정답과 풀이

01 수열의 극한

유제 본문 5~9쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ② 4 ③ 5 ④

Level 1 기초 연습 본문 10쪽

1 ① 2 ① 3 ③ 4 ②

Level 2 기본 연습 본문 11쪽

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ③

Level 3 실력 완성 본문 12쪽

1 ① 2 ② 3 29

02 급수

유제 본문 15~19쪽

1 ③ 2 ② 3 ② 4 371 5 ③

Level 1 기초 연습 본문 20쪽

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ①

Level 2 기본 연습 본문 21쪽

1 ① 2 ② 3 ④

Level 3 실력 완성 본문 22~23쪽

1 ② 2 67 3 240

03 여러 가지 함수의 미분

유제 본문 27~35쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ④ 4 ② 5 7
6 ④ 7 6 8 ④ 9 8 10 ③

Level 1 기초 연습 본문 36~37쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ④ 5 65
6 ① 7 ④ 8 10 9 ① 10 ③

Level 2 기본 연습 본문 38~39쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 ③ 5 ⑤
6 15 7 22 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 40쪽

1 144 2 ① 3 17

04 여러 가지 미분법

유제 본문 43~51쪽

1 ② 2 ④ 3 ① 4 ⑤ 5 ②
6 ④ 7 ③ 8 ③ 9 ① 10 ③

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ③ 2 ① 3 ④ 4 ② 5 ④
6 ② 7 ③ 8 ③

Level 2 기본 연습 본문 54~55쪽

1 ① 2 17 3 ② 4 ② 5 ③
6 ② 7 ⑤ 8 ②

Level 3 실력 완성 본문 56쪽

1 ② 2 ① 3 ④

05 도함수의 활용

유제 본문 59~67쪽

1 ② 2 ② 3 ③ 4 ③ 5 ②
6 ② 7 ① 8 ③ 9 ①

Level 1 기초 연습 본문 68~69쪽

1 ④ 2 ③ 3 ④ 4 ③ 5 ①
6 ② 7 ③ 8 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 70~71쪽

1 ③ 2 ③ 3 ① 4 ① 5 108
6 ① 7 11 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 72쪽

1 40 2 ③ 3 16

06 여러 가지 적분법

유제 본문 75~81쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ④
6 ④ 7 ① 8 ③

Level 1 기초 연습 본문 82쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 ①

Level 2 기본 연습 본문 83쪽

1 ① 2 ③ 3 ⑤ 4 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 84쪽

1 859 2 ④ 3 32

07 정적분의 활용

유제 본문 87~95쪽

1 1 2 ② 3 ② 4 ③ 5 ④
6 ③ 7 2 8 ② 9 ②

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 51 2 ⑤ 3 ④ 4 ③ 5 ③
6 8 7 ⑤ 8 ① 9 ③ 10 3

Level 2 기본 연습 본문 98~99쪽

1 ③ 2 2 3 ③ 4 12 5 11
6 10 7 ⑤ 8 3

Level 3 실력 완성 본문 100쪽

1 10 2 4 3 2

01 수열의 극한

유제 본문 5~9쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ② 4 ③ 5 ④

1 ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여

$(a_n)^2=\{(-1)^n\}^2$
$=\{(-1)^2\}^n=1^n=1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n)^2=\lim_{n\to\infty}1=1$ (수렴)

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+a_{n+1}=(-1)^n+(-1)^{n+1}$
$=(-1)^n\{1+(-1)\}$
$=(-1)^n\times 0=0$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}0=0$ (수렴)

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\times a_{n+1}=(-1)^n\times(-1)^{n+1}$
$=(-1)^{2n+1}=-1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n\times a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1$ (수렴)

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\{(3a_n-1)+1\}$
$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)+\frac{1}{3}$
$=\frac{1}{3}\times5+\frac{1}{3}$
$=2$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=7$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\{(2a_n+3b_n)-2a_n\}$
$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)-\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}a_n$
$=\frac{1}{3}\times7-\frac{2}{3}\times2$
$=1$

따라서

$\lim_{n\to\infty}(b_n+4)=\lim_{n\to\infty}b_n+4$
$=1+4$
$=5$

답 ③

3 $|(2n+3)a_n-4n|<a_n+n-1$에서

$-a_n-n+1<(2n+3)a_n-4n<a_n+n-1$

$-a_n-n+1<(2n+3)a_n-4n$에서

$(2n+4)a_n>3n+1$

$a_n>\frac{3n+1}{2n+4}$ …… ㉠

$(2n+3)a_n-4n<a_n+n-1$에서

$(2n+2)a_n<5n-1$

$a_n<\frac{5n-1}{2n+2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{3n+1}{2n+4}<a_n<\frac{5n-1}{2n+2}$

이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{4}{n}}=\frac{3}{2}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}=\frac{5}{2}$

이므로

$\frac{3}{2}\le k\le\frac{5}{2}$

k는 자연수이므로 $k=2$

답 ②

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+5\times\left(\frac{1}{6}\right)^n}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+5\times\left(\frac{1}{6}\right)^n}{\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+5\times\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}\times3^n}{\left\{\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\times3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}}$

$=\dfrac{4+5\times0}{\frac{3}{2}\times0+\frac{2}{3}}$

$=\dfrac{4}{\frac{2}{3}}=6$

답 ③

5 수열 $\left\{\left(\dfrac{x^2+2x+3}{18}\right)^n\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{x^2+2x+3}{18}$이고 공비가 $\dfrac{x^2+2x+3}{18}$인 등비수열이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\dfrac{x^2+2x+3}{18}\le1$

이어야 한다.

(i) $\dfrac{x^2+2x+3}{18}>-1$ ...... ㉠

에서

$x^2+2x+21>0$

이때 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2x+21=(x+1)^2+20>0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $\dfrac{x^2+2x+3}{18}\le1$

에서

$x^2+2x-15\le0$

$(x+5)(x-3)\le0$

$-5\le x\le3$

(i), (ii)에 의하여

$-5\le x\le3$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 x는

$-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 2,\ 3$

이고, 그 개수는 9이다.

답 ④

Level 1 **기초 연습** 본문 10쪽

1 ① 2 ① 3 ③ 4 ②

1 $\lim_{n\to\infty}a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{2a_n-(2a_n-b_n)\}$

$=2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)$

$=2\times3-5=1$

답 ①

2 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이고 공차가 3이므로

$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

$S_n=\dfrac{n\{2\times2+(n-1)\times3\}}{2}$

$=\dfrac{n(3n+1)}{2}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{(a_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(3n+1)}{2}}{(3n-1)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(3n+1)}{2(3n-1)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{1}{n}}{2\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}$

$=\dfrac{3+0}{2\times(3-0)^2}$

$=\dfrac{1}{6}$

답 ①

3 $a\le0$이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-an)=\infty$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $a>0$이고 이때

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-an)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{4n^2+n}-an)(\sqrt{4n^2+n}+an)}{\sqrt{4n^2+n}+an}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(4-a^2)n^2+n}{\sqrt{4n^2+n}+an}$ ...... ㉠

㉠이 수렴하므로 $4-a^2=0$이어야 하고, $a>0$이므로 $a=2$

그러므로

$b=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$

$=\dfrac{1}{2+2}$

$=\dfrac{1}{4}$

따라서

$a+\dfrac{1}{b}=2+4=6$

답 ③

4 (i) $r=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{n+2}+r^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1}{1+1+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=-1$일 때,

수열 $\left\{\frac{r^n+1}{r^{n+2}+r^{n+1}+1}\right\}$을 나열하면

$0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \cdots$

으로 0, 2가 한없이 반복된다. 즉, $\frac{1}{6}$로 수렴하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $|r|<1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{n+2}+r^{n+1}+1}=\frac{0+1}{0+0+1}=1$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $|r|>1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+1}{r^{n+2}+r^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{r^n}}{r^2+r+\frac{1}{r^n}}=\frac{1+0}{r^2+r+0}=\frac{1}{r^2+r}$$

이므로

$\frac{1}{r^2+r}=\frac{1}{6}$

$r^2+r-6=0$

$(r+3)(r-2)=0$

$r=-3$ 또는 $r=2$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 r의 값의 합은

$-3+2=-1$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 11쪽

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ③

1 $\lim_{n\to\infty}a_n=p$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}a_{2n}=p$

$(-1)^n(2a_n+3)=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=q$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}b_{2n}=q$ …… ㉠

이때

$$\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n-1}(2a_{2n-1}+3)\}=\lim_{n\to\infty}(-2a_{2n-1}-3)=-2p-3,$$

$$\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{2n}(2a_{2n}+3)\}=\lim_{n\to\infty}(2a_{2n}+3)=2p+3$$

이고, ㉠에서 $-2p-3=2p+3=q$이므로

$p=-\frac{3}{2},\ q=0$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(4pa_n+q)=\lim_{n\to\infty}(-6a_n)=-6\lim_{n\to\infty}a_n=-6\times\left(-\frac{3}{2}\right)=9$$

답 ④

2 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{(n+1)+(2n+3)}=\sqrt{3n+4}$$

이때 $\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로

$$a_n=\overline{AH}=\frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{n+1}\times\sqrt{2n+3}}{\sqrt{3n+4}}$$

따라서

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\times\sqrt{2n+3}}{\sqrt{3n+4}\times\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\times\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{3+\frac{4}{n}}\times 1}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times 1}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

이므로

$$p^2=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$$

답 ②

3 조건 (가)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{2n^2+1}{n^2} \le \frac{f(n)}{n^2} \le \frac{2n^2+3}{n^2}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2}=2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=2$$

이다.

즉, $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이어야 하므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 모든 자연수 n에 대하여

$2n^2+1\le 2n^2+an+b\le 2n^2+3$

즉, $1\le an+b\le 3$이어야 하므로

$a=0$

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+b\right)=b=\frac{5}{2}$$

따라서 $f(x)=2x^2+\frac{5}{2}$이므로

$$f(1)=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$$

답 ④

4 원점 O에 대하여

$\overline{\mathrm{OA}}=2^n$, $\overline{\mathrm{OB}}=3^n$

이고 직선 AB가 x축에 수직이므로 직각삼각형 OAB에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{9^n-4^n}$

$\overline{\mathrm{AC}}=3^n+2^n$이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BC}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2}\\&=\sqrt{(9^n-4^n)+(3^n+2^n)^2}\\&=\sqrt{2\times 9^n+2\times 6^n}\end{aligned}$$

따라서

$f(n)=\sqrt{2\times 9^n+2\times 6^n}$

이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\times 9^{n+1}+2\times 6^{n+1}}}{\sqrt{2\times 9^n+2\times 6^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{18+12\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt{2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\&=3\end{aligned}$$

답 ③

Level 3 **실력 완성** 본문 12쪽

1 ① **2** ② **3** 29

1 $g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수, $b\neq 0$)이라 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)\times g\left(\frac{1}{n}\right)}{f(n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an+b)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b\right)}{f(n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an+b)(bn^2+an+1)}{n^2f(n)}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $2b$인 이차함수이어야 한다.

$f(x)=2bx^2+cx+d$ (c, d는 상수, $d\neq 0$)이라 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{f(n^2)\times f\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\{g(n)\}^p}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2bn^4+cn^2+d)\left(\frac{2b}{n^4}+\frac{c}{n^2}+d\right)}{(n^2+an+b)^p}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2bn^4+cn^2+d)(dn^4+cn^2+2b)}{n^4(n^2+an+b)^p}\\&=8\end{aligned}$$

에서 $p=2$이어야 하고 $2bd=8$이므로

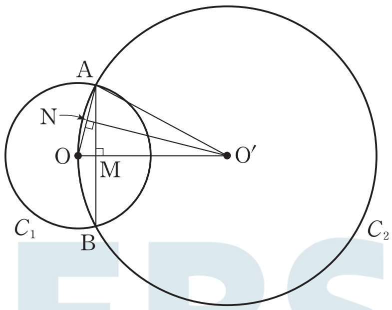
$bd=4$

따라서

$$\begin{aligned}p+f(0)\times g(0)&=2+d\times b\\&=2+4\\&=6\end{aligned}$$

답 ①

2 그림과 같이 원 C_2의 중심을 O′, 두 원 C_1, C_2가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 선분 AB의 중점을 M, 선분 OA의 중점을 N이라 하자.



이때 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{O'M}\perp\overline{AB}$이므로 세 점 O, M, O′은 한 직선 위에 있다.

또 삼각형 O′AO는 $\overline{O'A}=\overline{O'O}=3n-1$인 이등변삼각형이므로 $\overline{O'N}\perp\overline{OA}$이고, 직각삼각형 O′AN에서

$$\overline{O'N}=\sqrt{\overline{O'A}^2-\overline{AN}^2}$$
$$=\sqrt{(3n-1)^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{35}{4}n^2-6n+1}$$

삼각형 O′AO의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{OO'}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{O'N}$$

즉, $\overline{OO'}\times\frac{1}{2}f(n)=\overline{OA}\times\overline{O'N}$이므로

$$f(n)=\frac{2\times\overline{OA}\times\overline{O'N}}{\overline{OO'}}$$
$$=\frac{2n\sqrt{\frac{35}{4}n^2-6n+1}}{3n-1}$$
$$=\frac{n\sqrt{35n^2-24n+4}}{3n-1}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{\sqrt{an^b+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{35n^2-24n+4}}{(3n-1)\sqrt{an^b+1}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

이므로 $a\neq0$, $b=2$이어야 하고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{35n^2-24n+4}}{(3n-1)\sqrt{an^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{35-\frac{24}{n}+\frac{4}{n^2}}}{\left(3-\frac{1}{n}\right)\sqrt{a+\frac{1}{n^2}}}$$
$$=\frac{\sqrt{35}}{3\sqrt{a}}$$

이므로 $\frac{\sqrt{35}}{3\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

에서 $a=5$

따라서 $a+b=5+2=7$

답 ②

3 (ⅰ) $|x|<1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$$
$$=\frac{0-0}{0+0+3}=0$$

(ⅱ) $-2<x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}=0$$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4x^{2n}-x^{2n-1}}{x^{2n}+2x^{2n-1}+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4x-1}{x+2+\frac{3}{x^{2n-1}}}=\frac{4x-1}{x+2}$$

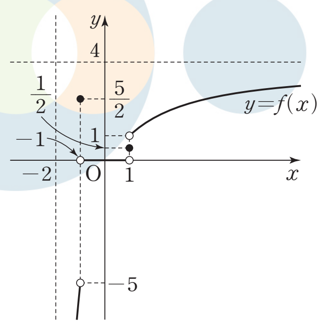
(ⅲ) $x=1$일 때

$$f(1)=\frac{4-1}{1+2+3}=\frac{1}{2}$$

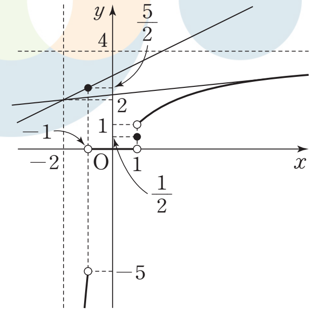
(ⅳ) $x=-1$일 때

$$f(-1)=\frac{4-(-1)}{1+2\times(-1)+3}=\frac{5}{2}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=tx+2t+2$, 즉 $y-2=t(x+2)$는 양의 실수 t의 값에 관계없이 점 $(-2,\ 2)$를 지난다. 그러므로 다음 그림과 같이 직선 $y=tx+2t+2$가 점 $\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$를 지날 때와 곡선 $y=\frac{4x-1}{x+2}$과 접할 때만 조건을 만족시킨다.



(a) 직선 $y=tx+2t+2$가 점 $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$를 지나는 경우

$\frac{5}{2}=-t+2t+2$

에서 $t=\frac{1}{2}$

(b) 직선 $y=tx+2t+2$가 곡선 $y=\frac{4x-1}{x+2}$과 접하는 경우

$tx+2t+2=\frac{4x-1}{x+2}$

에서

$tx^2+2(2t-1)x+4t+5=0$

이 x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2t-1)^2-t(4t+5)=-9t+1=0$

에서 $t=\frac{1}{9}$

(a), (b)에서 조건을 만족시키는 양의 실수 t의 값은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$이고, 그 합은

$\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}$

이다.

따라서 $p+q=18+11=29$

답 29

참고

(a)에서 $t=\frac{1}{2}$이면 직선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x+3$이므로

$\frac{4x-1}{x+2}=\frac{1}{2}x+3$

에서

$x^2+14=0$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으므로 직선 $y=tx+2t+2$가 점 $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$를 지날 때 곡선 $y=\frac{4x-1}{x+2}$과 만나지 않는다.

02 급수

유제 본문 15~19쪽

1 ③ 2 ② 3 ② 4 371 5 ③

1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=p$에서 $\lim_{n\to\infty} S_n=p$이므로

$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=p$

이때

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n} a_k\\&=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n} a_{2k}\\&=\frac{3n^2-n}{n^2+1}+\frac{4n-3}{2n+1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_{2n}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-n}{n^2+1}+\frac{4n-3}{2n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\\&=3+2\\&=5\end{aligned}$$

따라서 $p=5$

답 ③

2 두 직선 $y=x$, $y=\frac{n}{2n+1}x+3$이 만나는 점의 x좌표는

$x=\frac{n}{2n+1}x+3$에서

$x=\frac{3(2n+1)}{n+1}$

이므로

$f(n)=\frac{3(2n+1)}{n+1}$

따라서

$a_1=f(1)=\frac{9}{2}$

이고

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k\\&=\lim_{n\to\infty} f(n)\end{aligned}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n+1)}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{3\times2}{1}=6$$

이므로

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{9}{2}+6=\frac{21}{2}$$

답 ②

3 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(na_n-2)=0$

즉,

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\{(na_n-2)+2\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(na_n-2)+2$$

$$=0+2=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{na_n}+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{2+0}{1+2}=\frac{2}{3}$$

답 ②

4 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+6^{n-1}}{12^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{72}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{72}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{12}\times\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}+\frac{1}{72}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{60}+\frac{1}{72}=\frac{11}{360}$$

따라서 $p=360$, $q=11$이므로

$p+q=360+11=371$

답 371

5 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라 하면

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $|r_1|<1$, $|r_2|<1$이다. 이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$=\frac{1}{1-r_1}+\frac{1}{1-r_2}$$

$$=\frac{2-(r_1+r_2)}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2}$$

이므로 $\frac{2-(r_1+r_2)}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2}=\frac{10}{3}$ …… ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{1}{1-r_1r_2}$이므로

$\frac{1}{1-r_1r_2}=\frac{8}{7}$

즉, $r_1r_2=\frac{1}{8}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{2-(r_1+r_2)}{\frac{9}{8}-(r_1+r_2)}=\frac{10}{3}$$

에서 $r_1+r_2=\frac{3}{4}$

따라서

$$a_2+b_2=1\times r_1+1\times r_2$$

$$=r_1+r_2=\frac{3}{4}$$

답 ③

Level 1 **기초 연습** 본문 20쪽

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ①

1 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n\beta_n=n^2-4$

이므로 $S_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\alpha_k\beta_k}$ $(n\geq3)$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2-4}$$

$$=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-2)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\right.$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{25}{12}$$
$$=\frac{25}{48}$$

답 ③

2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-3n-1}{2n+1}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n-1}{2n+1}=0$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n-3n-1}{2n+1}+\frac{3n+1}{2n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n-1}{2n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}$$
$$=0+\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2na_n}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{2n+1}\times\frac{2n(2n+1)}{5n^2+3}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)}{5n^2+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{5+\frac{3}{n^2}}$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{2\times2}{5}$$
$$=\frac{6}{5}$$

답 ③

3 $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(3a_n-b_n)-(a_n-3b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(10-p)=3$$

이므로

$10-p=6$

따라서 $p=4$

답 ④

다른 풀이

$$p=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{(3a_n-b_n)-2(a_n+b_n)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)-2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$
$$=10-2\times3=4$$

4 $a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이다.

