ 일 때 최댓값을 갖고, $x = 8$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$f\left(\frac{1}{4}\right) = a + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = a + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = a + 2$ 이므로

$$a + 2 = 4 \text{에서 } a = 2$$

$$f(8) = 2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 2 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2 - 3 = -1 \text{이므로}$$

$$b = -1$$

$$\text{따라서 } a + b = 2 + (-1) = 1$$

$$\text{따라서 } a + b = 2 + (-1) = 1$$

답 ①

9 부등식 $(x-1)(4^{x-4} - 32) < 0$ 에서

$$x - 1 < 0, 4^{x-4} - 32 > 0 \text{ 또는 } x - 1 > 0, 4^{x-4} - 32 < 0$$

(i) $x - 1 < 0, 4^{x-4} - 32 > 0$ 일 때

$x - 1 < 0$ 에서

$$x < 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$4^{x-4} - 32 > 0$ 에서

$$2^{2x-8} > 2^5$$

밑 2가 $2 > 1$ 이므로

$$2x - 8 > 5$$

$$x > \frac{13}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x - 1 > 0, 4^{x-4} - 32 < 0$ 일 때

$x - 1 > 0$ 에서

$$x > 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$4^{x-4} - 32 < 0$ 에서

$$2^{2x-8} < 2^5$$

밑 2가 $2 > 1$ 이므로

$$2x - 8 < 5$$

$$x < \frac{13}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } 1 < x < \frac{13}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } 1 < x < \frac{13}{2}$$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4, 5, 6이고, 그 합은 $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$

답 ⑤

10 부등식 $\log_3 f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \log_3 g\left(\frac{x}{2}\right)$ 에서

$$\frac{x}{2} = t \text{로 놓으면}$$

$$\log_3 f(t) \leq \log_3 g(t)$$

로그의 진수 조건에 의하여

$$f(t) > 0, g(t) > 0 \text{이므로}$$

$$t > 4 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

부등식 $\log_3 f(t) \leq \log_3 g(t)$ 에서 밑 3이 $3 > 1$ 이므로

$$f(t) \leq g(t)$$

$$-2 \leq t \leq 6 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$4 < t \leq 6$$

즉, $4 < \frac{x}{2} \leq 6$ 이므로

$$8 < x \leq 12$$

따라서 정수 x 는 9, 10, 11, 12이고, 그 개수는 4이다.

답 4

Level 1

기초 연습

본문 30~31쪽

1 ①	2 ③	3 ②	4 ④	5 ③
6 3	7 ④	8 ⑤	9 ②	

1 함수 $y = 2^{x-a} + b$ 의 그래프가 점 A(-3, 0)을 지나므로

$$2^{-3-a} + b = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

함수 $y = 2^{x-a} + b$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y = 2^{x-a} + b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = b$ 이다.

점 A와 함수 $y = 2^{x-a} + b$ 의 그래프의 점근선 사이의 거리가 4이고 ㉠에서 $b = -2^{-3-a} < 0$ 이므로

$$b = -4$$

$b = -4$ 를 ㉠에 대입하면

$$2^{-3-a} - 4 = 0$$

$$2^{-3-a} = 2^2$$

$$-3 - a = 2$$

$$a = -5$$

$$\text{따라서 } a + b = -5 + (-4) = -9$$

답 ①

2 함수 $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ 인 함수

$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 은 $x = -1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned} f(-1) &= -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1-1} = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \\ &= -2 + 9 = 7 \end{aligned}$$

답 ③

3 방정식 $3^{2x} - 2 \times 3^{x+1} + 8 = 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 6 \times 3^x + 8 = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)으로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0$$

$$t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$3^x = 2 \text{ 또는 } 3^x = 4$$

$$x = \log_3 2 \text{ 또는 } x = \log_3 4$$

따라서

$$\alpha = \log_3 2, \beta = \log_3 4 \text{ 또는 } \alpha = \log_3 4, \beta = \log_3 2$$

이므로

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{\alpha}} + 4^{\frac{1}{\beta}} &= 4^{\frac{1}{\log_3 2}} + 4^{\frac{1}{\log_3 4}} \\ &= 4^{\log_2 3} + 4^{\log_2 3} \\ &= 3^{\log_2 4} + 3^{\log_2 4} \\ &= 3^2 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

방정식 $3^{2x} - 2 \times 3^{x+1} + 8 = 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 6 \times 3^x + 8 = 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)으로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0$$

$$t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$3^x = 2 \text{ 또는 } 3^x = 4$$

$$3^x = 2 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 } 2^{\frac{1}{x}} = 3, 4^{\frac{1}{x}} = 9$$

$$3^x = 4 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 } 4^{\frac{1}{x}} = 3$$

$$\text{따라서 } 4^{\frac{1}{\alpha}} = 9, 4^{\frac{1}{\beta}} = 3 \text{ 또는 } 4^{\frac{1}{\alpha}} = 3, 4^{\frac{1}{\beta}} = 9 \text{이므로}$$

$$4^{\frac{1}{\alpha}} + 4^{\frac{1}{\beta}} = 9 + 3 = 12$$

4 부등식 $8^{x-5} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$ 에서

$$2^{3x-15} \leq 2^{-2x+6}$$

밑 2가 $2 > 1$ 이므로

$$3x - 15 \leq -2x + 6$$

$$5x \leq 21$$

$$x \leq \frac{21}{5}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 1, 2, 3, 4 이고, 그 개수는 4이다.

답 ④

5 함수 $y = a + \log_3 x$ 의 그래프가 점 (9, 10)을 지나므로

$$10 = a + \log_3 9$$

$$10 = a + 2$$

$$a = 8$$

함수 $y = a + \log_3 x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{9}, b\right)$ 를 지나므로

$$b = a + \log_3 \frac{1}{9}$$

$$= 8 + \log_3 3^{-2}$$

$$= 8 + (-2)$$

$$= 6$$

따라서 $a + b = 8 + 6 = 14$

답 ③

6 $y = \log_5 (4x - 1)$

$$= \log_5 4 \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \log_5 \left(x - \frac{1}{4}\right) + \log_5 4$$

함수 $y = \log_5 (4x - 1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\log_5 4$ 만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y = \log_5 (4x - 1)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = \frac{1}{4}$ 이다.

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = 1 \text{이므로}$$

점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ 이다.

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \text{이므로}$$

점 B의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ 이다.

따라서 $\overline{AB} = 3$

답 3

7 진수 조건에서

$$x > 0, x + 2 > 0, x^2 - x > 0$$

이므로

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $2 \log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3 + \log_2 (x^2 - x)$ 에서

$$\log_2 (x^3 + 2x^2) = \log_2 (8x^2 - 8x)$$

$$x^3 + 2x^2 = 8x^2 - 8x$$

$$x(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$2 \times 4 = 8$$

답 ④

8 진수 조건에서

$$x + 4 > 0$$

$$x > -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_{\frac{1}{5}} (x + 4) > -2$, 즉 $\log_{\frac{1}{5}} (x + 4) > \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ 에서

밑 $\frac{1}{5}$ 이 $0 < \frac{1}{5} < 1$ 이므로

$$x + 4 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$x + 4 < 25$$

$$x < 21 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$-4 < x < 21$$

따라서 $a = -4, \beta = 21$ 이므로

$$a + \beta = -4 + 21 = 17$$

답 ⑤

9 이차부등식 $3x^2 - (4 \log_3 a)x + 4 \log_3 a > 0$ 이 모든 실수

x 에 대하여 성립하려면 이차방정식

$3x^2 - (4 \log_3 a)x + 4 \log_3 a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-2 \log_3 a)^2 - 12 \log_3 a < 0 \text{에서}$$

$$4 \log_3 a \times (\log_3 a - 3) < 0$$

$$0 < \log_3 a < 3$$

$$1 < a < 27$$

따라서 자연수 a 는 2, 3, 4, ..., 26이고, 그 개수는 25이다.

답 ②

2

기본 연습

본문 32~33쪽

- 1 ② 2 ⑤ 3 ④ 4 ① 5 30
6 ④ 7 ③

1 함수 $f(x) = \log_2(x-1) + 3$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=1$ 이다.

$$g(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 2 = 3$$

점 A의 좌표는 (1, 3)이고 점 B의 좌표는 (0, 3)이다.

함수 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y=2$ 이다.

$$\log_2(x-1) + 3 = 2 \text{에서}$$

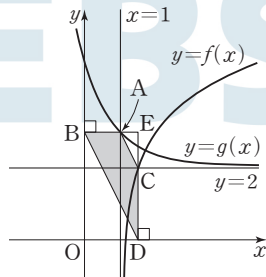
$$\log_2(x-1) = -1$$

$$x-1 = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$$

점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 이고 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이다.

직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 E라 하면

점 E의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 이다.



따라서

(사각형 ABDC의 넓이)

$$= (\text{삼각형 EBD의 넓이}) - (\text{삼각형 EAC의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{EB} \times \overline{ED} - \frac{1}{2} \times \overline{EA} \times \overline{EC}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1$$

$$= 2$$

답 ②

2 (i) $\log_4(x+k) = \log_{\frac{1}{4}}x$ 에서

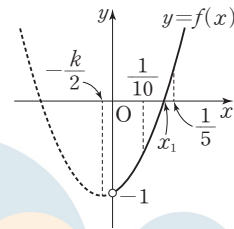
$$\log_4(x+k) + \log_4x = 0$$

$$\log_4x(x+k) = 0$$

$$x^2 + kx = 1$$

$$x^2 + kx - 1 = 0$$

이때 $x > 0$ 이므로 $f(x) = x^2 + kx - 1$ ($x > 0$)이라 하자.



이차방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근이 x_1 이므로

$$f\left(\frac{1}{10}\right) < 0, f\left(\frac{1}{5}\right) > 0$$

이어야 한다.

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 + k \times \frac{1}{10} - 1 < 0 \text{에서}$$

$$k < \frac{99}{10} \quad \dots \text{㉠}$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + k \times \frac{1}{5} - 1 > 0 \text{에서}$$

$$k > \frac{24}{5} \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{24}{5} < k < \frac{99}{10}$$

(ii) $\log_4(x+k) = \log_2x$ 에서

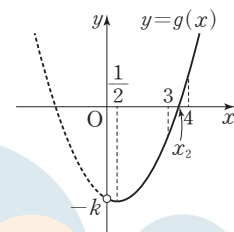
$$\frac{1}{2} \log_2(x+k) = \log_2x$$

$$\log_2(x+k) = \log_2x^2$$

$$x+k = x^2$$

$$x^2 - x - k = 0$$

이때 $x > 0$ 이므로 $g(x) = x^2 - x - k$ ($x > 0$)이라 하자.



이차방정식 $g(x) = 0$ 의 한 근이 x_2 이므로

$$g(3) < 0, g(4) > 0$$

이어야 한다.

$$g(3) = 3^2 - 3 - k < 0 \text{에서}$$

$$k > 6 \quad \dots \text{㉢}$$

$$g(4) = 4^2 - 4 - k > 0 \text{에서}$$

$$k < 12 \quad \dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣에서

$$6 < k < 12$$

(i), (ii)에서

$$6 < k < \frac{99}{10}$$

따라서 자연수 k 는 7, 8, 9이고, 그 합은

$$7 + 8 + 9 = 24$$

답 ⑤

- 3 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 점 A가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로 점 A의 좌표를 $(k, 3k)$ ($k>0$)이라 하면 점 B의 좌표는 $(-k, -3k)$ 이다.

한편, 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 두 직선 $y=3x$, $y=\frac{1}{3}x$ 도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(3k, k)$ 이다.

$$\overline{BC} = 8\sqrt{2}, \text{ 즉 } \overline{BC}^2 = 128 \text{ 이므로}$$

$$\{3k - (-k)\}^2 + \{k - (-3k)\}^2 = 128$$

$$32k^2 = 128$$

$$k^2 = 4$$

$$k > 0 \text{ 이므로 } k = 2$$

함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + a$ 의 그래프가 점 A(2, 6)을 지나므로

$$6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3} + a$$

$$6 = 2 + a$$

$$a = 4$$

한편, 함수 $h(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 4 \text{ 에서}$$

$$y - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$$

$$x - 3 = \log_{\frac{1}{2}}(y - 4)$$

$$x = \log_{\frac{1}{2}}(y - 4) + 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) + 3$$

$$\text{즉, } h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) + 3$$

$$f(a) = f(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} + 4 = \frac{9}{2}$$

$$g\left(-\frac{a}{2}\right) = g(-2) = -2^{-2+3} - 4 = -6$$

$$h(2a) = h(8) = \log_{\frac{1}{2}}(8 - 4) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\text{따라서 } f(a) + g\left(-\frac{a}{2}\right) + h(2a) = \frac{9}{2} + (-6) + 1 = -\frac{1}{2}$$

답 ④

참고

함수 $f(x)$ 의 역함수 $h(x)$ 를 구하지 않고 역함수의 성질을 이용하여 $h(2a)$ 의 값을 구할 수 있다.

함수 $h(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$h(2a) = b \text{ 라 하면 } f(b) = 2a \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^{b-3} + 4 = 8 \text{ 이므로}$$

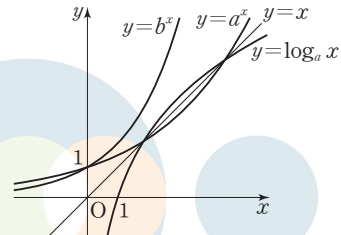
$$2^{-b+3} = 2^2$$

$$-b + 3 = 2, b = 1$$

$$\text{따라서 } h(2a) = 1$$

- 4 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $y = \log_a x$ 의 역함수 $y = a^x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

한편, 함수 $y = b^x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 는 만나지 않으므로 $1 < a < b$ 이다.



$0 < \frac{a}{b} < 1$ 이므로 함수 $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

함수 $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ 은 $x = -1$ 일 때 최댓값 4를 가지므로

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = 4, \text{ 즉 } \frac{a}{b} = \frac{1}{4}$$

함수 $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ 은 $x = 2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은

$$f(2) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

답 ①

- 5 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)g(x)} < \left(\frac{1}{81}\right)^{g(x)}$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)g(x)} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4g(x)}$$

및 $\frac{1}{3}$ 이 $0 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로

$$f(x)g(x) > 4g(x)$$

$$\{f(x) - 4\}g(x) > 0$$

$$f(x) > 4, g(x) > 0 \text{ 또는 } f(x) < 4, g(x) < 0$$

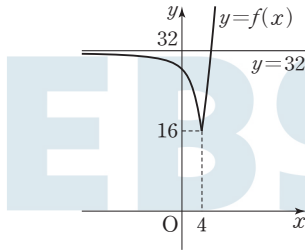
- (i) $f(x) > 4, g(x) > 0$ 일 때
 $f(x) > 4$ 에서 $x > 3$ ㉠
 $g(x) > 0$ 에서 $x < 9$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 $3 < x < 9$

- (ii) $f(x) < 4, g(x) < 0$ 일 때
 $f(x) < 4$ 에서 $x < 3$ ㉢
 $g(x) < 0$ 에서 $x > 9$ ㉣
 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $3 < x < 9$
 따라서 정수 x 는 4, 5, 6, 7, 8이고, 그 합은
 $4+5+6+7+8=30$

답 30

- 6 함수 $y = -2^x + 32$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 y 축의 방향으로 32만큼 평행이동한 것이다.
 함수 $y = -2^x + 32$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = 32$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\{\log f(x)\}^2 - \log \{n(n+10)\} \times \log f(x) + \log n \times \log (n+10) = 0$$

에서

$$\{\log f(x) - \log n\} \{\log f(x) - \log (n+10)\} = 0$$

$$\log f(x) = \log n \text{ 또는 } \log f(x) = \log (n+10)$$

$$f(x) = n \text{ 또는 } f(x) = n+10$$

- (i) $n < 16$ 일 때
 $16 < n+10 < 32$ 이면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.
 즉, $16 < n+10 < 32$ 에서 $6 < n < 22$
 따라서 $6 < n < 16$ 이므로 자연수 n 은 7, 8, 9, ..., 15이고, 그 개수는 9이다.
- (ii) $n = 16$ 일 때
 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
- (iii) $16 < n < 32$ 일 때
 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3 이상이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

- (iv) $n \geq 32$ 일 때
 $n+10 \geq 42 > 32$ 이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
 이때 $n \leq 50$ 이므로
 $32 \leq n \leq 50$
 따라서 자연수 n 은 32, 33, 34, ..., 50이고, 그 개수는 19이다.
 (i)~(iv)에서 구하는 자연수 n 의 개수는
 $9+19=28$

답 ④

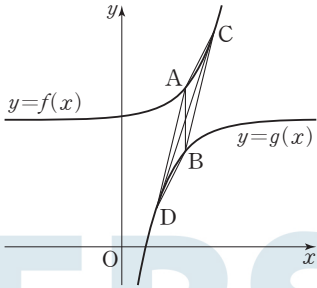
- 7 부등식 $x^2 - x \log_2 4n + \log_2 n^2 \leq 0$ 에서
 $x^2 - x(2 + \log_2 n) + 2 \log_2 n \leq 0$
 $(x-2)(x - \log_2 n) \leq 0$
- (i) $1 \leq n < 4$ 일 때
 $0 \leq \log_2 n < 2$ 이므로
 $\log_2 n \leq x \leq 2$
 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 3 이하이다.
- (ii) $n = 4$ 일 때
 $(x-2)^2 \leq 0$
 $x = 2$
 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 1이다.
- (iii) $n > 4$ 일 때
 $\log_2 n > 2$ 이므로 $2 \leq x \leq \log_2 n$
 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 4이므로
 $5 \leq \log_2 n < 6$
 $32 \leq n < 64$
 (i), (ii), (iii)에서
 $32 \leq n < 64$
 따라서 구하는 자연수 n 의 개수는 32이다.

답 ③

3 실력 완성 본문 34쪽

1 ② 2 11 3 ③

- 1 $P(k, 3^{k-2} + 4), Q(k, -3^{-k+2} + 4)$ 이므로
 $\overline{PQ} = 3^{k-2} + 3^{-k+2} \geq 2\sqrt{3^{k-2} \times 3^{-k+2}} = 2$
 (단, 등호는 $3^{k-2} = 3^{-k+2}$, 즉 $k=2$ 일 때 성립한다.)



이때 $A(2, 5)$, $B(2, 3)$ 이므로 선분 AB 의 중점을 M 이라 하면 $M(2, 4)$ 이다.

