수능특강 수학영역 **기하**

정답과 풀이

01 포물선

유제 본문 5~9쪽

1 40　2 ④　3 ②　4 ②　5 ①
6 ①

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ③　2 ①　3 ③　4 20　5 ④
6 ⑤　7 ②　8 ③

Level 2 기본 연습 본문 12~13쪽

1 ④　2 ④　3 17　4 ⑤　5 6
6 ②

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ③　2 ⑤　3 80

02 타원

유제 본문 17~21쪽

1 ②　2 ④　3 15　4 ③　5 ④
6 6

Level 1 기초 연습 본문 22~23쪽

1 ⑤　2 ③　3 ④　4 ⑤　5 ①
6 ⑤　7 8　8 ②

Level 2 기본 연습 본문 24~25쪽

1 ②　2 ①　3 23　4 ④　5 ②
6 72

Level 3 실력 완성 본문 26쪽

1 ⑤　2 33　3 157

03 쌍곡선

유제 본문 29~33쪽

1 28　2 ④　3 ⑤　4 ③　5 ④
6 ①

Level 1 기초 연습 본문 34~35쪽

1 ④　2 ④　3 6　4 ①　5 ③
6 ②　7 ②　8 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 36~37쪽

1 ⑤　2 6　3 ①　4 ④　5 ②
6 12

Level 3 실력 완성 본문 38쪽

1 ④　2 2　3 ⑤

04 벡터의 연산

유제 본문 41~49쪽

1 ③　2 ③　3 ④　4 4　5 ②
6 ②　7 ②　8 6　9 ⑤　10 ④

Level 1 기초 연습 본문 50~51쪽

1 ④　2 ③　3 ④　4 ④　5 ④
6 ②　7 ①　8 ③　9 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 52~53쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ② 4 ④ 5 80
6 ④

Level 3 실력 완성 본문 54쪽

1 ④ 2 15 3 12

05 벡터의 내적, 직선과 원의 방정식

유제 본문 57~63쪽

1 ④ 2 ① 3 ⑤ 4 ② 5 ①
6 ③ 7 ① 8 ②

Level 1 기초 연습 본문 64~65쪽

1 ① 2 ④ 3 ⑤ 4 ① 5 ①
6 ④ 7 ③ 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 66~67쪽

1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 ③ 5 ②
6 ②

Level 3 실력 완성 본문 68~69쪽

1 24 2 ③ 3 16 4 ③ 5 7

06 공간도형

유제 본문 73~79쪽

1 6 2 ① 3 ⑤ 4 ① 5 ④

Level 1 기초 연습 본문 80~81쪽

1 10 2 ① 3 ② 4 10 5 ②
6 ⑤ 7 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 82~83쪽

1 ③ 2 ① 3 65 4 ④ 5 ③
6 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 84~85쪽

1 ② 2 ④ 3 ④ 4 22 5 ③

07 공간좌표

유제 본문 89~95쪽

1 ③ 2 ② 3 ② 4 ② 5 ⑤
6 ⑤ 7 6 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ① 4 ① 5 ①
6 ③ 7 ⑤ 8 ①

Level 2 기본 연습 본문 98~99쪽

1 ④ 2 11 3 ② 4 ② 5 ⑤
6 201 7 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 100~101쪽

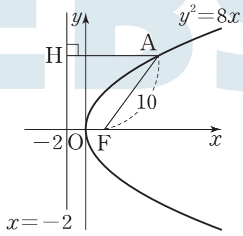
1 ① 2 ④ 3 ④ 4 209 5 42

01 포물선

유제 본문 5~9쪽

1 40　2 ④　3 ②　4 ②　5 ①
6 ①

1



초점이 F(2, 0)이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2=8x$이고, 이 포물선의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AH}=\overline{AF}=10$

이때 점 A의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$이라 하면 $a=8$이고, 점 A가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$b^2=64$

$b>0$이므로 $b=8$

즉, A(8, 8)

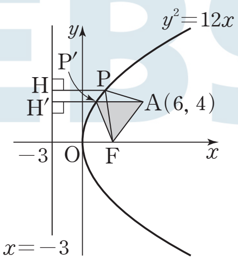
따라서 직선 AF의 기울기 k는

$k=\frac{8-0}{8-2}=\frac{4}{3}$

이므로 $30k=30\times\frac{4}{3}=40$

답 40

2



포물선 $y^2=12x$의 초점은 F(3, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PH}$

또 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PF}+\overline{PA}=\overline{PH}+\overline{PA}\geq\overline{AH'}$

그러므로 $\overline{PF}+\overline{PA}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P, 즉 점 P′은 선분 AH′과 포물선이 만나는 점이다.

이때 점 P′의 y좌표가 4이므로

$4^2=12x$에서 $x=\frac{4}{3}$

즉, $\mathrm{P'}\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

따라서 삼각형 AP′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(6-\frac{4}{3}\right)\times4=\frac{28}{3}$

답 ④

3 $x^2-8x=4y$에서 $(x-4)^2=4(y+4)$

포물선 $(x-4)^2=4(y+4)$는 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표는 (0, 1)이므로 포물선 $(x-4)^2=4(y+4)$의 초점 F의 좌표는

$(0+4, 1-4)$, 즉 $(4, -3)$

따라서 $\overline{OF}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

답 ②

4 $y=\frac{1}{2}x+k$를 $y^2=8x$에 대입하면

$\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=8x$

$\frac{1}{4}x^2+(k-8)x+k^2=0$ ...... ㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(k-8)^2-4\times\frac{1}{4}\times k^2=-16k+64$

$D>0$일 때, 즉 $k<4$일 때 직선과 포물선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(k)=2$

$D=0$일 때, 즉 $k=4$일 때 직선과 포물선이 접하므로

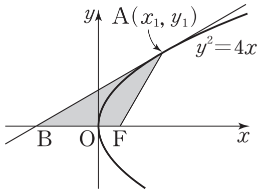
$f(4)=1$

$D<0$일 때, 즉 $k>4$일 때 직선과 포물선이 만나지 않으므로 $f(k)=0$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}f(k)=2\times3+1+0\times6=7$

답 ②

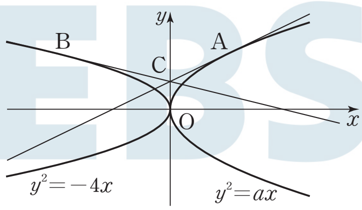
5



포물선 $y^2=4x$의 초점은 F$(1,\ 0)$이다.
점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 A$(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$y_1y=2\times1\times(x+x_1)$, 즉 $y_1y=2(x+x_1)$
그러므로 B$(-x_1,\ 0)$이고, 점 B의 x좌표가 -3이므로
$-x_1=-3$에서 $x_1=3$
이때 점 A$(x_1,\ y_1)$이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로
${y_1}^2=4\times3=12$
$y_1>0$이므로 $y_1=2\sqrt{3}$
따라서 A$(3,\ 2\sqrt{3})$이므로 삼각형 ABF의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

답 ①

6



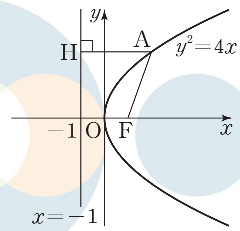
두 직선 AC, BC의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하면
$m_1m_2=-\frac{1}{8}$ …… ㉠
포물선 $y^2=-4x$에 접하고 기울기가 m_2인 직선의 방정식은
$y=m_2x+\frac{-1}{m_2}$
이 직선이 점 C$(0,\ 4)$를 지나므로
$-\frac{1}{m_2}=4$, $m_2=-\frac{1}{4}$
$m_2=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $m_1=\frac{1}{2}$
포물선 $y^2=ax$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은
$y=\frac{1}{2}x+\frac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}}$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$
이 직선이 점 C$(0,\ 4)$를 지나므로 $\frac{a}{2}=4$
따라서 $a=8$

답 ①

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ③	2 ①	3 ③	4 20	5 ④
6 ⑤	7 ②	8 ③		

1



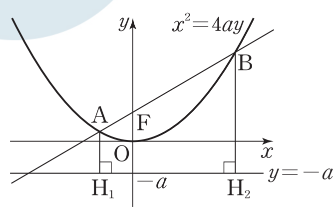
포물선 $y^2=4x$의 초점은 F$(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.
즉, $\overline{AF}=3\overline{OF}=3\times1=3$
점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AH}=\overline{AF}=3$
점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면
$\overline{AH}=3$이므로 $x_1+1=3$에서 $x_1=2$
${y_1}^2=4x_1=8$에서 $y_1>0$이므로 $y_1=2\sqrt{2}$
따라서 A$(2,\ 2\sqrt{2})$이므로
$\overline{OA}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

답 ③

2 초점이 F$(3,\ 2)$이고 준선의 방정식이 $x=-1$인 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 이 포물선은 초점이 점 $(2,\ 0)$이고 직선 $x=-2$가 준선인 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
즉, 포물선의 방정식은 $(y-2)^2=8(x-1)$
$y^2-4y-8x+12=0$
따라서 $a=-4$, $b=-8$, $c=12$이므로
$a+b+c=(-4)+(-8)+12=0$

답 ①

3



초점이 $\mathrm{F}(0,\ a)$이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은 $x^2=4ay$이고, 이 포물선의 준선의 방정식은 $y=-a$이다.
두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH_1}}=\frac{1}{2}+a$, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BH_2}}=\frac{9}{2}+a$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=8$이므로

$\left(\frac{1}{2}+a\right)+\left(\frac{9}{2}+a\right)=8$, $2a+5=8$

따라서 $a=\frac{3}{2}$

답 ③

4 포물선 $y^2=ax$의 초점은 $\mathrm{F_1}\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$이다.

$y^2-8y=ax$에서

$y^2-8y+16=ax+16$, 즉 $(y-4)^2=a\left(x+\frac{16}{a}\right)$

포물선 $(y-4)^2=a\left(x+\frac{16}{a}\right)$은 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 $-\frac{16}{a}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 포물선 $(y-4)^2=a\left(x+\frac{16}{a}\right)$의 초점 $\mathrm{F_2}$의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}-\frac{16}{a},\ 4\right)$이다.

점 $\mathrm{F_2}$가 y축 위의 점이므로 $\frac{a}{4}-\frac{16}{a}=0$, $\frac{16}{a}=\frac{a}{4}$, $a^2=64$

$a>0$이므로 $a=8$
따라서 두 포물선의 방정식은 각각 $y^2=8x$, $y^2-8y=8x$이고 $\mathrm{F_1}(2,\ 0)$, $\mathrm{F_2}(0,\ 4)$이므로
$\overline{\mathrm{F_1F_2}}^2=(0-2)^2+(4-0)^2=20$

답 20

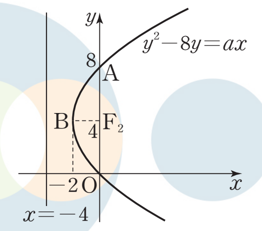
다른 풀이

포물선 $y^2=ax$의 초점은 $\mathrm{F_1}\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$이다.

포물선 $y^2-8y=ax$는 원점 O를 지나고, 이 포물선과 y축의 교점을 구하기 위해 $y^2-8y=ax$에 $x=0$을 대입하면
$y^2-8y=0$, $y(y-8)=0$
$y=0$ 또는 $y=8$
즉, 포물선 $y^2-8y=ax$는 y축과 서로 다른 두 점에서 만나고 원점이 아닌 점을 A라 하면 $\mathrm{A}(0,\ 8)$이다. 이때 포물선 $y^2-8y=ax$의 초점 $\mathrm{F_2}$가 y축 위에 있고, 이 포물선은 점 $\mathrm{F_2}$를 지나고 x축에 평행한 직선에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{F_2}(0,\ 4)$이다.