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=\frac{3}{5}a_1$, 공비가 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{\frac{3}{5}a_1}{1-\frac{9}{25}}$$
$$=\frac{15a_1}{25-9}$$
$$=\frac{15}{16}a_1$$
$$=30$$

에서 $a_1=30\times\frac{16}{15}=32$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 21쪽

1 ①　　2 ②　　3 ④

1 $a_5=S_5-S_4$
$$=\frac{5k+3}{11}-\frac{4k+3}{9}$$
$$=\frac{k-6}{99}=\frac{1}{33}$$

이므로

$k-6=3$, 즉 $k=9$

$n \geq 2$일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \frac{9n+3}{2n+1} - \frac{9n-6}{2n-1}$$
$$= \frac{3}{(2n+1)(2n-1)}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{(2n+1)(2n-1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}$$
$$= \frac{3}{2\times 2}$$
$$= \frac{3}{4}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{4} + \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \frac{3}{4} + \lim_{n\to\infty} \frac{9n+3}{2n+1}$$
$$= \frac{3}{4} + \lim_{n\to\infty} \frac{9+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{9}{2}$$
$$= \frac{21}{4}$$

답 ①

2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$

이므로

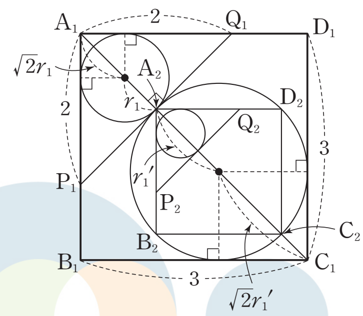
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(a_n - \frac{3}{2^n}\right) + \frac{3}{2^n}\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{3}{2^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$$
$$= 5+3$$
$$= 8$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\{2a_n - (2a_n - 3b_n)\}$$
$$= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n - 3b_n)$$
$$= \frac{2}{3}\times 8 - \frac{1}{3}\times 7$$
$$= 3$$

답 ②

3



삼각형 $A_1P_1Q_1$의 내접원의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

$$\overline{A_1A_2} = \sqrt{2}r_1 + r_1$$
$$= (\sqrt{2}+1)r_1 = \sqrt{2}$$

에서

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2-\sqrt{2}$$

이므로

$$l_1 = 2(2-\sqrt{2})\pi$$

세 선분 P_1Q_1, B_1C_1, C_1D_1에 모두 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1'이라 하면

$$\overline{A_2C_1} = r_1' + \sqrt{2}r_1'$$
$$= (1+\sqrt{2})r_1' = 2\sqrt{2}$$

에서

$$r_1' = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 4-2\sqrt{2}$$

이므로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이는

$$\sqrt{2}r_1' = 4\sqrt{2}-4$$

이다.

즉, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $3 : (4\sqrt{2}-4)$이다.

같은 방법으로 하면 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가

$$3 : (4\sqrt{2}-4) = 1 : \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$$

이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $2(2-\sqrt{2})\pi$이고 공비가 $\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$인 등비수열이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{2(2-\sqrt{2})\pi}{1-\frac{4\sqrt{2}-4}{3}}$$
$$= \frac{6(2-\sqrt{2})\pi}{7-4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{6(6+\sqrt{2})\pi}{17}$$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 22~23쪽

1 ② 2 67 3 240

1 ㄱ. [반례] $a_n=\begin{cases}1 & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 0 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$

으로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$은 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이다. (거짓)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$라 하면 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$

이다. 즉, 수열 $\{S_{2n}\}$은 수렴한다. (참)

ㄷ. [반례] $a_n=\begin{cases}1 & (n\text{이 홀수인 경우})\\ -1 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$이면

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$, $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

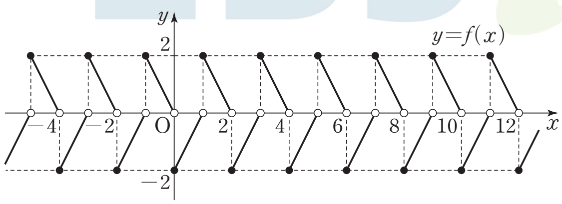
으로 두 수열 $\{S_{2n-1}\}$, $\{S_{2n}\}$이 모두 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하지 않는다. (거짓)

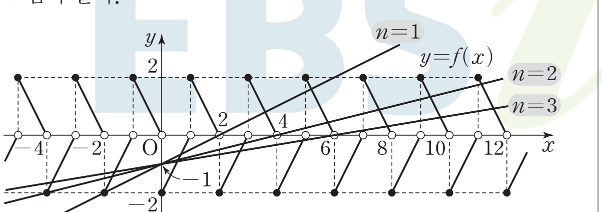
이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

2 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=\frac{1}{2n}x-1$은 기울기가 $\frac{1}{2n}$이고 y절편이 -1인 직선이므로 세 점 $(-2n,\ -2)$, $(2n,\ 0)$, $(6n,\ 2)$를 지난다. $n=1,\ 2,\ 3$일 때, 각각의 직선 $y=\frac{1}{2n}x-1$은 다음 그림과 같다.



즉, $-2n\leq x<0$에서 교점이 n개, $0\leq x<2n$에서 교점이 n개, $2n\leq x<6n$에서 교점이 $2n$개이므로

$a_n=n+n+2n=4n$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+2}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n\times4(n+2)}$

$=\frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{32}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$
$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{32}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{32}\times\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{64}$

이므로

$p+q=64+3=67$

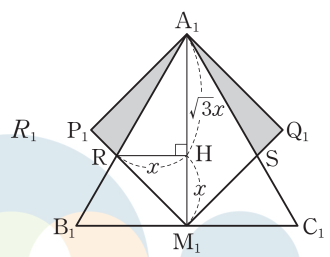
답 67

3 $\overline{A_1M_1}\perp\overline{B_1C_1}$이므로

$\overline{A_1M_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times20=10\sqrt{3}$

$\overline{A_1P_1}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=5\sqrt{6}$

다음 그림과 같이 그림 R_1에서 두 선분 A_1B_1과 P_1M_1의 교점을 R, 두 선분 A_1C_1과 Q_1M_1의 교점을 S, 점 R에서 선분 A_1M_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{RH}=x$라 하면 $\overline{A_1H}=\sqrt{3}x$, $\overline{HM_1}=x$이므로

$\sqrt{3}x+x=10\sqrt{3}$에서

$x=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=5(3-\sqrt{3})$

즉, 사각형 A_1RM_1S의 넓이는

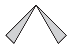
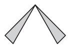
$2\times\triangle A_1RM_1=2\times\frac{1}{2}\times10\sqrt{3}\times5(3-\sqrt{3})$

$=150(\sqrt{3}-1)$

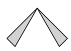
이므로

$S_1=(5\sqrt{6})^2-150(\sqrt{3}-1)=150(2-\sqrt{3})$

한편, 정삼각형 $A_1B_1C_1$과 정삼각형 $A_2A_1Q_1$의 닮음비가

$20:5\sqrt{6}=1:\frac{\sqrt{6}}{4}$이므로 그림 R_1에서 색칠한  모양의 도형과 그림 R_2에서 새로 색칠한  모양의 도형의 닮음비는 $1:\frac{\sqrt{6}}{4}$이고, 그 넓이의 비는

$1:\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=1:\frac{3}{8}$이다.

같은 방법으로 하면 그림 R_n에서 새로 색칠한  모양의 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한  모양의 도형의 넓이의 비가 $1:\frac{3}{8}$이므로 S_n은 첫째항이 $150(2-\sqrt{3})$이고 공비가 $\frac{3}{8}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{150(2-\sqrt{3})}{1-\frac{3}{8}}=480-240\sqrt{3}$$

이므로

$p+q=480+(-240)=240$

답 240

03 여러 가지 함수의 미분

유제

본문 27~35쪽

1 ①	2 ⑤	3 ④	4 ②	5 7
6 ④	7 6	8 ④	9 8	10 ③

1 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)+\ln(1-2x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\{(1+2x)(1-2x)\}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-4x^2)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1-4x^2)}{-4x^2}\times(-4)\right\}$$
$$=-4\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-4x^2)}{-4x^2}$$

이때 $-4x^2=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$-4\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-4x^2)}{-4x^2}$$
$$=-4\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=-4\times1$$
$$=-4$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)+\ln(1-2x)}{x^2}=-4$$

답 ①

2 $$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-4}{\log_2(2x+1)}=4 \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고,

$\lim_{x\to0}\log_2(2x+1)=\log_2 1=0$이므로 $\lim_{x\to0}(2^{ax+b}-4)=0$

이어야 한다.

한편, 두 함수 $y=2^{ax+b}$, $y=4$는 모두 연속함수이므로

$\lim_{x\to0}(2^{ax+b}-4)=2^b-4=0$에서

$2^b=4=2^2$, 즉 $b=2$

그런데 $a=0$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-4}{\log_2(2x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{2^2-4}{\log_2(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{0}{\log_2(2x+1)}=0$$

이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $a\neq0$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-4}{\log_2(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+2}-4}{\log_2(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4(2^{ax}-1)}{\log_2(2x+1)}$$
$$=4\lim_{x\to0}\left\{\frac{2^{ax}-1}{ax}\times\frac{2x}{\log_2(2x+1)}\times\frac{ax}{2x}\right\}$$
$$=4\times\lim_{x\to0}\frac{2^{ax}-1}{ax}\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{\log_2(2x+1)}\times\lim_{x\to0}\frac{a}{2}$$
$$=4\times\lim_{x\to0}\frac{2^{ax}-1}{ax}\times\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{\log_2(2x+1)}{2x}}\times\lim_{x\to0}\frac{a}{2}$$
$$=4\times\ln 2\times\frac{1}{\frac{1}{\ln 2}}\times\frac{a}{2}$$
$$=2a(\ln 2)^2$$

이므로 ㉠에서

$2a(\ln 2)^2=4$, 즉 $a=\dfrac{2}{(\ln 2)^2}$

따라서 $ab=\dfrac{2}{(\ln 2)^2}\times2=\dfrac{4}{(\ln 2)^2}$

답 ⑤

3 $f(x)=2^{x+3}+4^{x+1}=8\times2^x+4\times4^x$에서

$$f'(x)=8\times2^x\ln 2+4\times4^x\ln 4$$
$$=8\times2^x\ln 2+4\times4^x\ln 2^2$$
$$=8\times2^x\ln 2+8\times4^x\ln 2$$
$$=8(2^x+4^x)\ln 2$$

이므로

$$f'(0)=8(2^0+4^0)\ln 2$$
$$=8\times2\times\ln 2=16\ln 2$$

답 ④

4 $y=xe^{x+2}=e^2xe^x$에서

$$y'=e^2(x)'e^x+e^2x(e^x)'=e^2e^x+e^2xe^x$$
$$=e^2(x+1)e^x=(x+1)e^{x+2}$$

이므로 곡선 $y=xe^{x+2}$ 위의 점 $(t,\ te^{t+2})$에서의 접선의 기울기 $f(t)$는

$f(t)=(t+1)e^{t+2}$

따라서 $f(t)=(t+1)e^{t+2}\geq0$에서

$e^{t+2}>0$이므로 $t+1\geq0$

즉, $t\geq-1$이므로 조건을 만족시키는 실수 t의 최솟값은 -1이다.

답 ②

5 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)$$
$$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\frac{8}{9}-\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$$

따라서 $9\cos 2\theta=7$

답 7

다른 풀이

$$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)$$
$$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta$$
$$=1-2\sin^2\theta$$
$$=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$$

따라서 $9\cos 2\theta=7$

6 $25\sin^2 x-5\cos x-13=0$에서

$25(1-\cos^2 x)-5\cos x-13=0$

$25\cos^2 x+5\cos x-12=0$

$(5\cos x-3)(5\cos x+4)=0$

$\cos x=\dfrac{3}{5}$ 또는 $\cos x=-\dfrac{4}{5}$

$0\leq x\leq\pi$일 때, 방정식 $\cos x=\dfrac{3}{5}$과 방정식 $\cos x=-\dfrac{4}{5}$의 해가 각각 하나씩이다. 그 해를 각각 α', β'이라 하면

$\cos\alpha'=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta'=-\dfrac{4}{5}$이고,

$0<\alpha'<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta'<\pi$이므로

$$\sin\alpha'=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5},$$
$$\sin\beta'=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

따라서

$$\tan\alpha'=\frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3},$$
$$\tan\beta'=\frac{\sin\beta'}{\cos\beta'}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

이고

$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha'+\beta')$

이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha'+\beta')$

$$=\frac{\tan\alpha'+\tan\beta'}{1-\tan\alpha'\tan\beta'}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{\frac{7}{12}}{2}=\frac{7}{24}$$

답 ④

7 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{ax}{\tan x+\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{ax}{x}}{\frac{\tan x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}a}{\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times2\right)}$$

$$=\frac{a}{1+1\times2}$$

$$=\frac{a}{3}$$

이므로 $\frac{a}{3}=2$에서

$a=6$

답 6

8 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^3+2x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x+2)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x+2)(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(x+2)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)(1+\cos x)}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}(x+2)\times\lim_{x\to0}(1+\cos x)}{\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{2\times(1+1)}{1^2}$$

$$=4$$

답 ④

9 $f(x)=x^2\cos x$에서

$f'(x)=2x\cos x+x^2\times(-\sin x)$

$\quad=2x\cos x-x^2\sin x$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\times\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi^2}{16}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\pi\sqrt{2}-\frac{1}{32}\pi^2\sqrt{2}$$

즉, $\frac{1}{4}\pi\sqrt{2}-\frac{1}{32}\pi^2\sqrt{2}=p\pi\sqrt{2}+q\pi^2\sqrt{2}$에서

$\frac{1}{4}-\frac{1}{32}\pi=p+q\pi$이므로 $p=\frac{1}{4}$, $q=-\frac{1}{32}$

따라서 $\left|\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{32}}\right|=|-8|=8$

답 8

10 $f(x)=\sqrt{3}x+2\sin x$에서

$f'(x)=\sqrt{3}+2\cos x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(t)=0$이다.

$f'(t)=\sqrt{3}+2\cos t=0$에서

$\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<t<\pi$에서 $t=\frac{5}{6}\pi$

따라서

$$\tan t=\tan\frac{5}{6}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 36~37쪽

1 ③	2 ⑤	3 ④	4 ④	5 65
6 ①	7 ④	8 10	9 ①	10 ③

1 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{4^x-2^x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{2^x(2^x-1)}{e^x-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2^x\times\frac{2^x-1}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}2^x\times\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}$$
$$=\frac{1\times\ln 2}{1}$$
$$=\ln 2$$

답 ③

2 $\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{2}{x-2}}$에서

$x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{2}{x-2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2$$
$$=e^2$$

답 ⑤

3 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(3x-2a+b)}{x}=b$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고

극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

함수 $y=\ln(3x-2a+b)$가 연속함수이므로

$\lim_{x\to0}\ln(3x-2a+b)=0$에서

$\ln(-2a+b)=0$

그러므로 $-2a+b=1$ …… ㉠

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(3x-2a+b)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3\right\}$$
$$=3\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}$$
$$=3\times1$$
$$=3$$

이므로 $b=3$

㉠에 $b=3$을 대입하면

$a=1$

따라서 $a+b=1+3=4$

답 ④

4 $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$에서

$$f'(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x+5)e^x$$
$$=(x^2-2x+1)e^x$$
$$=(x-1)^2e^x$$

$f'(x)=0$에서

$(x-1)^2e^x=0$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로

$(x-1)^2=0$

따라서 $x=1$

답 ④

5 $y=x\ln x$에서

$$y'=\ln x+x\times\frac{1}{x}$$
$$=\ln x+1$$

곡선 $y=x\ln x$ 위의 점 $(e^n,\ ne^n)$에서의 접선의 기울기 $f(n)$은

$$f(n)=\ln e^n+1$$
$$=n\ln e+1$$
$$=n\times1+1$$
$$=n+1$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}f(n)=\sum_{n=1}^{10}(n+1)$$
$$=\frac{10\times11}{2}+10$$
$$=65$$

답 65

6 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{2+\tan\beta}{1-2\times\tan\beta}$$
$$=\frac{1}{3}$$

에서

$6+3\tan\beta=1-2\tan\beta$

$5\tan\beta=-5$

따라서 $\tan\beta=-1$

답 ①

7 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$
$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

이므로

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta$

따라서 $0\le\theta\le2\pi$일 때, 방정식 $\sin\theta=\frac{1}{2}$의 해는

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

즉, $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

8 $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax+\tan bx}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{x}+\frac{\tan bx}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\times a+\frac{\tan bx}{bx}\times b\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\times a\right)+\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan bx}{bx}\times b\right)$

$=a\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}+b\lim_{x\to0}\frac{\tan bx}{bx}$

$=a\times1+b\times1$

$=a+b$

이므로 $a+b=4$

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{abx}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{ab}\right)$

$=\frac{1}{ab}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

$=\frac{1}{ab}\times1$

$=\frac{1}{ab}$

이므로 $\frac{1}{ab}=\frac{1}{3}$에서

$ab=3$

따라서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=4^2-2\times3$

$=10$

답 10

9 $f(x)=e^x\sin x$에서

$f'(x)=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$

$=e^x\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

이고

$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$=e^{-\frac{\pi}{3}}\left(-\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$=e^{-\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

따라서

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\times f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\times e^{-\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

$=e^0\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$

$=-\frac{1}{2}$

답 ①

10 $y=a\cos x+\ln\frac{x}{\pi}=a\cos x+\ln x-\ln\pi$이므로

$y'=-a\sin x+\frac{1}{x}$

곡선 $y=a\cos x+\ln\frac{x}{\pi}$ 위의 $x=\frac{\pi}{6}$인 점에서의 접선의 기울기가 $3+\frac{b}{\pi}$이므로

$3+\frac{b}{\pi}=-a\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\frac{\pi}{6}}$

$=-\frac{1}{2}a+\frac{6}{\pi}$

에서

$3+\frac{1}{2}a+(b-6)\frac{1}{\pi}=0$

이때 a, b가 유리수이므로

$3+\frac{1}{2}a=0$, $b-6=0$

따라서 $a=-6$, $b=6$이므로

$a+b=-6+6=0$

답 ③

Level 2 **기본 연습** 본문 38~39쪽

1 ②	**2** ③	**3** ②	**4** ③	**5** ⑤
6 15	**7** 22	**8** ③		

1 $f(n)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+nx)}{n^2(n+1)x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+nx)}{nx}\times\frac{1}{n(n+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+nx)}{nx}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{n(n+1)}$

$=1\times\frac{1}{n(n+1)}$

$=\frac{1}{n(n+1)}$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}f(n)=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}$

$=\frac{10}{11}$

답 ②

2 $x\neq 0$일 때, $f(x)=\frac{2-a\cos x}{x(e^x-1)}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)$의 값이 존재하고

$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2-a\cos x}{x(e^x-1)}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 0}(2-a\cos x)=0$

함수 $y=2-a\cos x$가 연속함수이므로

$\lim_{x\to 0}(2-a\cos x)=2-a\cos 0$

$=2-a$

$=0$

에서 $a=2$

㉠에 $a=2$를 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x(e^x-1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(e^x-1)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos^2 x)}{x(e^x-1)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x(e^x-1)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\frac{e^x-1}{x}\times(1+\cos x)}$

$=\frac{2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}$

$=\frac{2\times 1^2}{1\times(1+1)}$

$=1$

이므로 $f(0)=1$

따라서 $a+f(0)=2+1=3$

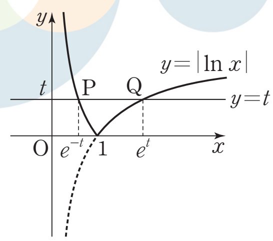
답 ③

3 $x\geq 1$일 때 $\ln x\geq 0$, $0<x<1$일 때 $\ln x<0$이므로

$f(x)=\begin{cases}-\ln x & (0<x<1)\\ \ln x & (x\geq 1)\end{cases}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 두 방정식 $-\ln x=t$, $\ln x=t$의 해와 같다.

즉, $-\ln x=t$에서 $x=e^{-t}$이므로 점 P의 x좌표는 e^{-t}이고 $\ln x=t$에서 $x=e^t$이므로 점 Q의 x좌표는 e^t이다.



$0<x<1$일 때, $f'(x)=(-\ln x)'=-\frac{1}{x}$

이므로 점 P에서의 접선의 기울기 m_P는

$m_P=-\frac{1}{e^{-t}}=-e^t$

$x\geq 1$일 때, $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

이므로 점 Q에서의 접선의 기울기 m_Q는

$m_Q=\frac{1}{e^t}$

$m_Q-m_P=\frac{1}{e^t}-(-e^t)=\frac{1}{e^t}+e^t$이므로

$\frac{1}{e^t}+e^t=\frac{10}{3}$

양변에 $3e^t$을 곱하고 식을 정리하면

$3e^{2t}-10e^t+3=0$

$(3e^t-1)(e^t-3)=0$

$3e^t=1$ 또는 $e^t=3$

$t=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3$ 또는 $t=\ln 3$

따라서 $t>0$이므로

$t=\ln 3$

답 ②

4 함수 $y=e^x$과 함수 $y=x+k$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 미분가능하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x+k)=a+k,$$

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}e^x=e^a,$$

$$f(a)=e^a$$

이므로

$$a+k=e^a \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이어야 한다.