두 상수 c, d 에 대하여

$C(c, 3^{c-2}+4)$ ($c > 2$), $D(d, -3^{-d+2}+4)$ 라 하면 조건 (가)에서

$$\frac{c+d}{2} = 2, \text{ 즉 } c+d = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 CD 의 기울기와 직선 CM 의 기울기가 같으므로 조건 (나)에서

$$\frac{(3^{c-2}+4)-4}{c-2} = \frac{3}{2} \times \frac{(3^{c-2}+4)-5}{c-2}$$

$$3^{c-2} = \frac{3}{2}(3^{c-2}-1)$$

$$\frac{3^{c-2}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c-2=1, c=3$$

$c=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3+d=4 \text{에서 } d=1$$

이므로 $C(3, 7)$, $D(1, 1)$ 이다.

따라서

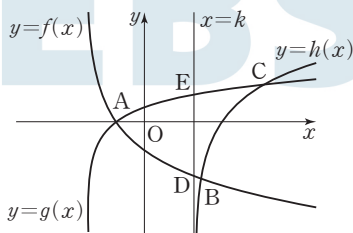
(사각형 $ADBC$ 의 넓이)

= (삼각형 ADB 의 넓이) + (삼각형 ACB 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1$$

$$= 2$$

2



함수 $h(x) = \log_2(x-k)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=k$ 이므로

$$D(k, \log_{\frac{1}{2}}(k+2)), E(k, \log_4(k+2))$$

$$\overline{DE} = \log_4(k+2) - \log_{\frac{1}{2}}(k+2)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2(k+2) + \log_2(k+2)$$

$$= \frac{3}{2} \log_2(k+2)$$

이므로

$$\frac{3}{2} \log_2(k+2) = \frac{3}{2} \log_2 \frac{15}{4}$$

$$k+2 = \frac{15}{4}, k = \frac{7}{4}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점 A 의 x 좌표를 구해 보자.

$$f(x) = g(x) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) = \log_4(x+2)$$

$$-\log_2(x+2) = \frac{1}{2} \log_2(x+2)$$

$$\frac{3}{2} \log_2(x+2) = 0$$

$$x+2=1, x=-1$$

즉, 점 A 의 x 좌표는 -1 이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 교점 B 의 x 좌표를 구해 보자.

$$f(x) = h(x) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) = \log_2\left(x - \frac{7}{4}\right)$$

$$-\log_2(x+2) = \log_2\left(x - \frac{7}{4}\right)$$

$$\log_2(x+2)\left(x - \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$(x+2)\left(x - \frac{7}{4}\right) = 1$$

$$4x^2 + x - 18 = 0$$

$$(4x+9)(x-2) = 0$$

$$x > \frac{7}{4} \text{이므로 } x=2$$

즉, 점 B 의 x 좌표는 2 이다.

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 교점 C 의 x 좌표를 구해 보자.

$$g(x) = h(x) \text{에서}$$

$$\log_4(x+2) = \log_2\left(x - \frac{7}{4}\right)$$

$$\log_4(x+2) = \log_4\left(x - \frac{7}{4}\right)^2$$

$$x+2 = \left(x - \frac{7}{4}\right)^2$$

$$16x^2 - 72x + 17 = 0$$

$$(4x-1)(4x-17) = 0$$

답 ②

$x > \frac{7}{4}$ 이므로 $x = \frac{17}{4}$

즉, 점 C의 x 좌표는 $\frac{17}{4}$ 이다.

그러므로 삼각형 ABC의 무게중심의 x 좌표는

$$\frac{-1+2+\frac{17}{4}}{3} = \frac{7}{4}$$

따라서 $p=4, q=7$ 이므로

$p+q=4+7=11$

답 11

3. $f(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{13}{4}, g(4) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$

이므로 $f(4) > g(4)$ 이다.

즉, $x_1 < 4$ 이다.

또 $f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 = \frac{7}{2}$ 이고

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=3$ 이므로

$x_1 > 3$ 이다.

따라서 $3 < x_1 < 4$ (참)

∴ $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{4} = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 2$

이므로 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고

두 점 B, C가 원 $x^2+y^2=49$ 위의 점이므로

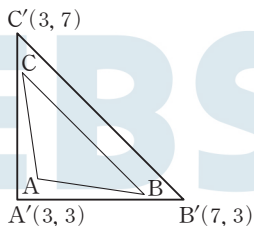
점 B와 점 C도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

직선 BC와 직선 $y=x$ 는 서로 수직이므로

$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = -1$, 즉 $x_3-x_2=y_2-y_3$ 이다. (참)

∴ 세 점 $A'(3, 3), B'(7, 3), C'(3, 7)$ 에 대하여 삼각형 $A'B'C'$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{A'B'} \times \overline{A'C'} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



(삼각형 ABC의 넓이) < (삼각형 A'B'C'의 넓이)이므로

(삼각형 ABC의 넓이) < 8 (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

1 ⑤	2 150	3 ②	4 ⑤	5 2
6 26	7 ④	8 40	9 20	10 ②

1. $\angle DAB = \theta$ 라 하면 호 BD의 길이 l_1 은 $l_1 = 6\theta$

마름모의 성질에 의하여

$\angle DAB + \angle ABC = \pi$

즉, $\angle ABC = \pi - \theta$ 이므로 호 AC의 길이 l_2 는

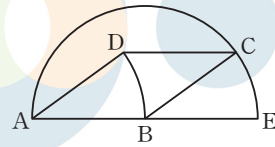
$l_2 = 6(\pi - \theta)$

따라서 $l_1 + l_2 = 6\theta + 6(\pi - \theta) = 6\pi$

답 ⑤

다른 풀이

중심이 B이고 선분 AB가 반지름인 원과 선분 AB의 연장선이 만나는 점을 E라 하면 두 부채꼴 ABD, BEC는 같은 부채꼴이므로 호 BD의 길이와 호 EC의 길이는 서로 같다.



즉, 호 BD와 호 AC의 길이의 합은 호 EC와 호 AC의 길이의 합과 같으므로 호 AE의 길이와 같다.

따라서 $l_1 + l_2 = 6\pi$

2. 부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이는 $2r+l$ 이고, 조건 (가)에서 부채꼴의 둘레의 길이가 $\frac{7}{2}r$ 와 같으므로

$2r+l = \frac{7}{2}r$ 에서 $l = \frac{3}{2}r$

이때 $l = r\theta$ 이므로 $r\theta = \frac{3}{2}r$ 에서 $\theta = \frac{3}{2}$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r \times \frac{3}{2}r = \frac{3}{4}r^2$

이고, 조건 (나)에서 부채꼴의 넓이가 27이므로

$\frac{3}{4}r^2 = 27$ 에서 $r^2 = 36$

$r > 0$ 이므로 $r = 6$

따라서 $20(r+\theta)=20\left(6+\frac{3}{2}\right)=20\times\frac{15}{2}=150$

답 150

$$\begin{aligned} 3 \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 2 &= \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1\right) \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\tan \theta}\right)^2 + \tan^2 \theta \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \\ &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

다른 풀이

$\tan \theta = 2 > 0$ 이므로 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

좌표평면에서 원점 O와 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 하자.

(i) θ 가 제1사분면의 각일 때

$P(a, 2a)$ ($a > 0$)으로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 2 = \frac{5}{4} + 5 - 2 = \frac{17}{4}$$

(ii) θ 가 제3사분면의 각일 때

$P(a, 2a)$ ($a < 0$)으로 놓을 수 있다.

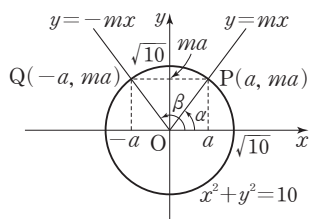
이때 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{2a}{-\sqrt{5}a} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \theta = \frac{a}{-\sqrt{5}a} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 2 = \frac{5}{4} + 5 - 2 = \frac{17}{4}$$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 2 = \frac{17}{4}$

4 $m > 0$ 이므로 $y = |mx| = \begin{cases} -mx & (x < 0) \\ mx & (x \geq 0) \end{cases}$



답 ②

$P(a, ma), Q(-a, ma)$ ($a > 0$)이라 하면

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + (ma)^2} = a\sqrt{1+m^2}$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{(-a)^2 + (ma)^2} = a\sqrt{1+m^2}$$

이므로

$$\sin \alpha = \frac{ma}{a\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{-a}{a\sqrt{1+m^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

이때

$$\sin \alpha \times \cos \beta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right) = -\frac{m}{1+m^2}$$

이므로 $-\frac{m}{1+m^2} = -\frac{2}{5}$ 에서

$$5m = 2(1+m^2)$$

$$2m^2 - 5m + 2 = 0$$

$$(2m-1)(m-2) = 0$$

$$m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = 2$$

따라서 서로 다른 모든 m 의 값의 합은

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

5 함수 $y = a \cos bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$y = a \cos b\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

즉, $f(x) = a \cos b\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

이때 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이고 최댓값은 $a+1$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 8\pi, \quad a+1 = 3 \text{에서}$$

$$a = 2, \quad b = \frac{1}{4}$$

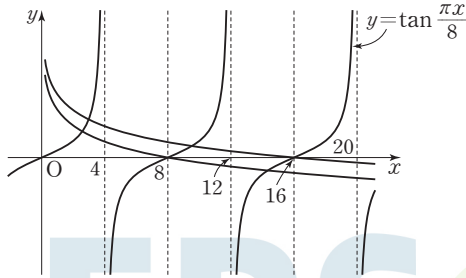
따라서 $f(x) = 2 \cos \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= 2 \cos \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2 \cos \frac{\pi}{3} + 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2 \end{aligned}$$

답 2

6 함수 $y = \tan \frac{\pi x}{8}$ 의 주기가 $\frac{\pi}{8}$ 이므로

함수 $y = \tan \frac{\pi x}{8}$ 의 그래프는 그림과 같다.



$a > 0$ 이고, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{a} + 1$ 에서 밑이 $\frac{1}{2}$ 이므로 두 함수 $y = \tan \frac{\pi x}{8}$, $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{a} + 1$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 2가 되려면 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{a} + 1$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 8보다 크고 16보다 작거나 같아야 한다.

즉, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{a} + 1$ 이라 할 때, $f(8) > 0$, $f(16) \leq 0$ 을 만족시켜야 한다.

(i) $f(8) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{a} + 1 > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{a} &> -1 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{a} &> \log_{\frac{1}{2}} 2 \\ \text{밑 } \frac{1}{2} \text{이 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로} \\ \frac{8}{a} &< 2 \\ a &> 4 \end{aligned}$$

(ii) $f(16) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{16}{a} + 1 \leq 0$ 일 때

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} \frac{16}{a} &\leq -1 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{16}{a} &\leq \log_{\frac{1}{2}} 2 \\ \text{밑 } \frac{1}{2} \text{이 } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로} \\ \frac{16}{a} &\geq 2 \\ 0 < a &\leq 8 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 두 함수 $y = \tan \frac{\pi x}{8}$, $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{a} + 1$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 a 의 값의 범위는 $4 < a \leq 8$ 이므로 자연수 a 는 5, 6, 7, 8이고, 그 합은 $5 + 6 + 7 + 8 = 26$

☞ 26

7 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta = \frac{2}{3}$ 에서 $\sin \theta = -\frac{2}{3}$
 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta < 0$ 에서 $\cos \theta > 0$ 이므로
 $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

☞ ④

8 모든 실수 θ 에 대하여 $\sin\left(\frac{2n-1}{3}\pi - \theta\right) = \sin \theta$ 가 성립하려면

$$\frac{2n-1}{3}\pi = (2m-1)\pi \quad (m \text{은 정수})$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } 2n-1 = 3(2m-1) \text{이므로}$$

$$2n = 6m - 2$$

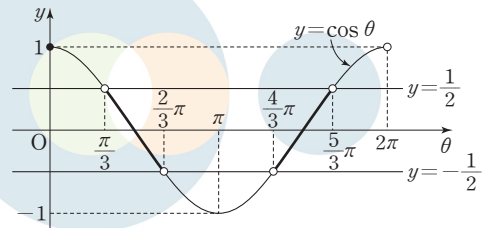
$$n = 3m - 1 \quad (m \text{은 정수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 n 은 15 이하의 자연수이므로 ①에서 자연수 n 은 2, 5, 8, 11, 14이고, 그 합은 $2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$

☞ 40

9 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 + 4x \cos \theta + 1 > 0$ 이 성립하려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x \cos \theta + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 4 \cos^2 \theta - 1 < 0 \\ (2 \cos \theta - 1)(2 \cos \theta + 1) &< 0 \\ -\frac{1}{2} < \cos \theta &< \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$



$0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때,

$$\text{방정식 } \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{의 해는 } \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{방정식 } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{의 해는 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi$$

이때 부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있고 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 θ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2}{3}\pi$, $c = \frac{4}{3}\pi$, $d = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{12}{\pi}(a+c) = \frac{12}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{12}{\pi} \times \frac{5}{3}\pi = 20$$

답 20

10 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동하면

$$y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2x$$

이므로

$$g(x) = -\cos 2x$$

방정식 $\{f(x)\}^2 = \frac{3}{2}g(x)$ 에서

$$\sin^2 2x = -\frac{3}{2}\cos 2x$$

$$1 - \cos^2 2x = -\frac{3}{2}\cos 2x$$

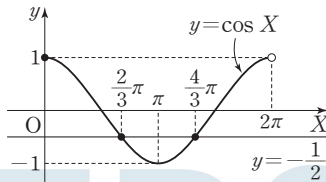
$$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$$

$$(2\cos 2x + 1)(\cos 2x - 2) = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$0 \leq x < \pi$, 즉 $0 \leq 2x < 2\pi$ 일 때, $\cos 2x - 2 < 0$ 이므로

㉠에서 $2\cos 2x + 1 = 0$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$



이때 $2x = X$ 라 하면 $0 \leq X < 2\pi$ 이고,

$\cos X = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$X = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } X = \frac{4}{3}\pi$$

즉, $2x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $2x = \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$$

답 ②

1 기초 연습

문분 46~47쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ⑤ | 2 ① | 3 ④ | 4 ② | 5 ① |
| 6 ④ | 7 ④ | 8 ② | | |

1 $70^\circ = 70 \times 1^\circ = 70 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{18}\pi$

$$\frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi \times 1 = \frac{2}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 72^\circ$$

따라서 $a = \frac{7}{18}$, $b = 72$ 이므로

$$ab = \frac{7}{18} \times 72 = 28$$

답 ⑤

2 $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{4}{3}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

따라서

$$\sin \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{2}{3}\pi \times \tan \frac{4}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \sqrt{3} = -\frac{3}{4}$$

답 ①

3 점 $P(a, 2\sqrt{a+1})$ 에 대하여

$$OP = \sqrt{a^2 + (2\sqrt{a+1})^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 4a + 4}$$

$$= \sqrt{(a+2)^2}$$

$$= a+2$$

이므로 $\cos \theta = \frac{a}{a+2}$

따라서 $\frac{a}{a+2} = \frac{3}{4}$ 에서

$$4a = 3(a+2)$$

$$a = 6$$

답 ④

4 $a > 0$, $b > 0$ 이므로

함수 $y = \cos \frac{ax}{3}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{a}{3}} = \frac{6}{a}\pi$ 이고,

함수 $y = \tan \frac{4x}{b}$ 의 주기는 $\frac{\pi}{4} = \frac{b}{4}\pi$ 이다.

두 함수 $y = \cos \frac{ax}{3}$, $y = \tan \frac{4x}{b}$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{6}{a}\pi = \frac{b}{4}\pi \text{에서 } ab=24 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 a, b 는 자연수이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 순서쌍 (a, b) 가 $(4, 6)$ 또는 $(6, 4)$ 인 경우이므로 10이다.

답 ②

5 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

답 ①

6 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 부등식 $\tan x > 0$ 을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

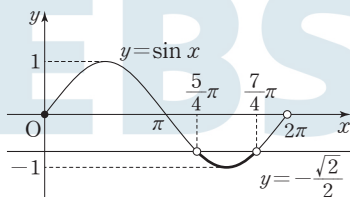
$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi < x < \frac{3}{2}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 부등식 $\sqrt{2} \sin x + 1 < 0$, 즉

$\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통인 범위를 구하면

$$\frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{5}{4}\pi, \beta = \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{5}{4}\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{11}{4}\pi$$

답 ④

7 $x = \frac{\pi}{6}$ 가 방정식 $2 \cos^2 x + a \sin x - 1 = 0$ 의 근이므로

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{6} + a \sin \frac{\pi}{6} - 1 = 0$$

$$2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a \times \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a = 0$$

$$a = -1$$

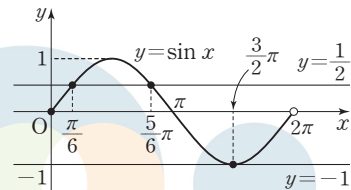
방정식 $2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$



$0 \leq x < 2\pi$ 일 때,

$$\text{방정식 } \sin x = -1 \text{의 해는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{방정식 } \sin x = \frac{1}{2} \text{의 해는 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{5}{6}\pi, \beta = \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{5}{6}\pi \times \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{4}\pi^2$$

답 ④

8 $\overline{AP} = x$ 라 하면 $\overline{PB} = \overline{QC} = 12 - x$ 이고,

$\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$ 이므로 호 PQ의 길이는 $\frac{\pi}{3}x$ 이고,

호 PR와 호 QS의 길이는 모두 $\frac{\pi}{3}(12 - x)$ 이다.

이때 세 호 PQ, PR, QS의 길이의 합이 $\frac{17}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{3}x + 2 \times \frac{\pi}{3}(12 - x) = \frac{17}{3}\pi$$

$$x + 2(12 - x) = 17$$

$$x = 7$$

따라서 선분 AP의 길이는 7이다.

답 ②

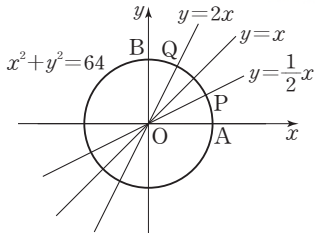
Level 2

기본 연습

본문 48~50쪽

- | | | | | |
|-------|--------|-----|------|------|
| 1 4 | 2 ① | 3 ④ | 4 12 | 5 ⑤ |
| 6 ③ | 7 ④ | 8 ④ | 9 ② | 10 ③ |
| 11 11 | 12 113 | | | |

- 1 두 함수 $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ 는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수 $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



이때 점 B(0, 8)에 대하여 호 AP의 길이와 호 BQ의 길이는 서로 같으므로
(호 AQ의 길이) = (호 AB의 길이) - (호 BQ의 길이)
 $= 8 \times \frac{\pi}{2}$ - (호 AP의 길이)
 $= 4\pi$ - (호 AP의 길이)

따라서 $l_2 = 4\pi - l_1$ 에서 $l_1 + l_2 = 4\pi$ 이므로

$$\frac{l_1 + l_2}{\pi} = \frac{4\pi}{\pi} = 4$$

답 4

참고

두 부채꼴 OAP, OBQ는 같은 부채꼴이므로 호 AP와 호 BQ의 길이가 같다.