$\overline{\mathrm{OF_2}}=\overline{\mathrm{AF_2}}=4$이므로 포물선의 정의에 의하여 포물선 $y^2-8y=ax$의 준선의 방정식은 $x=-4$이고, 포물선 $y^2-8y=ax$의 꼭짓점을 B라 하면

$\overline{\mathrm{BF_2}}=\frac{1}{2}\times 4=2$에서 $\mathrm{B}(-2,\ 4)$



점 B는 포물선 $y^2-8y=ax$ 위의 점이므로
$4^2-8\times 4=-2a$, $a=8$
따라서 $\mathrm{F_1}(2,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{F_1F_2}}^2=(0-2)^2+(4-0)^2=20$

5 점 $(4,\ b)$가 포물선 $y^2=ax$ 위의 점이므로

$b^2=4a$ …… ㉠

$y^2=ax=4\times\frac{a}{4}\times x$이므로 포물선 $y^2=ax$ 위의 점 $(4,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2\times\frac{a}{4}\times(x+4)$, $y=\frac{a}{2b}(x+4)$

이 직선의 기울기가 1이므로

$\frac{a}{2b}=1$에서 $b=\frac{a}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{a^2}{4}=4a$, $a^2-16a=0$, $a(a-16)=0$

$a>0$이므로 $a=16$
㉡에서 $b=8$
따라서 $a+b=16+8=24$

답 ④

6 포물선 $y^2=8(x-k)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y^2=8x=4\times 2\times x$이므로 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 포물선 $y^2=8x$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{\frac{2}{3}}$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+3$ …… ㉠

구하는 직선의 방정식은 직선 ㉠을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식과 같으므로 $y=\frac{2}{3}(x-k)+3$

즉, $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}k+3$ …… ㉡

직선 ㉡이 원점을 지나므로

$0=-\frac{2}{3}k+3$, $\frac{2}{3}k=3$

따라서 $k=\frac{9}{2}$

답 ⑤

다른 풀이

주어진 직선은 기울기가 $\frac{2}{3}$이고 원점을 지나므로 이 직선의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x$

$y=\frac{2}{3}x$를 포물선의 방정식 $y^2=8(x-k)$에 대입하면

$\frac{4}{9}x^2=8(x-k)$

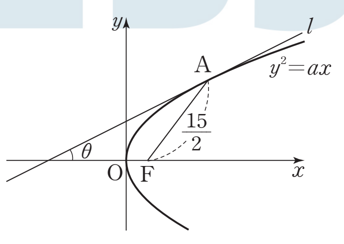
$x^2-18x+18k=0$ …… ㉠

직선과 포물선이 접하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

즉, $\frac{D}{4}=9^2-18k=0$

따라서 $k=\frac{9}{2}$

7



포물선 $y^2=ax$의 초점은 $F\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$이다.

점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로 $x_1>0$, $y_1>0$이다.

포물선 $y^2=ax$ 위의 점 $A(x_1,\ y_1)$에서의 접선 l의 방정식은

$y_1y=2\times\frac{a}{4}\times(x+x_1)$

즉, $y_1y=\frac{a}{2}(x+x_1)$ …… ㉠

$\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이고, ㉠에서 직선 l의 기울기가 $\frac{a}{2y_1}$이므로

$\frac{a}{2y_1}=\frac{1}{2}$에서 $y_1=a$

이때 점 $A(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=ax$ 위의 점이므로

${y_1}^2=ax_1$에서 $a^2=ax_1$, $x_1=a$

즉, $A(a,\ a)$

따라서 $\overline{AF}=\sqrt{\left(a-\frac{a}{4}\right)^2+a^2}=\frac{5}{4}a$이므로

$\frac{5}{4}a=\frac{15}{2}$에서 $a=6$

답 ②

다른 풀이

점 A의 좌표는 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

$\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로 포물선 $y^2=ax$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

이때 포물선 $y^2=ax$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선은 포물선 위의 제1사분면에 있는 점에서 만난다. 즉, 점 A는 포물선 $y^2=ax$ 위의 제1사분면에 있는 점이고, 이때 점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$으로 놓으면

${y_1}^2=ax_1$ …… ㉠

포물선 $y^2=ax$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}}$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

점 $A(x_1,\ y_1)$이 이 직선 위의 점이므로

$y_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{a}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

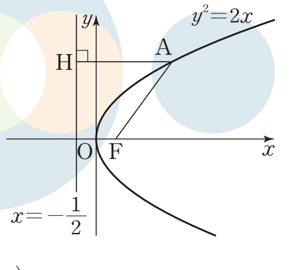
$\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{a}{2}\right)^2=ax_1$, $\frac{1}{4}(x_1+a)^2=ax_1$, $(x_1-a)^2=0$

즉, $x_1=a$

㉠에서 ${y_1}^2=a^2$이고, $y_1>0$이므로 $y_1=a$

그러므로 $A(a,\ a)$

8



초점이 $F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은 $y^2=4\times\frac{1}{2}\times x=2x$이고, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$이다.

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AH}=\overline{AF}=\frac{5}{2}$

점 A의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하면

$x_1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$에서 $x_1=2$

${y_1}^2=2x_1=4$에서 $y_1>0$이므로 $y_1=2$

즉, A$(2, 2)$

이때 직선 AF의 기울기는 $\frac{2-0}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$이므로 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 포물선 $y^2=2x$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\frac{4}{3}x+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}$, 즉 $y=\frac{4}{3}x+\frac{3}{8}$

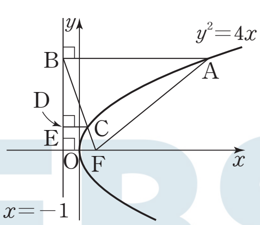
따라서 이 직선의 y절편은 $\frac{3}{8}$이다.

답 ③

Level 2 **기본 연습** 본문 12~13쪽

1 ④ **2** ④ **3** 17 **4** ⑤ **5** 6
6 ②

1 포물선 $y^2=4x$의 초점은 F$(1, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.



$\overline{CF}=a$ $(a>0)$이라 하면 $\overline{BC}=3a$

점 C에서 준선에 내린 수선의 발을 D라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{CF}=\overline{CD}=a$

포물선의 준선이 x축과 만나는 점을 E라 하면 두 삼각형 BDC, BEF가 서로 닮음이므로

$\overline{BF}:\overline{EF}=\overline{BC}:\overline{DC}=3:1$

즉, $4a:2=3:1$에서 $a=\frac{3}{2}$

직각삼각형 BEF에서 $\overline{BF}=4\times\frac{3}{2}=6$이므로

$\overline{BE}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

즉, 점 A의 y좌표가 $4\sqrt{2}$이므로 점 A의 x좌표를 x_1이라 하면

$32=4x_1$에서 $x_1=8$

그러므로 A$(8, 4\sqrt{2})$

따라서 삼각형 ABF의 둘레의 길이는

$\overline{FA}+\overline{AB}+\overline{BF}=2\overline{AB}+\overline{BF}$

$=2\times\{8-(-1)\}+6$

$=18+6=24$

답 ④

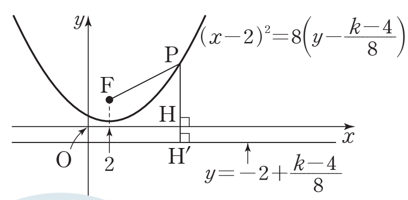
2 $x^2-4x-8y+k=0$에서

$x^2-4x=8y-k$, $x^2-4x+4=8y-k+4$

즉, $(x-2)^2=8\left(y-\frac{k-4}{8}\right)$

포물선 $(x-2)^2=8\left(y-\frac{k-4}{8}\right)$는 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $\frac{k-4}{8}$만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=8y$의 초점의 좌표가 $(0, 2)$이고 준선의 방정식이 $y=-2$이므로 포물선 $(x-2)^2=8\left(y-\frac{k-4}{8}\right)$의 초점 F의 좌표는 $\left(2, 2+\frac{k-4}{8}\right)$이고 준선의 방정식은 $y=-2+\frac{k-4}{8}$이다.



$k>4$이므로 포물선 $(x-2)^2=8\left(y-\frac{k-4}{8}\right)$ 위의 임의의 점 P에 대하여 점 P의 y좌표는 양수이고, 이때 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH'}$이므로 $\overline{PF}>\overline{PH}$이기 위해서는 $\overline{PH'}>\overline{PH}$이어야 한다.

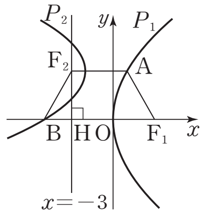
즉, 준선이 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로

$-2+\frac{k-4}{8}<0$에서 $\frac{k-4}{8}<2$, $k<20$

이때 $k>4$이므로 가능한 자연수 k는 5, 6, 7, ⋯, 19이고, 그 개수는 15이다.

답 ④

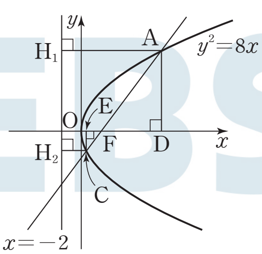
3



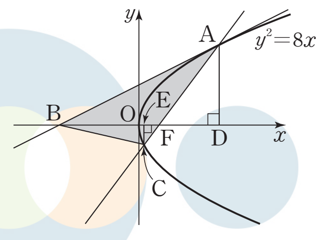
포물선 P_1: $y^2=12x$의 초점은 $F_1(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.
포물선 P_2: $(y-b)^2=4p(x-a)$는 포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 포물선 P_2의 초점 F_2의 좌표는 $(p+a,\ b)$이고 준선의 방정식은 $x=-p+a$이다.
$\overline{F_1A}=\overline{AF_2}=4$이므로 점 F_2는 직선 $x=-3$ 위에 있음을 알 수 있다.
점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면
$x_1=-3+4=1$
점 $A(x_1,\ y_1)$이 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로
${y_1}^2=12x_1=12$
$y_1>0$이므로 $y_1=2\sqrt{3}$
즉, $A(1,\ 2\sqrt{3})$이고 $F_2(-3,\ 2\sqrt{3})$
그러므로 $b=2\sqrt{3}$, $p+a=-3$ …… ㉠
점 F_2에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 사각형 AF_2BF_1이 등변사다리꼴이므로 $\overline{BH}=2$
즉, $B(-5,\ 0)$
이때 $\overline{F_2B}=4$이므로 포물선의 정의에 의하여 포물선 P_2의 준선의 방정식은 $x=-1$임을 알 수 있다.
즉, $-p+a=-1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $p=-1$
따라서 $a^2+b^2+p^2=(-2)^2+(2\sqrt{3})^2+(-1)^2=17$

답 17

4



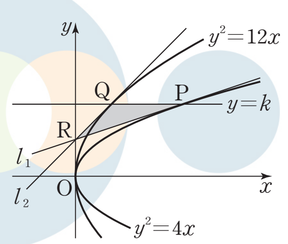
포물선 $y^2=8x$의 초점은 $F(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
$\overline{AF}:\overline{CF}=4:1$이므로 $\overline{CF}=k$ $(k>0)$이라 하면
$\overline{AF}=4k$
두 점 A, C에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AH_1}=\overline{AF}=4k$, $\overline{CH_2}=\overline{CF}=k$
이므로 두 점 A, C의 x좌표는 각각 $4k-2$, $k-2$이다.
또 두 점 A, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 $D(4k-2,\ 0)$, $E(k-2,\ 0)$
이때 삼각형 AFD와 삼각형 CFE는 서로 닮음이고 그 닮음비가 $4:1$이므로 $\overline{DF}:\overline{EF}=4:1$에서
$(4k-4):(4-k)=4:1$
$16-4k=4k-4$, $k=\frac{5}{2}$
즉, $D(8,\ 0)$, $E\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$이고, $A(8,\ 8)$, $C\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$이다.
한편, 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $A(8,\ 8)$에서의 접선의 방정식은
$8y=2\times2\times(x+8)$, $y=\frac{1}{2}(x+8)$
즉, $B(-8,\ 0)$



따라서 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABF와 삼각형 CBF의 넓이의 합과 같으므로
$\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{AD}+\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{CE}$
$=\frac{1}{2}\times10\times8+\frac{1}{2}\times10\times2=50$

답 ⑤

5



두 점 P, Q의 좌표를 구해 보자.
$y^2=4x$에 $y=k$를 대입하면 $k^2=4x$에서 $x=\frac{k^2}{4}$
즉, $P\left(\frac{k^2}{4},\ k\right)$

$y^2=12x$에 $y=k$를 대입하면 $k^2=12x$에서 $x=\dfrac{k^2}{12}$

즉, $\text{Q}\left(\dfrac{k^2}{12},\ k\right)$

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\text{P}\left(\dfrac{k^2}{4},\ k\right)$에서의 접선 l_1의 방정식은

$ky=2\times1\times\left(x+\dfrac{k^2}{4}\right)$, 즉 $y=\dfrac{2}{k}x+\dfrac{k}{2}$

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $\text{Q}\left(\dfrac{k^2}{12},\ k\right)$에서의 접선 l_2의 방정식은

$ky=2\times3\times\left(x+\dfrac{k^2}{12}\right)$, 즉 $y=\dfrac{6}{k}x+\dfrac{k}{2}$

두 직선 l_1, l_2의 y절편이 $\dfrac{k}{2}$로 같으므로 $\text{R}\left(0,\ \dfrac{k}{2}\right)$

이때 $\overline{\text{PQ}}=\dfrac{k^2}{4}-\dfrac{k^2}{12}=\dfrac{k^2}{6}$이고, 삼각형 PQR의 넓이가 9이므로

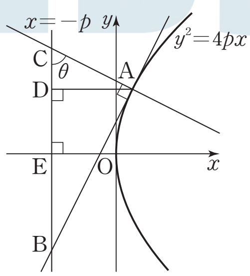
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{k^2}{6}\times\left(k-\dfrac{k}{2}\right)=9$에서

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{k^2}{6}\times\dfrac{k}{2}=9$, $k^3=6^3$

따라서 $k>0$이므로 $k=6$

답 6

6



포물선 $y^2=4px$의 초점의 좌표는 $(p,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 D, 준선이 x축과 만나는 점을 E라 하자.