㉠에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a-}\frac{x+k-e^a}{x-a}\\&=\lim_{x\to a-}\frac{x+k-(a+k)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a-}\frac{x-a}{x-a}\\&=1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{e^x-e^a}{x-a}$$

$g(x)=e^x$이라 할 때, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to a+}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

이때 $g'(x)=e^x$이므로 $g'(a)=e^a$

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$$

즉, $e^a=1$이므로

$a=0$

㉠에 $a=0$을 대입하면

$0+k=1$에서 $k=1$

따라서 $a^2+k^2=0+1=1$

답 ③

5 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}&\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x\\&=\cos(x-2x)\\&=\cos(-x)\\&=\cos x\end{aligned}$$

이므로

$f(x)=\cos x$

$f(a)=\cos a=\frac{1}{2}$이고 $0<a<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin a=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$f(b)=\cos b=\frac{4}{5}$이고 $0<b<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin b=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

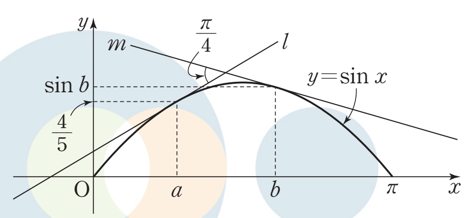
$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{3}{10}\end{aligned}$$

답 ⑤

6 점 $\left(a,\ \frac{4}{5}\right)$는 곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 위의 점이므로

$\sin a=\frac{4}{5}$

$y'=(\sin x)'=\cos x$이고 $0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 접선 l의 기울기는 $\cos a=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$



두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

이때 $\tan\alpha=\cos a=\frac{3}{5}$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{\frac{3}{5}-\tan\beta}{1+\frac{3}{5}\times\tan\beta}\right|=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ⅰ) ㉠에서 $\frac{\frac{3}{5}-\tan\beta}{1+\frac{3}{5}\times\tan\beta}=1$일 때

$\frac{3}{5}-\tan\beta=1+\frac{3}{5}\tan\beta$

$\frac{8}{5}\tan\beta=-\frac{2}{5}$

$\tan\beta=-\frac{1}{4}$

(ⅱ) ㉠에서 $\frac{\frac{3}{5}-\tan\beta}{1+\frac{3}{5}\times\tan\beta}=-1$일 때

$\frac{3}{5}-\tan\beta=-1-\frac{3}{5}\tan\beta$

$\frac{2}{5}\tan\beta=\frac{8}{5}$

$\tan\beta=4$

그런데 직선 m의 기울기는 $\cos b$이므로

$\tan\beta=\cos b$이고,

$0<b<\pi$에서 $-1<\cos b<1$이므로

$-1<\tan\beta<1$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\cos b=\tan\beta=-\frac{1}{4}$

따라서

$$16\sin^2 b=16(1-\cos^2 b)$$
$$=16\left(1-\frac{1}{16}\right)$$
$$=15$$

답 15

7 $f(x)=a\sin x+b\cos x-2$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

조건 (가)에서

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=a\cos\frac{\pi}{4}-b\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=a\times\frac{\sqrt{2}}{2}-b\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)=4\sqrt{2}$$

이므로

$a-b=8 \quad \cdots\cdots ㉠$

조건 (나)의 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=c$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

$$f(0)=a\sin 0+b\cos 0-2$$
$$=b-2$$
$$=0$$

이므로 $b=2$

㉠에 $b=2$를 대입하면

$a=10$

또 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=f'(0)$$
$$=c$$

$f'(0)=10\cos 0-2\sin 0=10-0=10$이므로

$c=10$

따라서

$a+b+c=10+2+10=22$

답 22

8 원에서 한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle AOP=2\angle ABP=2\theta$

$\angle BOP=\pi-\angle AOP=\pi-2\theta$

호 AQ의 길이와 호 QP의 길이의 비가 2 : 3이고

부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로

$$\angle AOQ=\frac{2}{5}\angle AOP$$
$$=\frac{2}{5}\times2\theta=\frac{4}{5}\theta$$

$$\angle BOQ=\pi-\angle AOQ$$
$$=\pi-\frac{4}{5}\theta$$

$f(\theta)-g(\theta)$

=(삼각형 PCB의 넓이)−(삼각형 QOC의 넓이)

=(삼각형 POB의 넓이)−(삼각형 QOB의 넓이)

이고 $\overline{OB}=\overline{OP}=\overline{OQ}=1$이므로

$f(\theta)-g(\theta)$

$$=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\left(\pi-\frac{4}{5}\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1}{2}\sin\frac{4}{5}\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin\frac{4}{5}\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}-\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{4}{5}\theta}{2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}-\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\frac{4}{5}\theta}{\frac{4}{5}\theta}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\right)$$

$$=1-\frac{2}{5}\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{4}{5}\theta}{\frac{4}{5}\theta}$$

$$=1-\frac{2}{5}\times1$$

$$=\frac{3}{5}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 40쪽

1 144 **2** ① **3** 17

1 직선 $y=t$와 곡선 $y=e^x$이 만나는 점 A의 x좌표는 $e^x=t$에서 $x=\ln t$

이므로 점 A의 좌표는 $(\ln t,\ t)$이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=|\ln t|$, $\overline{\mathrm{CE}}=|t-1|$이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}\times|t-1|\times|\ln t|$$

$$=\frac{1}{2}|(t-1)\ln t|$$

직선 $y=t$와 곡선 $y=\ln x$가 만나는 점 B의 x좌표는 $\ln x=t$에서 $x=e^t$이므로 점 B의 좌표는 $(e^t,\ t)$이다.

$\overline{\mathrm{BD}}=t$, $\overline{\mathrm{DF}}=e^t-1$이므로

$$g(t)=\frac{1}{2}\times t\times(e^t-1)$$

$$=\frac{1}{2}t(e^t-1)$$

$$\lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{h(t)}=\lim_{t\to1+}\frac{\frac{1}{2}|(t-1)\ln t|}{h(t)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)\ln t}{h(t)}=a$$

에서 $a\neq0$이고 $t\to1+$일 때 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

사차함수 $h(t)$가 연속함수이므로

$\lim_{t\to1+}h(t)=h(1)=0$

즉, $h(t)=(t-1)h_1(t)$ ($h_1(t)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차식)이다.

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)\ln t}{h(t)}=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)\ln t}{(t-1)h_1(t)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{h_1(t)}=a$$

에서 $a\neq0$이고 $t\to1+$일 때 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

함수 $h_1(t)$가 연속함수이므로 $\lim_{t\to1+}h_1(t)=h_1(1)=0$

즉, $h(t)=(t-1)^2h_2(t)$ ($h_2(t)$는 이차항의 계수가 1인 이차식)이다.

마찬가지로

$$\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{h(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}t(e^t-1)}{h(t)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{t(e^t-1)}{h(t)}=b$$

에서 $b\neq0$이고 $t\to0+$일 때 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

함수 $h(t)$가 연속함수이므로 $\lim_{t\to0+}h(t)=h(0)=0$

즉, $h(t)=t(t-1)^2h_3(t)$ ($h_3(t)$는 일차항의 계수가 1인 일차식)이다.

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{t(e^t-1)}{h(t)}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{t(e^t-1)}{t(t-1)^2h_3(t)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{(t-1)^2h_3(t)}=b$$

에서 $b\neq0$이고 $t\to0+$일 때 (분자)$\to0$이므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

함수 $(t-1)^2h_3(t)$가 연속함수이므로

$\lim_{t\to0+}(t-1)^2h_3(t)=h_3(0)=0$

즉, $h(t)=t^2(t-1)^2$

$$a=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)\ln t}{t^2(t-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t^2(t-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\left(\frac{\ln t}{t-1}\times\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}\times\lim_{t\to1+}\frac{1}{t^2}$$

$\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}$에서 $t-1=k$로 놓으면 $t\to1+$일 때 $k\to0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{k\to0+}\frac{\ln(1+k)}{k}=1$$

그러므로 $a=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{1^2}=\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
b&=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{t(e^t-1)}{t^2(t-1)^2}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t(t-1)^2}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\left\{\frac{e^t-1}{t}\times\frac{1}{(t-1)^2}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t}\times\lim_{t\to0+}\frac{1}{(t-1)^2}\\
&=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{(-1)^2}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

따라서

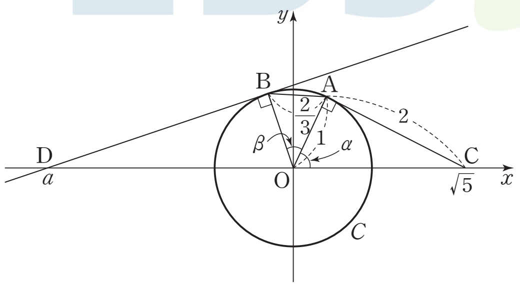
$$
\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{ab}\right)&=h(4)\\
&=4^2\times3^2\\
&=144
\end{aligned}
$$

답 144

2 삼각형 OCA에서 $(\sqrt{5})^2=1^2+2^2$

즉, $\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로

$\angle\mathrm{OAC}=\frac{\pi}{2}$



$\angle\mathrm{AOC}=\alpha$라 하면 직각삼각형 AOC에서

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 OAB에서 $\angle\mathrm{AOB}=\beta$라 하면

코사인법칙에 의하여

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AB}}^2&=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\beta\\
&=2-2\cos\beta
\end{aligned}
$$

이고, $\overline{\mathrm{AB}}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$이므로

$\frac{4}{9}=2-2\cos\beta$에서

$\cos\beta=\frac{7}{9}$이고 $0<\beta<\pi$이므로

$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\overline{\mathrm{OD}}=-a$이고 점 D는 원 C 위의 점 B에서의 접선이 x축과 만나는 점이므로

$\angle\mathrm{OBD}=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 BDO에서

$\cos(\angle\mathrm{BOD})=\cos(\pi-\alpha-\beta)=\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{1}{-a}=-\frac{1}{a}$

$\cos(\pi-\alpha-\beta)=\cos\{\pi-(\alpha+\beta)\}=-\cos(\alpha+\beta)$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}&=\cos(\alpha+\beta)\\
&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\
&=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{7}{9}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}\\
&=\frac{7\sqrt{5}}{45}-\frac{8\sqrt{10}}{45}
\end{aligned}
$$

답 ①

3 직각삼각형 ABC에서

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=4\cos\theta$이고

$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=4\sin\theta$

점 D가 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AD}}&=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{AC}}\\
&=\frac{3}{4}\times4\sin\theta\\
&=3\sin\theta
\end{aligned}
$$

이고

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{DC}}&=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{AC}}\\
&=\frac{1}{4}\times4\sin\theta\\
&=\sin\theta
\end{aligned}
$$

$\angle\mathrm{DAH}=\alpha$라 하면

$\angle\mathrm{ADH}=\angle\mathrm{BDC}$이므로

$\angle\mathrm{DBC}=\alpha$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{(4\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$

$=\sqrt{16\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\sqrt{1+15\cos^2\theta}$

이므로

$\cos\alpha=\dfrac{4\cos\theta}{\sqrt{1+15\cos^2\theta}}$,

$\sin\alpha=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+15\cos^2\theta}}$

삼각형 ADH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AD}}\cos\alpha$

$=3\sin\theta\cos\alpha$

$=3\sin\theta\times\dfrac{4\cos\theta}{\sqrt{1+15\cos^2\theta}}$

$=\dfrac{12\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+15\cos^2\theta}}$

삼각형 ADH의 넓이는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\sin\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\times3\sin\theta\times\dfrac{12\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+15\cos^2\theta}}\times\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+15\cos^2\theta}}$

$=\dfrac{18\sin^3\theta\cos\theta}{1+15\cos^2\theta}$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{18\sin^3\theta\cos\theta}{1+15\cos^2\theta}}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{18\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^3(1+15\cos^2\theta)}$$

$$=18\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{\cos\theta}{1+15\cos^2\theta}\right)$$

$$=18\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{1+15\cos^2\theta}$$

$$=18\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{1+15\cos^2\theta}$$

$$=18\times1^3\times\frac{1}{1+15\times1^2}$$

$$=\frac{18}{16}$$

$$=\frac{9}{8}$$

따라서 $p+q=8+9=17$

답 17

참고

삼각형 ADH의 넓이 $S(\theta)$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

삼각형 ADH와 삼각형 BDC에서

$\angle\mathrm{ADH}=\angle\mathrm{BDC}$, $\angle\mathrm{H}=\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$

이므로 삼각형 ADH와 삼각형 BDC는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}=3\sin\theta:\sqrt{1+15\cos^2\theta}$

이다.

삼각형 BDC의 넓이를 $T(\theta)$라 하면

$S(\theta):T(\theta)=9\sin^2\theta:(1+15\cos^2\theta)$

이므로

$S(\theta)=\dfrac{9\sin^2\theta\times T(\theta)}{1+15\cos^2\theta}$

이때

$T(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{DC}}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\cos\theta\times\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta$

따라서

$S(\theta)=\dfrac{9\sin^2\theta\times2\sin\theta\cos\theta}{1+15\cos^2\theta}$

$=\dfrac{18\sin^3\theta\cos\theta}{1+15\cos^2\theta}$

04 여러 가지 미분법

유제 본문 43~51쪽

1 ②	2 ④	3 ①	4 ⑤	5 ②
6 ④	7 ③	8 ③	9 ①	10 ③

1 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$이라 하면

$f(e+h)=\dfrac{1}{\ln(e+h)}$,

$f(e)=\dfrac{1}{\ln e}=1$

이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\ln(e+h)}-1\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}$$

$$=f'(e)$$

이때 몫의 미분법에 의하여

$$f'(x)=-\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

이므로

$$f'(e)=-\frac{1}{e(\ln e)^2}=-\frac{1}{e}$$

답 ②

다른 풀이

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\ln(e+h)}-1\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1-\ln(e+h)}{\ln(e+h)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\ln e-\ln(e+h)}{\ln(e+h)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{h}\ln\frac{e}{e+h}}{\ln(e+h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{1}{h}\ln\frac{e+h}{e}}{\ln(e+h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)^{\frac{1}{h}}}{\ln(e+h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-\ln\left\{\left(1+\frac{h}{e}\right)^{\frac{e}{h}}\right\}^{\frac{1}{e}}}{\ln(e+h)}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{1}{e}\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)^{\frac{e}{h}}}{\ln(e+h)}$$

$$=-\frac{1}{e}\times\frac{\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)^{\frac{e}{h}}}{\lim_{h\to0}\ln(e+h)}$$

$$=-\frac{1}{e}\times\frac{\ln e}{\ln e}$$

$$=-\frac{1}{e}$$

2 곡선 $y=x\sec x$가 점 (π, a)를 지나므로

$a=\pi\sec\pi$

$=\dfrac{\pi}{\cos\pi}$

$=\dfrac{\pi}{-1}=-\pi$

$y=x\sec x$에서 곱의 미분법에 의하여

$y'=(x)'\sec x+x(\sec x)'$

$=\sec x+x\sec x\tan x$

이므로 $x=\pi$인 점에서의 접선의 기울기는

$b=\sec\pi+\pi\sec\pi\tan\pi$

$=-1+\pi\times(-1)\times0$

$=-1$

따라서 $ab=(-\pi)\times(-1)=\pi$

답 ④

다른 풀이

곡선 $y=x\sec x$가 점 (π, a)를 지나므로

$a=\pi\sec\pi$

$=\dfrac{\pi}{\cos\pi}$

$=\dfrac{\pi}{-1}=-\pi$

$y=x\sec x=\dfrac{x}{\cos x}$

이므로 몫의 미분법에 의하여

$$y'=\frac{(x)'\cos x-x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$$

그러므로 $x=\pi$인 점에서의 접선의 기울기는

$$b=\frac{\cos\pi+\pi\sin\pi}{\cos^2\pi}$$

$$=\frac{-1+\pi\times0}{(-1)^2}=-1$$

따라서 $ab=(-\pi)\times(-1)=\pi$

3 $f(x)=(2x+1)e^{2x}$에서

$$f'(x)=(2x+1)'e^{2x}+(2x+1)(e^{2x})'$$
$$=2e^{2x}+(2x+1)\times 2e^{2x}$$
$$=(4x+4)e^{2x}$$

이므로

$a=4$, $b=4$, $c=2$

따라서 $a+b+c=4+4+2=10$

답 ①

4 모든 실수 t에 대하여 $\sin t+2>0$이므로 점 $(t, \sin t+2)$와 x축 사이의 거리는

$\sin t+2$

그러므로 점 $(t, \sin t+2)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는

$\sin t+2$

이므로 이 원의 넓이는

$S(t)=\pi(\sin t+2)^2$

따라서

$$S'(t)=2\pi(\sin t+2)^1(\sin t+2)'$$
$$=2\pi(\sin t+2)\cos t$$

이므로

$$S'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\pi\left(\sin\frac{\pi}{6}+2\right)\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=2\pi\times\left(\frac{1}{2}+2\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$$

답 ⑤

5 $x=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{t}},$$

$y=\ln\sqrt{t}=\frac{1}{2}\ln t$에서 $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2t}$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\frac{\sqrt{t}}{t}$$

따라서 $t=4$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{\sqrt{4}}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ②

다른 풀이

$x=\sqrt{t}$, $y=\ln\sqrt{t}$ 이므로

$y=\ln x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$t=4$일 때, $x=\sqrt{4}=2$이므로 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

6 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=(t-1)^2$, $y=t+\frac{a}{t}$가 점 $(4, 2)$를 지나므로

$4=(t-1)^2$에서

$t=-1$ 또는 $t=3$

이때 $t>0$에서 $t=3$이므로 $y=t+\frac{a}{t}$에 $t=3$, $y=2$를 대입하면

$2=3+\frac{a}{3}$, 즉 $a=-3$

$x=(t-1)^2$에서

$$\frac{dx}{dt}=2(t-1)$$

$y=t-\frac{3}{t}$에서

$$\frac{dy}{dt}=1+\frac{3}{t^2}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$=\frac{1+\frac{3}{t^2}}{2(t-1)}$$
$$=\frac{t^2+3}{2t^2(t-1)}$$

매개변수 t로 나타낸 곡선 $x=(t-1)^2$, $y=t-\frac{3}{t}$ 위의 점 $(4, 2)$에서의 접선의 기울기는 $t=3$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값과 같으므로

$$\frac{3^2+3}{2\times3^2\times(3-1)}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

답 ④

7 $xy+\sqrt{y}=6$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(\sqrt{y})=\frac{d}{dx}(6) \quad \cdots\cdots ㉠$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(x)\times y+x\times\frac{d}{dx}(y)$$
$$=1\times y+x\times\frac{dy}{dx}$$
$$=y+x\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{y})=\frac{d}{dy}(\sqrt{y})\times\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$$

이므로 ㉠에서

$$y+x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+\frac{1}{2\sqrt{y}}}\left(\text{단, } x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq 0\right)$$

따라서 곡선 $xy+\sqrt{y}=6$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{4}{1+\frac{1}{2\sqrt{4}}}=-\frac{4}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{16}{5}$$

답 ③

8 점 $(0,\ a)$는 곡선 $\ln y+\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$\ln a+\frac{0}{a}=\frac{1}{2}$에서

$$\ln a=\frac{1}{2}$$

$$a=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$\ln y+\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(\ln y)+\frac{d}{dx}\left(x\times\frac{1}{y}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dy}(\ln y)\times\frac{dy}{dx}$$
$$=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\times\frac{1}{y}\right)=\frac{d}{dx}(x)\times\frac{1}{y}+x\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{y}+x\times\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\right)\times\frac{dy}{dx}$$
$$=\frac{1}{y}+x\times\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$=\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

이므로 ㉠에서

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}}=\frac{y}{x-y}\ (\text{단, } x-y\neq 0)$$

따라서 곡선 $\ln y+\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ 위의 점 $(0,\ \sqrt{e})$에서의 접선의 기울기는

$$b=\frac{\sqrt{e}}{0-\sqrt{e}}=-1$$

이므로

$$ab=\sqrt{e}\times(-1)=-\sqrt{e}$$

답 ③

9 $f(x)=(\ln x)^2$에서

$$f'(x)=2\ln x\times(\ln x)'$$
$$=\frac{2\ln x}{x}$$

이므로

$$f''(x)=\left(\frac{2\ln x}{x}\right)'$$
$$=\frac{(2\ln x)'x-(2\ln x)(x)'}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x\times 1}{x^2}$$
$$=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