- 2 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(-\theta) = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$

이므로

$$2\cos\theta = \frac{4}{3} \text{에서 } \cos\theta = \frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{1}{1-\sin\theta} \\ &= \frac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta} \\ &= \frac{\sin\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta} \\ &= \frac{-(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\cos^2\theta} \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

답 ①

- 3 함수 $y = 2\sin 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$\begin{aligned} y &= 2\sin 3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \\ &= 2\sin(3x + \pi) + 1 \\ &= -2\sin 3x + 1 \end{aligned}$$

즉, $f(x) = -2\sin 3x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} + 1 = -2 \times 1 + 1 = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{3}{2}\pi + 1 = -2 \times (-1) + 1 = 3$$

따라서 두 점 $\left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3 - (-1)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} = \frac{4}{\frac{\pi}{3}} = \frac{12}{\pi}$$

답 ④

- 4 함수 $y = 3\tan\frac{\pi x}{8}$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\pi/8} = 8$ 이고,

$x = -2$ 일 때,

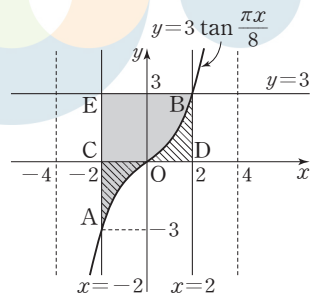
$$y = 3\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -3\tan\frac{\pi}{4} = -3$$

$y = 3$ 일 때,

$$3 = 3\tan\frac{\pi x}{8}, \tan\frac{\pi x}{8} = 1$$

$-4 < x < 4$ 이므로 $\frac{\pi x}{8} = \frac{\pi}{4}$ 에서 $x = 2$

함수 $y = 3\tan\frac{\pi x}{8}$ ($-4 < x < 4$)의 그래프는 그림과 같다.



두 점 A(-2, -3), B(2, 3)은 원점에 대하여 대칭이고,
 함수 $y=3 \tan \frac{\pi x}{8}$ 의 그래프도 원점에 대하여 대칭이므로
 함수 $y=3 \tan \frac{\pi x}{8} (-4 < x < 4)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=-2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S,

함수 $y=3 \tan \frac{\pi x}{8} (-4 < x < 4)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면 $S=T$ 이다.
 따라서 세 점 C(-2, 0), D(2, 0), E(-2, 3)에 대하여
 함수 $y=3 \tan \frac{\pi x}{8} (-4 < x < 4)$ 의 그래프와 두 직선 $x=-2, y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 CDBE의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는
 $4 \times 3 = 12$

답 12

5 조건 (가)에서 함수 $f(x) = \tan(ax+b)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \text{에서 } a=2$$

함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$2x = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (} n \text{은 정수)에서}$$

$$x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$$

함수 $f(x) = \tan(2x+b) = \tan 2\left(x + \frac{b}{2}\right)$ 의 그래프는

함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$$-\frac{b}{2} \left(-\frac{\pi}{4} < -\frac{b}{2} < 0\right) \text{만큼 평행이동한 것이므로}$$

함수 $f(x) = \tan(2x+b)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}$$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나지 않는 직선 $x=k$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선이고, 양의 실수

k 의 최솟값이 $\frac{\pi}{12}$ 이므로

$$\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} = \frac{\pi}{12} \text{에서 } b = \frac{\pi}{3}$$

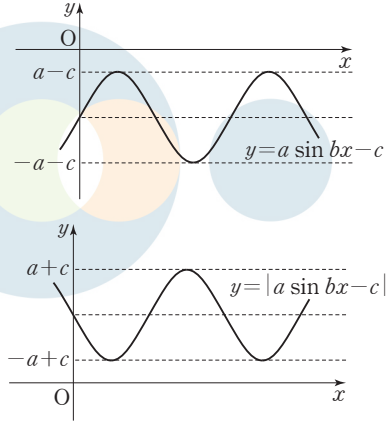
따라서 $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{24}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

답 ⑤

6 함수 $y = |a \sin bx - c|$ 의 최솟값이 양수이므로
 함수 $y = a \sin bx - c$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않는다.

또한 함수 $y = a \sin bx - c$ 의 그래프는 함수 $y = a \sin bx$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-c$ 만큼 평행이동한 것이고,
 $-c < 0$ 이므로 함수 $y = a \sin bx - c$ 의 그래프와 함수 $y = |a \sin bx - c|$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = |a \sin bx - c|$ 의 주기가 4π 이므로 함수 $y = a \sin bx - c$ 의 주기도 4π 이다.

$$\text{즉, } \frac{2\pi}{b} = 4\pi \text{에서 } b = \frac{1}{2}$$

함수 $y = |a \sin bx - c|$ 의 최댓값이 $a+c$, 최솟값이 $-a+c$ 이므로

$$a+c=5, -a+c=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, c=3$

$$\text{따라서 } abc = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 = 3$$

답 ③

7 조건 (나)에서 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 0$ 이므로

$$x_1 - x_2 = 0, y_1 + y_2 = 0$$

즉, $x_1 = x_2, y_1 = -y_2$ 이고, $x_1 y_1 > 0$ 이므로 두 점 P, Q는 x 축에 대하여 대칭이다.

따라서 정수 n 에 대하여

$$\theta_1 + \theta_2 = 2n\pi$$

이고, 조건 (가)에서 $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_1$ 이므로

$$\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1 = 2n\pi, \theta_1 = \frac{4n}{3}\pi$$

정수 m 에 대하여

$$n = 3m \text{일 때, } \theta_1 = \frac{4 \times 3m}{3}\pi = 4m\pi$$

$$n = 3m + 1 \text{일 때, } \theta_1 = \frac{4 \times (3m + 1)}{3}\pi = 4m\pi + \frac{4}{3}\pi$$

$$n = 3m + 2 \text{일 때, } \theta_1 = \frac{4 \times (3m + 2)}{3}\pi = 4m\pi + \frac{8}{3}\pi$$

이때 $x_1 y_1 > 0$ 을 만족시키는 점 P는 제1사분면 또는 제3사분면에 있는 점이므로

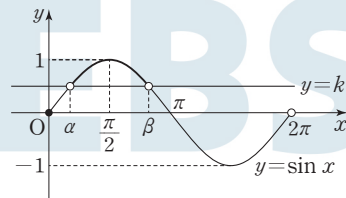
$$\theta_1 = 4m\pi + \frac{4}{3}\pi, \theta_2 = 2m\pi + \frac{2}{3}\pi$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \sin \left(2m\pi + \frac{2}{3}\pi \right) \\ &= \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 ④

- 8 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $\sin x > k$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = k$ ($0 < k < 1$)보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 x 좌표가 α, β ($\alpha < \beta$)이다.



$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \text{에서 } \alpha + \beta = \pi \quad \cdots \text{㉠}$$

그림에서 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 이므로

$$0 < \beta - \alpha < \pi$$

$$\text{따라서 } \cos(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} \text{에서 } \beta - \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{\pi}{3} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{9}\pi^2$$

답 ④

- 9 함수 $f(x) = a \cos bx + c$ 의 그래프에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이고, $a > 0$ 이므로 $a + c = 3, -a + c = -1$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 1$
함수 $y = 2 \cos bx + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $2 \cos bx + 1 = 0$ 의 해와 같다.

$$2 \cos bx + 1 = 0 \text{에서 } \cos bx = -\frac{1}{2}$$

이때 $0 < x < \frac{2\pi}{b}$ 에서 $0 < bx < 2\pi$ 이므로

$$bx = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } bx = \frac{4}{3}\pi$$

$$x = \frac{2}{3b}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3b}\pi$$

즉, $A\left(\frac{2}{3b}\pi, 0\right), B\left(\frac{4}{3b}\pi, 0\right)$ 이므로

$$\overline{AB} = \frac{4}{3b}\pi - \frac{2}{3b}\pi = \frac{2}{3b}\pi$$

이고, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로

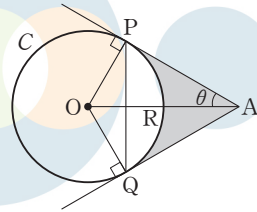
$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3b}\pi \times 1 = \frac{2}{3}\pi \text{에서 } b = \frac{1}{2}$$

따라서

$$abc = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 = 1$$

답 ②

- 10 원 C의 반지름의 길이를 r , $\angle OAP = \theta$ 라 하자.



점 R가 선분 OA의 중점이므로 $\overline{OA} = 2r$

삼각형 OAP에서 $\angle OPA = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{6}, \angle PAQ = \frac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 APQ에서 $\overline{AP} = \overline{AQ}$ 이고 $\angle PAQ = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 APQ는 정삼각형이다.

삼각형 APQ의 둘레의 길이가 $9\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AP} = \overline{AQ} = 3\sqrt{2}$

$$\overline{OP} = \overline{AP} \tan \theta = \overline{AP} \tan \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$$

한편,

$$\angle POQ = \pi - \angle PAQ = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

이므로 부채꼴 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\sqrt{6})^2 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$$

또 두 직각삼각형 OPA, OQA의 넓이는 모두 $\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3}$ 이다.

두 선분 AP, AQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 OPAQ의 넓이에서 부채꼴 OPQ의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$2 \times 3\sqrt{3} - 2\pi = 6\sqrt{3} - 2\pi$$

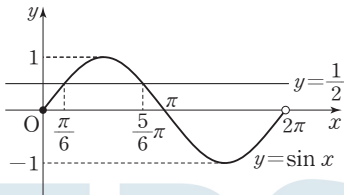
답 ③

11 부등식 $(2 \sin x - 1)(2 \cos x - 1) > 0$ 에서

$$2 \sin x - 1 > 0, 2 \cos x - 1 > 0 \text{ 또는}$$

$$2 \sin x - 1 < 0, 2 \cos x - 1 < 0$$

$$\text{즉, } \sin x > \frac{1}{2}, \cos x > \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x < \frac{1}{2}, \cos x < \frac{1}{2}$$

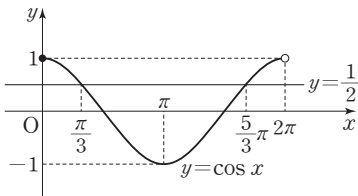


$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 x 좌표는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

부등식 $\sin x > \frac{1}{2}$ 의 해는 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

부등식 $\sin x < \frac{1}{2}$ 의 해는 $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$



$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 x 좌표는 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

부등식 $\cos x > \frac{1}{2}$ 의 해는 $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$ 의 해는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

(i) 두 부등식 $\sin x > \frac{1}{2}, \cos x > \frac{1}{2}$ 을 동시에 만족시키는

x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$$

(ii) 두 부등식 $\sin x < \frac{1}{2}, \cos x < \frac{1}{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{5}{6}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

(i), (ii)에서 부등식 $(2 \sin x - 1)(2 \cos x - 1) > 0$ 을 만족시키는 모든 x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

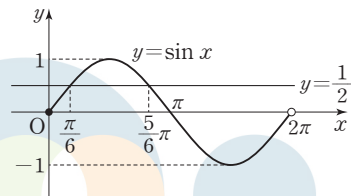
따라서 $a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3}, c = \frac{5}{6}\pi, d = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{6(a+d)}{\pi} = \frac{6\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi\right)}{\pi} = \frac{6 \times \frac{11}{6}\pi}{\pi} = 11$$

답 11

다른 풀이

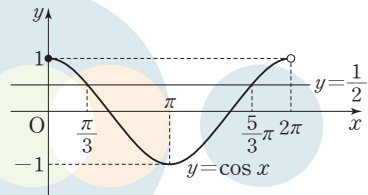
$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



$0 \leq x < 2\pi$ 에서 x 의 값에 따른 $2 \sin x - 1 = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$ 의 값의 부호는 다음 표와 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	(2π)
$2 \sin x - 1$	-	-	0	+	0	-	

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



$0 \leq x < 2\pi$ 에서 x 의 값에 따른 $2 \cos x - 1 = 2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$ 의 값의 부호는 다음 표와 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{5}{3}\pi$...	(2π)
$2 \cos x - 1$	+	+	0	-	0	+	

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 x 의 값에 따른 $(2 \sin x - 1)(2 \cos x - 1)$ 의 값의 부호는 다음 표와 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{5}{6}\pi$...	$\frac{5}{3}\pi$...	(2π)
$(2 \sin x - 1)(2 \cos x - 1)$	-	-	0	+	0	-	0	+	0	-	

즉, 부등식 $(2 \sin x - 1)(2 \cos x - 1) > 0$ 을 만족시키는 모든 x 의 값의 범위는

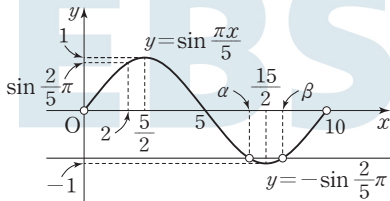
$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{5}{6}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = \frac{5}{6}\pi$, $d = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{6(a+d)}{\pi} = \frac{6\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi\right)}{\pi} = \frac{6 \times \frac{11}{6}\pi}{\pi} = 11$$

12 함수 $y = \sin \frac{\pi x}{5}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$ 이므로

$0 < x < 10$ 에서 함수 $y = \sin \frac{\pi x}{5}$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\sin^2 \frac{\pi x}{5} - \sin \frac{\pi x}{5} - \left(\sin \frac{2}{5}\pi + 1\right) \sin \frac{2}{5}\pi = 0$$

$$\left(\sin \frac{\pi x}{5} - \sin \frac{2}{5}\pi - 1\right) \left(\sin \frac{\pi x}{5} + \sin \frac{2}{5}\pi\right) = 0$$

$$\sin \frac{\pi x}{5} = \sin \frac{2}{5}\pi + 1 \quad \text{또는} \quad \sin \frac{\pi x}{5} = -\sin \frac{2}{5}\pi$$

(i) $\sin \frac{\pi x}{5} = \sin \frac{2}{5}\pi + 1$ 에서 $1 < \sin \frac{2}{5}\pi + 1 < 2$ 이므로

방정식 $\sin \frac{\pi x}{5} = \sin \frac{2}{5}\pi + 1$ 을 만족시키는 실수 x 의 값은 없다.

(ii) $\sin \frac{\pi x}{5} = -\sin \frac{2}{5}\pi$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은 함수

$y = \sin \frac{\pi x}{5}$ 의 그래프와 직선 $y = -\sin \frac{2}{5}\pi$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 이 값이 α , β 이다.

이때 함수 $y = \sin \frac{\pi x}{5}$ 의 그래프는 점 $(5, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 $\alpha < \beta$ 라 하면

$$\alpha = 5 + 2 = 7, \quad \beta = 10 - 2 = 8$$

따라서 $a^2 + b^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$

3 실력 완성 본문 5쪽

1 87 2 98 3 11

1 n 보다 작은 자연수 k 에 대하여

$$k\theta + (n-k)\theta = n\theta = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$(n-k)\theta = \frac{\pi}{2} - k\theta$$

따라서

$$\sin^2 (n-k)\theta = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - k\theta\right) = \cos^2 k\theta \text{이고,}$$

$$\sin^2 k\theta + \sin^2 (n-k)\theta = \sin^2 k\theta + \cos^2 k\theta = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n = 2m - 1$ (m 은 자연수)일 때

①에서

$$\sin^2 k\theta + \sin^2 (2m-k-1)\theta = 1$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 n\theta \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 (2m-1)\theta \\ &= \{\sin^2 \theta + \sin^2 (2m-2)\theta\} \\ & \quad + \{\sin^2 2\theta + \sin^2 (2m-3)\theta\} + \dots \\ & \quad + \{\sin^2 (m-1)\theta + \sin^2 m\theta\} + \sin^2 (2m-1)\theta \\ &= 1 \times (m-1) + \sin^2 \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \times (m-1) + 1^2 \\ &= m \end{aligned}$$

따라서 $14 < m < 16$ 을 만족시키는 자연수 m 은 15이므로

$$n = 2 \times 15 - 1 = 29$$

(ii) $n = 2m$ (m 은 자연수)일 때

①에서

$$\sin^2 k\theta + \sin^2 (2m-k)\theta = 1$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 n\theta \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 2m\theta \\ &= \{\sin^2 \theta + \sin^2 (2m-1)\theta\} \\ & \quad + \{\sin^2 2\theta + \sin^2 (2m-2)\theta\} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \{\sin^2(m-1)\theta + \sin^2(m+1)\theta\} \\
 & + \sin^2 m\theta + \sin^2 2m\theta \\
 = & 1 \times (m-1) + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{2} \\
 = & 1 \times (m-1) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 \\
 = & m + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $14 < m + \frac{1}{2} < 16$ 에서 $13.5 < m < 15.5$ 를 만족

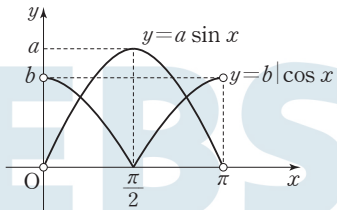
시키는 자연수 m 은 14, 15이므로 n 은 28, 30이다.

(i), (ii)에서 자연수 n 은 28, 29, 30이고, 그 합은 $28 + 29 + 30 = 87$

☞ 87

2 $0 < x < \pi$ 에서 두 함수 $y = a \sin x$, $y = b|\cos x|$ 의 그래프는 a , b 의 부호에 따라 다음과 같다.

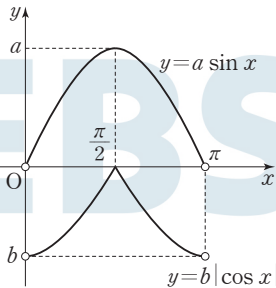
(i) $a > 0$, $b > 0$ 일 때



함수 $y = b|\cos x| + k$ 의 그래프는 함수 $y = b|\cos x|$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $y = a \sin x$, $y = b|\cos x| + k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는 $-b < k < a$ 이다.

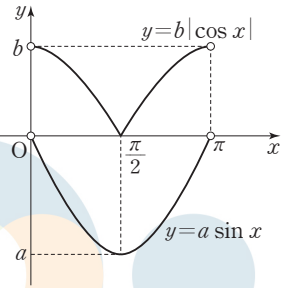
따라서 $a = 4$, $b = 3$

(ii) $a > 0$, $b < 0$ 일 때



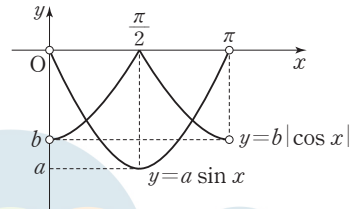
두 함수 $y = a \sin x$, $y = b|\cos x| + k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값은 음수가 될 수 없으므로 실수 k 의 값의 범위가 $-3 < k < 4$ 가 될 수 없다.