$\angle\text{ACB}=\angle\text{BAD}=\theta$이고, 조건 (가)에서 $\tan\theta=2$이므로 직선 AB는 기울기가 2이고 포물선 $y^2=4px$에 접하는 직선이다. 이때 직선 AB의 방정식은

$y=2x+\dfrac{p}{2}$ …… ㉠

점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$으로 놓으면 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\text{A}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$, 즉 $y=\dfrac{2p}{y_1}x+\dfrac{2px_1}{y_1}$ …… ㉡

㉠과 ㉡은 같은 직선이므로

$\dfrac{2p}{y_1}=2$에서 $y_1=p$

$\dfrac{2px_1}{y_1}=\dfrac{p}{2}$에서 $x_1=\dfrac{p}{4}$

즉, $\text{A}\left(\dfrac{p}{4},\ p\right)$

한편, $\overline{\text{CD}}=k$ $(k>0)$으로 놓으면 조건 (가)에 의하여

$\overline{\text{AD}}=\overline{\text{CD}}\tan\theta=2k$, $\overline{\text{BD}}=\overline{\text{AD}}\tan\theta=4k$

조건 (나)에 의하여 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BC}}\times\overline{\text{AD}}=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\text{BD}}+\overline{\text{CD}})\times\overline{\text{AD}}$

$=\dfrac{1}{2}\times5k\times2k=5k^2$

즉, $5k^2=\dfrac{125}{4}$에서 $k=\dfrac{5}{2}$

$\overline{\text{AD}}=x_1-(-p)=\dfrac{p}{4}+p=\dfrac{5}{4}p$이고, $\overline{\text{AD}}=2k=5$이므로

$\dfrac{5}{4}p=5$에서 $p=4$

따라서 점 C의 y좌표는

$\overline{\text{CD}}+\overline{\text{DE}}=\dfrac{5}{2}+4=\dfrac{13}{2}$

답 ②

Level **3** **실력** 완성 본문 14쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** 80

1 $y^2=ax-8=a\left(x-\dfrac{8}{a}\right)$이므로 포물선 $y^2=ax-8$은 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 $\dfrac{8}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=ax-8$의 초점의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{4}+\dfrac{8}{a},\ 0\right)$이므로

$\dfrac{a}{4}+\dfrac{8}{a}=3$에서 $\dfrac{a^2+32}{4a}=3$

$a^2-12a+32=0$, $(a-4)(a-8)=0$

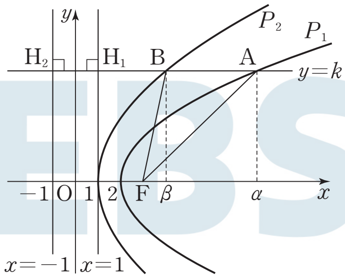
$a=4$ 또는 $a=8$

즉, $a_1=4$, $a_2=8$이므로

P_1: $y^2=4(x-2)$, P_2: $y^2=8(x-1)$

포물선 P_1은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=1$이다.

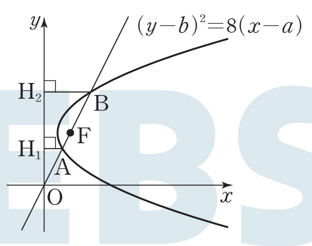
또 포물선 P_2는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.
두 포물선 P_1, P_2와 직선 $y=k$는 그림과 같다.



두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하고 직선 $y=k$가 두 직선 $x=1$, $x=-1$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AH_1}}=\alpha-1$, $\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BH_2}}=\beta+1$
$\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}=12$이므로
$(\alpha-1)+(\beta+1)=12$
$\alpha+\beta=12$ …… ㉠
두 점 A, B의 y좌표가 모두 k로 같으므로
$k^2=4(\alpha-2)=8(\beta-1)$에서
$\alpha=2\beta$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=8$, $\beta=4$
이때 $k^2=24$에서 $k>0$이므로 $k=2\sqrt{6}$
따라서 삼각형 ABF의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times k=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

답 ③

2



포물선 $(y-b)^2=8(x-a)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표가 $(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식이 $x=-2$이므로 포물선 $(y-b)^2=8(x-a)$의 초점의 좌표는 $(2+a,\ b)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2+a$이다.
포물선 $(y-b)^2=8(x-a)$의 준선이 y축이므로
$-2+a=0$에서 $a=2$
즉, $\mathrm{F}(4,\ b)$이고 이때 직선 OF의 방정식은 $y=\frac{b}{4}x$이다.
한편, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고, 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 포물선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH_1}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BH_2}}=\beta$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=10$이므로
$\alpha+\beta=10$
$y=\frac{b}{4}x$를 $(y-b)^2=8(x-2)$에 대입하면
$\left(\frac{b}{4}x-b\right)^2=8x-16$
$b^2x^2-8(b^2+16)x+16(b^2+16)=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\frac{8(b^2+16)}{b^2}=10$
$2b^2=128$, $b^2=64$
$b>0$이므로 $b=8$
따라서 $a+b=2+8=10$

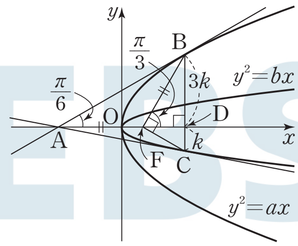
답 ⑤

3 점 B의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면 포물선 $y^2=ax$ 위의 점 $\mathrm{B}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$y_1y=2\times\frac{a}{4}\times(x+x_1)$, $y_1y=\frac{a}{2}(x+x_1)$
즉, $\mathrm{A}(-x_1,\ 0)$
점 C의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$ $(x_2>0,\ y_2<0)$이라 하면 포물선 $y^2=bx$ 위의 점 $\mathrm{C}(x_2,\ y_2)$에서의 접선의 방정식은
$y_2y=2\times\frac{b}{4}\times(x+x_2)$, $y_2y=\frac{b}{2}(x+x_2)$
즉, $\mathrm{A}(-x_2,\ 0)$
이때 $x_1=x_2$이므로 직선 BC의 방정식은 $x=x_1$이고,
$\angle\mathrm{BDF}=\frac{\pi}{2}$이다.
조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:1$이므로
$y_1:(-y_2)=3:1$에서 $y_1=-3y_2$
즉, ${y_1}^2=9{y_2}^2$에서 $ax_1=9\times bx_2$이고 $x_1=x_2$이므로
$b=\frac{a}{9}$ …… ㉠
또 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:1$이므로 $\overline{\mathrm{DC}}=k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}=3k$이고, 삼각형 BFD와 삼각형 FCD가 서로 닮음이므로 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{FD}}:\overline{\mathrm{DC}}$에서
$\overline{\mathrm{FD}}^2=\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{DC}}=3k^2$, $\overline{\mathrm{FD}}=\sqrt{3}k$

이때 $\tan(\angle \text{BFD})=\dfrac{\overline{\text{DB}}}{\overline{\text{FD}}}=\dfrac{3k}{\sqrt{3}k}=\sqrt{3}$이므로

$\angle \text{BFD}=\dfrac{\pi}{3}$이고, 직각삼각형 BFD에서

$\overline{\text{BF}}=\sqrt{\overline{\text{FD}}^2+\overline{\text{DB}}^2}=2\sqrt{3}k$



한편, 포물선 $y^2=ax$에서 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\text{BF}}=\dfrac{a}{4}+x_1$이고,

$\text{A}(-x_1, 0)$, $\text{F}\left(\dfrac{a}{4}, 0\right)$이므로 $\overline{\text{AF}}=\dfrac{a}{4}-(-x_1)=\dfrac{a}{4}+x_1$

즉, 삼각형 ABF는 $\overline{\text{AF}}=\overline{\text{BF}}=2\sqrt{3}k$인 이등변삼각형이고, $\angle \text{BFD}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\angle \text{BAF}=\angle \text{FBA}=\dfrac{\pi}{6}$

이때 $\overline{\text{AD}}=\overline{\text{AF}}+\overline{\text{FD}}=3\sqrt{3}k$이므로 직각삼각형 ADC에서

$\overline{\text{AC}}=\sqrt{\overline{\text{AD}}^2+\overline{\text{DC}}^2}=2\sqrt{7}k$

조건 (나)에서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\dfrac{8\sqrt{7}}{3}$이고, $\angle \text{ABC}=\angle \text{ABF}+\angle \text{CBF}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\text{AC}}}{\sin(\angle \text{ABC})}=2\times\frac{8\sqrt{7}}{3}$$

즉, $\overline{\text{AC}}=\dfrac{16\sqrt{7}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{8\sqrt{21}}{3}$에서

$2\sqrt{7}k=\dfrac{8\sqrt{21}}{3}$, $k=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

점 B의 좌표는

$\overline{\text{AD}}=3\sqrt{3}k=3\sqrt{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=12$에서 $x_1=6$

$\overline{\text{BD}}=3k=3\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$에서 $y_1=4\sqrt{3}$

즉, $\text{B}(6, 4\sqrt{3})$이고 점 B가 포물선 $y^2=ax$ 위의 점이므로

$(4\sqrt{3})^2=6a$, $a=8$

㉠에서 $b=\dfrac{8}{9}$

따라서 두 포물선의 방정식은 각각 $y^2=8x$, $y^2=\dfrac{8}{9}x$이므로

$9(a+b)=9\times\left(8+\dfrac{8}{9}\right)=9\times\dfrac{80}{9}=80$

답 80

02 타원

유제 본문 17~21쪽

1 ② 2 ④ 3 15 4 ③ 5 ④
6 6

1 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점 F의 x좌표가 $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$이므로

$\text{F}(\sqrt{7}, 0)$, $\text{F}'(-\sqrt{7}, 0)$이고, $\overline{\text{FF}'}=2\sqrt{7}$

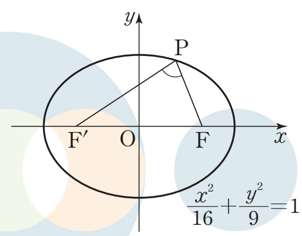
타원의 정의에 의하여

$\overline{\text{PF}}+\overline{\text{PF}'}=8$ ⋯⋯ ㉠

문제의 조건에서

$\overline{\text{PF}'}-\overline{\text{PF}}=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\overline{\text{PF}}=3$, $\overline{\text{PF}'}=5$



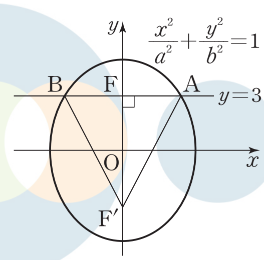
따라서 삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle \text{FPF}')=\frac{\overline{\text{PF}'}^2+\overline{\text{PF}}^2-\overline{\text{FF}'}^2}{2\times\overline{\text{PF}'}\times\overline{\text{PF}}}$$

$$=\frac{5^2+3^2-(2\sqrt{7})^2}{2\times5\times3}=\frac{1}{5}$$

답 ②

2



타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$이라 하고, 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크다고 하자.