따라서

$$f''(\sqrt{e})=\frac{2(1-\ln\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2}$$
$$=\frac{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}{e}$$
$$=\frac{1}{e}$$

답 ①

10 $g(\sqrt{3})=a\ (-\pi<a<\pi)$라 하면

$$f(a)=\tan\frac{a}{2}=\sqrt{3}$$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{a}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\frac{a}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$a=\frac{2}{3}\pi$$

그러므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(\sqrt{3})=\frac{1}{f'(g(\sqrt{3}))}$$
$$=\frac{1}{f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$f'(x)=\sec^2\frac{x}{2}\times\left(\frac{x}{2}\right)'$$
$$=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

이므로

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{1}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=2$$

따라서 ㉠에서

$$g'(\sqrt{3})=\frac{1}{f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)}=\frac{1}{2}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 52~53쪽

1 ③	2 ①	3 ④	4 ②	5 ④
6 ②	7 ③	8 ③		

1 $f(x)=\frac{x}{e^x}$에서 몫의 미분법에 의하여

$$f'(x)=\frac{(x)'e^x-x(e^x)'}{(e^x)^2}$$
$$=\frac{1\times e^x-xe^x}{(e^x)^2}$$
$$=\frac{1-x}{e^x}$$

따라서

$$f'(0)=\frac{1-0}{e^0}=\frac{1}{1}=1$$

답 ③

다른 풀이

$f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$이므로 곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$f'(x)=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'$$
$$=1\times e^{-x}+x(-e^{-x})$$
$$=(1-x)e^{-x}$$

따라서

$$f'(0)=(1-0)e^0=1\times1=1$$

2 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$에서 몫의 미분법에 의하여

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\times x-\sin x\times(x)'}{x^2}$$
$$=\frac{\cos x\times x-\sin x\times 1}{x^2}$$
$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

이므로

$$f'(\pi)=\frac{\pi\cos\pi-\sin\pi}{\pi^2}$$
$$=\frac{\pi\times(-1)-0}{\pi^2}$$
$$=-\frac{1}{\pi}$$

답 ①

3 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}$에서

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\times x^{-\frac{1}{3}-1}$$
$$=-\frac{1}{3}\times x^{-\frac{4}{3}}$$
$$=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

그러므로 $f'(a)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{a^4}}=-\frac{1}{48}$에서

$3\sqrt[3]{a^4}=48$

이때 $a>0$이면

$\sqrt[3]{a^4}=(\sqrt[3]{a})^4=16$

이고 $\sqrt[3]{a}>0$이므로

$\sqrt[3]{a}=2$

따라서 $a=2^3=8$

답 ④

4 $f(x)=e^{ax}-1$, $g(x)=\ln(x^2+b)$에서

$f(0)=e^0-1=1-1=0$,

$g(0)=\ln(0+b)=\ln b$

이므로 $f(0)=g(0)$에서

$\ln b=0$, $b=1$

이때 합성함수의 미분법에 의하여

$f'(x)=e^{ax}(ax)'=ae^{ax}$,

$g'(x)=\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1}$

이므로

$f'(0)=ae^0=a$, $g'(0)=0$

$f'(0)+g'(0)=1$에서

$a+0=1$

$a=1$

따라서

$a+b=1+1=2$

답 ②

5 $\cos 2x+\sin y=1$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(\cos 2x)+\dfrac{d}{dx}(\sin y)=\dfrac{d}{dx}(1)$

$(-\sin 2x)\times(2x)'+\dfrac{d}{dy}(\sin y)\times\dfrac{dy}{dx}=0$

$-2\sin 2x+\cos y\,\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sin 2x}{\cos y}$ (단, $\cos y\neq 0$)

위 식에 $x=\dfrac{\pi}{6}$, $y=\dfrac{\pi}{6}$를 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{3}}{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$

이므로 구하는 접선의 기울기는 2이다.

답 ④

6 $t=-1$일 때

$x=e^{-1}-a$, $y=\ln|-1|=\ln 1=0$

이므로 점 A의 좌표는 $(e^{-1}-a,\ 0)$이다.

점 A가 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$e^{-1}-a=0$

에서

$a=e^{-1}$

이때 $x=e^t+e^{-1}t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-1}$

이고, $y=\ln|t|$에서

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t}$

이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{1}{t}}{e^t+e^{-1}}=\dfrac{1}{t(e^t+e^{-1})}$ ...... ㉠

따라서 구하는 접선의 기울기는 ㉠에 $t=-1$을 대입한 값과 같으므로

$\dfrac{1}{-(e^{-1}+e^{-1})}=\dfrac{1}{-2e^{-1}}$

$=-\dfrac{e}{2}$

답 ②

7 직사각형의 넓이는 4로 일정하므로 가로의 길이가 x일 때 세로의 길이는 $\dfrac{4}{x}$이다.

그러므로 둘레의 길이는

$f(x)=2\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=2x+\dfrac{8}{x}$

이때 $f'(x)=2-\dfrac{8}{x^2}$이고

$0<x<2$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재한다.

$g(10)=a$라 하면 $f(a)=10$이므로

$f(a)=2a+\dfrac{8}{a}=10$

에서

$2a^2-10a+8=2(a-1)(a-4)=0$

$0<a<2$이므로

$a=1$

그러므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(10)=\dfrac{1}{f'(g(10))}$

$=\dfrac{1}{f'(1)}$

이때 $f'(1)=2-\dfrac{8}{1^2}=-6$이므로

$g'(10)=\dfrac{1}{f'(1)}=-\dfrac{1}{6}$

답 ③

8 $f(x)=\ln(\cos x)+f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin x$에서

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a$라 하면

$f(x)=\ln(\cos x)+a\sin x$

이므로

$f'(x)=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}+a\cos x$

$=-\dfrac{\sin x}{\cos x}+a\cos x$

$=-\tan x+a\cos x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}+a\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=-\sqrt{3}+\dfrac{a}{2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a$이므로 $-\sqrt{3}+\dfrac{a}{2}=a$에서

$a=-2\sqrt{3}$

따라서 $f'(x)=-\tan x-2\sqrt{3}\cos x$이므로

$f''(x)=-\sec^2 x+2\sqrt{3}\sin x$

$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sec^2\dfrac{\pi}{3}+2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{3}}+2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+3$

$=-4+3$

$=-1$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 54~55쪽

1 ①	2 17	3 ②	4 ②	5 ③
6 ②	7 ⑤	8 ②		

1 함수 $f(x)=\ln|x|+|\ln(-x)|$의 정의역은

$\{x\,|\,x<0\}$

$-1<x<0$이면 $\ln|x|=\ln(-x)$, $\ln(-x)<0$이므로

$f(x)=\ln(-x)-\ln(-x)=0$

$x\le-1$이면 $\ln|x|=\ln(-x)$, $\ln(-x)\ge0$이므로

$f(x)=\ln(-x)+\ln(-x)=2\ln(-x)$

그러므로

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{0-2\ln(1+h)}{h}$

$=-2\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{\ln(1+h)}{h}$

$=-2\times1$

$=-2$,

$\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{2\ln(1-h)-0}{h}$

$=-2\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{\ln(1-h)}{-h}$

$=-2\times1$

$=-2$

이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}=-2$

답 ①

참고

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=2f'(a)$

가 성립한다.

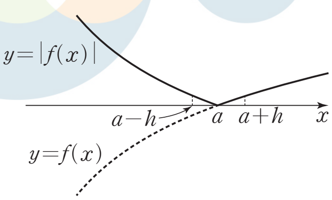
한편, $x=a$에서 미분가능하고 $f(a)=0$인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=|f(x)|$

라 하면

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(a+h)-g(a-h)}{h}=0$

이 성립한다.



다른 풀이

$p(x)=\ln|x|$, $q(x)=|\ln(-x)|$라 하자.

$p'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{p(-1+h)-p(-1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{p(-1+h)-p(-1)-\{p(-1-h)-p(-1)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{p(-1+h)-p(-1)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{p(-1-h)-p(-1)}{-h}$

$=p'(-1)+p'(-1)$

$=2p'(-1)$

$=2\times\dfrac{1}{-1}$

$=-2$ ⋯⋯ ㉠

한편, $h\to0+$일 때

$\ln(1-h)<0<\ln(1+h)$
이므로
$q(-1+h)=|\ln(1-h)|$
$=-\ln(1-h)$,
$q(-1-h)=|\ln(1+h)|$
$=\ln(1+h)$
그러므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{-\ln(1-h)-\ln(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\ln(1-h)(1+h)}{-h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times h\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times\lim_{h\to 0+}h$$
$=1\times 0$
$=0$ ...... ㉡

또한 $h\to 0-$일 때
$\ln(1+h)<0<\ln(1-h)$
이므로
$q(-1+h)=|\ln(1-h)|$
$=\ln(1-h)$,
$q(-1-h)=|\ln(1+h)|$
$=-\ln(1+h)$
그러므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\ln(1-h)+\ln(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\ln(1-h)(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\left\{\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times(-h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{\ln(1-h^2)}{-h^2}\times\lim_{h\to 0-}(-h)$$
$=1\times 0$
$=0$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}=0$$
이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}=0 \quad \text{...... ㉣}$$

$f(x)=p(x)+q(x)$이므로 ㉠, ㉣에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{p(-1+h)+q(-1+h)-\{p(-1-h)+q(-1-h)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{p(-1+h)-p(-1-h)+\{q(-1+h)-q(-1-h)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{p(-1+h)-p(-1-h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{q(-1+h)-q(-1-h)}{h}$$
$=-2+0$
$=-2$

2 곡선 $y=a^x$과 곡선 $y=a^{-x}-\frac{3}{2}$이 만나는 점의 x좌표가 $f(a)$이므로

$$a^{f(a)}=a^{-f(a)}-\frac{3}{2}$$

이때 $a^{f(a)}=X\ (X>0)$으로 놓으면

$$X=\frac{1}{X}-\frac{3}{2}$$

$2X^2+3X-2=0$, $(2X-1)(X+2)=0$
$X>0$이므로

$$X=\frac{1}{2}$$

즉, $a^{f(a)}=\frac{1}{2}$
이때

$$f(a)=\log_a\frac{1}{2}$$
$$=-\log_a 2$$
$$=-\frac{1}{\log_2 a}$$

이므로

$$f'(a)=-\frac{-(\log_2 a)'}{(\log_2 a)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{a\ln 2}}{(\log_2 a)^2}$$
$$=\frac{1}{a\ln 2\times(\log_2 a)^2}$$

한편, $f(k)=-\frac{1}{2}$이므로

$-\dfrac{1}{\log_2 k}=-\dfrac{1}{2}$

$\log_2 k=2$

즉, $k=2^2=4$

따라서

$f'(k)=f'(4)$

$=\dfrac{1}{4\ln 2\times(\log_2 4)^2}$

$=\dfrac{1}{16}\times\dfrac{1}{\ln 2}$

이므로

$p+q=16+1=17$

답 17

다른 풀이

$f(a)=\log_a \dfrac{1}{2}=-\log_a 2=-\dfrac{\ln 2}{\ln a}$

이므로 몫의 미분법에 의하여

$f'(a)=-\dfrac{-\ln 2\times(\ln a)'}{(\ln a)^2}$

$=\dfrac{\ln 2\times\dfrac{1}{a}}{(\ln a)^2}$

$=\dfrac{\ln 2}{a(\ln a)^2}$

따라서

$f'(k)=f'(4)$

$=\dfrac{\ln 2}{4(\ln 4)^2}$

$=\dfrac{\ln 2}{4(2\ln 2)^2}$

$=\dfrac{1}{16}\times\dfrac{1}{\ln 2}$

3 $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에서 합성함수의 미분법에 의하여

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$ …… ㉠

$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x<0) \\ -2x^2+1 & (x\ge 0)\end{cases}$ 이므로

$f(-1)=e$,

$f(1)=-2+1=-1$

$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & (x<0) \\ -4x & (x>0)\end{cases}$ 이므로

$f'(-1)=-e$, $f'(1)=-4$,

$f'(e)=-4e$

이때 ㉠에서

$g'(-1)=f'(f(-1))f'(-1)$

$=f'(e)f'(-1)$

$=(-4e)\times(-e)$

$=4e^2$

이고

$g'(1)=f'(f(1))f'(1)$

$=f'(-1)f'(1)$

$=(-e)\times(-4)$

$=4e$

따라서

$\dfrac{g'(1)}{g'(-1)}=\dfrac{4e}{4e^2}=\dfrac{1}{e}$

답 ②

4 $f(x)=(x^2+x+a)^3$, $g(x)=e^{bx}$이라 하면

$f(0)=a^3$, $g(0)=1$

이므로 두 점 A, B의 y좌표는 각각 a^3, 1이다.

두 점 A, B가 원점에 대하여 서로 대칭이므로

$a^3=-1$

$a=-1$

한편, 합성함수의 미분법에 의하여

$f'(x)=3(x^2+x-1)^2(x^2+x-1)'$

$=3(2x+1)(x^2+x-1)^2$,

$g'(x)=e^{bx}(bx)'$

$=be^{bx}$

이므로 곡선 $y=(x^2+x-1)^3$ 위의 점 A$(0, -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=3\times1\times(-1)^2=3$

이고, 곡선 $y=e^{bx}$ 위의 점 B$(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$g'(0)=be^0=b$

이때 위의 두 접선이 서로 평행하므로 $f'(0)=g'(0)$에서

$b=3$

따라서 $a+b=(-1)+3=2$

답 ②

5 $x=2t-\sin 2t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2-2\cos 2t$

$=2(1-\cos 2t)$

$y=\sin^3 2t$에서

$\dfrac{dy}{dt}=3(\sin^2 2t)(\sin 2t)'$

$=3(\sin^2 2t)(\cos 2t)(2t)'$

$=3(\sin^2 2t)(\cos 2t)\times 2$

$=6\sin^2 2t\cos 2t$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin^2 2t\cos 2t}{1-\cos 2t}\ (\text{단, } 1-\cos 2t\neq 0)$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}&=\lim_{t\to 0}\frac{3\sin^2 2t\cos 2t}{1-\cos 2t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{3\sin^2 2t\cos 2t(1+\cos 2t)}{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{3\sin^2 2t\cos 2t(1+\cos 2t)}{1-\cos^2 2t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{3\sin^2 2t\cos 2t(1+\cos 2t)}{\sin^2 2t}\\&=\lim_{t\to 0}3\cos 2t(1+\cos 2t)\\&=3\times\cos 0\times(1+\cos 0)\\&=3\times 1\times(1+1)\\&=6\end{aligned}$$

답 ③

6 A$(-1, 0)$, B$(1, 0)$, P(x, y)이므로

$\overline{\text{AP}}^2\times\overline{\text{BP}}^2=5$에서

$\{(x+1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+y^2\}=5$ ...... ㉠

즉, 곡선 C의 방정식은 ㉠이다. ㉠에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면 곱의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}[\{(x+1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+y^2\}]=\frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{d}{dx}\{(x+1)^2+y^2\}\times\{(x-1)^2+y^2\}+\{(x+1)^2+y^2\}\times\frac{d}{dx}\{(x-1)^2+y^2\}=0$$

$$\left\{\frac{d}{dx}(x+1)^2+\frac{d}{dx}(y^2)\right\}\times\{(x-1)^2+y^2\}+\{(x+1)^2+y^2\}\times\left\{\frac{d}{dx}(x-1)^2+\frac{d}{dx}(y^2)\right\}=0$$

$$\left\{2(x+1)+\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}\right\}\{(x-1)^2+y^2\}+\{(x+1)^2+y^2\}\left\{2(x-1)+\frac{d}{dy}(y^2)\times\frac{dy}{dx}\right\}=0$$

$$\left\{2(x+1)+2y\frac{dy}{dx}\right\}\{(x-1)^2+y^2\}+\{(x+1)^2+y^2\}\left\{2(x-1)+2y\frac{dy}{dx}\right\}=0$$

위 등식에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$$\left(4+2\frac{dy}{dx}\right)\times(0+1)+(4+1)\times\left(0+2\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$4+2\frac{dy}{dx}+10\frac{dy}{dx}=0$$

$$12\frac{dy}{dx}=-4$$

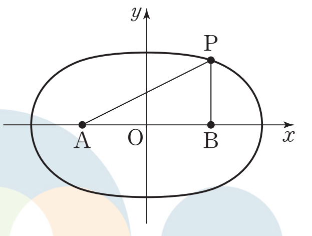
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}$$

따라서 곡선 C 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

답 ②

참고

곡선 $\{(x+1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+y^2\}=5$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



7 $\tan\alpha=\frac{10}{\overline{\text{OP}}}$, $\tan\beta=\frac{10}{\overline{\text{OQ}}}$

이고 $\overline{\text{OP}}=2\overline{\text{OQ}}$이므로

$\tan\beta=2\tan\alpha$

위 등식에서 β를 α의 함수로 보고 양변을 α에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{d\alpha}(\tan\beta)=\frac{d}{d\alpha}(2\tan\alpha)$$

$$\frac{d}{d\beta}(\tan\beta)\times\frac{d\beta}{d\alpha}=2\sec^2\alpha$$

$$\sec^2\beta\times\frac{d\beta}{d\alpha}=2\sec^2\alpha$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{2\sec^2\alpha}{\sec^2\beta}=\frac{2\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

(단, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$)

$\overline{\text{PQ}}=5$이면

$\overline{\text{OP}}=10$, $\overline{\text{OQ}}=5$

직각삼각형 AOP에서

$\overline{\text{AP}}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$

이므로

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

직각삼각형 AOQ에서

$\overline{AQ}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$

이므로

$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 ㉠에서

$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{4}{5}$

답 ⑤

8 $f(x)=\ln(x^2+x+1)$에서

$f'(x)=\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}$

$=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

그러므로 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$x=e^t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t$

$y=g(t)$에서 $t=f(y)$

즉, $t=\ln(y^2+y+1)$ ...... ㉠

$\frac{dt}{dy}=\frac{2y+1}{y^2+y+1}$

$y>0$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{y^2+y+1}{2y+1}}{e^t}=\frac{y^2+y+1}{e^t(2y+1)}$

이때 ㉠에서 $y^2+y+1=e^t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y+1}$ ...... ㉡

$y=g(t)$에서 $t=f(y)$이므로 $t=\ln 3$일 때

$\ln 3=\ln(y^2+y+1)$

$3=y^2+y+1$

$y^2+y-2=(y+2)(y-1)=0$

$y>0$이므로

$y=1$

따라서 ㉡에 $y=1$을 대입하면 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 56쪽

1 ② 2 ① 3 ④

1 두 점 (α, k), (β, k)가 곡선 $x^2+xy+2y^2=7$ 위에 있으므로

$\alpha^2+k\alpha+2k^2-7=0$, $\beta^2+k\beta+2k^2-7=0$

즉, α, β는 x에 대한 이차방정식 $x^2+kx+2k^2-7=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=2k^2-7$ ...... ㉠

$x^2+xy+2y^2=7$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+4y\frac{dy}{dx}=0$

이므로

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+4y}$ (단, $x+4y\neq0$)

$\alpha+4k\neq0$, $\beta+4k\neq0$이므로 곡선 $x^2+xy+2y^2=7$ 위의 두 점 (α, k), (β, k)에서의 접선의 기울기는 각각

$-\frac{2\alpha+k}{\alpha+4k}$, $-\frac{2\beta+k}{\beta+4k}$

이고, 두 접선이 서로 수직이므로

$\left(-\frac{2\alpha+k}{\alpha+4k}\right)\times\left(-\frac{2\beta+k}{\beta+4k}\right)=-1$

$(2\alpha+k)(2\beta+k)=-(\alpha+4k)(\beta+4k)$

$5\alpha\beta+6(\alpha+\beta)k+17k^2=0$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$5\times(2k^2-7)+6\times(-k)\times k+17k^2=0$

$21k^2=35$, $k^2=\frac{5}{3}$

따라서 ㉠에서

$\alpha\beta=2\times\frac{5}{3}-7=-\frac{11}{3}$

답 ②

참고

이차방정식 $x^2+kx+2k^2-7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(2k^2-7)=-7k^2+28=-7(k^2-4)$

따라서 $0\leq k<2$이면 $D>0$이므로 $k^2=\frac{5}{3}$일 때 이차방정식 $x^2+kx+2k^2-7=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2 $k(x)=ax^2\ln x$라 하자.