(iii) $a < 0$, $b > 0$ 일 때



두 함수 $y = a \sin x$, $y = b|\cos x| + k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값은 양수가 될 수 없으므로 실수 k 의 값의 범위가 $-3 < k < 4$ 가 될 수 없다.

(iv) $a < 0$, $b < 0$ 일 때



두 함수 $y = a \sin x$, $y = b|\cos x| + k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는 $a < k < -b$ 이다.

따라서 $a = -3$, $b = -4$

(i)~(iv)에서 두 실수 a , b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(-3, -4)$, $(4, 3)$ 이므로

$a_1 = -3$, $b_1 = -4$, $a_2 = 4$, $b_2 = 3$

따라서

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = (-3 - 4)^2 + (-4 - 3)^2 = 98$$

☞ 98

3 함수 $y = \tan x$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이므로 함수 $y = \tan 3x$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$3x = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서 } x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6}$$

이때 함수 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 의 그래프

는 함수 $y = \tan 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$ 만큼

평행이동한 것이므로 함수 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프의

점근선의 방정식은

$$x - \frac{\pi}{12} = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \text{에서 } x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{4}$$

따라서 함수 $y = 4 \cos 2x - 1$ 의 그래프와 직선

$$x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{4} \text{가 만나는 점의 } y \text{좌표는}$$

$$\begin{aligned} y &= 4 \cos 2\left(\frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \\ &= 4 \cos\left(\frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -4 \sin \frac{2n}{3}\pi - 1 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

(i) $n = 3k - 2$ (k 는 정수)일 때

㉠에서

$$\begin{aligned} y &= -4 \sin \frac{6k-4}{3}\pi - 1 \\ &= -4 \sin\left(2k\pi - \frac{4}{3}\pi\right) - 1 \\ &= 4 \sin \frac{4}{3}\pi - 1 \\ &= 4 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \\ &= -4 \sin \frac{\pi}{3} - 1 \\ &= -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ &= -(2\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

(ii) $n = 3k - 1$ (k 는 정수)일 때

㉠에서

$$\begin{aligned} y &= -4 \sin \frac{6k-2}{3}\pi - 1 \\ &= -4 \sin\left(2k\pi - \frac{2}{3}\pi\right) - 1 \\ &= 4 \sin \frac{2}{3}\pi - 1 \\ &= 4 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \\ &= 4 \sin \frac{\pi}{3} - 1 \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ &= 2\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

(iii) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

㉠에서

$$\begin{aligned} y &= -4 \sin \frac{6k}{3}\pi - 1 \\ &= -4 \sin 2k\pi - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y = 4 \cos 2x - 1$ 의 그래프와 함수

$y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프의 점근선이 만나는 모든 점의 y 좌표 중에서 서로 다른 모든 y 좌표의 곱은 $-(2\sqrt{3}+1) \times (2\sqrt{3}-1) \times (-1) = 11$

답 11

수능특강 사용설명서

수능특강을 공부하는 가장 쉽고 빠른 방법
수능특강 사용설명서로 시너지 효과 극대화

04 사인법칙과 코사인법칙

유제

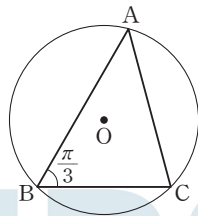
분문 55~61쪽

1 ③	2 75	3 ②	4 55	5 12
6 1	7 ③	8 4		

- 1 $\cos B = \frac{3}{5} > 0$ 에서 $0 < B < \frac{\pi}{2}$ 이므로
 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}$ 이므로
 $\overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} \times \sin A$
 $= \frac{4}{\sin B} \times \sin \frac{\pi}{6}$
 $= \frac{4}{\frac{4}{5}} \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{5}{2}$

답 ③

- 2 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 하자.



- 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$ 이므로
 $R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{3}$
 $\sin A = \overline{BC} \times \frac{\sin B}{\overline{AC}} = 3\sqrt{6} \times \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{9} = 3\sqrt{6} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
이때 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle A = \frac{\pi}{4}$

$$\angle C = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{12}\pi$$

$$\angle AOB = 2\angle C = 2 \times \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 점 C를 포함하지 않는 호 AB의 길이 l은

$$l = 3\sqrt{3} \times \frac{5}{6}\pi = \frac{5\sqrt{3}}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{4l^2}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2} \times \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi\right)^2 = 75$$

답 75

- 3 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$, $y = -x + 3$ 이 만나는 점 A의 x좌표는

$$\frac{1}{2}x = -x + 3 \text{에서 } \frac{3}{2}x = 3, x = 2$$

이므로 A(2, 1)이다.

이때 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이고, 점 B(0, 3)에 대하여

$$\overline{OB} = 3$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 OAB에서 $\angle OAB = \theta$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{AB} \times \cos \theta$$

$$3^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 3^2}{2 \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

답 ②

- 4 삼각형 ABC에서 $\angle C = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$= 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 52$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{13}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인

법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{13}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

그러므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{52}{3}\pi$$

따라서 $a = 3$, $b = 52$ 이므로

$$a + b = 3 + 52 = 55$$

답 55

5 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하자.

$$\sin(A+B) = \sin B$$

$$\sin(\pi - C) = \sin B$$

$$\sin B = \sin C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{이므로}$$

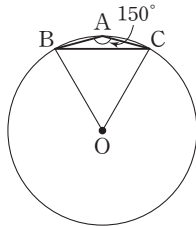
$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R} \text{이므로 } b=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

이때 $\angle B = \angle C = 15^\circ$ 이므로

$$\angle A = 180^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 150^\circ$$



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sin A} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sin 150^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\frac{1}{2}} = a$$

즉, 삼각형 OBC는 정삼각형이다.

이때 정삼각형 OBC의 둘레의 길이가 36이므로 선분 BC의 길이는

$$\frac{1}{3} \times 36 = 12$$

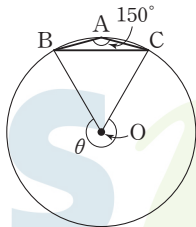
답 12

참고

그림과 같이 $\angle A = 150^\circ$ 이면 원주각의 성질에 의하여 $\theta = 30^\circ$ 임을 알 수 있다.

따라서 삼각형 OBC에서

$\angle BOC = 60^\circ$ 이므로 삼각형 OBC는 정삼각형이다.



6 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하자.

$$\sin(A+B) + \sin(B+C)\cos(A+C) = 0$$

$$\sin(\pi - C) + \sin(\pi - A)\cos(\pi - B) = 0$$

$$\sin C - \sin A \cos B = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{이므로}$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이고, 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

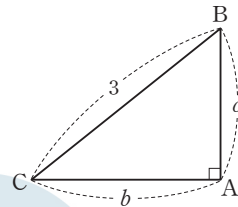
이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{c}{2R} - \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = 0$$

$$-\frac{1}{2c}(a^2 - b^2 - c^2) = 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



이때 $a = \overline{BC} = 3$ 이므로

$$b^2 + c^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2}bc = \sqrt{2} \text{에서}$$

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{c} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{c}\right)^2 + c^2 = 9$$

$$c^4 - 9c^2 + 8 = 0$$

$$(c^2 - 1)(c^2 - 8) = 0$$

$$c > 0 \text{이므로 } c = 1 \text{ 또는 } c = 2\sqrt{2}$$

$\textcircled{3}$ 에서 $b = 2\sqrt{2}$, $c = 1$ 또는 $b = 1$, $c = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\cos B + \cos C = \frac{c}{3} + \frac{b}{3} = \frac{b+c}{3} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

따라서 $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ 이므로

$$p + q = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

답 1

7 삼각형 ABC에서 $\angle B = 30^\circ$ 이므로

$\overline{BC} = x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos 30^\circ$$

$$2^2 = 4^2 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$$

$$(x - 2\sqrt{3})^2 = 0$$

$$x = 2\sqrt{3}, \text{ 즉 } \overline{BC} = 2\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

답 ③

- 8 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a 라 하자.
직각삼각형 CBD에서 $\angle BCD = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{DC} = \frac{\overline{BC}}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\overline{BD} = \overline{DC} \times \sin 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

삼각형 ABD에서

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

이므로 삼각형 ABD의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{3}a \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$$

삼각형 ADC에서

$$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

이므로 삼각형 ADC의 넓이 T 는

$$T = \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}a \times a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$\text{따라서 } \frac{T}{S} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{12}a^2} = 4$$

답 4

- 1 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합이 π 이므로
 $A + B + C = \pi$ 에서 $A + B = \pi - C$

$$\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C = -\frac{3}{4}$$

$$\text{즉, } \cos C = \frac{3}{4} \text{이고 } 0 < C < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 12이므로 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2 \times 12$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2 \times 12 \times \sin C = 2 \times 12 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 6\sqrt{7}$$

답 ⑤

- 2 삼각형 ABC의 세 변의 길이에서

$$a - 2 > 0 \text{이고 } a + (a - 2) > a + 2 \text{이므로}$$

$$a > 4$$

삼각형 ABC에서 $\angle B = 120^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos 120^\circ$$

$$(a + 2)^2 = (a - 2)^2 + a^2 - 2 \times (a - 2) \times a \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 + 4a + 4 = (a^2 - 4a + 4) + a^2 + (a^2 - 2a)$$

$$2a^2 - 10a = 0$$

$$2a(a - 5) = 0$$

$$\text{이때 } a > 4 \text{이므로 } a = 5$$

답 ①

- 3 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$$\overline{OB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{2}$$

삼각형 OAB에서 $\angle AOB = \theta$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

답 ④

- 4 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin A = 3 \sin A$$

1

기초 연습

본문 62~63쪽

- 1 ⑤ 2 ① 3 ④ 4 ⑤ 5 ④
6 ② 7 ④ 8 ⑤

이므로

$$3 \sin A = 1 \text{에서 } \sin A = \frac{1}{3}$$

이때 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos A &= \sqrt{1 - \sin^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

5 삼각형 ABC에서 $\angle A = 60^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos 60^\circ \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{7}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인

법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \times \frac{\overline{BC}}{\sin A} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

6 삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ 라 하고 외접원의 반지름의 길이를 k라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2k$$

즉, $\sin A = \frac{a}{2k}$, $\sin B = \frac{b}{2k}$ 이므로

$$\sin A : \sin B = \frac{a}{2k} : \frac{b}{2k} = a : b = 1 : 3 \text{에서}$$

$$b = 3a$$

$\angle C = 60^\circ$ 인 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 = 12\sqrt{3} \text{에서 } a^2 = 16$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = 4$

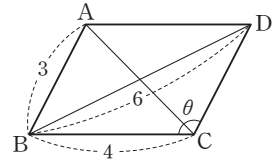
따라서 선분 BC의 길이는 4이다.

답 ②

7 삼각형 BCD에서 $\angle BCD = \theta$

라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \times \overline{BC} \times \overline{CD}} \\ &= \frac{4^2 + 3^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 3} \\ &= -\frac{11}{24} \end{aligned}$$



삼각형 ABC에서 $\angle ABC = \pi - \theta$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\pi - \theta) \\ &= 3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos \theta \\ &= 9 + 16 + 2 \times 3 \times 4 \times \left(-\frac{11}{24}\right) \\ &= 14 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AC} = \sqrt{14}$

답 ④

8 $\angle BAC = 75^\circ$ 이면 원주각의 성질에 의하여

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 75^\circ = 150^\circ$$

삼각형 OBC의 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \sin 150^\circ = 9$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \frac{1}{2} = 9$$

$$\overline{OB} \times \overline{OC} = 36$$

이때 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로 $\overline{OB} = \overline{OC} = 6$

따라서 삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \cos 150^\circ \\ &= 6^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 72 + 36\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 64~66쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ② | 2 ⑤ | 3 ② | 4 ⑤ | 5 ② |
| 6 ② | 7 ④ | 8 ④ | 9 ③ | |

1 점 D가 선분 BC를 3 : 1로 외분하므로

$$\overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1, \overline{BD} = 3$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos(\angle ABD) \\ &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{7}$$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} = 2R$ 이므로

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{\sin \frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ACD의 외접원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{7}{3}\pi$$

답 ②

2 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

선분 AB의 중점이 M, 선분 AC의 중점이 N이므로

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\overline{AN} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

직각삼각형 MCA에서

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

삼각형 MCA의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AM} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$

삼각형 MCN의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{MC} \times \overline{MN} \times \sin(\angle NMC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times 5 \times \sin(\angle NMC)$$

$$= 5\sqrt{13} \times \sin(\angle NMC)$$

이때 $\overline{AN} = \overline{NC}$ 이므로 삼각형 MCN의 넓이는 삼각형

MCA의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

$$\text{즉, } 5\sqrt{13} \times \sin(\angle NMC) = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{이므로}$$

$$\sin(\angle NMC) = \frac{6}{5\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{65}$$

답 ⑤

다른 풀이

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

선분 AB의 중점이 M, 선분 AC의 중점이 N이므로

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\overline{NC} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

직각삼각형 MCA에서

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$$

삼각형 MCN에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{NC}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{MC}^2 - 2 \times \overline{MN} \times \overline{MC} \times \cos(\angle NMC)$$

이므로

$$\begin{aligned}\cos(\angle NMC) &= \frac{\overline{MN}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{NC}^2}{2 \times \overline{MN} \times \overline{MC}} \\ &= \frac{5^2 + (2\sqrt{13})^2 - 3^2}{2 \times 5 \times 2\sqrt{13}} \\ &= \frac{17}{5\sqrt{13}}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \sin(\angle NMC) = \sqrt{1 - \left(\frac{17}{5\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{6\sqrt{13}}{65}$$

3 $\overline{AP} = \overline{BQ} = a$ ($a > 0$)이라 하자.

삼각형 APC에서

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AP}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$$

$$\overline{CP} = \overline{AC} \times \sin \frac{\pi}{3} = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$$

삼각형 ABC에서 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2a}{\frac{1}{2}} = 4a$$

$$\overline{PQ} = \overline{AB} - (\overline{AP} + \overline{BQ}) = 4a - (a + a) = 2a$$

$$\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ} = a + 2a = 3a$$

직각삼각형 CPQ에서

$$\overline{CQ} = \sqrt{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{7}a$$

따라서 삼각형 AQC에서

$$\cos(\angle ACQ) = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{CQ}^2 - \overline{AQ}^2}{2 \times \overline{AC} \times \overline{CQ}}$$

$$= \frac{(2a)^2 + (\sqrt{7}a)^2 - (3a)^2}{2 \times 2a \times \sqrt{7}a}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

답 ②

- 4 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R, $\angle BAD = \angle CAD = \theta$ 라 하면 $\overline{BD} = k$ 일 때 $R = 2k$, 즉 $\overline{OB} = \overline{OD} = 2k$ 이고 $\angle BAC = 2\theta$, $\angle BOD = 2\theta$ 이다. 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{12}{\sin 2\theta} = 2R \text{에서 } \sin 2\theta = \frac{6}{R} = \frac{6}{2k} = \frac{3}{k}$$

삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle BOD) = \frac{\overline{OB}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \times \overline{OB} \times \overline{OD}}$$

$$= \frac{(2k)^2 + (2k)^2 - k^2}{2 \times 2k \times 2k} = \frac{7}{8}$$

즉, $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$ 이므로 $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ 에서

$$\left(\frac{3}{k}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1$$

$$k^2 = \frac{9 \times 64}{15}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{24}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{5}$$

답 ⑤

- 5 $\angle BAD = \angle ADC - \angle ABD = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = \frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)} \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)} \times \sin(\angle ABD)$$

$$= \frac{2}{\sin 30^\circ} \times \sin 45^\circ = \frac{2}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\angle CAD = \angle BAC - \angle BAD = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BAC)$$

$$= 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} \text{이므로}$$

$$\overline{CD} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} \times \sin(\angle CAD)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $a = \overline{AD} = 2\sqrt{2}$, $b = \overline{CD} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$a^2 + 3b^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3 \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 24$$

답 ②

- 6 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ 라 하자.

$$\overline{AB} \cos B + \overline{AC} \cos(A+B) = 0 \text{에서}$$

$$c \cos B + b \cos(\pi - C) = 0$$

$$c \cos B - b \cos C = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

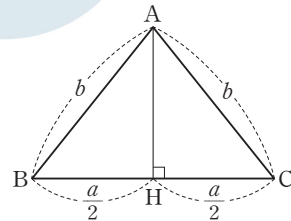
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이므로 ㉠에서

$$c \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$$

$$c^2 - b^2 = 0, \quad c = b$$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.



꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{a}{2} \text{이므로 직각삼각형 ACH에서}$$

$$\cos C = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b}$$

$$\frac{a}{2b} = \frac{5}{8} \text{에서 } a = \frac{5}{4}b$$

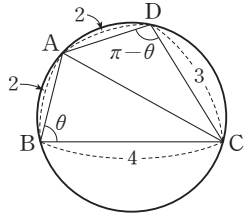
$$\text{즉, } \overline{BC} = \frac{5}{4}b$$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AC}} = \frac{b^2 + b^2 - \left(\frac{5}{4}b\right)^2}{2 \times b \times b} = \frac{7}{32}$$

답 ②

7



$\angle ABC = \theta$ 라 하자.

사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$$\angle ABC + \angle ADC = \pi$$

$$\angle ADC = \pi - \angle ABC = \pi - \theta$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \theta \\ &= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos \theta \\ &= 20 - 16 \cos \theta \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \cos(\pi - \theta) \\ &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(\pi - \theta) \\ &= 13 + 12 \cos \theta \quad \dots \text{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$20 - 16 \cos \theta = 13 + 12 \cos \theta$$

$$28 \cos \theta = 7$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \quad \dots \text{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\overline{AC}^2 = 20 - 16 \times \frac{1}{4} = 16$$

$$\overline{AC} = 4$$

또 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

이때 사각형 ABCD에 외접하는 원과 삼각형 ABC에 외접하는 원이 일치한다.