두 초점이 $\text{F}(0, 3)$, $\text{F}'(0, -3)$이므로

$b^2-a^2=9$ ⋯⋯ ㉠

타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=2b$, $\overline{BF}+\overline{BF'}=2b$

삼각형 ABF′의 둘레의 길이가 20이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BF'}+\overline{F'A}&=(\overline{AF}+\overline{FB})+\overline{BF'}+\overline{F'A}\\&=(\overline{AF}+\overline{AF'})+(\overline{BF}+\overline{BF'})\\&=2b+2b=4b\end{aligned}$$

즉, $4b=20$에서 $b=5$

$b=5$를 ㉠에 대입하면

$25-a^2=9$, $a^2=16$

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$이고, 타원 위의 두 점 A, B가 직선 $y=3$ 위에 있으므로

$\frac{x^2}{16}+\frac{9}{25}=1$, $\frac{x^2}{16}=\frac{16}{25}$, $x^2=\left(\frac{16}{5}\right)^2$

$x=\frac{16}{5}$ 또는 $x=-\frac{16}{5}$

즉, $A\left(\frac{16}{5}, 3\right)$, $B\left(-\frac{16}{5}, 3\right)$이므로

$\overline{AB}=\frac{16}{5}-\left(-\frac{16}{5}\right)=\frac{32}{5}$

따라서 삼각형 ABF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{FF'}=\frac{1}{2}\times\frac{32}{5}\times6=\frac{96}{5}$

답 ④

3 $3x^2+4y^2-12x-24y=0$에서

$3(x^2-4x+4)+4(y^2-6y+9)=48$

$3(x-2)^2+4(y-3)^2=48$

$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{12}=1$ …… ㉠

타원 ㉠은 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점의 좌표가 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이므로 타원 ㉠의 두 초점의 좌표는 $(4, 3)$, $(0, 3)$이다.

따라서 $F(4, 3)$, $F'(0, 3)$ 또는 $F(0, 3)$, $F'(4, 3)$이므로

$\overline{OF}\times\overline{OF'}=\sqrt{4^2+3^2}\times3=5\times3=15$

답 15

4 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$의 한 초점의 y좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$이므로

두 초점의 좌표는 $(0, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$이다.

타원 $\frac{(x-m)^2}{2}+\frac{(y-n)^2}{4}=1$은 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 타원 $\frac{(x-m)^2}{2}+\frac{(y-n)^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는 $F(m, -\sqrt{2}+n)$, $F'(m, \sqrt{2}+n)$이다.

이때 $F(3, 0)$이므로 $m=3$, $n=\sqrt{2}$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(y-\sqrt{2})^2}{4}=1$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하고 타원의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(-\sqrt{2})^2}{4}=1$에서

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$x=2$ 또는 $x=4$

즉, $x_1=2$, $x_2=4$이므로 두 점 A, B의 좌표는

$(2, 0)$, $(4, 0)$

따라서 삼각형 ABF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{FF'}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

답 ③

5 타원 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y=1$, 즉 $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ④

6 타원의 중심이 원점이고, 두 초점이 x축 위에 있으므로 이 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하자.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 선분 BC가 만나는 점을 D라 하면 $D(5, 0)$이므로

$\frac{25}{a^2}=1$에서 $a^2=25$

한편, 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$ …… ㉠

이때 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{25\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+b^2}$

즉, $y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{\frac{25}{9}+b^2}$이고, 이 중 y절편이 양수인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x+\sqrt{\frac{25}{9}+b^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡으로부터 $\sqrt{\frac{25}{9}+b^2}=\frac{13}{3}$

양변을 제곱하면 $\frac{25}{9}+b^2=\frac{169}{9}$, $b^2=16$

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$이므로 타원의 한 초점의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{25-16}=3$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$2c=2\times3=6$

답 6

Level 1 기초 연습

본문 22~23쪽

1 ⑤	**2** ③	**3** ④	**4** ⑤	**5** ①
6 ⑤	**7** 8	**8** ②		

1 중심이 원점이고 두 초점 F, F′이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$이라 하자.

타원의 장축의 길이가 12이므로

$2a=12$에서 $a=6$

타원의 방정식이 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{b^2}=1$이고, 점 $\mathrm{A}(2, 2\sqrt{2})$가 타원 위의 점이므로

$\frac{2^2}{36}+\frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2}=1$, $\frac{8}{b^2}=\frac{8}{9}$, $b^2=9$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$이다.

이때 초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$

따라서 $\mathrm{F}(3\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F'}(-3\sqrt{3}, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{FF'}}=6\sqrt{3}$

답 ⑤

2 직선 $y=\frac{3}{4}(x+2)$의 x절편이 -2이므로

$-c=-2$에서 $c=2$

즉, $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F'}(-2, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$이고

$a^2-b^2=4$ …… ㉠

직선 $y=\frac{3}{4}(x+2)$의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{FF'}}}=\frac{3}{4}$에서 $\overline{\mathrm{AF}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{FF'}}=3$

직각삼각형 AF′F에서

$\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FF'}}^2+\overline{\mathrm{AF}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

이때 $\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}}=5+3=8$, 즉 타원의 장축의 길이가 8이므로

$2a=8$에서 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b^2=a^2-4=12$

따라서 $a^2+b^2=16+12=28$

답 ③

3 점 F의 y좌표를 c $(c>0)$이라 하면 $c=\sqrt{9-5}=2$이므로

$\mathrm{F}(0, 2)$, $\mathrm{F'}(0, -2)$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=4$

타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$의 장축의 길이는 $2\times3=6$이므로 타원의 정의에 의하여

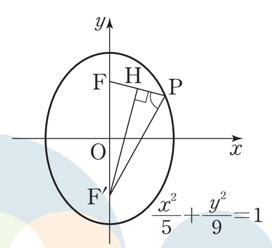
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=1:2$에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{PF}}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3\overline{\mathrm{PF}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=2$, $\overline{\mathrm{PF'}}=4$



이때 삼각형 PFF′은 $\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{F'P}}$인 이등변삼각형이므로 점 F′에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}\times2=1$

직각삼각형 PF′H에서

$\overline{\mathrm{F'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

따라서 $\sin(\angle\mathrm{FPF'})=\frac{\overline{\mathrm{F'H}}}{\overline{\mathrm{PF'}}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

답 ④

4 타원 $\dfrac{(x-5)^2}{20}+\dfrac{(y-4)^2}{11}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{11}=1$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{11}=1$의 두 초점의 좌표는

$(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$이므로 타원 $\dfrac{(x-5)^2}{20}+\dfrac{(y-4)^2}{11}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $(8,\ 4)$, $(2,\ 4)$이다.

타원 $\dfrac{(x-5)^2}{20}+\dfrac{(y-4)^2}{11}=1$의 장축의 길이는

$2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$이므로 타원의 정의에 의하여

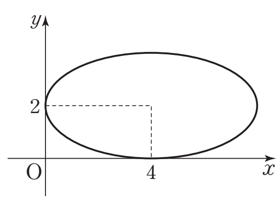
$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=4\sqrt{5}$

따라서 삼각형 OAF의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FO}}&=(\overline{\mathrm{OF'}}+\overline{\mathrm{AF'}})+\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{OF}}\\&=\overline{\mathrm{OF'}}+(\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{AF}})+\overline{\mathrm{OF}}\\&=\sqrt{2^2+4^2}+4\sqrt{5}+\sqrt{8^2+4^2}\\&=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+4\sqrt{5}\\&=10\sqrt{5}\end{aligned}$$

답 ⑤

5 중심의 좌표가 $(4,\ 2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 타원은 그림과 같이 장축의 길이가 8이고, 단축의 길이가 4인 타원이다.



타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$의 장축의 길이가 8이고 단축의 길이가 4이면

$2a=8$에서 $a=4$

$2b=4$에서 $b=2$

즉, 이 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$이고, 주어진 타원은

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 방정식은

$\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$이다.

이때 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는

$(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$이므로

타원 $\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는

$(4+2\sqrt{3},\ 2)$, $(4-2\sqrt{3},\ 2)$이다.

따라서

$p\times q\times r=(4+2\sqrt{3})\times(4-2\sqrt{3})\times2=8$

답 ①

6 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하자.

점 P는 타원 E_1: $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{b^2}{3}=1$, $a^2+2b^2=6$ …… ㉠

점 P는 타원 E_2 : $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{b^2}{6}=1$, $2a^2+b^2=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=2$, $b^2=2$

$a>0$, $b>0$이므로 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$

즉, $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

타원 E_1 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$에서의 접선 l의 방정식은

$\dfrac{\sqrt{2}x}{6}+\dfrac{\sqrt{2}y}{3}=1$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

타원 E_2 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$에서의 접선 m의 방정식은

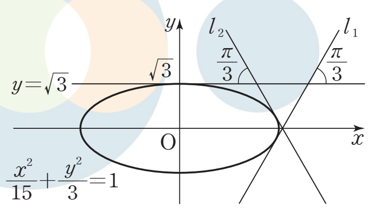
$\dfrac{\sqrt{2}x}{3}+\dfrac{\sqrt{2}y}{6}=1$, 즉 $y=-2x+3\sqrt{2}$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-2)=-\dfrac{5}{2}$

답 ⑤

7



점 $(0,\ \sqrt{3})$이 타원의 한 꼭짓점이고 점 $\mathrm{A}(k,\ \sqrt{3})$이 직선 $y=\sqrt{3}$ 위에 있으므로 점 A에서 타원 $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{3}=1$에 그은 접선 중 하나는 직선 $y=\sqrt{3}$이다.

이때 점 A에서 타원에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 다른 한 접선의 기울기는

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 또는 $\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$이다.

(ⅰ) 기울기가 $\sqrt{3}$이고 타원 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하는 직선을 l_1이라 하면 직선 l_1의 y절편이 음수이므로 직선 l_1의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-\sqrt{15\times(\sqrt{3})^2+3}$

즉, $y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(k, \sqrt{3})$을 지나므로

$\sqrt{3}=\sqrt{3}k-4\sqrt{3}$, $k=5$

(ⅱ) 기울기가 $-\sqrt{3}$이고 타원 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하는 직선을 l_2라 하면 직선 l_2의 y절편이 양수이므로 직선 l_2의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x+\sqrt{15\times(-\sqrt{3})^2+3}$

즉, $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(k, \sqrt{3})$을 지나므로

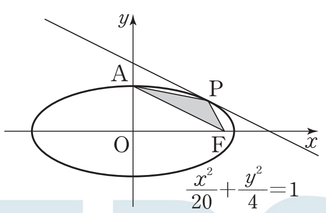
$\sqrt{3}=-\sqrt{3}k+4\sqrt{3}$, $k=3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 k의 값의 합은

$3+5=8$

답 8

8



점 $\mathrm{F}(c, 0)$ $(c>0)$이 타원 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점이므로

$c=\sqrt{20-4}=4$

점 A의 좌표는 $(0, 2)$이므로 직선 AF의 기울기는

$\frac{0-2}{4-0}=-\frac{1}{2}$

기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 타원 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{20\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4}$

즉, $y=-\frac{1}{2}x\pm3$이고, 이 중 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 타원에 접하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+3$

이때 $\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$이고, 선분 AF를 밑변으로 하는 삼각형 PAF의 높이를 h라 하면 h의 값은 점 $\mathrm{F}(4, 0)$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$, 즉 $x+2y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$h=\frac{|4+0-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 PAF의 넓이는

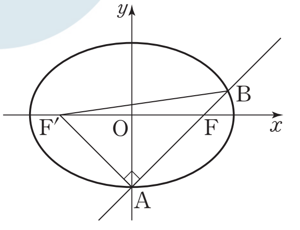
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=2$