함수 $g(x)$가 $x=e$에서 미분가능하려면 $x=e$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to e-} g(x)=\lim_{x\to e+} g(x)=g(e)$ …… ㉠

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to e-} g(x)=\lim_{x\to e-} k(x)=\lim_{x\to e-} ax^2\ln x=ae^2\ln e=ae^2$,

$\lim_{x\to e+} g(x)=\lim_{x\to e+} f^{-1}(x)=f^{-1}(e)$,

$g(e)=f^{-1}(e)$

이므로 ㉠에서

$ae^2=f^{-1}(e)$

즉, $f(ae^2)=e$ …… ㉡

이어야 한다.

한편, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-e}{h}=b$ (b는 상수)에서 $h\to 0$일 때 (분모)→0이고, 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

그런데 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그러므로

$\lim_{h\to 0}\{f(1+h)-e\}=f(1)-e=0$

에서 $f(1)=e$

이고 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 ㉡에서

$ae^2=1$

$a=\frac{1}{e^2}$

즉, $k(x)=\frac{1}{e^2}x^2\ln x$

이때 함수 $g(x)=\begin{cases} k(x) & (0<x<e) \\ f^{-1}(x) & (x\geq e) \end{cases}$에서

$k'(x)=\frac{1}{e^2}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{x}{e^2}(2\ln x+1)$

이고, $g(e)=f^{-1}(e)=1=k(e)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to e-}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}&=\lim_{x\to e-}\frac{k(x)-k(e)}{x-e}\\&=k'(e)\\&=\frac{e}{e^2}(2\ln e+1)\\&=\frac{3}{e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to e+}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}&=\lim_{x\to e+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(e)}{x-e}\\&=(f^{-1})'(e)\\&=\frac{1}{f'(f^{-1}(e))}\\&=\frac{1}{f'(1)}\end{aligned}$$

함수 $g(x)$는 $x=e$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to e-}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}=\lim_{x\to e+}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}$

에서

$\frac{3}{e}=\frac{1}{f'(1)}$

$f'(1)=\frac{e}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}b&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-e}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=f'(1)\\&=\frac{e}{3}\end{aligned}$$

이므로

$ab=\frac{1}{e^2}\times\frac{e}{3}=\frac{1}{3e}$

답 ①

3 두 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$ $(t>0)$을 지나는 직선을 l이라 하면 직선 l의 기울기는

$\frac{f(t)-0}{t-0}=\frac{f(t)}{t}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 l의 기울기와 같고, 점 P의 x좌표가 $g(t)$이므로

$f'(g(t))=\frac{f(t)}{t}$ …… ㉠

한편, $h(1)=a$라 하면 $a>0$이고

$g(a)=1$

㉠에서 $f'(g(a))=\frac{f(a)}{a}$, 즉

$f'(1)=\frac{f(a)}{a}$ …… ㉡

이때 $f'(x)=x^3+2x$이므로 ㉡에서

$3=\frac{f(a)}{a}$, $f(a)=3a$

그러므로 $f(a)=\frac{1}{4}a^4+a^2-2=3a$이므로

$a^4+4a^2-12a-8=0$

$(a-2)(a^3+2a^2+8a+4)=0$

$a>0$일 때 $a^3+2a^2+8a+4>0$이므로

$a=2$

그러므로 $h(1)=2$이고 역함수의 미분법에 의하여

$h'(1)=\frac{1}{g'(h(1))}=\frac{1}{g'(2)}$이다.

한편, $f'(g(t))=\frac{f(t)}{t}$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$f''(g(t))g'(t)=\frac{f'(t)\times t-f(t)}{t^2}$$

이므로

$$f''(g(2))g'(2)=\frac{f'(2)\times 2-f(2)}{4}$$

$g(2)=1$이므로

$$f''(1)g'(2)=\frac{f'(2)\times 2-f(2)}{4} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $f''(x)=3x^2+2$이므로 $f''(1)=5$

$f'(2)=12$, $f(2)=6$이므로 ㉢에서

$$5g'(2)=\frac{12\times 2-6}{4}=\frac{9}{2}$$

따라서

$$g'(2)=\frac{9}{10}$$

이므로

$$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=\frac{10}{9}$$

답 ④

수능 기출의 미래

두꺼운 분량을 벗어난 가장 완벽한 기출문제집
쉬운 문항은 간략하고 빠르게,
고난도 문항은 상세하고 심도 있게

05 도함수의 활용

유제

본문 59~67쪽

1 ②	2 ②	3 ③	4 ③	5 ②
6 ②	7 ①	8 ③	9 ①	

1 점 $(a, 0)$이 곡선 $y=x\cos x\ (0<x<\pi)$ 위에 있으므로

$0=a\cos a\ (0<a<\pi)$

에서 $\cos a=0$이므로

$$a=\frac{\pi}{2}$$

$y=x\cos x$에서

$y'=\cos x+x(-\sin x)$

$\quad=\cos x-x\sin x$

이므로 곡선 $y=x\cos x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}\times 1=-\frac{\pi}{2}$$

그러므로 접선의 방정식은

$$y-0=-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

즉, $y=-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{4}$

이므로 y절편은 $b=\frac{\pi^2}{4}$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

답 ②

2 곡선 $x=e^t+t$, $y=e^{-2t}+1$에 대하여 $t=0$일 때

$x=e^0+0=1$, $y=e^0+1=2$

이므로 $t=0$에 대응하는 점의 좌표는 $(1, 2)$이다.

$\frac{dx}{dt}=e^t+1$, $\frac{dy}{dt}=-2e^{-2t}$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2e^{-2t}}{e^t+1}$$

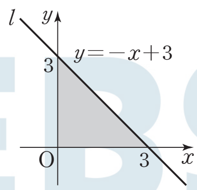
따라서 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{-2e^0}{e^0+1}=-1$

이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=-1\times(x-1)$

즉, $y=-x+3$



직선 l의 x절편과 y절편은 모두 3이므로 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$

답 ②

3 함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 정의역은 $\{x\mid x>0\}$이다.

$y=\dfrac{\ln x}{x}$에서

$$y'=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$$

이므로

$$y''=\dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times2x}{(x^2)^2}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$y''=0$에서 $-3+2\ln x=0$

$\ln x=\dfrac{3}{2}$이므로 $x=e^{\frac{3}{2}}$

$x=e^{\frac{3}{2}}$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 변곡점의 x좌표는 $e^{\frac{3}{2}}$이다.

따라서 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 변곡점의 y좌표는

$\dfrac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$

답 ③

4 $f(x)=\sin^2 x+\sin x$에서

$f'(x)=2\sin x\cos x+\cos x$

$\quad=\cos x(2\sin x+1)$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$0<x<2\pi$이므로

$\cos x=0$에서

$x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

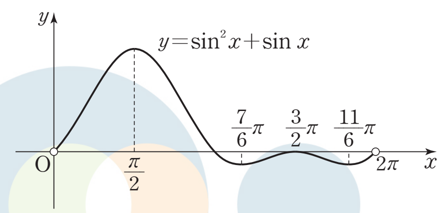
$\sin x=-\dfrac{1}{2}$에서

$x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{7}{6}\pi$와 $x=\dfrac{11}{6}\pi$에서 극소이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{11}{6}\pi-\dfrac{7}{6}\pi$

$\quad=\dfrac{2}{3}\pi$

답 ③

5 함수 $f(x)=x^2\ln\dfrac{1}{x}=-x^2\ln x$는 닫힌구간 $\left[\dfrac{1}{e},\ e\right]$에서 연속이다.

$f(x)=-x^2\ln x\left(\dfrac{1}{e}\le x\le e\right)$에서

$f'(x)=-2x\ln x-x^2\times\dfrac{1}{x}$

$\quad=-x(2\ln x+1)\left(\dfrac{1}{e}<x<e\right)$

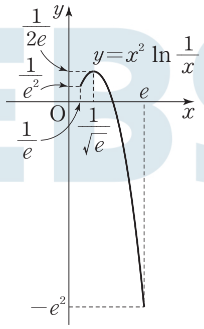
이므로 $f'(x)=0$에서

$\ln x=-\dfrac{1}{2}$

$x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

닫힌구간 $\left[\dfrac{1}{e},\ e\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$-e^2$



따라서 닫힌구간 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2e}$을 갖고, $x=e$일 때 최솟값 $-e^2$을 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$\frac{1}{2e}\times(-e^2)=-\frac{e}{2}$

답 ②

6 $f(x)=(x-a)e^{-x+a}$에서

$f'(x)=e^{-x+a}-(x-a)e^{-x+a}$

$\quad=-(x-a-1)e^{-x+a}$

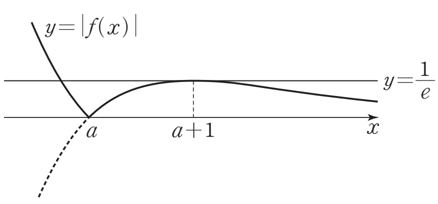
$f'(x)=0$에서 $x=a+1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=a+1$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.

한편, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이므로 곡선 $y=|f(x)|$는 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2이려면

$a=\frac{1}{e}$

이어야 한다.

답 ②

7 $f(x)=a^{x-1}-3x$라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그러므로 부등식 $a^{x-1}-3x>b$를 만족시키는 모든 실수 x의 집합이 $\{x|x$는 $x\neq1$인 실수$\}$이려면 $x=1$일 때 $f(1)=b$이고, $x\neq1$일 때 $f(x)>b$이어야 한다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x=1$일 때 직선 $y=b$와 접해야 하므로 $f'(1)=0$이어야 한다.

$f(1)=a^0-3\times1=1-3=-2$

이므로

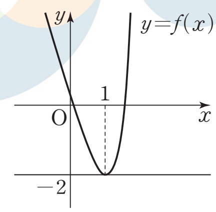
$b=-2$

$f'(x)=a^{x-1}\times\ln a-3$이므로

$f'(1)=a^0\times\ln a-3=0$

에서 $\ln a=3$

즉, $a=e^3$



따라서 $ab=e^3\times(-2)=-2e^3$

답 ①

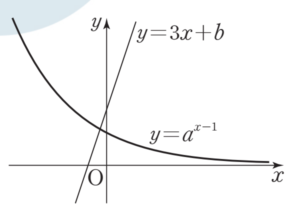
다른 풀이

$a^{x-1}-3x>b \Longleftrightarrow a^{x-1}>3x+b$

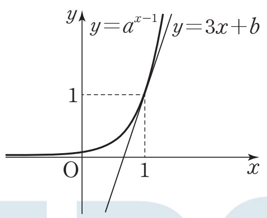
이므로 다음과 같이 곡선 $y=a^{x-1}$과 직선 $y=3x+b$를 이용할 수도 있다.

(i) $0<a<1$일 때

곡선 $y=a^{x-1}$과 직선 $y=3x+b$는 다음 그림과 같으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a>1$일 때



주어진 조건을 만족시키려면 곡선 $y=a^{x-1}$과 직선 $y=3x+b$가 점 $(1,\ 1)$에서 접해야 한다.
이때 직선 $y=3x+b$는 점 $(1,\ 1)$을 지나므로
$1=3+b$에서 $b=-2$
곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 3이므로
$y'=a^{x-1}\times\ln a$에서
$a^0\times\ln a=3$
즉, $a=e^3$
따라서 $ab=e^3\times(-2)=-2e^3$

8 $x=t^2$, $y=e^{t-1}-e^{-t+1}$에서
$\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=e^{t-1}+e^{-t+1}$
이므로
$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^{t-1}-e^{-t+1}$
따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 가속도는
$(2,\ e^{1-1}-e^{-1+1})$, 즉 $(2,\ 0)$
이므로 점 P의 시각 $t=1$에서의 가속도의 크기는
$\sqrt{2^2+0^2}=2$

답 ③

9 점 P가 원점 O$(0,\ 0)$을 지날 때의 시각을 $t=t_0$라 하면
$0=\ln(2-t_0)$이고 $0=(t_0+a)^{\frac{3}{2}}$
에서 $t_0=1$, $a=-1$
즉, $x=\ln(2-t)$, $y=(t-1)^{\frac{3}{2}}$이므로
$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-1}{2-t}=\dfrac{1}{t-2}$,
$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3}{2}(t-1)^{\frac{1}{2}}$
따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 속도는
$\left(\dfrac{1}{1-2},\ \dfrac{3}{2}(1-1)^{\frac{1}{2}}\right)$, 즉 $(-1,\ 0)$
이므로 점 P의 시각 $t=1$에서의 속력은
$\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 68~69쪽

1 ④	2 ③	3 ④	4 ③	5 ①
6 ②	7 ③	8 ⑤		

1 $y=\cos 2x$에서
$y'=(-\sin 2x)\times(2x)'=-2\sin 2x$
이므로 곡선 $y=\cos 2x$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는
$-2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{3}=-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$
따라서 곡선 $y=\cos 2x$ 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은
$y-\dfrac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$
이므로 이 접선의 x절편은
$0-\dfrac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$
에서
$x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\pi+\sqrt{3}}{6}$

답 ④

2 $y=\ln|x-1|$에서 $y'=\dfrac{1}{x-1}$
이므로 곡선 $y=\ln|x-1|$ 위의 점 $(a,\ \ln|a-1|)$에서의 접선의 기울기는
$\dfrac{1}{a-1}$
그러므로 $\dfrac{1}{a-1}=-\dfrac{1}{e}$에서
$a=-e+1$
이때 $\ln|a-1|=\ln|-e|=\ln e=1$이므로 구하는 접선은 점 $(-e+1,\ 1)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{e}$인 직선이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-1=-\dfrac{1}{e}(x+e-1)$
즉, $y=-\dfrac{x}{e}+\dfrac{1}{e}$ ...... ㉠
직선 ㉠의 x절편은 1, y절편은 $\dfrac{1}{e}$이므로 직선 ㉠과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{2e}$

답 ③

3 $f(x)=(x^2+a)e^x$에서

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$

이때 $e^x>0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2x+a\ge0$

이어야 한다.

이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=2^2-4a\le0$

에서

$a\ge1$

따라서 실수 a의 최솟값은 1이다.

답 ④

4 $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}}=e^{\sin x-\cos x}$이므로

$f'(x)=e^{\sin x-\cos x}\times(\sin x-\cos x)'$

$\quad=e^{\sin x-\cos x}(\cos x+\sin x)$

$f'(x)=0$, 즉 $\cos x+\sin x=0$이면 $\cos x\ne0$이므로

$1+\dfrac{\sin x}{\cos x}=0$

$\tan x=-1$

$-\pi<x<\pi$에서 $x=-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi$

열린구간 $(-\pi, \pi)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-\pi)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{\pi}{4}$에서 극솟값

$m=e^{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\quad=e^{-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}$

$\quad=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=e^{-\sqrt{2}}$

을 갖고, $x=\dfrac{3}{4}\pi$에서 극댓값

$M=e^{\sin\frac{3}{4}\pi-\cos\frac{3}{4}\pi}$

$\quad=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=e^{\sqrt{2}}$

을 가지므로

$\dfrac{M}{m}=\dfrac{e^{\sqrt{2}}}{e^{-\sqrt{2}}}$

$\quad=e^{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}$

$\quad=e^{2\sqrt{2}}$

답 ③

5 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$에서

$y'=\dfrac{2^x\ln 2\times(2^x+1)-2^x\times2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}$

$\quad=\ln 2\times\dfrac{2^x}{(2^x+1)^2}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이므로

$y''=\ln 2\times\dfrac{2^x\ln 2\times(2^x+1)^2-2^x\times2(2^x+1)\times2^x\ln 2}{(2^x+1)^4}$

$\quad=(\ln 2)^2 2^x\times\dfrac{2^x+1-2\times2^x}{(2^x+1)^3}$

$\quad=(\ln 2)^2 2^x\times\dfrac{1-2^x}{(2^x+1)^3}$

$y''=0$에서 $1-2^x=0$이므로 $x=0$이고, $x=0$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 0이다.

따라서 곡선 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$의 변곡점에서의 접선의 기울기는 $x=0$일 때의 y'의 값이므로 ㉠에서

$\ln 2\times\dfrac{2^0}{(2^0+1)^2}=\dfrac{\ln 2}{4}$

답 ①

6 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3}$에서

$f'(x)=\dfrac{e^x\times(x^2-3)-e^x\times2x}{(x^2-3)^2}$

$\quad=\dfrac{(x+1)(x-3)e^x}{(x^2-3)^2}$

$2\le x\le4$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=3$

닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e^2	↘	$\frac{e^3}{6}$	↗	$\frac{e^4}{13}$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 $m=\dfrac{e^3}{6}$을 갖는다.

한편, $2<e<3$에서 $4<e^2<9$이므로

$f(2)-f(4)=e^2-\dfrac{e^4}{13}$

$\quad=\dfrac{e^2}{13}\times(13-e^2)>0$

즉, $f(2)>f(4)$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은

$M=f(2)=e^2$

따라서 $\dfrac{m}{M}=\dfrac{\frac{e^3}{6}}{e^2}=\dfrac{e}{6}$

답 ②

7 방정식 $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}=k$가 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=k$가 한 점에서만 만나야 한다.

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}$라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$$
$$=\frac{x\sqrt{x}-8}{4x^2}$$

함수 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$이므로

$f'(x)=0$에서

$x\sqrt{x}=8$, $(\sqrt{x})^3=8$, $\sqrt{x}=2$

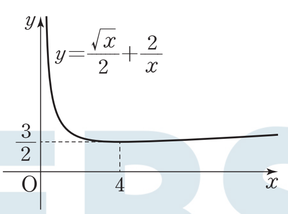
즉, $x=4$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\infty$이므로

함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서만 만나려면

$k=\dfrac{3}{2}$

이어야 하므로 방정식 $\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{2}{x}=k$가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

답 ③

8 $t>0$이므로

$x=t+\ln t^2=t+2\ln t$, $y=t^2+\ln t$

에서

$\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{2}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t+\dfrac{1}{t}$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 속도는

$\left(1+\dfrac{2}{1},\ 2\times1+\dfrac{1}{1}\right)$, 즉 $(3,\ 3)$

이므로 점 P의 시각 $t=1$에서의 속력은

$\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 70~71쪽

1 ③	**2** ③	**3** ①	**4** ①	**5** 108
6 ①	**7** 11	**8** ⑤		

1 $y=(x-1)e^x$에서

$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

이므로 곡선 $y=(x-1)e^x$ 위의 점 $(t,\ (t-1)e^t)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t-1)e^t=te^t(x-t)$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(n,\ 0)$을 지나려면 t에 대한 방정식

$0-(t-1)e^t=te^t(n-t)$, 즉

$e^t\{t^2-(n+1)t+1\}=0$

의 실근이 존재해야 한다.

$e^t\neq0$이므로 이차방정식 $t^2-(n+1)t+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D\geq0$이어야 한다.

$D=(n+1)^2-4=n^2+2n-3$
$\quad=(n+3)(n-1)\geq0$

에서

$n\leq-3$ 또는 $n\geq1$

따라서 음의 정수 n의 최댓값은 -3이다.

답 ③

2 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+\sin x) & (0<x\leq\pi)\\ \ln(1-\sin x) & (\pi<x<2\pi)\end{cases}$

이므로

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{1+\sin x} & (0<x<\pi)\\[2ex] \dfrac{-\cos x}{1-\sin x} & (\pi<x<2\pi)\end{cases}$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$이므로

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

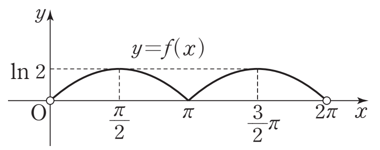
x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	

한편,

$\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}\ln(1+|\sin x|)$

$=\ln(1+0)=0$

이므로 $\lim_{x\to\pi} f(x)=f(\pi)$이다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 연속이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$와 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극대이고, $x=\pi$에서 극소이므로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+\pi=3\pi$

답 ③

3 곡선 $y=f(-x+5)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 곡선 $y=f(x+5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 b이면 곡선 $y=f(x+5)$의 변곡점의 x좌표는 $b-5$이고, 곡선 $y=f(-x+5)$의 변곡점의 x좌표는 $-(b-5)$, 즉 $-b+5$이다.

그러므로 $-b+5=3$에서

$b=2$

$f(x)=xe^{ax}$에서

$f'(x)=e^{ax}+x\times ae^{ax}=(ax+1)e^{ax}$

$f''(x)=ae^{ax}+(ax+1)\times ae^{ax}=a(ax+2)e^{ax}$

이때 $f''(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{a}$이고, $x=-\frac{2}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 $-\frac{2}{a}$이다.