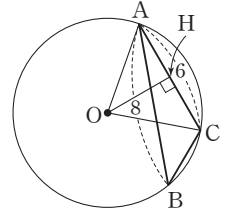
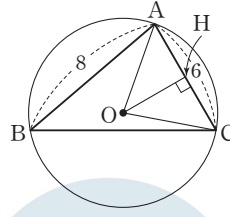
따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2R \text{이므로}$$

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

답 ㉣

8 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



삼각형 OAC의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{OH} = 3 \times \overline{OH} = 12$$

에서 $\overline{OH} = 4$

삼각형 OAC가 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

한편,

$$\angle AOH = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 2 \angle ABC = \angle ABC$$

이므로

$$\cos(\angle ABC) = \cos(\angle AOH) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{4}{5}$$

$\overline{BC} = a$ 이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC)$$

$$6^2 = 8^2 + a^2 - 2 \times 8 \times a \times \frac{4}{5}$$

$$5a^2 - 64a + 140 = 0$$

$$(5a - 14)(a - 10) = 0$$

$$a = \frac{14}{5} \text{ 또는 } a = 10$$

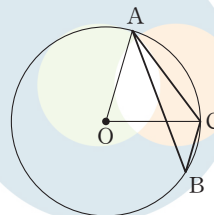
따라서 서로 다른 모든 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{14}{5} + 10 = \frac{64}{5}$$

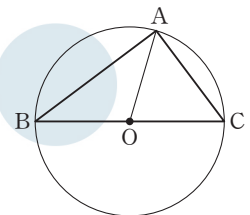
답 ㉤

참고

(i) $\overline{BC} = \frac{14}{5}$ 일 때



(ii) $\overline{BC} = 10$ 일 때



9 점 F가 선분 BC를 3 : 1로 내분하므로 $\overline{FC} = 1$ 이고, $\overline{AC} = 2$, $\overline{AE} = \overline{AG} = \overline{AD} = 1$

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$\angle FAC = \alpha$ 라 하면

$$\sin \alpha = \frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 AGE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{AE} \times \sin \alpha = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

삼각형 AFC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{FC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

그러므로 사각형 CEGF의 넓이 S는

$$S = 1 - \frac{\sqrt{5}}{10}$$

한편, $\overline{BF} = 3$ 이고,

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

삼각형 ABF에서 $\angle BAF = \beta$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AF} \times \cos \beta \text{이므로}$$

$$3^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 3^2}{2 \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

이때 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

그러므로 삼각형 ADG의 넓이 T는

$$T = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AG} \times \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$\text{따라서 } S + T = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) + \frac{3}{10} = \frac{13 - \sqrt{5}}{10}$$

답 ③

3 실력 완성

본문 67쪽

- 1 128 2 ⑤ 3 ④

- 1 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로
 $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{5}{12}\pi$
 삼각형 CDB에서 $\overline{CB} = \overline{CD}$ 이므로
 $\angle CDB = \angle CBD = \frac{5}{12}\pi$ 이고

$$\angle DCB = \pi - (\angle CDB + \angle CBD)$$

$$= \pi - \left(\frac{5}{12}\pi + \frac{5}{12}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

$$\text{따라서 } \angle ACD = \angle ACB - \angle DCB = \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = \sin(\angle ACD) \times \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \sin \frac{\pi}{4} \times \frac{8}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{8}{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}$$

$\overline{BD} = x$ 라 하면 두 삼각형 ABC, CDB는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{DB}$$

$$(8\sqrt{2} + x) : 8 = 8 : x$$

$$(8\sqrt{2} + x)x = 8^2$$

$$x^2 + 8\sqrt{2}x - 64 = 0$$

$$x = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{6} \text{ 또는 } x = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}$

$$\text{즉, } \overline{BD} = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}$$

그러므로

$$\overline{AD} \times \overline{BD} = 8\sqrt{2} \times (4\sqrt{6} - 4\sqrt{2})$$

$$= 64\sqrt{3} - 64$$

따라서 $a = 64$, $b = 64$ 이므로

$$a + b = 64 + 64 = 128$$

답 128

다른 풀이

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{5}{12}\pi$$

삼각형 CDB에서 $\overline{CB} = \overline{CD}$ 이므로

$$\angle CDB = \angle CBD = \frac{5}{12}\pi \text{이고}$$

$$\angle DCB = \pi - (\angle CDB + \angle CBD)$$

$$= \pi - \left(\frac{5}{12}\pi + \frac{5}{12}\pi\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

삼각형 CDB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \cos(\angle DCB)$$

$$= 8^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 128 - 64\sqrt{3}$$

두 삼각형 ABC, CDB는 서로 닮은 도형이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} : \overline{BC} &= \overline{CD} : \overline{DB} \\ (\overline{AD} + \overline{DB}) : \overline{BC} &= \overline{CD} : \overline{DB} \\ (\overline{AD} + \overline{DB}) \times \overline{DB} &= \overline{BC} \times \overline{CD} \\ \overline{AD} \times \overline{DB} + \overline{DB}^2 &= 8 \times 8 \\ \overline{AD} \times \overline{DB} &= 64 - \overline{DB}^2 \\ &= 64 - (128 - 64\sqrt{3}) \\ &= 64\sqrt{3} - 64 \end{aligned}$$

따라서 $a=64, b=64$ 이므로
 $a+b=64+64=128$

2 $\angle BAC = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하자.

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin \theta = \frac{25}{2} \sin \theta$$

이므로

$$\frac{25}{2} \sin \theta = 10 \text{에서 } \sin \theta = \frac{4}{5}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \frac{3}{5} \\ &= 20 \end{aligned}$$

이므로 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인

법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

즉, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 선분 OA는 $\angle BAC$ 를 이등분한다.

즉, $\angle OAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\theta}{2}$ 이고, 삼각형 OCA는 이등변

삼각형이므로 $\angle OCA = \frac{\theta}{2}$ 이다.

$\angle AOC = \pi - (\angle OAC + \angle OCA)$

$$\begin{aligned} &= \pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \pi - \theta \end{aligned}$$

따라서 삼각형 OCM에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CM}^2 &= \overline{OC}^2 + \overline{OM}^2 - 2 \times \overline{OC} \times \overline{OM} \times \cos(\pi - \theta) \\ &= \left(\frac{5\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^2 + 2 \times \frac{5\sqrt{5}}{4} \times \frac{5\sqrt{5}}{8} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{925}{64} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{CM} = \frac{5\sqrt{37}}{8}$$

답 ⑤

3 ㄱ. 두 삼각형 ARS, APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{RS}}{\sin(\angle RAS)} = 4, \frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle PAQ)} = 6$$

$$\overline{RS} = 4 \sin(\angle RAS), \overline{PQ} = 6 \sin(\angle PAQ)$$

이때 $\sin(\angle RAS) = \sin(\angle PAQ)$ 이므로

$$\overline{PQ} : \overline{RS} = 3 : 2$$

따라서 $\overline{PQ} = \frac{3}{2} \overline{RS}$ (참)

ㄴ. [그림 1]에서 $\angle O_1AQ = \theta_1$

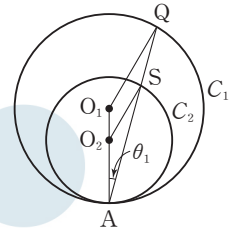
이라 하면

이등변삼각형 O_1AQ 에서

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= 2 \times \overline{O_1A} \times \cos \theta_1 \\ &= 6 \cos \theta_1 \end{aligned}$$

이등변삼각형 O_2AS 에서

$$\begin{aligned} \overline{AS} &= 2 \times \overline{O_2A} \times \cos \theta_1 \\ &= 4 \cos \theta_1 \end{aligned}$$



[그림 1]

따라서 $\overline{AQ} : \overline{AS} = 3 : 2$

[그림 2]에서 $\angle O_1AP = \theta_2$

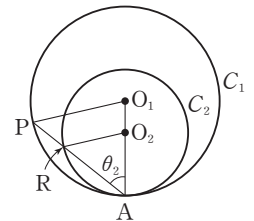
라 하면

이등변삼각형 O_1AP 에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= 2 \times \overline{O_1A} \times \cos \theta_2 \\ &= 6 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

이등변삼각형 O_2AR 에서

$$\begin{aligned} \overline{AR} &= 2 \times \overline{O_2A} \times \cos \theta_2 \\ &= 4 \cos \theta_2 \end{aligned}$$



[그림 2]

따라서 $\overline{AP} : \overline{AR} = 3 : 2$

그러므로 두 삼각형 ARS, APQ는 서로 닮은 도형이고, 두 선분 PQ, RS는 서로 평행하다.

이때 두 선분 RS, O_2B 의 교점을 V라 하면

두 삼각형 O_1AU, O_1VO_2 는 각각 $\angle O_1AU = 90^\circ,$

$\angle O_1VO_2 = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고, 서로 닮은 도형이다.

따라서

$$\sin(\angle O_1O_2V) = \sin(\angle O_1UA) = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1U}} = \frac{3}{\overline{O_1U}}$$

이므로 삼각형 O_1BO_2 의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \overline{O_1O_2} \times \overline{O_2B} \times \sin(\angle O_1O_2B) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{3}{O_1U} \\ &= \frac{3}{O_1U} \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

ㄷ. 삼각형 O_1O_2B 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{O_1B}^2 &= \overline{O_1O_2}^2 + \overline{O_2B}^2 - 2 \times \overline{O_1O_2} \times \overline{O_2B} \times \cos(\angle O_1O_2B) \\ &= 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos(\angle O_1O_2B) \\ &= 5 - 4 \cos(\angle O_1O_2B) \\ &= 5 - 4 \cos(\angle O_1UA) \\ &= 5 - 4 \times \frac{\overline{AU}}{O_1U} \end{aligned}$$

삼각형 O_1O_2T 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{O_2T}^2 &= \overline{O_1O_2}^2 + \overline{O_1T}^2 - 2 \times \overline{O_1O_2} \times \overline{O_1T} \times \cos(\angle O_2O_1T) \\ &= 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos(90^\circ + \angle O_1O_2B) \\ &= 10 + 6 \sin(\angle O_1O_2B) \\ &= 10 + 6 \sin(\angle O_1UA) \\ &= 10 + 6 \times \frac{\overline{O_1A}}{O_1U} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\overline{O_1B}^2 - 5}{4} \right)^2 + \left(\frac{\overline{O_2T}^2 - 10}{6} \right)^2 \\ &= \left(-\frac{\overline{AU}}{O_1U} \right)^2 + \left(\frac{\overline{O_1A}}{O_1U} \right)^2 \\ &= \frac{\overline{AU}^2 + \overline{O_1A}^2}{O_1U^2} \\ &= \frac{\overline{O_1U}^2}{O_1U^2} \\ &= 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

1 ②	2 ④	3 ③	4 ④	5 ②
6 6	7 ⑤	8 62		

1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 = 5 \text{에서 } a_1 + 3d = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_8 - a_5 = (a_1 + 7d) - (a_1 + 4d) = 3d = 6 \text{에서 } d = 2$$

$d = 2$ 를 ㉠에 대입하면

$$a_1 + 6 = 5, a_1 = -1$$

$$\text{따라서 } a_7 = a_1 + 6d = -1 + 6 \times 2 = 11$$

답 ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_8 - a_5 = (a_1 + 7d) - (a_1 + 4d) = 3d = 6 \text{에서}$$

$$d = 2$$

$$\text{따라서 } a_7 = a_4 + 3d = 5 + 3 \times 2 = 11$$

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

세 수 $6, a_2^2, 2a_3^2$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \times a_2^2 = 6 + 2a_3^2$$

즉, $a_2^2 = 3 + a_3^2$ 이므로

$$(a_1 + d)^2 = 3 + (a_1 + 2d)^2$$

$$d(2a_1 + 3d) = -3$$

모든 항이 정수이므로 a_1, d 는 모두 정수이고 $2a_1 + 3d$ 도 정수이다.

(i) $d = 1, 2a_1 + 3d = -3$ 일 때

$$2a_1 + 3 = -3, a_1 = -3 \text{이므로 } a_1 \text{이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $d = -1, 2a_1 + 3d = 3$ 일 때

$$2a_1 - 3 = 3, a_1 = 3$$

(iii) $d = 3, 2a_1 + 3d = -1$ 일 때

$$2a_1 + 9 = -1, a_1 = -5 \text{이므로 } a_1 \text{이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(iv) $d = -3, 2a_1 + 3d = 1$ 일 때

$$2a_1 - 9 = 1, a_1 = 5$$

(i)~(iv)에서 모든 a_1 의 값의 합은

$$3 + 5 = 8$$

답 ④

3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2=5 \text{에서}$$

$$a_1+d=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_8 = \frac{8(2a_1+7d)}{2} = 12 \text{에서}$$

$$2a_1+7d=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a_1 = \frac{32}{5}, d = -\frac{7}{5}$$

따라서 $a_7 - a_2 = 5d = -7$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1+a_8=(a_2-d)+(a_7+d)=a_2+a_7$$

이므로

$$S_8 = \frac{8(a_1+a_8)}{2} = \frac{8(a_2+a_7)}{2} = 12$$

$$a_2+a_7=3$$

이때 $a_2=5$ 이므로 $a_7=-2$

따라서 $a_7 - a_2 = -2 - 5 = -7$

4 $a_n = 4n - 7$ 이므로

$$S_{20} - S_8 = a_9 + a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{20}$$

$$= \frac{12(a_9 + a_{20})}{2}$$

$$= \frac{12(29 + 73)}{2} = 612$$

5 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

$a_2 = a_1 r = 12$ 이므로 $a_1 \neq 0, r \neq 0$ 이다.

$a_4 = 2a_5$ 에서 $a_5 = \frac{1}{2}a_4$ 이므로 $r = \frac{1}{2}$

따라서 $a_3 = a_2 r = 12 \times \frac{1}{2} = 6$

6 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 수 a_2, a_6, a_{10} 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_6^2 = a_2 a_{10}$$

또한 세 수 a_4, a_6, a_8 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_6^2 = a_4 a_8$$

따라서 $a_6^4 = a_2 a_{10} \times a_4 a_8 = a_2 a_4 \times a_8 a_{10} = \frac{4}{3} \times 27 = 36$

$a_6^2 \geq 0$ 이므로 $a_6^2 = 6$

답 ③

답 ④

답 ②

답 6

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 등비중항을 이용하면

$$a_3^2 = a_2 a_4 = \frac{4}{3}$$

$$a_9^2 = a_8 a_{10} = 27$$

세 수 a_3^2, a_6^2, a_9^2 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_6^4 = a_3^2 \times a_9^2 = \frac{4}{3} \times 27 = 36$$

$a_6^2 \geq 0$ 이므로 $a_6^2 = 6$

참고

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = ar^{n-1} (r \neq 0)$ 이면

$$a_n^2 = a^2 (r^{n-1})^2 = a^2 (r^2)^{n-1}$$

이므로 수열 $\{a_n^2\}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이다.

7 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

주어진 두 조건에서 $a_1 \neq 0$ 이므로

$$a_2 = \sqrt{2}a_1 \text{에서 } r = \sqrt{2}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$= a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + a_1 r^7 + a_1 r^9$$

$$= (\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 16\sqrt{2})a_1$$

$$= 31\sqrt{2}a_1$$

이고 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 93\sqrt{2}$ 이므로

$$31\sqrt{2}a_1 = 93\sqrt{2}$$

$$a_1 = 3$$

답 ⑤

8 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.

$r = 1$ 이면

$$S_2 = 2a_1, S_8 - S_4 = 8a_1 - 4a_1 = 4a_1$$

이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

그러므로 $r \neq 1$ 이다.

$$S_2 = \frac{a_1(r^2 - 1)}{r - 1} = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_8 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

$$= \frac{a_5(r^4 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{a_1 r^4 (r^2 + 1)(r^2 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{a_1 (r^2 - 1)}{r - 1} \times r^4 (r^2 + 1)$$

$$= 2 \times r^4 (r^2 + 1) = 300$$

$$r^6 + r^4 - 150 = 0$$

$r^2 = t (t \geq 0)$ 으로 놓으면

$$t^3 + t^2 - 150 = 0$$

$$(t - 5)(t^2 + 6t + 30) = 0$$

이때 $t^2+6t+30=(t+3)^2+21>0$ 이므로

$$t=5, \text{ 즉 } r^2=5$$

$r^2=5$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{a_1}{r-1} \times (5-1)=2$$

$$\frac{a_1}{r-1}=\frac{1}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{a_1(r^6-1)}{r-1} = \frac{a_1}{r-1} \times \{(r^2)^3-1\} \\ &= \frac{1}{2} \times (5^3-1) = 62 \end{aligned}$$

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$S_2 = a_1 + a_1r = a_1(1+r) = 2$$

$$S_8 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

$$= (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8)$$

$$= a_1(1+r) \times r^4 + a_1(1+r) \times r^6$$

$$= 2r^4 + 2r^6 = 300$$

$$r^6 + r^4 - 150 = 0$$

$r^2 = t$ ($t \geq 0$)으로 놓으면

$$t^3 + t^2 - 150 = 0$$

$$(t-5)(t^2+6t+30) = 0$$

이때 $t^2+6t+30=(t+3)^2+21>0$ 이므로

$$t=5, \text{ 즉 } r^2=5$$

따라서

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6)$$

$$= a_1(1+r) + a_1(1+r) \times r^2 + a_1(1+r) \times r^4$$

$$= 2 + 2 \times 5 + 2 \times 25 = 62$$

답 62

따라서 $a_8 = a_1 + 7d = 3 + 7 \times 2 = 17$

답 ③

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_5 - a_3 = (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 2d = 12$$

$$d = 6$$

$$\text{따라서 } a_{10} - a_5 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 4d) = 5d = 30$$

답 ④

3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 - a_5 = 3 \text{에서 } a_5 - a_4 = -3 \text{이므로 } d = -3$$

$$a_1 = a_2 - d = 5 - (-3) = 8$$

$$\text{따라서 } S_{10} = \frac{10\{2 \times 8 + 9 \times (-3)\}}{2} = -55$$

답 ①

4 6개의 수 $4, x_1, x_2, x_3, x_4, 10$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 6개의 수의 합은

$$4 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 10 = \frac{6(4+10)}{2} = 42$$

$$\text{따라서 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$$

답 ⑤

다른 풀이

6개의 수 $4, x_1, x_2, x_3, x_4, 10$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$x_1 - 4 = 10 - x_4 \text{에서 } x_1 + x_4 = 14$$

$$x_2 - 4 = 10 - x_3 \text{에서 } x_2 + x_3 = 14$$

$$\text{따라서 } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28$$

5 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 이므로 $S_{n+1} - S_n = -5n + 40$ 에서

$$a_{n+1} = -5n + 40$$

n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$a_n = -5(n-1) + 40$$

$$= -5n + 45 \quad (n \geq 2)$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이라면 $a_1 = 40$ 이고

$$a_n = -5n + 45 \quad (n \geq 1) \text{이어야 한다.}$$

$a_k = -5k + 45 < 0$ 에서 $k > 9$ 이므로 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

따라서 $a_1 + k$ 의 최솟값은 50이다.