답 ②

Level 2 **기본 연습** 본문 24~25쪽

1 ②	**2** ①	**3** 23	**4** ④	**5** ②
6 72				

1



타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이가 $2a$이므로

$\overline{\mathrm{F'A}}=\overline{\mathrm{FA}}=a$

즉, 삼각형 AFF′이 $\overline{\mathrm{F'A}}=\overline{\mathrm{FA}}$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{AF'F}=\angle\mathrm{AFF'}=\frac{\pi}{4}$

원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OF'}}=\overline{\mathrm{OA}}=b$이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}^2=\overline{\mathrm{OF'}}^2+\overline{\mathrm{OA}}^2$에서

$a^2=2b^2$, $b^2=\frac{a^2}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $\overline{\mathrm{BF}}=k$ $(k>0)$이라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{BF'}}=2a-k$

직각삼각형 ABF′에서 $\overline{\mathrm{BF'}}^2=\overline{\mathrm{AF'}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$이므로

$(2a-k)^2=a^2+(a+k)^2$

$4a^2-4ak+k^2=2a^2+2ak+k^2$

즉, $a(a-3k)=0$

$a>0$이므로 $k=\dfrac{a}{3}$

삼각형 $\mathrm{ABF'}$의 넓이가 24이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF'}}\times\overline{\mathrm{AB}}=24$

$\dfrac{1}{2}\times a\times\left(a+\dfrac{a}{3}\right)=24$

즉, $\dfrac{2}{3}a^2=24$에서 $a^2=36$

$a^2=36$을 ㉠에 대입하면 $b^2=18$

따라서 $a^2+b^2=36+18=54$

답 ②

2 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$가 타원 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점이므로

$c=\sqrt{9-5}=2$

타원 E_2: $\dfrac{(x-m)^2}{9}+\dfrac{(y-n)^2}{k}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{k}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 타원 E_2의 두 초점은 직선 $y=n$ 위에 있고, 이때 점 F의 y좌표가 2이므로 $n=2$

타원 E_1: $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 장축의 길이는 $2\times3=6$이므로

$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=6$

타원 E_2: $\dfrac{(x-m)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{k}=1$의 장축의 길이는

$2\times3=6$이므로

$\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{CA}}=6$

이때 삼각형 BCF의 둘레의 길이가 17이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CF}}&=\overline{\mathrm{FB}}+(\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{AC}})+\overline{\mathrm{CF}}\\&=(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}})+(\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{CA}})+\overline{\mathrm{AF'}}\\&=6+6+\overline{\mathrm{AF'}}\\&=12+\overline{\mathrm{AF'}}\end{aligned}$$

$12+\overline{\mathrm{AF'}}=17$에서 $\overline{\mathrm{AF'}}=5$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로

직각삼각형 $\mathrm{AFF'}$에서

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF'}}^2-\overline{\mathrm{FF'}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

즉, $\mathrm{A}(3,\ 2)$이므로 타원 E_2의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ 2\right)$

그러므로 $m=\dfrac{3}{2}$이고, $9-k=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$에서

$k=9-\dfrac{9}{4}=\dfrac{27}{4}$

따라서

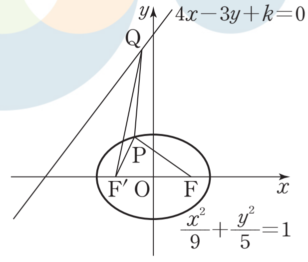
$m+n+k=\dfrac{3}{2}+2+\dfrac{27}{4}=\dfrac{41}{4}$

답 ①

3 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$의 초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{9-5}=2$

즉, $\mathrm{F}(2,\ 0)$



타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$의 다른 한 초점을 F′이라 하면

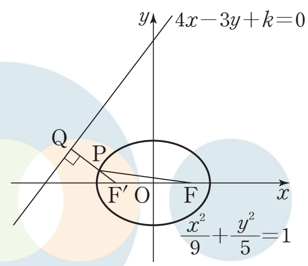
$\mathrm{F'}(-2,\ 0)$이고 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6$ …… ㉠

한편, 직선 $4x-3y+k=0$ 위의 점 Q를 고정시키면 ㉠에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}&=(6-\overline{\mathrm{PF'}})-\overline{\mathrm{PQ}}\\&=6-(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PQ}})\\&\le 6-\overline{\mathrm{QF'}}\quad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

즉, 점 P가 선분 QF′과 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$의 교점에 있을 때, $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은 $6-\overline{\mathrm{QF'}}$이고, 이 값이 최댓값이 되기 위해서는 선분 QF′의 길이가 최소이어야 한다.



직선 $4x-3y+k=0$ 위의 임의의 점 Q에 대하여 선분 QF′의 길이가 최소가 되는 점 Q의 위치는 점 Q가 점 F′에서 직선 $4x-3y+k=0$에 내린 수선의 발에 있을 때이고, 이때 점 P는 선분 QF′과 타원의 교점에 있음을 알 수 있다. 그러므로 선분 QF′의 길이의 최솟값은 점 F′과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리와 같다.

즉, $\overline{\mathrm{QF'}}\ge\dfrac{|4\times(-2)-0+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|k-8|}{5}$

㉡에서 $\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}\le 6-\overline{\mathrm{QF'}}\le 6-\dfrac{|k-8|}{5}$

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값이 3이므로

$6-\dfrac{|k-8|}{5}=3,\ |k-8|=15$

$k=-7$ 또는 $k=23$

$k>3\sqrt{21}$이므로 $k=23$

답 23

4 두 점 A, B가 y축에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{A}(x_1,\ k),\ \mathrm{B}(-x_1,\ k)\ (x_1>0)$

으로 놓고, 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 두 점 A, B에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하면 두 직선 l_1, l_2의 방정식은

l_1: $x_1x+\dfrac{ky}{4}=1$

l_2: $-x_1x+\dfrac{ky}{4}=1$

두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 $-\dfrac{4}{k}x_1$, $\dfrac{4}{k}x_1$이고, 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱이 -3이므로

$-\dfrac{4}{k}x_1\times\dfrac{4}{k}x_1=-3,\ {x_1}^2=\dfrac{3}{16}k^2$ …… ㉠

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ k)$, $\mathrm{B}(-x_1,\ k)$는 타원 위의 점이므로

${x_1}^2+\dfrac{k^2}{4}=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{3}{16}k^2+\dfrac{k^2}{4}=1,\ \dfrac{7}{16}k^2=1$

따라서 $k^2=\dfrac{16}{7}$

답 ④

다른 풀이

두 점 A, B가 y축에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{A}(x_1,\ k),\ \mathrm{B}(-x_1,\ k)\ (x_1>0)$이라 하자.

타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$이 y축에 대하여 대칭이므로 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 두 점 A, B에서의 접선도 y축에 대하여 대칭이고, 이때 이 두 접선의 기울기의 곱이 -3이므로 두 접선의 기울기가 각각 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

그러므로 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 $-\sqrt{3}$이 되도록 하는 실수 k의 값을 구하면 된다.

타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\mathrm{A}(x_1,\ k)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+\dfrac{ky}{4}=1$

이 직선의 기울기가 $-\dfrac{4}{k}x_1$이므로

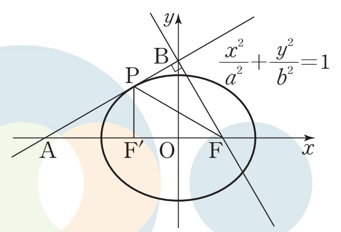
$-\dfrac{4}{k}x_1=-\sqrt{3}$에서 $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}k$

점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}k,\ k\right)$가 타원 위의 점이므로

$\dfrac{3}{16}k^2+\dfrac{k^2}{4}=1,\ \dfrac{7}{16}k^2=1$

따라서 $k^2=\dfrac{16}{7}$

5



두 점 F(3, 0), F′(−3, 0)이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점이므로

$a^2-b^2=9$ …… ㉠

점 B의 좌표를 $(0,\ k)\ (k>0)$이라 하면 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{k}{9}$, 직선 BF의 기울기는 $-\dfrac{k}{3}$이고 두 직선 AB, BF가 서로 수직이므로

$\dfrac{k}{9}\times\left(-\dfrac{k}{3}\right)=-1$에서 $k=3\sqrt{3}$

그러므로 직선 AB의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+3\sqrt{3}$ …… ㉡

한편, 점 P가 제2사분면에 있는 점이므로 기울기가 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 두 직선 중 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{a^2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+b^2}$

즉, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2+b^2}$ …… ㉢

㉡과 ㉢은 같은 직선이므로

$\sqrt{\frac{1}{3}a^2+b^2}=3\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}a^2+b^2=27$

즉, $a^2+3b^2=81$ …… ㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a^2=27$, $b^2=18$

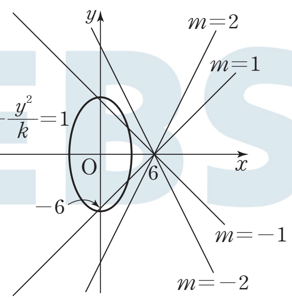
따라서 타원의 장축의 길이는 $2|a|=6\sqrt{3}$이므로 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6\sqrt{3}$

답 ②

6 $mx-y-6m=0$에서 $y=m(x-6)$이므로

직선 $mx-y-6m=0$은 m의 값에 관계없이 점 $(6,\ 0)$을 지나는 직선이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{k}=1$이 x축에 대하여 대칭이고, 타원과 직선 $mx-y-6m=0$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 m의 개수가 3이므로 가능한 정수 m의 값은 $-1,\ 0,\ 1$뿐이어야 한다.



즉, 점 $(6,\ 0)$에서 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{k}=1$에 그은 접선의 기울기를 t라 하면

$1<t\le 2$ 또는 $-2\le t<-1$

이어야 한다.

$1<t\le 2$일 때, 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{k}=1$에 접하고 기울기가 t인 접선의 방정식은

$y=tx\pm\sqrt{12t^2+k}$

이 중 y절편이 음수인 접선의 방정식은

$y=tx-\sqrt{12t^2+k}$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(6,\ 0)$을 지나므로

$\sqrt{12t^2+k}=6t$

양변을 제곱하면

$12t^2+k=36t^2$, $k=24t^2$ …… ㉡

$1<t\le 2$에서 $1<t^2\le 4$이므로 ㉡에서

$24<k\le 96$

$-2\le t<-1$일 때에도 같은 방법으로 $24<k\le 96$임을 얻는다.

따라서 자연수 k의 값은 25, 26, 27, …, 96이고, 그 개수는 72이다.

답 72

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 ⑤ **2** 33 **3** 157

1 포물선 $y^2=4x$의 초점 F′의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

타원 $\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 중심의 좌표가 $(3,\ 0)$이고 y축에 접하므로 이 타원의 장축의 길이는 6이다.

즉, $a=3$에서 $a^2=9$

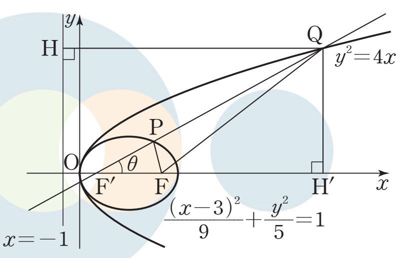
이때 타원 $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고,

타원 $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점의 좌표는 $(-2,\ 0)$이다.

즉, $9-b^2=(-2)^2$에서 $b^2=5$

타원의 방정식은 $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$이고, 이때 다른 한 초점 F의 좌표는 $(5,\ 0)$이다.



한편, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6$이고, $\overline{\mathrm{PF}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=6-\overline{\mathrm{PF}}=4$

이때 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로 $\angle\mathrm{PF'F}=\theta$라 하면 삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{PF'}^2+\overline{FF'}^2-\overline{PF}^2}{2\times\overline{PF'}\times\overline{FF'}}$

$=\dfrac{4^2+4^2-2^2}{2\times4\times4}$

$=\dfrac{7}{8}$

점 Q에서 준선 $x=-1$과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고 $\overline{PQ}=k\ (k>0)$이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{F'Q}=\overline{QH}=k+4$

이므로 점 Q의 x좌표는 $k+3$이다.