따라서 $-\frac{2}{a}=b=2$에서 $a=-1$이므로

$a+b=-1+2=1$

답 ①

다른 풀이

$g(x)=f(-x+5)$라 하면

$g(x)=(5-x)e^{a(5-x)}$

이므로

$g'(x)=-e^{a(5-x)}+(5-x)\times(-a)e^{a(5-x)}$

$=(ax-5a-1)e^{a(5-x)}$

$g''(x)=ae^{a(5-x)}+(ax-5a-1)\times(-a)e^{a(5-x)}$

$=-a(ax-5a-2)e^{a(5-x)}$

이때 $g''(x)=0$에서 $x=\frac{5a+2}{a}$이고, $x=\frac{5a+2}{a}$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=g(x)$의 변곡점의 x좌표는 $\frac{5a+2}{a}$이다.

그러므로 $\frac{5a+2}{a}=3$이므로

$5a+2=3a$

즉, $a=-1$

이때 $f(x)=xe^{-x}$에서

$f'(x)=e^{-x}+x\times(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=(-1)\times e^{-x}+(1-x)\times(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

이때 $f''(x)=0$에서 $x=2$이고, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 2이다.

따라서 $b=2$이므로

$a+b=-1+2=1$

4 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x^2}>0$이므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=e^{-x^2}$이거나 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-e^{-x^2}$이어야 한다.

곡선 $y=f(x)$가 열린구간 $(-a, a)$에서 아래로 볼록하므로 $-a<x<a$인 모든 실수 x에 대하여

$f''(x)\geq 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이어야 한다.

$g(x)=e^{-x^2}$이라 하면

$g'(x)=e^{-x^2}\times(-x^2)'$

$=-2xe^{-x^2}$

$g''(x)=-2e^{-x^2}-2x\times(-2xe^{-x^2})$

$=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

이때 $g''(0)=2e^0(0-1)=-2<0$이다.
그런데 $f(x)=g(x)$이면 $f''(x)=g''(x)$이고, $f(x)=-g(x)$이면 $f''(x)=-g''(x)$인데 ㉠을 만족시켜야 하므로

$f(x)=-g(x)$

이다. 이때

$$f''(x)=-g''(x)$$
$$=-2e^{-x^2}(2x^2-1)$$

이므로 $f''(x)\ge 0$에서

$2x^2-1\le 0$

즉, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 곡선 $y=f(x)$가 열린구간 $(-a,\ a)$에서 아래로 볼록하도록 하는 양수 a의 값의 범위는

$0<a\le \frac{\sqrt{2}}{2}$

한편, $f'(x)=-g'(x)=2xe^{-x^2}$이므로 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하므로 $f(a)$는 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최댓값

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$=-e^{-\frac{1}{2}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{e}}$$

을 갖는다.

답 ①

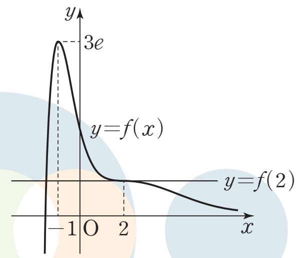
5 $f(x)=(x^3+4)e^{-x}$에서

$$f'(x)=3x^2e^{-x}+(x^3+4)(-e^{-x})$$
$$=-(x^3-3x^2+4)e^{-x}$$
$$=-(x+1)(x-2)^2e^{-x}$$

이므로
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=2$
그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘

이때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+4)e^{-x}=-\infty$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=|f(x)-f(k)|$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(k)$만큼 평행이동한 후, x축보다 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.
그러므로 곡선 $y=f(x)-f(k)$가 x축과 $x=\alpha$에서 만날 때 $f'(\alpha)=0$이면 함수 $|f(x)-f(k)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하고, $f'(\alpha)\neq 0$이면 함수 $|f(x)-f(k)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.
따라서 함수 $|f(x)-f(k)|$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수 a_k는

$$a_k=\begin{cases}1 & (k=2)\\ 2 & (k\neq 2)\end{cases}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+2a_2+\sum_{k=3}^{10}ka_k$$
$$=2+2\times 1+\sum_{k=3}^{10}2k$$
$$=4+2(3+4+\cdots+10)$$
$$=4+2\times\frac{8(3+10)}{2}$$
$$=108$$

답 108

6 직선 AP의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{a+1}(x+1)$

이므로 이 직선의 y절편은

$1-\frac{1}{a+1}=\frac{a}{a+1}$

직선 BP의 방정식은

$y+1=\frac{1}{a-1}(x-1)$

이므로 이 직선의 y절편은

$-1-\frac{1}{a-1}=\frac{a}{1-a}$

두 직선 AP, BP 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{a+1}-\frac{a}{1-a}\right)\times a$$
$$=\frac{a^3}{a^2-1}$$

이므로

$$S'(a)=\frac{3a^2(a^2-1)-a^3\times 2a}{(a^2-1)^2}$$
$$=\frac{a^4-3a^2}{(a^2-1)^2}$$
$$=\frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}$$

$a>1$이므로 $S'(a)=0$에서

$a=\sqrt{3}$

$a=\sqrt{3}$의 좌우에서 $S'(a)$의 부호는 음에서 양으로 변하므로 함수 $S(a)$는 $a=\sqrt{3}$일 때 극소인 동시에 최소이다.

따라서 $S(a)$의 최솟값은

$$S(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

답 ①

7 $g(x)=\sin(\pi\cos x)$라 하면

$g'(x)=\cos(\pi\cos x)\times(\pi\cos x)'$

$=\cos(\pi\cos x)\times(-\pi\sin x)$

$g'(x)=0$에서

$\cos(\pi\cos x)=0$ 또는 $\sin x=0$

$-\pi\le\pi\cos x\le\pi$이므로

$\cos(\pi\cos x)=0$에서

$\pi\cos x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi\cos x=\frac{\pi}{2}$

즉, $\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

이때 $-\pi\le x\le\pi$이므로

$x=-\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

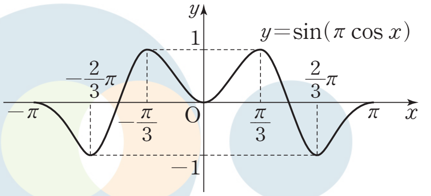
또 $\sin x=0$에서

$x=-\pi,\ 0,\ \pi$

$-\pi\le x\le\pi$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	0
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↗	1	↘	-1	↗	0



한편, 방정식 $\sin(\pi\cos x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수와 같으므로

$$f(t)=\begin{cases}0\ (t<-1\text{ 또는 }t>1)\\2\ (t=-1\text{ 또는 }t=1)\\4\ (-1<t<0\text{ 또는 }0<t<1)\\5\ (t=0)\end{cases}$$

따라서 함수 $f(t)$의 치역은

$\{0,\ 2,\ 4,\ 5\}$

이므로 치역의 모든 원소의 합은

$0+2+4+5=11$

답 11

참고

$g(-x)=\sin\{\pi\cos(-x)\}=\sin(\pi\cos x)=g(x)$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서의 그래프만 그린 다음 대칭성을 이용할 수도 있다.

8 시각 $t=0$일 때의 점 P의 위치가 $(0,\ 0)$이므로

$0=k-\cos 0=k-1$에서

$k=1$

점 P가 다시 원점을 지날 때는

$1-\cos t=0$이고 $2\sin t=0$

즉,

$\cos t=1$이고 $\sin t=0$

이므로

$t=2n\pi$ (n은 자연수)

그러므로 $t_1=2\pi,\ t_2=4\pi$ …… ㉠

$x=1-\cos t,\ y=2\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=\sin t,\ \frac{dy}{dt}=2\cos t$

이므로 시각 $t\ (t>0)$에서의 점 P의 속도는

$(\sin t,\ 2\cos t)$

이고, 점 P의 속력은

$\sqrt{\sin^2 t+(2\cos t)^2}$

$=\sqrt{(\sin^2 t+\cos^2 t)+3\cos^2 t}$

$=\sqrt{1+3\cos^2 t}$

한편,

$\frac{d^2x}{dt^2}=\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-2\sin t$

이므로 시각 $t\ (t>0)$에서의 점 P의 가속도는

$(\cos t,\ -2\sin t)$

이고, 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{\cos^2 t+(-2\sin t)^2}$

$=\sqrt{(\cos^2 t+\sin^2 t)+3\sin^2 t}$

$=\sqrt{1+3\sin^2 t}$

이때 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같은 시각은

$\sqrt{1+3\cos^2 t}=\sqrt{1+3\sin^2 t}$

에서 $\cos^2 t=\sin^2 t$이므로 $\cos t\neq 0$이고

$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=\tan^2 t=1$

그러므로 $\tan t=-1$ 또는 $\tan t=1$

㉠에 의해 $t_1<t<t_2$, 즉 $2\pi<t<4\pi$에서 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같은 시각 t는

$2\pi+\frac{\pi}{4}$, $2\pi+\frac{3}{4}\pi$, $3\pi+\frac{\pi}{4}$, $3\pi+\frac{3}{4}\pi$

의 4개이다. 즉, $m=4$

따라서 $k+m=1+4=5$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 72쪽

1 40 **2** ③ **3** 16

1 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+t$, 즉 $y=e^{-x}+t$에 접하는 직선의 접점의 좌표를 $(s,\ e^{-s}+t)$라 하자.

$y'=-e^{-x}$이므로 접선의 방정식은

$y-(e^{-s}+t)=-e^{-s}(x-s)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(e^{-s}+t)=-e^{-s}(0-s)$

$t=-(s+1)e^{-s}$ …… ㉠

이때 접선의 기울기는 $-e^{-s}$이므로

$f(t)=-e^{-s}$ …… ㉡

㉠의 양변을 s에 대하여 미분하면

$\frac{dt}{ds}=-e^{-s}+(s+1)e^{-s}=se^{-s}$ …… ㉢

㉡의 양변을 s에 대하여 미분하면

$f'(t)\times\frac{dt}{ds}=e^{-s}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$f'(t)\times se^{-s}=e^{-s}$

$s\neq 0$이므로 $f'(t)=\frac{1}{s}$ …… ㉤

한편, $t=t_1$일 때, $s=s_1$이라 하면

㉡에서 $f(t_1)=-e^{-s_1}=-e\sqrt{e}=-e^{\frac{3}{2}}$이면

$s_1=-\frac{3}{2}$이므로 ㉤에서

$f'(t_1)=\frac{1}{s_1}=\frac{1}{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}$

따라서 $60\times|f'(t_1)|=60\times\frac{2}{3}=40$

답 40

2 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 주기가 2π이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+2\pi)=f(x)$ …… ㉠

$f(x)=4\sin^2 x+k\cos x$에서

$f'(x)=8\sin x\cos x-k\sin x$

$=\sin x(8\cos x-k)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{k}{8}$

(i) $k\geq 8$일 때

모든 실수 x에 대하여 $8\cos x-k\leq 0$이므로 함수 $f(x)$는 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값에서만 극값을 갖는다.

그러므로 ㉠을 고려하여 닫힌구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	극소	↗	극대	↘	극소

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=k$뿐이다.

그러므로 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 정수 k의 값은 8, 9, 10이다.

(ii) $k\leq -8$일 때

모든 실수 x에 대하여 $8\cos x-k\geq 0$이므로 함수

$f(x)$는 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값에서만 극값을 갖는다.

그러므로 ㉠을 고려하여 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

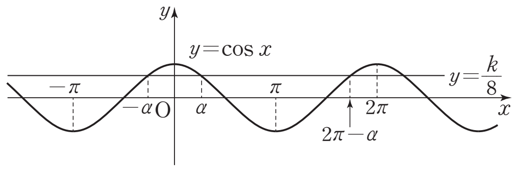
x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	극대	↘	극소	↗	극대

함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극대이므로 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(\pi)=-k$뿐이다.

그러므로 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 정수 k의 값은 -8, -9, -10이다.

(iii) $-8<k<8$일 때

함수 $y=\cos x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



그러므로 방정식 $\cos x=\frac{k}{8}$의 실근 중 가장 작은 양수를 α라 하고, ㉠을 고려하여 닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소

이때 함수 $f(x)$는 $x=-\alpha$와 $x=\alpha$에서 극대이고,

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\frac{k}{8}$일 때

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{k^2}{64}$,

$\sin^2(-\alpha)=(-\sin\alpha)^2=1-\frac{k^2}{64}$

이므로

$$f(-\alpha)=f(\alpha)$$
$$=4\left(1-\frac{k^2}{64}\right)+k\times\frac{k}{8}$$
$$=4+\frac{k^2}{16}$$

이때 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값은 모두

$4+\frac{k^2}{16}$

으로 같으므로 조건 (나)를 만족시키는 $-8<k<8$인 정수 k의 값은 -4, 0, 4이다.

(i)~(iii)에서 구하는 정수 k의 개수는

$3+3+3=9$

답 ③

3 $h(x)=-a\{\log_4(x+1)\}^2+a$라 하면

$$h'(x)=-a\times 2\log_4(x+1)\times\{\log_4(x+1)\}'$$
$$=\frac{-2a\log_4(x+1)}{(x+1)\ln 4}$$

이므로 $h'(x)=0$에서

$\log_4(x+1)=0$

즉, $x=0$

$a>0$이므로 $h'(x)$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀐다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값

$f(0)=h(0)=a$

를 갖고,

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}[-a\{\log_4(x+1)\}^2+a]$$
$$=-a(\log_4 4)^2+a$$
$$=0$$

$$\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$$
$$=2\times e^0+1$$
$$=2+1$$
$$=3$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(2e^{3-x}+1)=1$$

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}[-a\{\log_4(x+1)\}^2+a]$$
$$=-\infty$$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 1)$을 지날 조건은

$$f(1)=-a(\log_4 2)^2+a$$
$$=-a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+a$$
$$=\frac{3}{4}a$$
$$=1$$

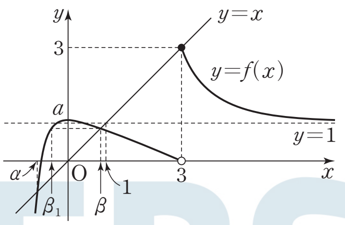
에서

$a=\frac{4}{3}$

방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f(t)=t$를 만족시키는 각각의 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 모든 실수 x가 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근이다.

따라서 양수 a의 값의 범위에 따라 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

(ⅰ) $0<a\le\frac{4}{3}$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, 3 $(\alpha<0<\beta\le1)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, β $(\alpha<\beta_1<0)$이다.

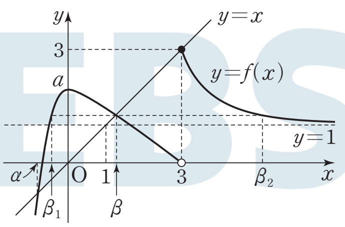
$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 3뿐이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은

α, β_1, β, 3의 4개이므로

$g(a)=4$

(ⅱ) $\frac{4}{3}<a<3$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, 3 $(\alpha<0,\ 1<\beta<3)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, β, β_2 $(\alpha<\beta_1<0,\ \beta_2>3)$이다.

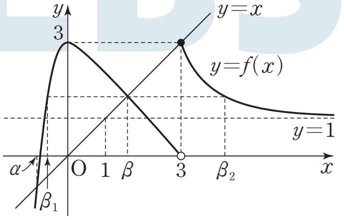
$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 3뿐이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은

α, β_1, β, 3, β_2의 5개이므로

$g(a)=5$

(ⅲ) $a=3$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, 3 $(\alpha<0,\ 1<\beta<3)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, β, β_2 $(\alpha<\beta_1<0,\ \beta_2>3)$이다.

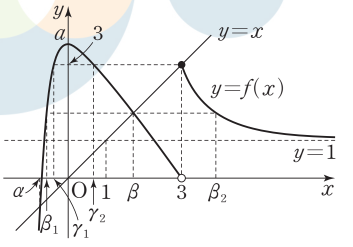
$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 0, 3이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은

α, β_1, 0, β, 3, β_2의 6개이므로

$g(a)=6$

(ⅳ) $a>3$일 때



위 그래프에서 $f(t)=t$를 만족시키는 실수 t는

α, β, 3 $(\alpha<0,\ 1<\beta<3)$

$f(x)=\alpha$를 만족시키는 실수 x의 값은 α뿐이다.

$f(x)=\beta$를 만족시키는 실수 x의 값은 β_1, β, β_2 $(\alpha<\beta_1<0,\ \beta_2>3)$이다.

$f(x)=3$을 만족시키는 실수 x의 값은 γ_1, γ_2, 3 $(\beta_1<\gamma_1<0<\gamma_2<\beta)$이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근은

α, β_1, γ_1, γ_2, β, 3, β_2의 7개이므로

$g(a)=7$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$$g(a)=\begin{cases}4 & \left(0<a\le\frac{4}{3}\right)\\ 5 & \left(\frac{4}{3}<a<3\right)\\ 6 & (a=3)\\ 7 & (a>3)\end{cases}$$

이므로 함수 $g(a)$는 $a=\frac{4}{3}$와 $a=3$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $g(a)$가 $a=k$에서 불연속인 모든 양수 k의 값의 합은

$\frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}$

이므로

$p+q=3+13=16$

답 16

06 여러 가지 적분법

유제 본문 75~81쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ④
6 ④ 7 ① 8 ③

1 $\int_{-1}^{1}|9^x-3^x|\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(3^x-9^x)\,dx+\int_{0}^{1}(9^x-3^x)\,dx$

$=\left[\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{9^x}{\ln 9}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{3^x}{\ln 3}\right]_{0}^{1}$

$=\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{2\ln 3}\right)-\left(\frac{1}{3\ln 3}-\frac{1}{18\ln 3}\right)$

$+\left(\frac{9}{2\ln 3}-\frac{3}{\ln 3}\right)-\left(\frac{1}{2\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\right)$

$=\frac{20}{9\ln 3}$

답 ②

2 $\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$=\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$=\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$=\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}(\sec^2 x+\csc^2 x)\,dx$

$=\left[\tan x-\cot x\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}$

$=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\tan\theta+\cot\theta$

$=\cot\theta-\tan\theta-\tan\theta+\cot\theta$

$=\frac{2}{\tan\theta}-2\tan\theta$

이므로

$\frac{2}{\tan\theta}-2\tan\theta=3$

에서

$2\tan^2\theta+3\tan\theta-2=0$

$(2\tan\theta-1)(\tan\theta+2)=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$

따라서

$\sec^2\theta=\tan^2\theta+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$, 즉 $\cos^2\theta=\frac{4}{5}$

이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

답 ③

3 $\cos x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이고,

$-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^5 x\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^5 x\sin x\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x-1)\cos^5 x(-\sin x)\,dx$

$=\int_{1}^{0}(t^2-1)t^5\,dt$

$=\int_{0}^{1}(-t^7+t^5)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{8}t^8+\frac{1}{6}t^6\right]_{0}^{1}$

$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{24}$

답 ②

다른 풀이

$\sin x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고,

$\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^5 x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x(\cos^2 x)^2\cos x\,dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx$

$=\int_{0}^{1}t^3(1-t^2)^2\,dt$

$=\int_{0}^{1}(t^7-2t^5+t^3)\,dt$

$=\left[\frac{1}{8}t^8-\frac{1}{3}t^6+\frac{1}{4}t^4\right]_{0}^{1}$

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{24}$

4 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x+\tan^5 x}{\cos x}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x(1+\tan^2 x)}{\cos x}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x \sec^3 x\,dx$ …… ㉠

㉠에서 $\sec x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=2$이고,

$\sec x\tan x=\frac{dt}{dx}$, $\tan^2 x=\sec^2 x-1=t^2-1$

이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x\sec^3 x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x\times\sec^2 x\times\sec x\tan x)\,dx$

$\displaystyle=\int_1^2 (t^2-1)t^2\,dt$

$\displaystyle=\int_1^2 (t^4-t^2)\,dt$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{58}{15}$

답 ④

5 $\displaystyle\int_0^3 27e^{3x}(2x^2+x-3)\,dx$에서

$u_1(x)=2x^2+x-3$, $v_1'(x)=27e^{3x}$으로 놓으면

$u_1'(x)=4x+1$, $v_1(x)=9e^{3x}$이므로

$\displaystyle\int_0^3 27e^{3x}(2x^2+x-3)\,dx$

$\displaystyle=\left[9e^{3x}(2x^2+x-3)\right]_0^3-\int_0^3 9e^{3x}(4x+1)\,dx$

$\displaystyle=162e^9+27-\int_0^3 9e^{3x}(4x+1)\,dx$

$\displaystyle\int_0^3 9e^{3x}(4x+1)dx$에서

$u_2(x)=4x+1$, $v_2'(x)=9e^{3x}$으로 놓으면

$u_2'(x)=4$, $v_2(x)=3e^{3x}$이므로

$\displaystyle\int_0^3 9e^{3x}(4x+1)\,dx$

$\displaystyle=\left[3e^{3x}(4x+1)\right]_0^3-\int_0^3 (3e^{3x}\times4)\,dx$

$\displaystyle=39e^9-3-\left[4e^{3x}\right]_0^3$

$=39e^9-3-4e^9+4$

$=35e^9+1$

따라서

$\displaystyle\int_0^3 27e^{3x}(2x^2+x-3)\,dx=162e^9+27-(35e^9+1)$

$=127e^9+26$

답 ④

6 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=-\cos x$이므로

$\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)dx=\int_0^{\pi}(-x^2\cos x)\,dx$ …… ㉠