답 ⑤

Level 1

기초 연습

본문 78~80쪽

- | | | | | |
|------|-------|-----|-----|------|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ① | 4 ⑤ | 5 ⑤ |
| 6 ③ | 7 ③ | 8 ③ | 9 ① | 10 ④ |
| 11 ① | 12 15 | | | |

1 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a_1 + 3d \text{이므로}$$

$$9 = 3 + 3d, \quad d = 2$$

- 6 $S_3 = S_5$ 에서 $S_5 - S_3 = 0$
 $S_5 - S_3 = a_4 + a_5$ 이므로
 $a_4 + a_5 = 0$
 $a_2 = -5$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면
 $a_4 = a_2 + 2d = -5 + 2d$
 $a_5 = a_2 + 3d = -5 + 3d$
 $a_4 + a_5 = 0$ 에서
 $(-5 + 2d) + (-5 + 3d) = 0$
 $d = 2$
 그러므로 $a_4 = -1, a_5 = 1$
 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < \dots$ 이므로 $n=4$ 일 때 S_n 이 최소이다.
 $a_1 = a_2 - d = -5 - 2 = -7, a_4 = -1$ 이므로
 $S_4 = \frac{4(a_1 + a_4)}{2} = \frac{4(-7 - 1)}{2} = -16$

답 ③

- 7 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면
 $a_2 = a_1 r = 3 \quad \dots \textcircled{1}$
 이때 $a_1 \neq 0, r \neq 0$ 이다.
 $\frac{a_4}{a_1} = \frac{a_1 r^3}{a_1} = r^3 = 8$ 에서
 $r^3 - 8 = 0$
 $(r - 2)(r^2 + 2r + 4) = 0$
 이때 $r^2 + 2r + 4 = (r + 1)^2 + 3 > 0$ 이므로
 $r = 2$
 $\textcircled{1}$ 에서 $a_1 = \frac{3}{2}$
 따라서 $a_6 = a_1 r^5 = \frac{3}{2} \times 32 = 48$

답 ③

- 8 세 수 a_1, a_3, a_5 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $a_3^2 = a_1 a_5 \quad \dots \textcircled{1}$
 세 수 a_2, a_4, a_6 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $a_4^2 = a_2 a_6 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서
 $a_3^2 a_4^2 = a_1 a_5 \times a_2 a_6 = a_1 a_2 \times a_5 a_6 = 12 \times 27 = 18^2$
 이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로
 $a_3 a_4 = 18$

답 ③

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_5 a_6}{a_1 a_2} = \frac{a_5}{a_1} \times \frac{a_6}{a_2} = r^4 \times r^4 = r^8 \text{에서}$$

$$r^8 = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

$$r^4 = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a_3 a_4 = a_1 r^2 \times a_2 r^2 = a_1 a_2 r^4 = 12 \times \frac{3}{2} = 18$$

- 9 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.
 모든 항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_n < a_{n+1}$ 을 만족시키려면 $0 < r < 1$ 이어야 한다.

$$\frac{a_2 + a_4}{a_3} = \frac{10}{3} \text{에서}$$

$$\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{a_2}{a_2 r} + \frac{a_3 r}{a_3} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{r} + r = \frac{10}{3}$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(r - 3)(3r - 1) = 0$$

$$0 < r < 1 \text{이므로 } r = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_6}{a_1} = \frac{a_1 r^5}{a_1} = r^5 = \frac{1}{9}$$

답 ①

- 10 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하자.
 $r = 1$ 이면 $S_6 = 6 \times 3 = 18, S_3 = 3 \times 3 = 9$ 이므로
 $8S_6 = 35S_3$ 을 만족시키지 않는다.
 그러므로 $r \neq 1$ 이다.

$$8S_6 = 35S_3 \text{에서 } a_1 = 3 \text{이므로}$$

$$8 \times \frac{3(r^6 - 1)}{r - 1} = 35 \times \frac{3(r^3 - 1)}{r - 1}$$

$$8 \times \frac{3(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 35 \times \frac{3(r^3 - 1)}{r - 1}$$

$$r^3 + 1 = \frac{35}{8}$$

$$r^3 = \frac{27}{8}$$

$$r \text{는 실수이므로 } r = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a_2 = a_1 r = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

답 ④

11 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 모든 항이 양수이므로 $a_1 > 0, r > 0$ 이다.

$$r=1 \text{ 이면 } S_1=a_1, S_2=2a_1, S_4=4a_1 \text{ 이고}$$

$S_2 - S_1 \neq S_4 - S_2$ 이므로 세 수 S_1, S_2, S_4 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다는 조건을 만족시키지 않는다.

$r \neq 1$ 일 때, 세 수 S_1, S_2, S_4 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2S_2 = S_1 + S_4$$

$$2(a_1 + a_2) = a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$a_2 - a_3 - a_4 = 0$$

$$a_1 r - a_1 r^2 - a_1 r^3 = 0$$

$$a_1 r(r^2 + r - 1) = 0$$

$$a_1 > 0, r > 0 \text{ 이므로 } r^2 + r - 1 = 0$$

$$r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

답 ①

12 첫째항이 -2 , 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = -2 + (n-1) \times 3 = 3n - 5$$

$$b_n = 2^{a_n} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 &= 2^{a_5} + 2^{a_6} + 2^{a_7} + 2^{a_8} + 2^{a_9} \\ &= 2^{10} + 2^{13} + 2^{16} + 2^{19} + 2^{22} \\ &= \frac{2^{10} \times \{(2^3)^5 - 1\}}{2^3 - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2^{10}}{7} (2^{15} - 1)$$

따라서 $m=15$

답 15

Level 2

기본 연습

본문 81~83쪽

- | | | | | |
|-------|------|-----|-----|------|
| 1 ② | 2 ④ | 3 ④ | 4 ① | 5 ② |
| 6 ③ | 7 ⑤ | 8 ① | 9 ① | 10 ⑤ |
| 11 19 | 12 ① | | | |

1 $a_2 - 1 = 1 - a_4$ 에서 $a_2 + a_4 = 2$
등차수열 $\{a_n\}$ 에서 등차중항을 이용하면

$$2a_3 = a_2 + a_4 = 2, \text{ 즉 } a_3 = 1$$

$$|a_4 - 5| = |5 - a_6| \text{ 에서}$$

$$a_4 - 5 = 5 - a_6 \text{ 또는 } a_4 - 5 = a_6 - 5$$

$$a_4 + a_6 = 10 \text{ 또는 } a_4 = a_6$$

이때 공차가 0이 아니므로 $a_4 + a_6 = 10$

등차중항을 이용하면

$$2a_5 = a_4 + a_6 = 10, \text{ 즉 } a_5 = 5$$

세 수 a_1, a_3, a_5 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a_3 = a_1 + a_5$$

$$\text{따라서 } a_1 = 2a_3 - a_5 = 2 \times 1 - 5 = -3$$

답 ②

2 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_6 - a_4 = 2 \times 2 = 4$$

첫째항과 공비가 같은 등비수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항과 공비를 모두 r 라 하면

$$b_4 = r^4, b_6 = r^6$$

이때 $a_4 = b_4, a_6 = b_6$ 이므로

$$r^6 - r^4 = 4$$

$r^2 = t$ 라 하면 $r \neq 0$ 이므로 $t > 0$ 이고

$$t^3 - t^2 - 4 = 0$$

$$(t-2)(t^2+t+2) = 0$$

$t > 0$ 일 때, $t^2+t+2 > 0$ 이므로 $t = 2$

$$\text{즉, } r^2 = 2$$

따라서

$$a_2 = a_4 - 4 = b_4 - 4 = r^4 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

$$b_2 = r^2 = 2$$

이므로

$$a_2 + b_2 = 0 + 2 = 2$$

답 ④

3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2 a_4 - a_1 a_3 = 8 \text{ 에서}$$

$$(a_1 + d)(a_1 + 3d) - a_1(a_1 + 2d) = 8$$

$$d(2a_1 + 3d) = 8 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \text{ 에서}$$

$$\frac{4(2a_1 + 3d)}{2} = 4$$

$$2a_1 + 3d = 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$d = 4, a_1 = -5$$

따라서 $a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = 7$ 이므로

$$a_2 a_3 a_4 = (-1) \times 3 \times 7 = 105$$

답 ④

4 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 모든 항이 서로 다른 양수이므로

$$r > 0, r \neq 1$$

$$S_6 = \frac{15}{4}(a_7 + a_8 + a_9) \text{에서}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) = \frac{15}{4}(a_7 + a_8 + a_9)$$

$$(a_1 + a_2 + a_3) + r^3(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{15}{4}r^6(a_1 + a_2 + a_3)$$

$a_1 + a_2 + a_3 > 0$ 이므로

$$1 + r^3 = \frac{15}{4}r^6$$

$$15r^6 - 4r^3 - 4 = 0$$

$r^3 = t$ ($t > 0$)이라 하면

$$15t^2 - 4t - 4 = 0$$

$$(3t - 2)(5t + 2) = 0$$

$$t = \frac{2}{3} \text{ 또는 } t = -\frac{2}{5}$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = \frac{2}{3}$$

$$\text{즉, } r^3 = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$S_6 = 1$ 에서

$$\frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{a_1}{r - 1} \times \left(\frac{4}{9} - 1\right) = 1$$

$$\frac{a_1}{r - 1} = -\frac{9}{5}$$

$\textcircled{1}$

5 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{S_4}{S_3 - S_1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_2 + a_3}$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_3 + a_4}{a_2 + a_3}$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{r(a_1 + a_2)} + \frac{r(a_2 + a_3)}{a_2 + a_3}$$

$$= \frac{1}{r} + r$$

$$\frac{S_4}{S_3 - S_1} = \frac{13}{6} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{r} + r = \frac{13}{6}$$

$$6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$(2r - 3)(3r - 2) = 0$$

$$r > 1 \text{이므로 } r = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_4}{a_3 - a_1} = \frac{a_1 r^3}{a_1 r^2 - a_1} = \frac{r^3}{r^2 - 1} = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{27}{4}$$

$\textcircled{2}$

6 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_2 a_4 = 3 \text{이므로}$$

$$a_3 a_5 = a_2 r \times a_4 r = a_2 a_4 \times r^2 = 3r^2$$

$$a_3 a_6 = a_2 r \times a_4 r^2 = a_2 a_4 \times r^3 = 3r^3$$

$$a_3 a_5 = a_3 a_6 - 54 \text{에서}$$

$$3r^2 = 3r^3 - 54, r^3 - r^2 - 18 = 0$$

$$(r - 3)(r^2 + 2r + 6) = 0$$

이때 $r^2 + 2r + 6 = (r + 1)^2 + 5 > 0$ 이므로 $r = 3$

$$\text{따라서 } a_1 a_6 = \frac{a_2}{r} \times a_4 r^2 = a_2 a_4 \times r = 3r = 9$$

$\textcircled{3}$

7 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$S_{n+2} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2}$$

$$= (a_1 + nd) + \{a_1 + (n+1)d\}$$

$$= 2dn + 2a_1 + d$$

$$|S_{n+2} - S_n| = |2dn + 2a_1 + d| = |6n - 19| \text{에서}$$

S_n 의 최댓값이 존재하므로 $d \leq 0$ 이다.

a_1, d 는 상수이므로

$$2d = -6, 2a_1 + d = 19$$

$$d = -3, a_1 = 11$$

$$\text{따라서 } a_3 = a_1 + 2d = 11 + 2 \times (-3) = 5$$

$\textcircled{5}$

8 조건 (가)에서 $n = 7$ 일 때,

$$S_8 = S_7, \text{ 즉 } S_8 - S_7 = 0$$

$$S_8 - S_7 = b_8 \text{이므로 } b_8 = 0$$

$$\text{즉, } b_8 = a_8 + a_6 = 0$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$(a_1 + 7d) + (a_1 + 5d) = 0$$

$$a_1 = -6d$$

그러므로

$$a_n = -6d + (n-1)d = (n-7)d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b_n = a_n + a_6 = (n-7)d + (-d) = (n-8)d$$

또한 조건 (가)에서 $n = 1$ 일 때, $S_1 = S_{14}$ 이므로

$$S_{16} = S_{14} + b_{15} + b_{16}$$

$$= S_1 + b_{15} + b_{16}$$

$$= b_1 + b_{15} + b_{16}$$

$$= -7d + 7d + 8d$$

$$= 8d$$

$$\text{조건 (나)에서 } 8d = 40, d = 5$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서 } a_6 = -d = -5$$

$\textcircled{1}$

9 조건 (가)에서 세 수 2, k , $3k-4$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$k^2 = 2(3k-4), k^2 - 6k + 8 = 0$$

$$(k-2)(k-4) = 0$$

$$k \geq 3 \text{이므로 } k=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

조건 (나)에서 세 수 a_3 , a_5 , a_9 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_5^2 = a_3 a_9$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$(a_1 + 4d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$$

$$a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1 d + 16d^2$$

$$2a_1 d = 0$$

$$d \neq 0 \text{이므로 } a_1 = 0$$

$$\text{그러므로 } a_n = 0 + (n-1)d = (n-1)d \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}$, $\textcircled{㉒}$ 에서

$$a_k^2 = a_4^2 = (3d)^2 = 9d^2$$

$$a_k^2 > 100 \text{에서}$$

$$9d^2 > 100$$

따라서 자연수 d 의 최솟값은 4이고 $a_2 - a_1 = d$ 이므로

$a_2 - a_1$ 의 최솟값은 4이다.

답 ①

10 $b_n = a_n - |a_n|$ 에서

$$a_n \geq 0 \text{이면 } b_n = a_n - a_n = 0$$

$$a_n < 0 \text{ 이면 } b_n = a_n + a_n = 2a_n$$

$$b_6 = a_6 - |a_6| \text{ 이고 } b_6 = a_6 \text{ 이므로}$$

$$|a_6| = 0, \text{ 즉 } a_6 = 0$$

$$\text{그러므로 } a_6 = b_6 = 0$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$a_6 = 0$ 이므로 $d \leq 0$ 이면 $1 \leq n \leq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 0$ 이다.

이때 S_n 의 최댓값은 0이 되어 S_n 의 최댓값이 -2라는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d > 0$ 이다.

$1 \leq n \leq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < 0$ 이고, $n \geq 6$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 0$ 이다.

이때 $1 \leq n \leq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n < 0$ 이고 $n \geq 6$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = 0$ 이므로

$$S_1 > S_2 > S_3 > S_4 > S_5 = S_6 = S_7 = \dots \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

따라서 S_n 은 $n=1$ 일 때 최대이고, S_n 의 최댓값이 -2이므로

$$S_1 = b_1 = 2a_1 = -2$$

$$a_1 = -1$$

$\textcircled{㉑}$ 에서 S_n 은 $n \geq 5$ 일 때 최소이고 $b_6 = a_6 = 0$ 이므로 S_n 의 최솟값은

$$S_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$$

$$= 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6$$

$$= 2 \times \frac{6(a_1 + a_6)}{2}$$

$$= 6(-1 + 0) = -6$$

답 ⑤

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$b_6 = a_6 - |a_6| = a_6 \text{에서}$$

$$|a_6| = 0, \text{ 즉 } a_6 = a_1 + 5d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $b_n \leq 0$ 이므로 S_n 은 $n=1$ 일 때 최댓값을 갖는다.

S_n 의 최댓값이 -2이므로

$$a_1 - |a_1| = -2 \text{에서 } a_1 = -1$$

$$a_1 = -1 \text{을 } \textcircled{㉑} \text{에 대입하면 } d = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$a_n = -1 + (n-1) \times \frac{1}{5} = \frac{n}{5} - \frac{6}{5} \text{이고,}$$

$$1 \leq n \leq 5 \text{이면 } b_n = 2a_n, n \geq 6 \text{ 이면 } b_n = 0$$

따라서 S_n 의 최솟값은

$$S_5 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$= 2 \times \frac{5(a_1 + a_5)}{2}$$

$$= 5\left(-1 - \frac{1}{5}\right) = -6$$

11 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 모든 항이 서로 다르므로 $r \neq 0, r \neq 1, r \neq -1$

조건 (가)에서 $n=2$ 일 때 $0 < S_2 \leq S_1$

이때 $S_1 = a_1 = 2, S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 2r$ 이므로

$$0 < 2 + 2r \leq 2 \text{에서 } -1 < r \leq 0$$

$$r \neq 0 \text{이므로 } -1 < r < 0$$

조건 (나)에서

$$|2r^{m-1}| + |2r^{m+1}| = 5|r|^m$$

$$2|r|^{m-1} + 2|r|^{m+1} = 5|r|^m$$

양변을 $|r|^{m-1}$ 으로 나누면

$$2 + 2|r|^2 = 5|r|$$

$$2|r|^2 - 5|r| + 2 = 0$$

$$(2|r| - 1)(|r| - 2) = 0$$

$$|r| = \frac{1}{2} \text{ 또는 } |r| = 2$$

$$-1 < r < 0 \text{이므로 } r = -\frac{1}{2}$$

따라서

$$S_5 = \frac{2 \times \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \times \frac{33}{32} = \frac{11}{8}$$

에서 $p=8, q=11$ 이므로

$$p+q=8+11=19$$

참고

모든 자연수 n 에 대하여

$$S_n = \frac{2 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ \leq \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} = 2 = S_1$$

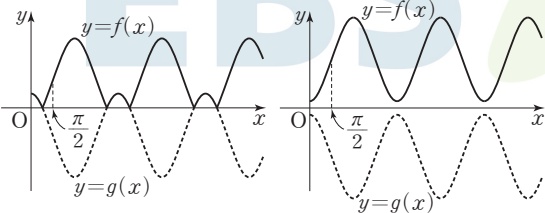
답 19

12 $g(x) = p \cos x + q$ 라 하면 $f(x) = |g(x)|$ 이다.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $g(x)$ 가 감소하므로 $f(0) < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 즉

$|g(0)| < \left|g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$ 를 만족시키려면 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ 이어야 한다.

함수 $g(x)$ 의 최댓값 $g(0) = p+q$ 의 부호에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 경우가 있다.



[$p+q > 0$ 일 때]

[$p+q \leq 0$ 일 때]

(i) $p+q > 0$ 일 때

직선 $y=t$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 모든 점의 x 좌표를 나열한 수열은 $t=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 이면 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$ 이고 공차가 π 인 등차수열이고, $t=f(\pi)$ 이면 첫째항이 π 이고 공차가 2π 인 등차수열이다.

한편, 나머지 경우에는 직선 $y=t$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 모든 점의 x 좌표를 나열한 수열은 연속하는 두 항 사이의 차가 π 보다 큰 값과 π 보다 작은 값이 모두 있으므로 등차수열이 되지 않는다.