이때 $\overline{F'H'}=(k+3)-1=k+2$이고, 직각삼각형 QF′H′에서 $\cos\theta=\dfrac{7}{8}$이므로

$\dfrac{\overline{F'H'}}{\overline{F'Q}}=\dfrac{7}{8}$, 즉 $\dfrac{k+2}{k+4}=\dfrac{7}{8}$에서

$8k+16=7k+28$, $k=12$

즉, $\overline{F'Q}=12+4=16$이므로 삼각형 QF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{FQ}^2=\overline{F'Q}^2+\overline{FF'}^2-2\times\overline{F'Q}\times\overline{FF'}\times\cos\theta$

$=16^2+4^2-2\times16\times4\times\dfrac{7}{8}=160$

따라서 $\overline{FQ}=4\sqrt{10}$

답 ⑤

2 타원 E_1의 초점 F의 x좌표가 $c\ (c>0)$이고, 장축의 길이가 8이므로 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{PF'}+\overline{F'F}+\overline{FP}=(\overline{PF}+\overline{PF'})+\overline{FF'}=8+2c$

타원 E_2의 장축의 길이가 8이므로 삼각형 QF′O의 둘레의 길이는

$\overline{QF'}+\overline{F'O}+\overline{OQ}=\overline{QA}+\overline{AF'}+\overline{F'O}+\overline{OQ}$

$=(\overline{AQ}+\overline{OQ})+(\overline{AF'}+\overline{OF'})$

$=8+8=16$

$\overline{FF'}<8$이므로 삼각형 QF′O의 둘레의 길이가 삼각형 PF′F의 둘레의 길이보다 크고, 그 차가 2이므로

$16-(8+2c)=2$, $2c=6$

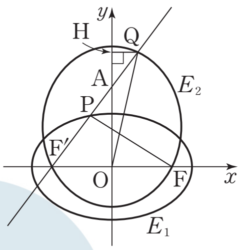
즉, $c=3$이므로 F$(3, 0)$, F′$(-3, 0)$

이때 $\overline{OF'}=3$이고, 타원 E_2의 장축의 길이가 8이므로

$\overline{AF'}+\overline{OF'}=8$에서 $\overline{AF'}=5$

직각삼각형 AF′O에서

$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AF'}^2-\overline{OF'}^2}=4$



점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AQH와 삼각형 AF′O는 서로 닮음이므로

$\overline{QH}=3k\ (k>0)$이라 하면 $\overline{AH}=4k$, $\overline{AQ}=5k$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{AQ}+\overline{OQ}=8$에서 $\overline{OQ}=8-5k$이고,

$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{AH}=4+4k$이므로

직각삼각형 QOH에서

$\overline{OQ}^2=\overline{OH}^2+\overline{QH}^2$

$(8-5k)^2=(4+4k)^2+(3k)^2$

$25k^2-80k+64=25k^2+32k+16$

$112k=48$, $k=\dfrac{3}{7}$

이때

$\overline{AQ}=5k=5\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{15}{7}$

$\overline{OQ}=8-5k=8-\dfrac{15}{7}=\dfrac{41}{7}$

이므로

$\overline{OQ}-\overline{AQ}=\dfrac{41}{7}-\dfrac{15}{7}=\dfrac{26}{7}$

따라서 $p=7$, $q=26$이므로 $p+q=7+26=33$

답 33

다른 풀이

$\overline{AF'}=5$, $\overline{OA}=4$에서 $\overline{OQ}-\overline{AQ}$의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

타원 E_2에서 $\overline{AQ}=t$라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{OQ}=8-t$

이때 직각삼각형 AF′O에서 $\overline{F'O}=3$이므로

$\cos(\angle AF'O)=\dfrac{\overline{F'O}}{\overline{AF'}}=\dfrac{3}{5}$

즉, 삼각형 QF′O에서 코사인법칙에 의하여

$(8-t)^2=(5+t)^2+3^2-2\times(5+t)\times3\times\dfrac{3}{5}$

$t=\dfrac{15}{7}$

따라서

$\overline{OQ}-\overline{AQ}=8-2t=8-2\times\dfrac{15}{7}=\dfrac{26}{7}$

이므로 $p+q=7+26=33$

참고

타원 E_1의 방정식은 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, 타원 E_2의 방정식은 $\frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$이다.

3 직선 l_2의 방정식을 구해 보자.

타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$에 접하고 기울기가 m_2인 직선 l_2의 방정식 중 y절편이 양수인 것은

$y=m_2x+\sqrt{9m_2^2+1}$

이 직선의 y절편이 $\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{9m_2^2+1}=\sqrt{10}$, $9m_2^2+1=10$, $m_2^2=1$

$m_2<0$이므로 $m_2=-1$

$m_1<-1<m_3<0$인 세 수 m_1, -1, m_3이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면 $r>0$이고,

$m_1=-\frac{1}{r}$, $m_3=-r$로 놓을 수 있다.

이때 $-\frac{1}{r}<-1<-r<0$이므로 $0<r<1$이다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{r}$인 직선 l_1의 방정식은

$y=-\frac{1}{r}x\pm\sqrt{a^2\times\frac{1}{r^2}+1}$

이 직선 중 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{r}x+\sqrt{\frac{a^2}{r^2}+1}$이고,

이 직선의 y절편이 $\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{\frac{a^2}{r^2}+1}=\sqrt{10}$, $\frac{a^2}{r^2}+1=10$

$a^2=9r^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 직선 l_1의 방정식이 $y=-\frac{1}{r}x+\sqrt{10}$이므로

$\mathrm{B}(\sqrt{10}r,\ 0)$

또 타원 $\frac{x^2}{b^2}+y^2=1$에 접하고 기울기가 $-r$인 직선 l_3의 방정식은

$y=-rx\pm\sqrt{b^2\times r^2+1}$

이 직선 중 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=-rx+\sqrt{b^2r^2+1}$이고,

이 직선의 y절편이 $\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{b^2r^2+1}=\sqrt{10}$, $b^2r^2+1=10$

$b^2=\frac{9}{r^2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

한편, 직선 l_3의 방정식이 $y=-rx+\sqrt{10}$이므로

$\mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{10}}{r},\ 0\right)$

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{15}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sqrt{10}=\frac{15}{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

즉, $\frac{\sqrt{10}}{r}-\sqrt{10}r=\frac{3\sqrt{10}}{2}$에서

$\frac{1}{r}-r=\frac{3}{2}$, $2r^2+3r-2=0$, $(2r-1)(r+2)=0$

$0<r<1$이므로 $r=\frac{1}{2}$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$a^2+b^2=9r^2+\frac{9}{r^2}=9\times\frac{1}{4}+9\times4=\frac{153}{4}$

이므로 $p=4$, $q=153$에서

$p+q=4+153=157$

답 157

03 쌍곡선

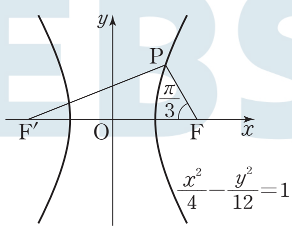
유제 본문 29~33쪽

1 28　2 ④　3 ⑤　4 ③　5 ④
6 ①

1 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 초점 F의 y좌표가 c이므로
$c^2=a^2+b^2$ …… ㉠
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$이 x축에 대하여 대칭이므로
$\overline{AB}=4$에서 $A(0,\ 2)$, $B(0,\ -2)$임을 알 수 있다.
즉, $b^2=4$
이때 $\overline{FA}=4$에서 $c-2=4$, $c=6$
즉, $F(0,\ 6)$, $F'(0,\ -6)$이므로 $c^2=6^2=36$
㉠에서 $a^2=c^2-b^2=36-4=32$
따라서 $a^2-b^2=32-4=28$

답 28

2



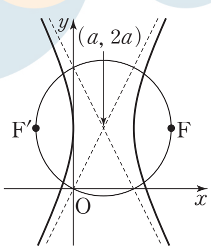
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 초점 F의 x좌표가 c $(c>0)$이므로
$c^2=4+12=16$, $c=4$
즉, $F(4,\ 0)$, $F'(-4,\ 0)$
$\overline{PF}=a$ $(a>0)$이라 하면 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 주축의 길이가 4이므로 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{PF'}-\overline{PF}=4$에서 $\overline{PF'}=4+a$
삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{PF'}^2=\overline{PF}^2+\overline{FF'}^2-2\times\overline{PF}\times\overline{FF'}\times\cos\frac{\pi}{3}$
즉, $(4+a)^2=a^2+8^2-2\times a\times 8\times\frac{1}{2}$에서
$16a=48$, $a=3$
따라서 $\overline{PF}=3$이므로 삼각형 PF′F의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{FF'}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times3\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

답 ④

3 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 쌍곡선의 한 초점 F의 x좌표가 3이므로
$a^2+b^2=9$ …… ㉠
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 점근선의 방정식이
$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이고 두 점근선의 기울기의 곱이 $-\frac{5}{4}$이므로
$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{5}{4}$, $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$
즉, $b^2=\frac{5}{4}a^2$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$a^2+\frac{5}{4}a^2=9$, $\frac{9}{4}a^2=9$, $a^2=4$
$a>0$에서 $a=2$
따라서 쌍곡선의 주축의 길이는
$2a=2\times2=4$

답 ⑤

4 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{4}-\frac{(y-b)^2}{16}=1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이고, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 점근선의 방정식이
$y=2x$, $y=-2x$이므로 쌍곡선
$\frac{(x-a)^2}{4}-\frac{(y-b)^2}{16}=1$의 두 점근선의 방정식은
$y=2(x-a)+b$, $y=-2(x-a)+b$이다.
이때 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{4}-\frac{(y-b)^2}{16}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=2x$이므로 이 쌍곡선의 중심 $(a,\ b)$가 직선 $y=2x$ 위에 있음을 알 수 있다.
즉, $b=2a$



또 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표가

$(2\sqrt{5},\ 0)$, $(-2\sqrt{5},\ 0)$, 즉 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$이므로 쌍곡선 $\frac{(x-a)^2}{4}-\frac{(y-b)^2}{16}=1$의 두 초점 사이의 거리도 $4\sqrt{5}$이다.

그러므로 선분 FF′을 지름으로 하는 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이고, 이 원이 원점을 지나므로 쌍곡선의 중심 $(a,\ 2a)$와 원점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이다.

즉, $\sqrt{a^2+(2a)^2}=2\sqrt{5}$, $5a^2=20$, $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$, $b=2a=4$

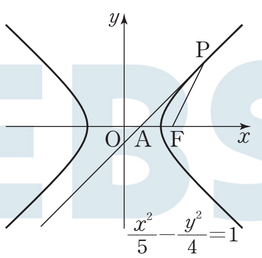
따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{16}=1$이므로 쌍곡선의 다른 한 점근선의 방정식은

$y=-2(x-2)+4$, 즉 $y=-2x+8$

그러므로 이 직선의 y절편은 8이다.

답 ③

5



쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 초점 F의 x좌표가 $c\ (c>0)$이므로

$c^2=5+4=9$에서 $c=3$

즉, F$(3,\ 0)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P$(5,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{5x}{5}-\frac{4y}{4}=1$, 즉 $y=x-1$

직선 $y=x-1$이 x축과 만나는 점 A의 좌표는 $(1,\ 0)$

따라서 삼각형 PAF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times4=4$

답 ④

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 위의 점과 직선 $y=2x$ 사이의 거리의 최솟값은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선과 직선 $y=2x$ 사이의 거리와 같다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{4\times2^2-k}$, 즉 $y=2x\pm\sqrt{16-k}$

이때 직선 $y=2x$에서 두 직선 $y=2x+\sqrt{16-k}$, $y=2x-\sqrt{16-k}$에 이르는 거리는 각각 같으므로

직선 $y=2x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+\sqrt{16-k}=0$ 사이의 거리는 1이다.