㉠에서 $u_1(x)=-x^2$, $v_1'(x)=\cos x$로 놓으면

$u_1'(x)=-2x$, $v_1(x)=\sin x$이므로

$\displaystyle\int_0^{\pi}(-x^2\cos x)\,dx$

$\displaystyle=\left[-x^2\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-2x\sin x)\,dx$

$\displaystyle=0+\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx$ …… ㉡

㉡에서 $u_2(x)=2x$, $v_2'(x)=\sin x$로 놓으면

$u_2'(x)=2$, $v_2(x)=-\cos x$이므로

$\displaystyle\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx=\left[-2x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-2\cos x)\,dx$

$\displaystyle=2\pi+\int_0^{\pi}2\cos x\,dx$

$\displaystyle=2\pi+\left[2\sin x\right]_0^{\pi}$

$=2\pi+0=2\pi$

답 ④

7 $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt$

이므로

$\displaystyle x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=e^{3x^2+1}-e$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=6xe^{3x^2+1}$

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=6xe^{3x^2+1}$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6e^{3x^2+1}+6x\times6xe^{3x^2+1}$

$=6(1+6x^2)e^{3x^2+1}$

따라서 $f(1)=42e^4$

답 ①

8 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)dt&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}\\&=2F'(1)\\&=2f(1)=5\end{aligned}$$

즉, $f(1)=\frac{5}{2}$

이때 $f(x)=(2x+k)\sin\frac{\pi x}{6}$에서

$f(1)=(2+k)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2+k}{2}$

이므로

$\frac{2+k}{2}=\frac{5}{2}$

따라서 $k=3$

답 ③

Level 1 **기초 연습** 본문 82쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 ①

1
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}dx&=\int_0^1\frac{x^{\frac{3}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}+1}dx\\&=\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1\right)}{x^{\frac{1}{4}}+1}dx\\&=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1\right)dx\\&=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+x\right]_0^1\\&=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+1\\&=\frac{13}{15}\end{aligned}$$

답 ⑤

2 $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2+x^3}{x}dx=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x}dx+\int_1^{e^2}x^2dx$

$\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이고, $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_0^2t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$

또한 $\displaystyle\int_1^{e^2}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{e^2}=\frac{e^6}{3}-\frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2+x^3}{x}dx&=\frac{8}{3}+\left(\frac{e^6}{3}-\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{e^6+7}{3}\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2+x^3}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이고,

$x=e^t$, $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^2+x^3}{x}dx&=\int_0^2(t^2+e^{3t})dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}e^{3t}\right]_0^2\\&=\left(\frac{8}{3}+\frac{e^6}{3}\right)-\frac{1}{3}\\&=\frac{e^6+7}{3}\end{aligned}$$

3 $\displaystyle\int_1^e(9x^2+1)\ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=9x^2+1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=3x^3+x$이므로

$$\begin{aligned}&\int_1^e(9x^2+1)\ln x\,dx\\&=\Big[(3x^3+x)\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\left\{(3x^3+x)\times\frac{1}{x}\right\}dx\\&=(3e^3+e)-\int_1^e(3x^2+1)dx\\&=(3e^3+e)-\Big[x^3+x\Big]_1^e\\&=(3e^3+e)-(e^3+e)+(1+1)\\&=2e^3+2\end{aligned}$$

답 ④

4 $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=f(x)+2e^{x-1}-5$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)+2\times1-5$

$f(1)=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x)+2e^{x-1}$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=f'(1)+2\times1$

따라서 $f'(1)=f(1)-2=3-2=1$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 83쪽

1 ① 2 ③ 3 ⑤ 4 ⑤

1 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$일 때,

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{2\times\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$$

$$=2f'(x)+f'(x)$$

$$=3f'(x)=3\tan^2x+6$$

이므로

$f'(x)=\tan^2x+2$

그러므로

$$f(x)=\int(\tan^2x+2)\,dx$$

$$=\int(\sec^2x+1)\,dx$$

$=\tan x+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{4}+C=\frac{\pi}{2}$$

이므로

$$C=\frac{\pi}{4}-1$$

따라서

$$f(x)=\tan x+x+\frac{\pi}{4}-1\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-1=-1-1=-2$$

답 ①

2 $\int_0^1 f(3f(x))f'(x)\,dx$에서 $3f(x)=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=3f(0)=0$, $x=1$일 때 $t=3f(1)=3$이고,

$3f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^1 f(3f(x))f'(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt=2$$

즉, $\int_0^3 f(t)\,dt=6$

$\int_5^{\frac{13}{2}} f(2x-4)\,dx$에서 $2x-4=s$로 놓으면

$x=5$일 때 $s=6$, $x=\frac{13}{2}$일 때 $s=9$이고,

$2=\frac{ds}{dx}$이므로

$$\int_5^{\frac{13}{2}} f(2x-4)\,dx=\frac{1}{2}\int_6^9 f(s)\,ds$$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_6^9 f(s)\,ds=\int_0^3 f(s)\,ds$$

따라서

$$\int_5^{\frac{13}{2}} f(2x-4)\,dx=\frac{1}{2}\int_6^9 f(s)\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 f(s)\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\times6=3$$

답 ③

3 $\{f(x)\cos x\}'=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$

이므로 조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\sin x-f'(x)\cos x\}\,dx$$

$$=\Big[-f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=f(0)=1$ …… ㉠

$\{f(x)\sin x\}'=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\cos x+f'(x)\sin x\}\,dx$$

$$=\Big[f(x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}\pi+1$ …… ㉡

$f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)

으로 놓으면 ㉠, ㉡에 의하여

$f(0)=b=1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}a+1=\frac{3}{2}\pi+1$에서 $a=3$

즉, $f(x)=3x+1$

따라서 $\int_0^1 e^x(3x+1)\,dx$에서 $u(x)=3x+1$, $v'(x)=e^x$

으로 놓으면 $u'(x)=3$, $v(x)=e^x$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x f(x)\,dx&=\int_0^1 e^x(3x+1)\,dx\\&=\Big[e^x(3x+1)\Big]_0^1-\int_0^1 3e^x\,dx\\&=4e-1-\Big[3e^x\Big]_0^1\\&=4e-1-3e+3\\&=e+2\end{aligned}$$

답 ⑤

4 $f(t)f'(t)=g(t)$로 놓고 함수 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)f'(t)\,dt&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x g(t)\,dt\\&=\lim_{x\to2}\frac{\Big[G(t)\Big]_2^x}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2}\\&=G'(2)=g(2)=10\end{aligned}$$

즉, $f(2)\times f'(2)=10$이고, $f(2)=2$이므로 $f'(2)=5$

$\int_1^{\frac{x}{2}} f'(2t)\,dt$에서 $2t=s$로 놓으면

$t=1$일 때 $s=2$, $t=\frac{x}{2}$일 때 $s=x$이고, $2=\frac{ds}{dt}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{x}{2}} f'(2t)\,dt&=\frac{1}{2}\int_2^x f'(s)\,ds\\&=\frac{1}{2}\Big[f(s)\Big]_2^x=\frac{f(x)-f(2)}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_1^{\frac{x}{2}} f'(2t)\,dt\\&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{2(x^2-4)}\\&=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{2(x+2)}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}\\&=\frac{1}{8}f'(2)=\frac{1}{8}\times5=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 84쪽

1 859 **2** ④ **3** 32

1 $xf'(x)-f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{3x^2+1}}$

에서

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

이고

$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}'$

이므로

$\frac{f(x)}{x}=\int\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$ …… ㉠

㉠에서 $\sqrt{3x^2+1}=t$로 놓으면

$3x^2+1=t^2$에서 $6x=2t\times\frac{dt}{dx}$, $x=\frac{t}{3}\times\frac{dt}{dx}$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x}&=\int\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx\\&=\int\left(\frac{1}{t}\times\frac{t}{3}\right)dt\\&=\int\frac{1}{3}dt\\&=\frac{1}{3}t+C\\&=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

그러므로

$f(x)=\frac{1}{3}x\sqrt{3x^2+1}+Cx$

이때

$$\begin{aligned}f(1)&=\frac{1}{3}\times1\times2+C\times1\\&=\frac{2}{3}+C\\&=1\end{aligned}$$

이므로 $C=\frac{1}{3}$

즉, $f(x)=\frac{x(\sqrt{3x^2+1}+1)}{3}$이므로

$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4\frac{x(\sqrt{3x^2+1}+1)}{3}dx$ …… ㉡

㉡에서 앞에서와 같이 $\sqrt{3x^2+1}=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=2$, $x=4$일 때 $t=7$이고

$x=\frac{t}{3}\times\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4 \frac{x(\sqrt{3x^2+1}+1)}{3}dx$$
$$=\int_2^7\left(\frac{t+1}{3}\times\frac{t}{3}\right)dt$$
$$=\frac{1}{9}\int_2^7(t^2+t)\,dt$$
$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_2^7$$
$$=\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{343}{3}+\frac{49}{2}\right)-\left(\frac{8}{3}+2\right)\right\}$$
$$=\frac{805}{54}$$

따라서 $p+q=54+805=859$

답 859

2 $f(x)=(2x^2+3)e^x$에서

$f'(x)=4xe^x+(2x^2+3)e^x$

$=\{2(x+1)^2+1\}e^x>0$

이고,

$f(g(x))=x$에서 $f'(g(x))g'(x)=1$이므로

$\frac{1}{f'(g(x))}=g'(x)$

그러므로

$$\int_3^{5e}\frac{x}{f'(g(x))}dx=\int_3^{5e}xg'(x)\,dx$$
$$=\Big[xg(x)\Big]_3^{5e}-\int_3^{5e}g(x)\,dx$$
$$=5e\times g(5e)-3g(3)-\int_3^{5e}g(x)\,dx$$

이때 $f(0)=3$에서 $g(3)=0$, $f(1)=5e$에서 $g(5e)=1$이고,

$$\int_3^{5e}g(x)\,dx=5e-\int_0^1 f(x)dx$$

따라서

$$\int_3^{5e}\frac{x}{f'(g(x))}dx$$
$$=5e\times g(5e)-3g(3)-\int_3^{5e}g(x)\,dx$$
$$=5e\times1-3\times0-5e+\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1(2x^2+3)e^x\,dx$$
$$=\Big[(2x^2+3)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 4xe^x\,dx$$
$$=5e-3-\Big[4xe^x\Big]_0^1+\int_0^1 4e^x\,dx$$
$$=5e-3-4e+\Big[4e^x\Big]_0^1$$
$$=e-3+4e-4$$
$$=5e-7$$

답 ④

3 $\int_0^x(x^3+x)f(xt)\,dt=a\sin x+b\cos x+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=b+c$ …… ㉡

$\int_0^x(x^3+x)f(xt)\,dt$에서 $xt=s$로 놓으면 $t=0$일 때 $s=0$, $t=x$일 때 $s=x^2$이고, $x=\frac{ds}{dt}$이므로

$$\int_0^x(x^3+x)f(xt)\,dt=\int_0^{x^2}(x^2+1)f(s)\,ds$$
$$=(x^2+1)\int_0^{x^2}f(s)ds$$

즉, ㉠에서

$(x^2+1)\int_0^{x^2}f(s)ds=a\sin x+b\cos x+c$ …… ㉢

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x\int_0^{x^2}f(s)ds+(x^2+1)f(x^2)\times2x=a\cos x-b\sin x$$
$$2x\int_0^{x^2}f(s)ds+(2x^3+2x)f(x^2)=a\cos x-b\sin x$$
…… ㉣

㉣의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a$

㉣에 $a=0$을 대입하고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2\int_0^{x^2}f(s)ds+2xf(x^2)\times2x+(6x^2+2)f(x^2)+(2x^3+2x)f'(x^2)\times2x$$
$=-b\cos x$ …… ㉤

㉤의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2f(0)=-b$

$f(0)=2$이므로

$b=-2f(0)=-2\times2=-4$

㉡에서 $c=-b=4$

따라서 $a^2+b^2+c^2=0^2+(-4)^2+4^2=32$

답 32

07 정적분의 활용

유제 본문 87~95쪽

1 1	2 ②	3 ②	4 ③	5 ④
6 ③	7 2	8 ②	9 ②	

1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{(e^2-1)k}{n}\right)\frac{e+1}{n}$

$=\frac{1}{e-1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{(e^2-1)k}{n}\right)\frac{e^2-1}{n}$

$=\frac{1}{e-1}\int_1^{e^2} f(x)\,dx$

$=\frac{1}{e-1}\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$

이때 $\int_1^{e^2} x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int_1^{e^2} x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\times e^4\times\ln e^2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{e^2}$$
$$=e^4-\left(\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}$$

따라서

$$\frac{1}{e-1}\int_1^{e^2} x\ln x\,dx=\frac{1}{e-1}\left(\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}\right)$$

이므로

$p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{4}$

즉, $p+q=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

답 1

2 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{nf\left(\frac{k}{n}\right)}{n^2+2nk+k^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{1+2\times\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}\right\}$

$=\int_0^1\frac{f(x)}{1+2x+x^2}\,dx$

$=\int_0^1\frac{(x+1)\log_2(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$

$=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$

$=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$

$\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$에서 $\ln(x+1)=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=\ln 2$이고, $\frac{1}{x+1}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx=\int_0^{\ln 2}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

따라서

$$\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2$$

답 ②

3 진수의 조건에 의하여 $x>0$이고 $\ln x=0$에서 $x=1$

이때 구간 $(0, 1]$에서 $\ln x\le 0$이고 구간 $[1, \infty)$에서 $\ln x\ge 0$이므로 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$S_1=-\int_{\frac{1}{2}}^1\ln x\,dx$

$\int_{\frac{1}{2}}^1\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\left[x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$$

따라서 $S_1=-\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는

$S_2=\int_1^2\ln x\,dx$

$=\left[x\ln x\right]_1^2-\int_1^2 1\,dx$

$=2\ln 2-\Big[x\Big]_1^2$

$=2\ln 2-(2-1)$

$=2\ln 2-1$

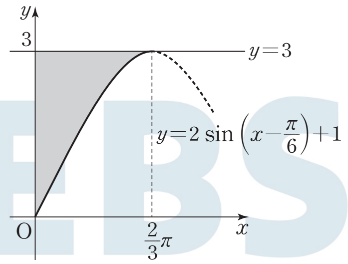
따라서

$S_1+S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+2\ln 2-1$

$=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$

답 ②

4 곡선 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$은 곡선 $y=2\sin x$를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이므로 곡선 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ $\left(0\le x\le\frac{2}{3}\pi\right)$와 y축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



직선 $y=3$과 곡선 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ $\left(0\le x\le\frac{2}{3}\pi\right)$가 만나는 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=3\times\frac{2}{3}\pi-\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left\{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1\right\}dx$

$=2\pi-\left[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$

$=2\pi-\left[\left\{-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2}{3}\pi\right\}+2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\pi-\left(-2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi+2\cos\frac{\pi}{6}\right)$

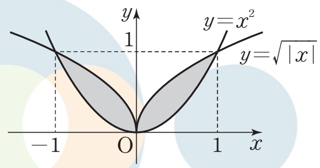
$=2\pi-\left(\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\right)$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

답 ③

5 $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{|x|}$로 놓으면
$f(x)=f(-x)$이고 $g(x)=g(-x)$이므로 두 곡선 $y=x^2$과 $y=\sqrt{|x|}$는 각각 y축에 대하여 대칭이다.

$x\ge 0$에서 방정식 $x^2=\sqrt{|x|}$는 $x^2=\sqrt{x}$, 즉 $x^4=x$이므로
$x^4-x=0$, $x(x-1)(x^2+x+1)=0$
이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식 $D=1^2-4=-3<0$이므로 $x\ge 0$에서 두 곡선 $y=x^2$과 $y=\sqrt{|x|}$가 만나는 점의 x좌표는 0, 1이다.



$0\le x\le 1$에서 $x^2\le\sqrt{x}$이므로 구하는 부분의 넓이를 S라 하면

$S=2\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

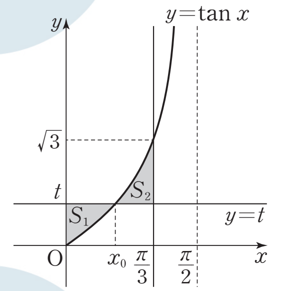
$=2\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$

$=2\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{3}$

답 ④

6



$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\tan x=t$의 근을 x_0이라 하면

$0\le x\le x_0$에서 $t\ge\tan x$이므로

곡선 $y=\tan x$ $\left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)$와 y축 및 직선 $y=t$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$S_1=\int_0^{x_0}(t-\tan x)\,dx$

$x_0\le x\le\frac{\pi}{3}$에서 $t\le\tan x$이므로

곡선 $y=\tan x$ $\left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)$와 두 직선 $y=t$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는

$S_2=\int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x-t)dx$

$S_1=S_2$이므로

$\int_0^{x_0}(t-\tan x)dx=\int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x-t)dx$

$\int_0^{x_0}(t-\tan x)dx-\int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x-t)dx=0$

$\int_0^{x_0}(t-\tan x)dx+\int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}}(t-\tan x)dx=0$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(t-\tan x)dx=0$

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(t-\tan x)dx=\Big[tx+\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{\pi}{3}t+\ln\frac{1}{2}$$

이므로

$\frac{\pi}{3}t+\ln\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}t-\ln 2=0$

따라서 $t=\frac{3}{\pi}\ln 2$

답 ③

참고

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx$$
$$=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\ln|\cos x|+C\ (C\text{는 적분상수})$$

7 $0\le t\le 4$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(\sqrt{t}e^t)^2=te^{2t}$

이므로 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^4 S(t)dt$$
$$=\int_0^4 te^{2t}dt$$

이때 $u(t)=t$, $v'(t)=e^{2t}$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\frac{1}{2}e^{2t}$이므로

$$V=\int_0^4 te^{2t}dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}te^{2t}\Big]_0^4-\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2t}dt$$
$$=2e^8-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}e^{2t}\Big]_0^4$$
$$=2e^8-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^8-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2e^8-\frac{1}{4}e^8+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{7}{4}e^8+\frac{1}{4}$$

따라서 $p=\frac{7}{4}$, $q=\frac{1}{4}$이므로

$p+q=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=2$

답 2

8 $x=t$에서 $\frac{dx}{dt}=1$

$y=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$에서 $\frac{dy}{dt}=2t^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1+\left(2t^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$=1+4t$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{1+4t}\,dt$$

$\int_0^2\sqrt{1+4t}\,dt$에서 $1+4t=k$로 놓으면

$t=0$일 때 $k=1$, $t=2$일 때 $k=9$이고, $4=\frac{dk}{dt}$이므로

$$s=\int_0^2\sqrt{1+4t}\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\int_1^9\sqrt{k}\,dk$$
$$=\frac{1}{4}\Big[\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}\Big]_1^9$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{2}{3}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\times 3^3-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{52}{3}$$
$$=\frac{13}{3}$$

답 ②

9 $x=e^{-t}\sin t$에서

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$$
$$=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$$

$y=e^{-t}\cos t+2$에서

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$$
$$=-e^{-t}(\sin t+\cos t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=\{e^{-t}(-\sin t+\cos t)\}^2+\{-e^{-t}(\sin t+\cos t)\}^2$$
$$=e^{-2t}(1-2\sin t\cos t+1+2\sin t\cos t)$$
$$=2e^{-2t}$$

따라서 $0\le t\le 1$에서 이 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{2e^{-2t}}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\int_0^1 e^{-t}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^1$$
$$=\sqrt{2}\{-e^{-1}-(-1)\}$$
$$=\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

답 ②

Level 1 **기초 연습** 본문 96~97쪽

1 51	**2** ⑤	**3** ④	**4** ③	**5** ③
6 8	**7** ⑤	**8** ①	**9** ③	**10** 3

1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$

$$=\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\int_1^3(3x^2+2x)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\Big[x^3+x^2\Big]_1^3$$
$$=\frac{3}{2}\{(27+9)-(1+1)\}$$
$$=\frac{3}{2}\times 34$$
$$=51$$

답 51

2 $x=0$일 때, $f(0)=0$

$x\neq 0$일 때,

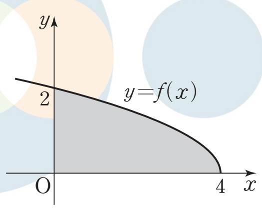
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{xk}{n}}$$
$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{xk}{n}}$$
$$=x^2\int_0^1 e^{xt}\,dt$$
$$=x^2\left[\frac{1}{x}e^{xt}\right]_0^1$$
$$=x^2\times\frac{1}{x}(e^x-1)$$
$$=x(e^x-1)$$

따라서 $f'(x)=(e^x-1)+xe^x$이므로

$$f'(1)=e-1+e$$
$$=2e-1$$

답 ⑤

3 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(4, 0)$, $(0, 2)$를 지나므로 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

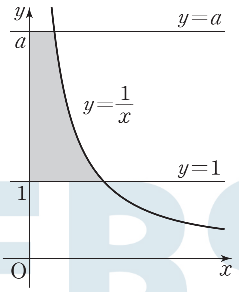
$$S=\int_0^4\sqrt{4-x}\,dx$$

$4-x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=4$, $x=4$일 때 $t=0$이고, $-1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$S=\int_0^4\sqrt{4-x}\,dx$$
$$=-\int_4^0\sqrt{t}\,dt$$
$$=\int_0^4\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\times 2^3=\frac{16}{3}$$

답 ④

4 곡선 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$은 다음 그림과 같다.