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = q < 0, g(\pi) = p \cos \pi + q = -p + q < 0$ 이므로

$$\alpha = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = |q| = -q, \beta = f(\pi) = |-p+q| = p-q$$

이때 $\alpha + \beta = 7$ 이므로

$$-q + (p-q) = 7, \text{ 즉 } p-2q=7 \quad \text{..... ㉠}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$ 이고 공차가 π 인 등차수열이므로

$$a_3 = \frac{\pi}{2} + 2 \times \pi = \frac{5}{2} \pi$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 π 이고 공차가 2π 인 등차수열이므로

$$b_2 = \pi + 1 \times 2\pi = 3\pi$$

$$\frac{f(b_2)}{a_3} = \frac{2}{\pi}, \text{ 즉 } f(b_2) = \frac{2}{\pi} \times a_3 \text{ 이고}$$

$$|p \cos 3\pi + q| = \frac{2}{\pi} \times \frac{5}{2} \pi$$

$$|-p+q| = 5$$

$$p-q=5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3, q=-2$

(ii) $p+q \leq 0$ 일 때

직선 $y=t$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 모든 점의 x 좌표를 나열한 수열은 $t=f(0)$ 이면 공차가 2π 인 등차수열, $t=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 이면 공차가 π 인 등차수열, $t=f(\pi)$ 이면 공차가 2π 인 등차수열이다.

이때 등차수열이 되도록 하는 t 의 값이 2개뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $p=3, q=-2$

따라서 $5p+4q = 5 \times 3 + 4 \times (-2) = 7$

답 ①

3

실력 완성

본문 84쪽

1 3 2 ④ 3 768

1 $n(B) = 10$ 이고 $B = (A \cap B) \cup (B - A)$,
 $(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$ 이므로 조건 (나)에서
 $n(A \cap B) = n(B - A) = 5$

집합 $A \cap B$ 는 두 등차수열의 공통인 항의 집합이므로 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소를 작은 수부터 나열하면 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열을 $\{c_n\}$ 이라 하고, 등차수열 $\{c_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 d 도 자연수이고 d_1, d_2 의 공배수이다.

이때 $a_5 = b_5 = 3$ 에서 $3 \in A \cap B$, 즉 3은 수열 $\{c_n\}$ 의 항이고, $d=1$ 또는 $d=2$ 이면 수열 $\{c_n\}$ 의 항의 개수가 5보다

크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d \geq 3$

이때 $c_1=3$ 이고, $c_5 \leq 20 < c_6$ 이므로

$$3+4d \leq 20 < 3+5d$$

$$\frac{17}{5} < d \leq \frac{17}{4}$$

d 는 자연수이므로 $d=4$

그러므로 $A \cap B = \{3, 7, 11, 15, 19\}$ ㉠

한편, d_1 과 d_2 는 모두 d , 즉 4의 약수이다.

그런데 d_1, d_2 가 모두 1 또는 2의 값을 가지면

$n(A \cap B) > 5$ 가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

또한 $c_5 - c_1 = 19 - 3 = 16$ 이므로

$d_2=1$ 이면 $19=b_{21}$, $d_2=2$ 이면 $19=b_{13}$ 이 되어 $19 \notin B$,

즉 $19 \notin A \cap B$ 가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d_2=4$

따라서 두 자연수 d_1, d_2 의 모든 순서쌍 (d_1, d_2) 는

$(4, 4), (1, 4), (2, 4)$

이고, 그 개수는 3이다.

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 조건 (가)에서 $d > 0$ 이다.

이때 수열 $\{b_n\}$ 에서

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) \\ &= a_{n+2} - a_n = 2d \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.

세 점 $P_{12}(12, a_{12}), Q_{10}(10, a_{10} + a_{11}), Q_k(k, a_k + a_{k+1})$

에 대하여 직선 $Q_{10}Q_k$ 의 기울기가 $2d$ 이고 두 직선 $Q_{10}Q_k,$

$Q_{10}P_{12}$ 는 서로 수직이므로

$$2d \times \frac{a_{12} - (a_{10} + a_{11})}{12 - 10} = -1$$

$$a_{12} - (a_{10} + a_{11}) = -\frac{1}{d}$$

$$(a_1 + 11d) - \{(a_1 + 9d) + (a_1 + 10d)\} = -\frac{1}{d}$$

$$-a_1 - 8d = -\frac{1}{d}$$

$$8d^2 + a_1d - 1 = 0$$

$d > 0$ 이므로

$$d = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 32}}{16} \dots\dots ㉡$$

첫째항이 정수이고 모든 항이 유리수이므로 공차 d 는 유리수이다.

a_1 이 정수이므로 $a_1^2 + 32$ 는 자연수이고 ㉡에서 $\sqrt{a_1^2 + 32}$ 는 유리수이다.

그러므로 자연수 l 에 대하여 $a_1^2 + 32 = l^2$ 으로 놓을 수 있다.

이때

$$d = \frac{-a_1 + l}{16}$$

이고 $d > 0$ 이므로 $l - a_1 > 0$ 이다.

$$l^2 - a_1^2 = 32 \text{에서}$$

$$(l - a_1)(l + a_1) = 32$$

따라서 l, a_1, d 는 다음 표와 같은 경우가 있다.

$l - a_1$	$l + a_1$	l	a_1	d
1	32	×	×	×
2	16	9	7	$\frac{1}{8}$
4	8	6	2	$\frac{1}{4}$
8	4	6	-2	$\frac{1}{2}$
16	2	9	-7	1
32	1	×	×	×

$b_{10} = a_{10} + a_{11} = (a_1 + 9d) + (a_1 + 10d) = 2a_1 + 19d$ 이므로 각 경우에서 b_{10} 은

$$\frac{131}{8}, \frac{35}{4}, \frac{11}{2}, 5$$

이다.

따라서 b_{10} 의 최댓값 $M = \frac{131}{8}$, 최솟값 $m = 5$ 이므로

$$M + m = \frac{131}{8} + 5 = \frac{171}{8}$$

㉢

3 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 모든 항이 서로 다르므로

$a_1 \neq 0, r \neq 0, r \neq 1, r \neq -1$ 이다. ㉠

수열 $\{a_n^2\}$ 은 모든 항이 양수이고 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$|r| > 1$ 이면 n 의 값이 커질 때 a_n^2 의 값이 커지고,

$0 < |r| < 1$ 이면 n 의 값이 커질 때 a_n^2 의 값이 작아진다.

따라서 $a_1 = a_{10}^2, a_2 = a_9^2$ 또는 $a_1 = a_1^2, a_2 = a_2^2$ 이므로

$$\frac{a_1}{a_2} = r^2 \text{ 또는 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{r^2}$$

수열 $\{(-1)^n a_n\}$ 은 공비가 $-r$ 인 등비수열이다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$(-1)^{2n-1} a_{2n-1} = -a_1 r^{2n-2}, (-1)^{2n} a_{2n} = a_1 r^{2n-1} \dots\dots ㉡$$

이므로 $r > 0$ 이면 부호가 양, 음 또는 음, 양으로 교대로 바뀌어 나타나고, $r < 0$ 이면 모든 항이 양수이거나 모든 항이 음수이다.

$r > 0$ 이면 부호가 양, 음 또는 음, 양으로 교대로 바뀌어 나타나고 β_1, β_2 는 양수이므로

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = r^2 \text{ 또는 } \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{1}{r^2}$$

이때 ㉠인 r 에 대하여 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2$ 을 만족시키지 않는다.

그러므로 $r < 0$ 이다.

또한 $r < 0$ 일 때, ㉡에서 $a_1 > 0$ 이면 모든 항이 음수이므로 $\beta_2 < 0$ 이 되어 $\beta_2 = 8$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_1 < 0$ 이다.

(i) $a_1 < 0, -1 < r < 0$ 일 때

$$\alpha_1 = a_1^2, \alpha_2 = a_2^2 = a_1^2 r^2$$

$$\beta_1 = (-1)^1 a_1 = -a_1, \beta_2 = (-1)^2 a_2 = a_1 r$$

$$\beta_2 = 8 \text{에서 } a_1 r = 8 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} = 4 \text{에서}$$

$$\frac{a_1^2 - a_1^2 r^2}{-a_1 + a_1 r} = 4$$

$$\frac{a_1^2(1-r)(1+r)}{-a_1(1-r)} = 4$$

$$-a_1(1+r) = 4$$

$$-a_1 - a_1 r = 4 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣에서

$$a_1 = -12, r = -\frac{2}{3}$$

(ii) $a_1 < 0, r < -1$ 일 때

$$\alpha_1 = a_{10}^2 = a_1^2 r^{18}, \alpha_2 = a_9^2 = a_1^2 r^{16}$$

$$\beta_1 = (-1)^{10} a_{10} = a_1 r^9, \beta_2 = (-1)^9 a_9 = -a_1 r^8$$

$$b_1 = -a_1 r^9, r' = \frac{1}{r} \text{이라 하면}$$

$$\alpha_1 = b_1^2, \alpha_2 = b_1^2 (r')^2, \beta_1 = -b_1, \beta_2 = b_1 r'$$

이므로 (i)에 의하여

$$b_1 = -a_1 r^9 = -12, r' = \frac{1}{r} = -\frac{2}{3}$$

이때 $a_1 = 12 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^9$ 이므로 a_1 이 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$$a_1 = -12, r = -\frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \alpha_1 \times \beta_3 &= a_1^2 \times (-a_1 r^2) \\ &= -a_1 \times (a_1 r)^2 \\ &= 12 \times 8^2 \\ &= 768 \end{aligned}$$

답 768

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제

본문 87~97쪽

1 ①	2 80	3 ④	4 ①	5 58
6 ②	7 ③	8 89	9 ②	10 503
11 ③				

1 $\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 4$ 에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^9 (b_k + 1) \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^9 b_k + \sum_{k=1}^9 1$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k - \sum_{k=1}^9 b_k = 9 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\left(\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^9 a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^9 b_k\right) = 4 - 9$$

$$\text{따라서 } a_{10} - b_{10} = -5$$

답 ①

2 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a_1 + 2d = 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \frac{8(2a_1 + 7d)}{2} = 44 \text{에서}$$

$$2a_1 + 7d = 11 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a_1 = 2, d = 1$$

그러므로 $a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n+1$

이때 수열 $\{a_{2n}\}$ 도 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^8 a_{2k} = \frac{8(a_2 + a_{16})}{2} = \frac{8(3+17)}{2} = 80$$

답 80

3 $\sum_{k=1}^8 \frac{k^3 - k}{k+1} = \sum_{k=1}^8 \frac{k(k+1)(k-1)}{k+1}$

$$= \sum_{k=1}^8 (k^2 - k)$$

$$= \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - \frac{8 \times 9}{2}$$

$$= 204 - 36 = 168$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 4 \quad \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{(-1)^{2k-1} \times (2k-1)^2 + (-1)^{2k} \times (2k)^2\} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{-(2k-1)^2 + (2k)^2\} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} (4k-1) \\
 &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 1 \times 10 \\
 &= 220 - 10 = 210
 \end{aligned}$$

답 ①

5 이차방정식 $n(n+2)x^2 - x - 2 = 0$ 의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{n(n+2)} \\
 \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
 &= \frac{29}{45}
 \end{aligned}$$

따라서 $90 \times \sum_{k=1}^8 a_k = 90 \times \frac{29}{45} = 58$

답 58

$$\begin{aligned}
 6 \quad \sum_{k=1}^4 \frac{5}{a_{2k} a_{2k+2}} &= \sum_{k=1}^4 \frac{5}{a_{2k+2} - a_{2k}} \left(\frac{1}{a_{2k}} - \frac{1}{a_{2k+2}} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^4 \frac{5}{2d} \left(\frac{1}{a_{2k}} - \frac{1}{a_{2k+2}} \right) \\
 &= \frac{5}{2d} \left\{ \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} \right) + \left(\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_8} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{a_8} - \frac{1}{a_{10}} \right) \right\} \\
 &= \frac{5}{2d} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{10}} \right) \\
 &= \frac{5}{2d} \left(\frac{1}{3+d} - \frac{1}{3+9d} \right) \\
 &= \frac{5}{2d} \times \frac{8d}{(3+d)(3+9d)} \\
 &= \frac{20}{(3+d)(3+9d)} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9d^2 + 30d - 11 &= 0 \\
 (3d-1)(3d+11) &= 0 \\
 d > 0 \text{ 이므로 } d &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

7 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = a_n - 4$ 를 만족시키므로 공차가 -4 인 등차수열이다.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 21 \text{ 이므로} \\
 a_n &= 21 + (n-1) \times (-4) = -4n + 25 \\
 a_m > 0 \text{ 에서}
 \end{aligned}$$

$$-4m + 25 > 0, m < \frac{25}{4}$$

따라서 자연수 m 은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 모든 m 의 값의 합은

$$\frac{6 \times 7}{2} = 21$$

답 ③

8 조건 (나)에서

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{a_{n+1} - a_n} = 3$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = 3$$

$$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

$$a_2 = \frac{3}{2} a_1 \text{ 이고 조건 (가)에서 } a_2 - a_1 = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{2} a_1 - a_1 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$\text{그러므로 } a_5 = 2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{81}{8}$$

따라서 $p=8, q=81$ 이므로

$$p+q=8+81=89$$

답 89

9 $a_n + a_{n+1} = 2n + 1 \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 에 $n=3$ 을 대입하면

$$a_3 + a_4 = 7$$

두 식 $a_3 - a_4 = 1, a_3 + a_4 = 7$ 에서 $a_3 = 4, a_4 = 3$

$\textcircled{1}$ 에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_2 + a_3 = 5, a_2 = 5 - a_3 = 1$$

㉠에 $n=1$ 을 대입하면
 $a_1 + a_2 = 3, a_1 = 3 - a_2 = 2$

답 ②

10 $(a_{n+1} - a_n)^2 - (a_{n+1} - a_n) - 2 = 0$ 에서
 $(a_{n+1} - a_n - 2)(a_{n+1} - a_n + 1) = 0$
 $a_{n+1} - a_n - 2 = 0$ 또는 $a_{n+1} - a_n + 1 = 0$
 $a_{n+1} = a_n + 2$ 또는 $a_{n+1} = a_n - 1 \dots\dots ㉠$
 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 최댓값 M 은 첫째항 $a_1 = 4$ 이고 모든 자연수 n 에
 대하여 $a_{n+1} = a_n + 2$, 즉 공차가 2인 등차수열일 때이므로
 $M = \frac{20(2 \times 4 + 19 \times 2)}{2} = 460$
 ㉠을 만족시키면서 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여
 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값이 최소가 되도록 첫째항부터 나열하면
 4, 3, 2, 1, 3, 2, 1, ...
 이므로
 $m = 4 + 3 + (2 + 1 + 3) \times 6 = 43$
 따라서 $M + m = 460 + 43 = 503$

답 503

11 (i) $n=2$ 일 때
 (좌변) $= \sum_{k=1}^2 \sqrt{k} \times \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$
 $= (1 + \sqrt{2}) \times (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$
 $= 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$
 (우변) $= 2^2 = 4$
 이므로 (*)이 성립한다.
 (ii) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
 $\sum_{k=1}^m \sqrt{k} \times \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} > m^2$ 이므로
 $\sum_{k=1}^{m+1} \sqrt{k} \times \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$
 $= \left(\sum_{k=1}^m \sqrt{k} + \sqrt{m+1} \right) \times \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \right)$
 $= \sum_{k=1}^m \sqrt{k} \times \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}} \right) + 1$
 $> m^2 + 1 + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}} \right)$
 이때
 $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}} = \left(\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{m+1}} - \frac{\sqrt[4]{m+1}}{\sqrt[4]{k}} \right)^2 + 2$ 이고
 $k < m+1$ 이므로

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}} = \left(\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{m+1}} - \frac{\sqrt[4]{m+1}}{\sqrt[4]{k}} \right)^2 + 2 > 2$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sqrt{k} \times \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$> m^2 + 1 + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}} \right)$$

$$> m^2 + 1 + \sum_{k=1}^m [2]$$

$$= m^2 + 1 + 2m$$

$$= (m+1)^2$$

즉, $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.
 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 (가)에 알맞은 식 $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m+1}} + \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{k}}$ 에
 $k=4, m=8$ 을 대입한 값은
 $p = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$
 이고 $q=2$ 이므로
 $p+q = \frac{13}{6} + 2 = \frac{25}{6}$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 98~99쪽

1 ⑤	2 ③	3 ③	4 ④	5 7
6 ⑤	7 ①	8 24		

1 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + 2a_k + 1)$
 $= \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1$
 $= 8 + 2 \times 5 + 1 \times 10 = 28$

답 ⑤

2 $\sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$
 $\sum_{k=1}^6 ak = a \sum_{k=1}^6 k = a \times \frac{6 \times 7}{2} = 21a$
 $\sum_{k=1}^6 k^2 = \sum_{k=1}^6 ak$ 에서
 $91 = 21a$
 따라서 $a = \frac{13}{3}$

답 ③

3
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$

$$= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots$$

$$+ (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+1} - 1 \geq 6$$

$$\sqrt{n+1} \geq 7$$

$$n+1 \geq 49$$

$$n \geq 48$$
따라서 n 의 최솟값은 48이다.

답 ③

4
$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= a_{n+1} - a_1$$

$$= a_{n+1} - 3$$
이므로 $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = 2^n + n$ 에서
$$a_{n+1} - 3 = 2^n + n$$

$$a_{n+1} = 2^n + n + 3$$
 $n=7$ 을 대입하면
$$a_8 = 2^7 + 7 + 3 = 138$$

답 ④

5 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} - a_n = 3$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 3인 등차수열이다.
 이때 $a_5 = a_1 + 4 \times 3 = a_1 + 12$
 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.
 이때 $b_5 = b_1 \times 3^4 = 81b_1$
 $a_1 = b_1$, $a_5 = b_5$ 이므로
 $a_1 + 12 = 81a_1$
 $80a_1 = 12$
 $a_1 = \frac{3}{20}$
 따라서
 $a_2 = a_1 + 3 = \frac{3}{20} + 3 = \frac{63}{20}$,
 $b_2 = b_1 \times 3 = \frac{3}{20} \times 3 = \frac{9}{20}$
 이므로 $\frac{a_2}{b_2} = 7$

답 7

6 $a_2 = \frac{1}{2}$ 이므로
 $a_3 = -a_2 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$
 (i) $0 < a_1 \leq 1$ 일 때
 $a_2 = -a_1 + 2$ 이므로
 $\frac{1}{2} = -a_1 + 2$, $a_1 = \frac{3}{2}$
 그런데 이 값은 $0 < a_1 \leq 1$ 을 만족시키지 않는다.
 (ii) $1 < a_1 < 2$ 일 때
 $a_2 = 2(a_1 - 1)$ 이므로
 $\frac{1}{2} = 2(a_1 - 1)$, $a_1 = \frac{5}{4}$
 (i), (ii)에서 $a_1 = \frac{5}{4}$
 따라서 $a_1 + a_3 = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{11}{4}$

답 ⑤

7 $a_2 = \frac{1}{a_1}$, $a_3 = 2a_2 = \frac{2}{a_1}$, $a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{a_1}{2}$,
 $a_5 = 2a_4 = a_1$, $a_6 = a_2$, ...
 이므로 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_{4n-3} = a_1$, $a_{4n-2} = \frac{1}{a_1}$, $a_{4n-1} = \frac{2}{a_1}$, $a_{4n} = \frac{a_1}{2}$
 $a_9 = a_1$, $a_{12} = \frac{a_1}{2}$ 이고 $a_9 + a_{12} = 6$ 이므로
 $a_1 + \frac{a_1}{2} = 6$
 $a_1 = 4$
 따라서
 $\sum_{k=1}^{16} a_k = 4 \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$
 $= 4 \times \left(a_1 + \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1} + \frac{a_1}{2} \right)$
 $= 4 \times \left(4 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{2} \right)$
 $= 27$

답 ①

8 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 모든 항이 서로 다르므로 $r \neq 0$, $r \neq 1$, $r \neq -1$
 모든 자연수 n 에 대하여
 $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^2 = r^2$
 이므로 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a_1^2 이고 공비가 r^2 인 등비수열이다.