즉, $\frac{|\sqrt{16-k}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=1$에서

$\frac{\sqrt{16-k}}{\sqrt{5}}=1$, $\sqrt{16-k}=\sqrt{5}$, $16-k=5$

따라서 $k=11$

답 ①

Level **1** **기초** 연습 본문 34~35쪽

1 ④	2 ④	3 6	4 ①	5 ③
6 ②	7 ②	8 ⑤		

1 주축의 길이가 8이므로 $2|a|=8$에서 $a^2=16$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 중심이 원점이므로 두 초점을 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$으로 놓을 수 있고, 두 초점 사이의 거리가 10이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=10$

즉, $2c=10$에서 $c=5$

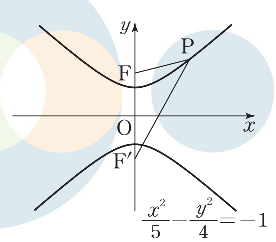
$c^2=a^2+b^2$에서

$b^2=c^2-a^2=25-16=9$

따라서 $a^2-b^2=16-9=7$

답 ④

2



쌍곡선 $4x^2-5y^2=-20$, 즉 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$의 초점 F의 y좌표를 $c\ (c>0)$이라 하면

$c^2=5+4=9$, $c=3$

그러므로 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$

점 P가 제1사분면에 있는 점이고, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=-1$의 주축의 길이는 $2\times2=4$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때

$\overline{\mathrm{PF}'}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2=(\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}})(\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}})=4(\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}})$

이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2=48$에서

$4(\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}})=48$

$\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=12$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\overline{\mathrm{PF}'}=8$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$

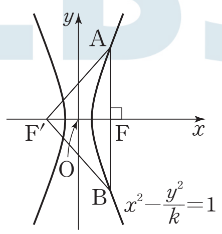
따라서 $\overline{\mathrm{PF}'}\times\overline{\mathrm{PF}}=8\times4=32$

답 ④

3 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{k}=1$의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=1+k$ $\cdots\cdots$ ㉠

두 점 A, B는 x축에 대하여 대칭이므로 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{k}=1$과 삼각형 $\mathrm{AF'B}$는 그림과 같다고 하자.



쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{k}=1$의 주축의 길이가 $2\times1=2$이고,

$\overline{\mathrm{AF}}=l$ $(l>0)$으로 놓으면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}'}-\overline{\mathrm{AF}}=2$에서 $\overline{\mathrm{AF}'}=2+l$

그러므로 $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{AF}}=l$, $\overline{\mathrm{BF}'}=\overline{\mathrm{AF}'}=l+2$

삼각형 $\mathrm{AF'B}$의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AF}'}+\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BA}}&=\overline{\mathrm{AF}'}+\overline{\mathrm{F'B}}+(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AF}})\\&=(\overline{\mathrm{AF}'}+\overline{\mathrm{AF}})+(\overline{\mathrm{BF}'}+\overline{\mathrm{BF}})\\&=2(\overline{\mathrm{AF}'}+\overline{\mathrm{AF}})\\&=2\{(l+2)+l\}\\&=4l+4\end{aligned}$$

즉, $4l+4=28$에서 $l=6$

직각삼각형 $\mathrm{AF'F}$에서

$\overline{\mathrm{F'F}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF}'}^2-\overline{\mathrm{AF}}^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$

따라서 $c=\sqrt{7}$, 즉 $c^2=7$이므로 ㉠에서

$k=c^2-1=7-1=6$

답 6

4 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$이라 하면

$c^2=a^2+b^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 $y=2x$가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 점근선이므로

$\pm\dfrac{b}{a}=2$에서 $b^2=4a^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$과 직선 $y=2x$, 즉 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리가 4이므로

$\dfrac{|2\times c-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=4$, 즉 $|c|=2\sqrt{5}$

$c>0$이므로 $c=2\sqrt{5}$

㉠, ㉡에 의하여 $(2\sqrt{5})^2=a^2+4a^2$, $a^2=4$

㉡에서 $b^2=16$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$이고 이 쌍곡선의 주축의 길이는

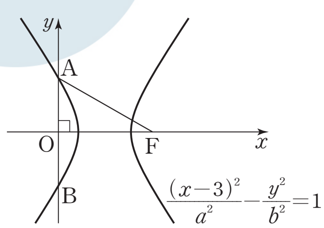
$2|a|=2\times2=4$

답 ①

5 쌍곡선 $\dfrac{(x-3)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 쌍곡선 $\dfrac{(x-3)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점인 원점 O를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점 $(-3,\ 0)$과 이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점 $(3,\ 0)$은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점임을 알 수 있다. 즉,

$a^2+b^2=9$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 쌍곡선 $\dfrac{(x-3)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 다른 한 초점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(3+3,\ 0)$, 즉 $(6,\ 0)$이다.



그림과 같이 쌍곡선 $\frac{(x-3)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 y축과 만나는 두 점을 각각 $A(0,\ k)$, $B(0,\ -k)$ $(k>0)$이라 하자.

$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{3}$이고, $\overline{OF}=6$이므로 직각삼각형 AOF에서

$\overline{AF}=\sqrt{\overline{OF}^2+\overline{OA}^2}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$

즉, $\overline{AF}-\overline{OA}=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$2|a|=2\sqrt{3}$, $a^2=3$

$a^2=3$을 ㉠에 대입하면 $3+b^2=9$, $b^2=6$

따라서 $b^2-a^2=6-3=3$

답 ③

6 $x^2-2x-4y^2+16y+5=0$에서

$(x-1)^2-4(y-2)^2=-20$

즉, $\frac{(x-1)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{5}=-1$

쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{5}=-1$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$의 두 점근선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$이므로 쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{5}=-1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선은 직선 $y=\frac{1}{2}x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선이다.

그러므로 이 직선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

따라서 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 y절편은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ②

7 두 점 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=9$ …… ㉠

이때

$\overline{AF'}=\sqrt{(-3-4)^2+(-\sqrt{15})^2}=8$

$\overline{AF}=\sqrt{(3-4)^2+(-\sqrt{15})^2}=4$

이므로

$\overline{AF'}-\overline{AF}=4$

즉, 이 쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로

$2a=4$, $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b^2=9-4=5$

쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이고, 이 쌍곡선 위의 점 $A(4,\ \sqrt{15})$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x}{4}-\frac{\sqrt{15}y}{5}=1$

즉, $x-\frac{\sqrt{15}y}{5}=1$ …… ㉡

따라서 ㉡에 $y=0$을 대입하면 이 직선의 x절편은 1이다.

답 ②

8 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

이때 기울기가 -2이고 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{4\times(-2)^2-1}$

즉, $y=-2x\pm\sqrt{15}$

따라서 두 직선 $2x+y-\sqrt{15}=0$, $2x+y+\sqrt{15}=0$ 사이의 거리는 직선 $2x+y-\sqrt{15}=0$ 위의 한 점 $(0,\ \sqrt{15})$와 직선 $2x+y+\sqrt{15}=0$ 사이의 거리와 같으므로 그 값은

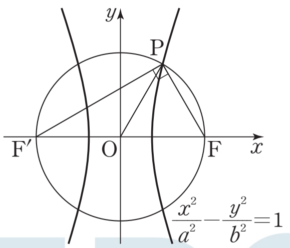
$\frac{|2\times0+\sqrt{15}+\sqrt{15}|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{3}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 36~37쪽

1 ⑤	**2** 6	**3** ①	**4** ④	**5** ②
6 12				

1



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 다른 한 초점을 F′이라 하면

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF'}}$이므로 세 점 F, P, F′은 원점 O를 중심으로 하고 선분 FF′을 지름으로 하는 원 위의 점이다.

반원에 대한 원주각의 크기는 직각이므로 $\angle \mathrm{FPF'}=\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=8$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로 직각삼각형 PF′F에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FF'}}^2-\overline{\mathrm{PF}}^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$이므로

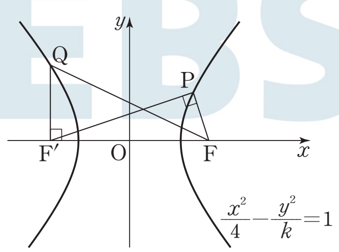
$2a=4\sqrt{3}-4$에서 $a=2(\sqrt{3}-1)$

따라서 $a^2+b^2=4^2$에서

$b^2=4^2-a^2=16-4(\sqrt{3}-1)^2=8\sqrt{3}$

답 ⑤

2



쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$의 두 초점 F, F′의 x좌표를 각각 c, $-c$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=4+k$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$의 주축의 길이가 $2\times 2=4$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=p$, $\overline{\mathrm{QF'}}=q$ $(p>0,\ q>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=p+4$

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=4$에서 $\overline{\mathrm{QF}}=q+4$

삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{FP}}=(p+4)+2c+p=2p+2c+4$

삼각형 QF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{FQ}}=q+2c+(q+4)=2q+2c+4$

조건 (가)에 의하여 $\overline{\mathrm{QF}}>\overline{\mathrm{PF'}}$, $\overline{\mathrm{QF'}}>\overline{\mathrm{PF}}$이므로 삼각형 QF′F의 둘레의 길이가 삼각형 PF′F의 둘레의 길이보다 크다. 이때 삼각형 QF′F의 둘레의 길이와 삼각형 PF′F의 둘레의 길이의 차는

$(2q+2c+4)-(2p+2c+4)=2(q-p)$

조건 (나)에 의하여

$2(q-p)=2$, $q-p=1$

즉, $q=p+1$이므로 $\overline{\mathrm{QF'}}=p+1$, $\overline{\mathrm{QF}}=p+5$이다.

직각삼각형 PF′F에서

$\overline{\mathrm{FF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=p^2+(p+4)^2$

$=2p^2+8p+16$ …… ㉡

직각삼각형 QF′F에서

$\overline{\mathrm{FF'}}^2=\overline{\mathrm{QF}}^2-\overline{\mathrm{QF'}}^2=(p+5)^2-(p+1)^2$

$=8p+24$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$2p^2+8p+16=8p+24$, $p^2=4$

$p>0$이므로 $p=2$

$p=2$를 ㉢에 대입하면

$\overline{\mathrm{FF'}}^2=8\times 2+24=40$

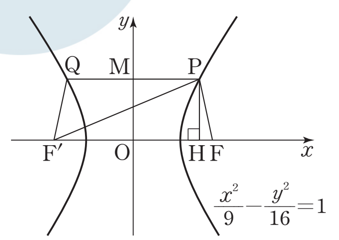
즉, $(2c)^2=40$에서 $c^2=10$

따라서 ㉠에서

$k=c^2-4=10-4=6$

답 6

3



쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 초점 F의 x좌표가 c이므로

$c^2=9+16=25$에서 $c=5$

즉, F$(5,\ 0)$, F′$(-5,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=10$

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 주축의 길이는 $2\times 3=6$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$

이때 $\overline{\mathrm{PF}}=k$ $(k>0)$으로 놓으면 $\overline{\mathrm{PF'}}=k+6$이고

$\cos(\angle \mathrm{PFF'})=\frac{1}{5}$이므로 삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\cos(\angle \mathrm{PFF'})$

$(k+6)^2=k^2+10^2-2\times k\times 10\times\dfrac{1}{5}$에서

$k^2+12k+36=k^2+100-4k$, $16k=64$, $k=4$

$\overline{\mathrm{PF}}=4$이고 두 점 Q, F′이 두 점 P, F와 각각 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PHF에서

$\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{PF}}\cos(\angle\mathrm{PFF'})=4\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

또 원점을 O, 선분 PQ가 y축과 만나는 점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{MP}}=\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OF}}-\overline{\mathrm{HF}}=5-\dfrac{4}{5}=\dfrac{21}{5}$

그러므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{MP}}=2\times\dfrac{21}{5}=\dfrac{42}{5}$

따라서 사각형 PQF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{FP}}=\dfrac{42}{5}+4+10+4=\dfrac{132}{5}$

답 ①

4 조건 (가)에 의하여 두 초점이 x축과 평행한 직선 위에 있고, 조건 (나)에 의하여 두 점근선이 만나는 점 $(3, 3)$이 쌍곡선의 중심이므로 이 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{(x-3)^2}{a^2}-\dfrac{(y-3)^2}{b^2}=1$ (a, b는 상수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 조건 (가)에서 쌍곡선 ㉠의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$이므로 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 사이의 거리도 $4\sqrt{2}$이다. 즉, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표가 $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(2\sqrt{2}, 0)$이므로

$a^2+b^2=8$ …… ㉡

또 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 점근선의 방정식이

$y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$이고, 조건 (나)에 의하여 쌍곡선 ㉠의 두 점근선이 서로 수직이므로 두 직선 $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$도 서로 수직이다.