$y=\dfrac{1}{x}$에서 $x=\dfrac{1}{y}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{1}^{a}\frac{1}{y}dy$$
$$=\Big[\ln|y|\Big]_{1}^{a}$$
$$=\ln a$$

$\ln a=4$에서 $a=e^4$

답 ③

5 $\sin x=\cos x$ ...... ㉠

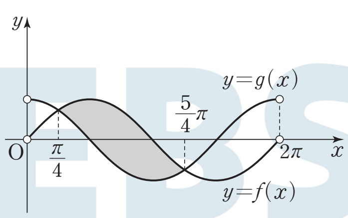
에서 $\cos x=0$이면 $\sin x\neq 0$이므로 $\cos x\neq 0$

즉, ㉠에서 $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x=1$이므로

$0<x<2\pi$에서

$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

그러므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5}{4}\pi$이고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면 $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{5}{4}\pi$에서

$\sin x\ge\cos x$이므로

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$
$$=\left(-\cos\frac{5}{4}\pi-\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

답 ③

6 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는

$f(x)-g(x)=(x^2-4x)e^x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$

$(x^2-4x)e^x\ge 0$에서 $x\le 0$ 또는 $x\ge 4$이고

$(x^2-4x)e^x\le 0$에서 $0\le x\le 4$이므로

$x\le 0$ 또는 $x\ge 4$일 때 $f(x)\ge g(x)$이고

$0\le x\le 4$일 때 $f(x)\le g(x)$이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{4}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=-\int_{0}^{4}(x^2-4x)e^x dx \quad \text{......} ㉠$$

㉠에서 $u_1(x)=x^2-4x$, $v_1{}'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1{}'(x)=2x-4$, $v_1(x)=e^x$이므로

$$S=-\int_{0}^{4}(x^2-4x)e^x dx$$
$$=-\Big[(x^2-4x)e^x\Big]_{0}^{4}+\int_{0}^{4}(2x-4)e^x dx$$
$$=\int_{0}^{4}(2x-4)e^x dx \quad \text{......} ㉡$$

㉡에서 $u_2(x)=2x-4$, $v_2{}'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2{}'(x)=2$, $v_2(x)=e^x$이므로

$$S=\int_{0}^{4}(2x-4)e^x dx$$
$$=\Big[(2x-4)e^x\Big]_{0}^{4}-\int_{0}^{4}2e^x dx$$
$$=4e^4-(-4)-\Big[2e^x\Big]_{0}^{4}$$
$$=4e^4+4-(2e^4-2)$$
$$=2e^4+6$$

따라서 $a=2$, $b=6$이므로

$a+b=8$

답 8

다른 풀이

$S=\int_0^4 \{g(x)-f(x)\}dx$

$=-\int_0^4 (x^2-4x)e^x dx$

$\frac{d}{dx}\{(x^2+px+q)e^x\}=(2x+p)e^x+(x^2+px+q)e^x$

$=\{x^2+(p+2)x+p+q\}e^x$

$=(x^2-4x)e^x$

에서 $p+2=-4$, $p+q=0$이므로

$p=-6$, $q=6$

즉, $\frac{d}{dx}\{(x^2-6x+6)e^x\}=(x^2-4x)e^x$이므로

$S=-\int_0^4 (x^2-4x)e^x dx$

$=-\Big[(x^2-6x+6)e^x\Big]_0^4$

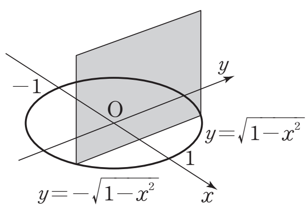
$=-\{(16-24+6)e^4-6\}$

$=2e^4+6$

7 $1-x^2=(1-x)(1+x)\ge 0$에서

$-1\le x\le 1$

이므로 두 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$은 다음 그림과 같다.



$-1\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가

$\sqrt{1-t^2}-(-\sqrt{1-t^2})=2\sqrt{1-t^2}$

인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(2\sqrt{1-t^2})^2=4(1-t^2)$

두 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$은 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 부피를 V라 하면

$V=\int_{-1}^1 S(t)dt$

$=2\int_0^1 4(1-t^2)dt$

$=8\Big[t-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1$

$=8\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=\frac{16}{3}$

답 ⑤

8 $-1\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 빗변의 길이가 $2\sqrt{e^t}$인 직각이등변삼각형이므로 빗변이 아닌 나머지 두 변의 길이는 모두 $\sqrt{2e^t}$이다.

이때 직각이등변삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2e^t}\times\sqrt{2e^t}$

$=e^t$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$V=\int_{-1}^1 S(t)dt$

$=\int_{-1}^1 e^t dt$

$=\Big[e^t\Big]_{-1}^1$

$=e-e^{-1}$

$=e-\frac{1}{e}$

답 ①

9 $x=e^t+e^{-t}$에서 $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$

$y=2t$에서 $\frac{dy}{dt}=2$

$\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2=(e^t-e^{-t})^2+2^2$

$=(e^t+e^{-t})^2$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\ln 4$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_0^{\ln 4}\sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}dt$

$=\int_0^{\ln 4}\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}dt$

$=\int_0^{\ln 4}(e^t+e^{-t})dt$

$=\Big[e^t-e^{-t}\Big]_0^{\ln 4}$

$=e^{\ln 4}-e^{-\ln 4}$

$=4-\frac{1}{4}$

$=\frac{15}{4}$

답 ③

10 $x=\sin t\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=\cos^2 t-\sin^2 t$

$y=\sin^2 t$에서

$\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$=(\cos^2 t-\sin^2 t)^2+(2\sin t\cos t)^2$

$=(\cos^2 t+\sin^2 t)^2$

$=1$

따라서 $0\le t\le 3$에서 이 곡선의 길이를 l이라 하면

$l=\int_0^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=\int_0^3 1dt=\Big[t\Big]_0^3=3$

답 3

Level 2 기본 연습 본문 98~99쪽

1 ③	2 2	3 ③	4 12	5 11
6 10	7 ⑤	8 3		

1 $\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{n+1}\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{n+2}\ln\frac{n+2}{n}+\frac{1}{n+3}\ln\frac{n+3}{n}+\cdots+\frac{1}{n+n}\ln\frac{n+n}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{2}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{1+\frac{n}{n}}\right\}$

$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}$

$=2\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $\ln x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=\ln 2$이고, $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$2\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx=2\int_0^{\ln 2}t\,dt=2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln 2}=(\ln 2)^2$

답 ③

2 (삼각형 ABE의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times$(정사각형 ABCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 4^2=8$

이고, $\overline{\mathrm{BP}_k}:\overline{\mathrm{BE}}=k:n$이므로

$S_k=$(삼각형 ABP_k의 넓이)

$=\frac{k}{n}\times$(삼각형 ABE의 넓이)

$=\frac{k}{n}\times 8$

$=\frac{8k}{n}$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{S_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{8k}{n}}$

$=\int_0^1 e^{8x}dx$

$=\left[\frac{1}{8}e^{8x}\right]_0^1$

$=\frac{1}{8}e^8-\frac{1}{8}$

따라서 $p=\frac{1}{8}$, $q=-\frac{1}{8}$이므로

$8(p-q)=8\times\left\{\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=2$

답 2

참고

점 E에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F라 하면

(삼각형 ABE의 넓이)

$=$(삼각형 AFE의 넓이)$+$(삼각형 FBE의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times$(사각형 AFED의 넓이)$+\frac{1}{2}\times$(사각형 FBCE의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times$(사각형 ABCD의 넓이)

다른 풀이

좌표평면 위에 점 B가 원점, 직선 BC가 x축, 직선 BA가 y축이 되도록 정사각형 ABCD를 놓으면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 4이므로

A$(0, 4)$, B$(0, 0)$, C$(4, 0)$, D$(4, 4)$

점 E는 선분 CD를 $3:1$로 내분하는 점이므로 E$(4, 3)$

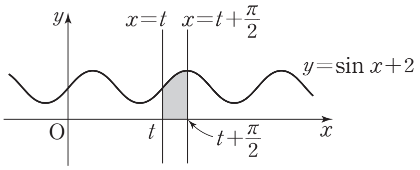
점 P_k는 선분 BE를 $k:(n-k)$로 내분하는 점이므로 점 P_k의 x좌표는

$$\frac{4k}{k+(n-k)}=\frac{4k}{n}$$

따라서 삼각형 ABP_k의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 삼각형 ABP_k의 높이는 점 P_k의 x좌표와 같으므로 삼각형 ABP_k의 넓이 S_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\frac{4k}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4k}{n}$$
$$=\frac{8k}{n}$$

3 곡선 $y=\sin x+2$는 다음 그림과 같다.



구간의 길이가 $\frac{\pi}{2}$로 일정하므로 곡선 $y=\sin x+2$와 x축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이가 최대인 경우는 $t=\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}\pm2\pi$, $\frac{\pi}{4}\pm4\pi$, $\cdots$일 때이고 넓이의 최댓값은 일정하다.

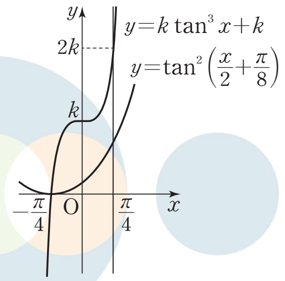
따라서 $t=\frac{\pi}{4}$일 때 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+2)\,dx$$
$$=\Big[-\cos x+2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=-\cos\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi-\left(-\cos\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{2}$$
$$=\sqrt{2}+\pi$$

답 ③

4 $y=\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\tan^2\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$이므로 곡선 $y=\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$는 곡선 $y=\tan^2\frac{x}{2}$를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같다.

한편, $f(x)=k\tan^3x+k$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=k\tan^3x$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=k\tan^3x$는 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(0,\ k)$에 대하여 대칭이다.



곡선 $y=k\tan^3x+k$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=k\tan^3x+k$와 y축 및 직선 $y=2k$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 곡선 $y=k\tan^3x+k$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이는 x축, y축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=2k$로 둘러싸인 직사각형의 넓이와 같다. 즉,

$$S_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(k\tan^3x+k)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\times2k$$
$$=\frac{\pi}{2}k$$

곡선 $y=\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는

$$S_2=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)dx$$

이때 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}=t$로 놓으면

$x=-\frac{\pi}{4}$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\pi}{4}$이고,

$\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$S_2=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2t\,dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2t-1)\,dt$$
$$=2\Big[\tan t-t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2-\frac{\pi}{2}$$

그러므로 $S_1=4S_2$에서

$\frac{\pi}{2}k=4\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$

$k=\frac{16}{\pi}-4$

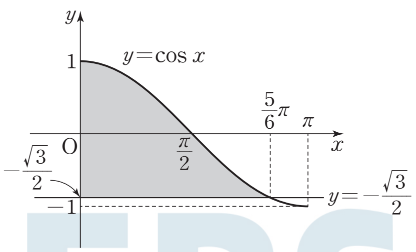
따라서 $a=16$, $b=-4$이므로

$a+b=16+(-4)=12$

답 12

5 $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x=\frac{5}{6}\pi$



곡선 $y=\cos x\ (0\le x\le\pi)$와 y축 및 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\left\{\cos x-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$

$$=\left[\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$=\sin\frac{5}{6}\pi+\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{12}$이므로

$12(a+b)=12\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{12}\right)=11$

답 11

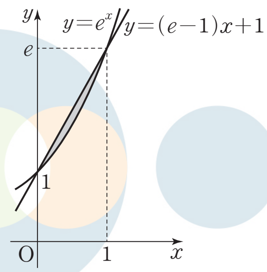
6 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ e)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{e-1}{1-0}(x-0)+1$, 즉 $y=(e-1)x+1$

이므로

$f(x)=(e-1)x+1$

곡선 $y=e^x$과 직선 $y=(e-1)x+1$이 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ e)$에서 만나고 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $(e-1)x+1\ge e^x$이므로 곡선 $y=e^x$과 직선 $y=(e-1)x+1$로 둘러싸인 부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



그러므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\{(e-1)x+1-e^x\}dx$$

$$=\left[\frac{e-1}{2}x^2+x-e^x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{e-1}{2}+1-e\right)-(-1)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e$$

따라서 $p=\frac{3}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$이므로

$10(p+q)=10\left\{\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=10$

답 10

7 $1\le t\le e^2$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $t^{-\frac{1}{2}}(\ln t)^2$인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left\{t^{-\frac{1}{2}}(\ln t)^2\right\}^2$$

$$=\frac{(\ln t)^4}{t}$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_1^{e^2}S(t)dt$$

$$=\int_1^{e^2}\frac{(\ln t)^4}{t}dt$$

이때 $\ln t=k$로 놓으면 $t=1$일 때 $k=0$, $t=e^2$일 때 $k=2$이고 $\frac{1}{t}=\frac{dk}{dt}$이므로

$$V=\int_1^{e^2}\frac{(\ln t)^4}{t}dt$$

$$=\int_0^2 k^4\,dk$$

$$=\left[\frac{1}{5}k^5\right]_0^2$$
$$=\frac{32}{5}$$

답 ⑤

8 점 P가 x축 위에 있는 시각은

$y=2(t-1)e^t=0$에서

$t=1$, 즉 $a=1$

$x=\frac{1}{2}\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)e^{2t}-t$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(2t-1)e^{2t}+\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)e^{2t}-1$$
$$=t^2e^{2t}-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$y=2(t-1)e^t$에서

$$\frac{dy}{dt}=2e^t+2(t-1)e^t$$
$$=2te^t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(t^2e^{2t}-1)^2+(2te^t)^2$$
$$=(t^2e^{2t}+1)^2$$

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2a=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(t^2e^{2t}+1)^2}dt$$
$$=\int_0^2(t^2e^{2t}+1)dt$$

㉠의 결과를 이용하면

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)e^{2t}\right\}=t^2e^{2t}$$

이므로

$$s=\int_0^2(t^2e^{2t}+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)e^{2t}+t\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(4-2+\frac{1}{2}\right)e^4+2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1$$
$$=\frac{5}{4}e^4+\frac{7}{4}$$

따라서 $p=\frac{5}{4}$, $q=\frac{7}{4}$이므로

$$p+q=\frac{5}{4}+\frac{7}{4}=3$$

답 3

Level 3 실력 완성

본문 100쪽

1 10 **2** 4 **3** 2

1 닫힌구간 $[0, m]$을 n등분하였으므로

$x_k-x_{k-1}=\frac{m}{n}$이고 $x_k=\frac{km}{n}$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$

닫힌구간 $[x_{k-1}, x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이 A_k는

$$A_k=f(x_k)\times\frac{m}{n}=f\left(\frac{km}{n}\right)\times\frac{m}{n}$$

이므로

$$g(m)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+mk)^2}A_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n^2}{(n+mk)^2}f\left(\frac{km}{n}\right)\times\frac{m}{n}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{km}{n}\right)^2}f\left(\frac{km}{n}\right)\times\frac{m}{n}\right\}$$
$$=\int_0^m\frac{f(x)}{(1+x)^2}dx$$
$$=\int_0^m\frac{a(x+1)^2+b}{(1+x)^2}dx$$
$$=\int_0^m\{a+b(1+x)^{-2}\}dx$$
$$=\left[ax-b(1+x)^{-1}\right]_0^m$$
$$=am-b(1+m)^{-1}-(-b)$$
$$=am+b-\frac{b}{1+m}$$

$g(1)=a+b-\frac{b}{2}=a+\frac{b}{2}=7$에서

$2a+b=14 \quad \cdots\cdots ㉠$

$g(2)=2a+b-\frac{b}{3}=2a+\frac{2}{3}b=12$에서

$3a+b=18 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=6$

따라서 $a+b=10$

답 10

2 $0\le k\le t$인 실수 k에 대하여 직선 $x=k$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $f(k)$인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(k)$라 하면

$S(k)=\{f(k)\}^2$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_0^t S(k)dk$

$=\int_0^t \{f(k)\}^2 dk$

$V=(t^2+1)e^t-1$이므로

$\int_0^t \{f(k)\}^2 dk=(t^2+1)e^t-1$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\{f(t)\}^2=2te^t+(t^2+1)e^t$

$=(t^2+2t+1)e^t$

$=(t+1)^2e^t$

이고 $t>0$, $f(t)\ge 0$이므로

$f(t)=\sqrt{(t+1)^2e^t}$

$=|t+1|e^{\frac{t}{2}}$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x\ge 0$에서

$f(x)=(x+1)e^{\frac{x}{2}}$

$t=2$일 때 이 입체도형의 밑면의 넓이를 F라 하면

$F=\int_0^2 (x+1)e^{\frac{x}{2}}dx$

이때 $u(x)=x+1$, $v'(x)=e^{\frac{x}{2}}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=2e^{\frac{x}{2}}$이므로

$F=\int_0^2 (x+1)e^{\frac{x}{2}}dx$

$=\Big[2(x+1)e^{\frac{x}{2}}\Big]_0^2-2\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx$

$=(6e-2)-2\Big[2e^{\frac{x}{2}}\Big]_0^2$

$=(6e-2)-2(2e-2)$

$=2e+2$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로

$a+b=4$

답 4

3 $x=\ln t$에서 $e^x=t$이므로

$y=2e^{-\frac{x}{2}}=2(e^x)^{-\frac{1}{2}}=2t^{-\frac{1}{2}}$

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)는

$x=\ln t$, $y=2t^{-\frac{1}{2}}$

$x=\frac{1}{3t}$일 때 $y=\frac{2}{3}\sqrt{3x}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{t}}=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{2}}$이므로

점 Q의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)는

$x=\frac{1}{3t}$, $y=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{2}}$

이때 선분 PQ를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times\frac{1}{3t}+1\times\ln t}{3+1}, \frac{3\times\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{2}}+1\times 2t^{-\frac{1}{2}}}{3+1}\right)$$

즉, $\left(\frac{1}{4t}+\frac{1}{4}\ln t, t^{-\frac{1}{2}}\right)$

이므로 점 R의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)는

$x=\frac{1}{4t}+\frac{1}{4}\ln t$, $y=t^{-\frac{1}{2}}$ …… ㉠

㉠에서 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{4t}$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$이므로

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

$=\left(-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{4t}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right)^2$

$=\frac{1}{16t^4}-\frac{1}{8t^3}+\frac{1}{16t^2}+\frac{1}{4}t^{-3}$

$=\frac{1}{16t^4}-\frac{1}{8t^3}+\frac{1}{16t^2}+\frac{1}{4t^3}$

$=\frac{1}{16t^4}+\frac{1}{8t^3}+\frac{1}{16t^2}$

$=\left(\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{4t}\right)^2$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 R가 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{4t}\right)^2}dt$

$=\int_1^e \left(\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{4t}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\int_1^e \left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\Big[-\frac{1}{t}+\ln|t|\Big]_1^e$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(-\frac{1}{e}+1\right)-(-1+0)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{e}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4e}$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{4}$이므로

$8(p+q)=8\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=2$

답 2