또한 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{a_{2n+1}-a_{2n+2}}{a_{2n-1}-a_{2n}} = \frac{r^2(a_{2n-1}-a_{2n})}{a_{2n-1}-a_{2n}} = r^2$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a_1-a_2=a_1(1-r)$

이고 공비가 r^2 인 등비수열이다.

$$\sum_{k=1}^5 a_k^2 = 2 \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} - a_{2k}) \text{에서}$$

$$\frac{a_1^2 \{1 - (r^2)^5\}}{1 - r^2} = 2 \times \frac{a_1(1-r) \{1 - (r^2)^5\}}{1 - r^2}$$

$$\frac{36(1-r^{10})}{1-r^2} = 2 \times \frac{6(1-r)(1-r^{10})}{1-r^2}$$

$$36 = 12(1-r)$$

$$1-r=3$$

$$r=-2$$

$$\text{따라서 } a_3 = a_1 r^2 = 6 \times (-2)^2 = 24$$

답 24

Level 2

기본 연습

본문 100~101쪽

- 1 ④ 2 110 3 ② 4 ④ 5 ④
6 ② 7 ③

1
$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^9 \frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)} - \sum_{k=1}^9 \frac{(k-1)^2}{k^2(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{(k+1)^2 - (k-1)^2}{k^2(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{4k}{k^2(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{4}{k(k+1)} \\ &= 4 \times \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 4 \times \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= 4 \times \left(1 - \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

답 ④

2
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 3^n + 6 \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$\frac{1}{a_1} = 3+6=9, \text{ 즉 } a_1 = \frac{1}{9}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\frac{1}{a_n} = (3^n + 6) - (3^{n-1} + 6)$$

$$= 3^{n-1} \times (3-1)$$

$$= 2 \times 3^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

(i), (ii)에서 $a_1 = \frac{1}{9}, a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} (n \geq 2)$ 이므로

$$\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + \sum_{k=2}^5 a_k$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{6} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^4 \right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{20}{81} = \frac{29}{81}$$

따라서 $p=81, q=29$ 이므로

$$p+q=81+29=110$$

답 110

3

$|a_5| = |a_6|$ 에서

$$a_5 = a_6 \text{ 또는 } a_5 = -a_6$$

공차가 음수이므로 $a_5 = -a_6$

이때

$$a_5 = a_1 + 4 \times (-2) = a_1 - 8, a_6 = a_1 + 5 \times (-2) = a_1 - 10$$

..... ㉠

이므로 $a_5 = -a_6$ 에서

$$a_1 - 8 = -a_1 + 10$$

$$a_1 = 9$$

㉠에서 $a_5 = 1, a_6 = -1$ 이므로

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > 0 > a_6 > a_7 > a_8 > \dots$$

이고, $|a_1| = |a_{10}|, |a_2| = |a_9|, |a_3| = |a_8|,$

$|a_4| = |a_7|, |a_5| = |a_6|$ 이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{\sqrt{|a_{k+1}|} + \sqrt{|a_k|}}$$

$$= 2 \times \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\sqrt{|a_{k+1}|} + \sqrt{|a_k|}} + \frac{1}{\sqrt{|a_6|} + \sqrt{|a_5|}}$$

$$= 2 \times \sum_{k=1}^4 \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})} + \frac{1}{2\sqrt{a_5}}$$

$$= 2 \times \sum_{k=1}^4 \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} + \frac{1}{2\sqrt{a_5}}$$

$$= 2 \times \sum_{k=1}^4 \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{-2} + \frac{1}{2\sqrt{a_5}}$$

$$= \sum_{k=1}^4 (\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}) + \frac{1}{2\sqrt{a_5}}$$

$$= \{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4}) + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_5})\} + \frac{1}{2\sqrt{a_5}}$$

$$= \sqrt{a_1} - \sqrt{a_5} + \frac{1}{2\sqrt{a_5}}$$

$$= 3 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

4 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}}$$

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}} = \frac{S_{n+1}}{S_n}$$

$$S_n S_{n+1} - S_n^2 = S_n S_{n+1} - S_{n-1} S_{n+1}$$

$$S_n^2 = S_{n-1} S_{n+1}$$

그러므로 수열 $\{S_n\}$ 은 등비수열이다.

$$S_1 = a_1 = 1, S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2 \text{에서}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = 2 \text{이므로}$$

$$S_n = S_1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2}$$

$$\text{따라서 } a_8 = 2^6 = 64$$

답 ②

5 $a_n \leq 0$ 이면 $a_{n+1} = -a_n + 4$ 에서

$$a_n = -a_{n+1} + 4 \quad \dots \text{㉠}$$

$$a_n > 0 \text{이면 } a_{n+1} = a_n - 2 \text{에서}$$

$$a_n = a_{n+1} + 2 \quad \dots \text{㉡}$$

$$a_4 \leq 0 \text{이면 } a_5 = -a_4 + 4, a_4 + a_5 = 4 \text{가 되어}$$

$a_4 + a_5 = 8$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$a_4 > 0 \text{이면 } a_5 = a_4 - 2 \text{이므로}$$

$$a_4 + a_5 = a_4 + (a_4 - 2) = 8, a_4 = 5$$

$$a_4 = 5 \text{이면}$$

$$\text{㉠에서 } a_3 = -1, \text{㉡에서 } a_3 = 7$$

$$a_3 = -1 \text{이면}$$

㉠에서 $a_2 = 5$ 이고 $a_2 \leq 0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{㉡에서 } a_2 = 1$$

$$a_3 = 7 \text{이면}$$

$$\text{㉠에서 } a_2 = -3, \text{㉡에서 } a_2 = 9$$

그러므로 $a_2 = -3$ 또는 $a_2 = 1$ 또는 $a_2 = 9$ 이다.

$$a_2 = -3 \text{이면}$$

㉠에서 $a_1 = 7$ 이고 $a_1 \leq 0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_1 = -1$ 이고 $a_1 > 0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

답 ④

$a_2 = 1$ 이면

㉠에서 $a_1 = 3$ 이고 $a_1 \leq 0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{㉡에서 } a_1 = 3$$

$a_2 = 9$ 이면

$$\text{㉠에서 } a_1 = -5$$

$$\text{㉡에서 } a_1 = 11$$

따라서 $a_1 = -5$ 또는 $a_1 = 3$ 또는 $a_1 = 11$ 이므로 모든 a_1 의 값의 합은

$$-5 + 3 + 11 = 9$$

답 ④

6 $\sum_{k=1}^6 k^2(a_k - a_{k+1})$

$$= 1^2(a_1 - a_2) + 2^2(a_2 - a_3) + 3^2(a_3 - a_4) + 4^2(a_4 - a_5) + 5^2(a_5 - a_6) + 6^2(a_6 - a_7)$$

$$= a_1 + (2^2 - 1^2)a_2 + (3^2 - 2^2)a_3 + (4^2 - 3^2)a_4 + (5^2 - 4^2)a_5 + (6^2 - 5^2)a_6 - 6^2a_7$$

$$= a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 7a_4 + 9a_5 + 11a_6 - 36a_7$$

$$= \sum_{k=1}^6 \left\{ (2k-1) \times \frac{k}{2k-1} \right\} - 36a_7$$

$$= \sum_{k=1}^6 k - 36a_7$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^6 k - 36a_7 = pa_7 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^6 k = (p+36) \times a_7$$

$$a_n = \frac{n}{2n-1} \text{에서 } a_7 = \frac{7}{13} \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^6 k = (p+36) \times \frac{7}{13}$$

$$\frac{6 \times 7}{2} = (p+36) \times \frac{7}{13}$$

$$p+36=39$$

$$\text{따라서 } p=3$$

답 ②

7 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표를 각각 a_n, b_n 이라 하면 점 P_n 은 x 축 위의 점이고 점 Q_n 은 곡선

$$y = \sqrt{x} \quad (x > 0) \text{ 위의 점이므로}$$

$$P_n(a_n, 0), Q_n(b_n, \sqrt{b_n})$$

두 점 O, Q_n 은 점 P_n 을 중심으로 하는 원 위에 있으므로

$$\overline{OP_n} = \overline{P_nQ_n} \text{에서}$$

$$a_n = \sqrt{(b_n - a_n)^2 + b_n}$$

$$a_n^2 = b_n^2 - 2a_nb_n + a_n^2 + b_n$$

$$b_n^2 = (2a_n - 1)b_n$$

$b_n > 0$ 이므로

$$b_n = \boxed{2} \times a_n - 1$$

두 점 P_n, P_{n+1} 은 점 Q_n 을 중심으로 하는 원 위에 있으므로
현의 성질에 의하여

$$a_{n+1} - a_n = 2(b_n - a_n)$$

$$a_{n+1} - a_n = 2\{(2a_n - 1) - a_n\}$$

$$a_{n+1} = \boxed{3} \times a_n - 2$$

삼각형 ABP_n 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times \overline{AP_n} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times (a_n - 1) \times 2 = a_n - 1$$

$$S_{n+1} = a_{n+1} - 1 = (3a_n - 2) - 1 = 3(a_n - 1) = 3S_n$$

에서 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 3$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.

$$S_1 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2 \text{이므로}$$

$$S_n = \boxed{2 \times 3^{n-1}}$$

따라서 $p=2, q=3, f(n)=2 \times 3^{n-1}$ 이므로

$$p+q+f(6) = 2+3+2 \times 3^5 = 2+3+486 = 491$$

답 ③

Level 3

실력 완성

본문 102쪽

1 17 2 ④ 3 101

1 자연수 m 에 대하여 $a_m = 0 < m$ 이므로

$$a_{m+1} = m + a_m = m$$

$$a_{m+1} = m < m+1 \text{이므로}$$

$$a_{m+2} = (m+1) + a_{m+1} = 2m+1$$

$$2m+1 - (m+2) = m-1 \geq 0, \text{ 즉 } 2m+1 \geq m+2 \text{이므로}$$

$$a_{m+3} = a_{m+2} - p = 2m+1-p$$

$2m+1-p - (m+3) = m-2-p$ 이므로 다음과 같은 경우로 나누어 구한다.

(i) $m-2 < p$, 즉 $2m+1-p < m+3$ 일 때

$$a_{m+4} = (m+3) + a_{m+3} = 3m+4-p$$

$$a_{m+4} = 0 \text{에서}$$

$$3m+4-p=0$$

$$p=3m+4$$

$$p=3m+4 \leq 10 \text{에서 } m \leq 2$$

$$m-2 < p \text{에서 } m-2 < 3m+4, m > -3$$

따라서 조건을 만족시키는 m 의 값은 1, 2이고,

$m=1$ 이면 $p=7, m=2$ 이면 $p=10$ 이다.

(ii) $m-2 \geq p$, 즉 $2m+1-p \geq m+3$ 일 때

$$a_{m+4} = a_{m+3} - p = 2m+1-2p$$

$$a_{m+4} = 0 \text{에서}$$

$$2m+1-2p=0$$

$$2p=2m+1$$

이 등식을 만족시키는 두 자연수 p, m 은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 p 의 값은 7, 10이므로 구하는 모든 p 의 값의 합은

$$7+10=17$$

답 17

2 $2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} < 1 - \sin \frac{\pi x}{2}$ 에서

$$2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi x}{2} - 1 < 0$$

$$\left(2 \sin \frac{\pi x}{2} - 1\right) \left(\sin \frac{\pi x}{2} + 1\right) < 0$$

$$-1 < \sin \frac{\pi x}{2} < \frac{1}{2}$$

자연수 n 에 대하여 n 이 홀수이면

$$\sin \frac{\pi n}{2} = 1 \text{ 또는 } \sin \frac{\pi n}{2} = -1$$

이므로 $n \notin A$ 이고 $f(n) = -1$ 이다.

또 n 이 짝수이면

$$\sin \frac{\pi n}{2} = 0$$

이므로 $n \in A$ 이고 $f(n) = 2$ 이다.

그러므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) &= \sum_{k=1}^{10} 4k \times 2 = 8 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 8 \times \frac{10 \times 11}{2} = 440 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, 모든 자연수 k 에 대하여

$$(4k-3) \times f(4k-3) = -(4k-3) = -4k+3 < 0$$

$$(4k-3) \times f(4k-3) + (4k-2) \times f(4k-2)$$

$$= -(4k-3) + 2(4k-2) = 4k-1$$

$$\{(4k-3) \times f(4k-3) + (4k-2) \times f(4k-2)\}$$

$$+ (4k-1) \times f(4k-1)$$

$$= (4k-1) - (4k-1) = 0$$

$$\{(4k-3) \times f(4k-3) + (4k-2) \times f(4k-2)$$

$$+ (4k-1) \times f(4k-1)\} + 4k \times f(4k)$$

$$= 0 + 2 \times 4k = 8k \quad \dots \textcircled{2}$$

이고 $4k-1 < 8k$ 이므로 $l \leq 4n$ 인 모든 자연수 l 에 대하여

$$\sum_{k=1}^l kf(k) \leq \sum_{k=1}^n 4kf(4k)$$

그러므로 $\sum_{k=1}^m kf(k) \leq \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$ 에서 $m \leq 40$ 이면 조건을 만족시킨다.

또한 ㉠에서

$$\sum_{k=1}^{40} kf(k) = \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

한편,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{41} kf(k) &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41) \\ &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) - 41 < \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{42} kf(k) &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41) + 42f(42) \\ &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 43 > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{43} kf(k) &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41) + 42f(42) + 43f(43) \\ &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 0 = \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{44} kf(k) &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 41f(41) + 42f(42) + 43f(43) \\ &\quad + 44f(44) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 0 + 88 > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{45} kf(k) &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 44f(44) + 45f(45) \\ &= \sum_{k=1}^{40} kf(k) + 43 > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k) \end{aligned}$$

$n \geq 45$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n kf(k) \geq \sum_{k=1}^{45} kf(k) > \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$$

그러므로 $\sum_{k=1}^m kf(k) \leq \sum_{k=1}^{10} 4kf(4k)$ 를 만족시키는 자연수 m

의 최댓값 $M = 43$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\sum_{k=1}^M kf(k) = \sum_{k=1}^{43} kf(k) = 440$$

$$\text{따라서 } M + \sum_{k=1}^M kf(k) = 43 + 440 = 483$$

3 정삼각형 $A_n B_n C_n$ 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.

삼각형 $A_{n+1} B_n D_n$ 에서 $\angle D_n A_{n+1} B_n = \angle D_n B_n A_{n+1} = \frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 $A_{n+1} B_n D_n$ 은 정삼각형이다.

선분 $B_n C_n$ 을 2 : 5로 내분하는 점 D_n 이므로

$$\overline{B_n D_n} = \overline{A_{n+1} D_n} = \frac{2}{7} a_n, \quad \overline{C_n D_n} = \frac{5}{7} a_n$$

$$\overline{D_n C_{n+1}} = a_{n+1} - \frac{2}{7} a_n$$

두 정삼각형 $A_{n+1} B_n D_n$, $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ 의 넓이는 각각

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 a_n^2, \quad \frac{\sqrt{3}}{4} a_{n+1}^2 \text{ 이고,}$$

삼각형 $C_n D_n C_{n+1}$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{C_n D_n} \times \overline{D_n C_{n+1}} \times \sin(\angle C_n D_n C_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} a_n \times \left(a_{n+1} - \frac{2}{7} a_n\right) \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{5}{7} a_n \left(a_{n+1} - \frac{2}{7} a_n\right)$$

세 삼각형 $A_{n+1} B_n D_n$, $C_n D_n C_{n+1}$, $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ 의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 \times (\text{삼각형 } C_n D_n C_{n+1} \text{의 넓이})$$

$$= (\text{삼각형 } A_{n+1} B_n D_n \text{의 넓이})$$

$$+ (\text{삼각형 } A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} \text{의 넓이})$$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{5}{7} a_n \left(a_{n+1} - \frac{2}{7} a_n\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2}{7}\right)^2 a_n^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} a_{n+1}^2$$

$$49a_{n+1}^2 - 70a_n a_{n+1} + 24a_n^2 = 0$$

$$(7a_{n+1} - 4a_n)(7a_{n+1} - 6a_n) = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{4}{7} a_n \text{ 또는 } a_{n+1} = \frac{6}{7} a_n$$

$$\overline{A_{n+1} B_n} = \overline{A_{n+1} D_n} = \frac{2}{7} a_n \text{ 이고}$$

$$\overline{B_n B_{n+1}} = \overline{D_n C_{n+1}} = a_{n+1} - \frac{2}{7} a_n \text{ 이므로}$$

$a_{n+1} = \frac{4}{7} a_n$ 이면 $\overline{B_n B_{n+1}} = \frac{2}{7} a_n$ 이 되어 조건 (다)를 만족시키지 않고,

$a_{n+1} = \frac{6}{7} a_n$ 이면 $\overline{B_n B_{n+1}} = \frac{4}{7} a_n$ 이 되어 조건 (다)를 만족시킨다.

그러므로 $a_{n+1} = \frac{6}{7} a_n$ 이다.

이때 $a_1 = \overline{A_1 B_1} = 1$ 이므로

$$a_n = 1 \times \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

$$\overline{B_n B_{n+1}} = \frac{4}{7} a_n = \frac{4}{7} \times \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

따라서

$$\overline{A_1 B_3} = \overline{A_1 B_1} + \overline{B_1 B_2} + \overline{B_2 B_3}$$

$$= 1 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{6}{7}$$

$$= \frac{101}{49}$$

$$\text{이므로 } 49 \times \overline{A_1 B_3} = 101$$