즉, $\dfrac{b}{a}\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-1$에서 $a^2=b^2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2a^2=8$에서 $a^2=4$, $b^2=4$

그러므로 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$이고, 이 쌍곡선이 x축과 만나는 점을 구하기 위해 이 방정식에 $y=0$을 대입하면

$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{9}{4}=1$, $(x-3)^2=13$

$x-3=\sqrt{13}$에서 $x=3+\sqrt{13}$

$x-3=-\sqrt{13}$에서 $x=3-\sqrt{13}$

따라서 쌍곡선 $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$이 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 좌표가 $(3+\sqrt{13}, 0)$, $(3-\sqrt{13}, 0)$이므로 이 두 점 사이의 거리는

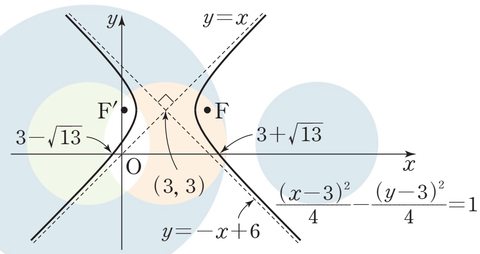
$(3+\sqrt{13})-(3-\sqrt{13})=2\sqrt{13}$

답 ④

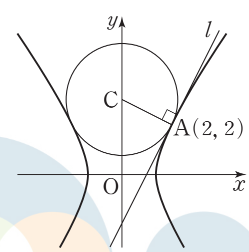
참고

쌍곡선 $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$의 두 초점은

$(3+2\sqrt{2}, 3)$, $(3-2\sqrt{2}, 3)$이므로 이 두 점을 각각 F, F′이라 하고 이를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



5



원 $x^2+(y-3)^2=5$의 중심을 C라 하면 C$(0, 3)$이므로 직선 AC의 기울기가 $\dfrac{3-2}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$이고, 직선 AC와 직선 l이 서로 수직이므로 직선 l의 기울기는 2이다.

직선 l이 점 A$(2, 2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-2=2(x-2)$, 즉 $y=2x-2$

한편, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 A$(2, 2)$에서의 접선 l의 방정식은

$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{2}$

이 직선이 직선 $y=2x-2$와 같으므로 $\frac{b^2}{a^2}=2$, $\frac{b^2}{2}=2$

$\frac{b^2}{2}=2$에서 $b^2=4$

$\frac{b^2}{a^2}=2$에서 $a^2=\frac{b^2}{2}=2$

따라서 $a^2+b^2=2+4=6$

답 ②

다른 풀이

점 A$(2, 2)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$, 즉 $4b^2-4a^2=a^2b^2$ …… ㉠

원 $x^2+(y-3)^2=5$의 중심을 C라 하면 C$(0, 3)$이므로 직선 AC의 기울기가 $\frac{3-2}{0-2}=-\frac{1}{2}$이고, 직선 AC와 직선 l이 서로 수직이므로 직선 l의 기울기는 2이다.

직선 l이 점 A$(2, 2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-2=2(x-2)$, 즉 $y=2x-2$

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{a^2\times2^2-b^2}$, 즉 $y=2x\pm\sqrt{4a^2-b^2}$

이 직선 중 y절편이 음수인 직선의 방정식은

$y=2x-\sqrt{4a^2-b^2}$이고, 이 직선이 직선 $y=2x-2$와 같으므로

$\sqrt{4a^2-b^2}=2$, $4a^2-b^2=4$ …… ㉡

㉡에서 $b^2=4a^2-4$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$4(4a^2-4)-4a^2=a^2(4a^2-4)$

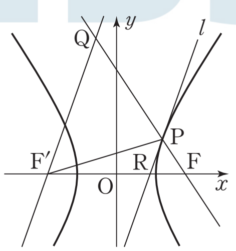
$a^4-4a^2+4=0$, $(a^2-2)^2=0$, $a^2=2$

㉡에서 $b^2=4a^2-4=4$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$이므로

$a^2+b^2=2+4=6$

6



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′의 x좌표가 각각 3, -3이므로

$a^2+b^2=9$ …… ㉠

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P에서의 접선 l의 기울기가 $2\sqrt{2}$이고, 점 P가 제1사분면의 점이므로 직선 l의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x-\sqrt{8a^2-b^2}$ …… ㉡

한편, 직선 l이 x축과 만나는 점을 R라 하면 직선 l과 직선 F′Q가 서로 평행하고 $\overline{\text{PF}}:\overline{\text{PQ}}=1:3$이므로

$\overline{\text{RF}}:\overline{\text{RF'}}=1:3$이다. 즉, 점 R는 선분 FF′을 $1:3$으로 내분하는 점이므로 점 R의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-3)+3\times3}{1+3}, 0\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

직선 l은 점 R$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$을 지나므로 ㉡에서

$0=2\sqrt{2}\times\frac{3}{2}-\sqrt{8a^2-b^2}$, $\sqrt{8a^2-b^2}=3\sqrt{2}$

즉, $8a^2-b^2=18$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a^2=3$, $b^2=6$이고, 직선 l의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$

그러므로 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$이고, 이 쌍곡선 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$으로 놓으면

$\frac{{x_1}^2}{3}-\frac{{y_1}^2}{6}=1$ …… ㉣

점 P는 직선 l 위의 점이므로

$y_1=2\sqrt{2}x_1-3\sqrt{2}$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면

$\frac{{x_1}^2}{3}-\frac{(2\sqrt{2}x_1-3\sqrt{2})^2}{6}=1$

$\frac{{x_1}^2}{3}-\frac{(2x_1-3)^2}{3}=1$, $3(x_1-2)^2=0$

즉, $x_1=2$, $y_1=\sqrt{2}$이므로 P$(2, \sqrt{2})$

$\overline{\text{PF}}=\sqrt{(3-2)^2+(0-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{\text{PQ}}=3\overline{\text{PF}}=3\sqrt{3}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$의 주축의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\text{PF'}}-\overline{\text{PF}}=2\sqrt{3}$에서

$\overline{\text{PF'}}=2\sqrt{3}+\overline{\text{PF}}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$\overline{\text{PR}}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+(\sqrt{2}-0)^2}=\frac{3}{2}$이고,

$\overline{\text{PR}}:\overline{\text{QF'}}=1:4$이므로

$\overline{\mathrm{QF'}}=4\overline{\mathrm{PR}}=4\times\frac{3}{2}=6$

따라서 삼각형 PQF′의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{F'P}}=3\sqrt{3}+6+3\sqrt{3}=6+6\sqrt{3}$

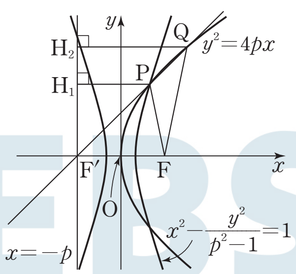
즉, $p=6$, $q=6$이므로 $p+q=6+6=12$

답 12

Level 3 **실력** 완성 본문 38쪽

1 ④	**2** 2	**3** ⑤

1



쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{p^2-1}=1$의 두 초점 F, F′의 x좌표를 각각

c, $-c$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=1^2+(p^2-1)=p^2$에서 $c=p$

즉, $\mathrm{F}(p,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-p,\ 0)$

또 포물선 $y^2=4px$의 초점은 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH_1}}$, $\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QH_2}}$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{F'P}}:\overline{\mathrm{PQ}}=2:1$이고, 직선 $\mathrm{PH_1}$과 직선 $\mathrm{QH_2}$는 서로 평행하므로

$\overline{\mathrm{PH_1}}:\overline{\mathrm{QH_2}}=2:3$

㉠에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=2:3$

$\overline{\mathrm{PF}}=2k$ $(k>0)$으로 놓으면 $\overline{\mathrm{QF}}=3k$이고, 쌍곡선

$x^2-\frac{y^2}{p^2-1}=1$의 주축의 길이가 2이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=2k+2$

또 $\overline{\mathrm{F'P}}:\overline{\mathrm{PQ}}=2:1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{F'P}}=k+1$

삼각형 PFQ의 둘레의 길이가 16이므로

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=16$

즉, $2k+3k+(k+1)=16$에서

$6k=15$, $k=\frac{5}{2}$

직각삼각형 $\mathrm{PH_1F'}$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=7$, $\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PF}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{F'H_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{PH_1}}^2}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}$

즉, 점 P의 좌표는 $(-p+5,\ 2\sqrt{6})$이고 이 점이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$(2\sqrt{6})^2=4p(-p+5)$

$p^2-5p+6=0$, $(p-2)(p-3)=0$

$p=2$ 또는 $p=3$

$p=2$일 때, $\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{6})$, $\mathrm{F}(2,\ 0)$이므로 점 P의 x좌표가 점 F의 x좌표보다 작다는 조건을 만족시키지 않는다.

$p=3$일 때, $\mathrm{P}(2,\ 2\sqrt{6})$, $\mathrm{F}(3,\ 0)$이 되어 문제의 조건을 만족시킨다.

따라서 $p=3$

답 ④

2 쌍곡선 H_1: $x^2-\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점 F, F′의 x좌표가 각각 c, $-c$ $(c>0)$이므로

$c^2=1+15=16$, $c=4$

즉, $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$이고 이 두 점은 쌍곡선

H_2: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이므로

$a^2+b^2=16$ …… ㉠

쌍곡선 H_1 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=k$ $(k>0)$이라 하면 쌍곡선 H_1의 주축의 길이가 2이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2$에서 $\overline{\mathrm{PF}}=k+2$

조건 (가)에 의하여 $2\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}+\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$2k=8+(k+2)$, $k=10$

즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=10$, $\overline{\mathrm{PF}}=12$

쌍곡선 H_2의 주축의 길이가 $2a$이므로 $\overline{\mathrm{QF'}}=l$ $(l>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=2a$에서 $\overline{\mathrm{QF}}=l+2a$

이때 삼각형 PQF의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{FP}}&=(\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}})+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{FP}}\\&=(10-l)+(l+2a)+12\\&=2a+22\end{aligned}$$

삼각형 QF′F의 둘레의 길이는

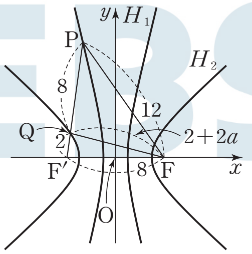
$\overline{QF'}+\overline{F'F}+\overline{FQ}=l+8+(l+2a)$

$\qquad\qquad\qquad\quad=2a+2l+8$

조건 (나)에 의하여

$(2a+22)-(2a+2l+8)=10$

즉, $14-2l=10$에서 $l=2$이므로 $\overline{QF'}=2$, $\overline{QF}=2+2a$



한편, 삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle PF'F)=\frac{\overline{PF'}^2+\overline{FF'}^2-\overline{PF}^2}{2\times\overline{PF'}\times\overline{FF'}}$$

$$=\frac{10^2+8^2-12^2}{2\times10\times8}$$

$$=\frac{1}{8}$$

이므로 삼각형 QF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{QF}^2=\overline{QF'}^2+\overline{FF'}^2-2\times\overline{QF'}\times\overline{FF'}\times\cos(\angle QF'F)$

즉, $(2+2a)^2=2^2+8^2-2\times2\times8\times\frac{1}{8}$에서

$a^2+2a-15=0$, $(a+5)(a-3)=0$

$a>1$이므로 $a=3$

$a^2=9$이므로 ㉠에서 $b^2=16-a^2=7$

따라서 $a^2-b^2=9-7=2$

답 2

3 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점 F, F′의 x좌표를 각각 c, $-c$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=1+4=5$, $c=\sqrt{5}$

즉, $F(\sqrt{5}, 0)$, $F'(-\sqrt{5}, 0)$

한편, 점 $P(0, t)$에서 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$에 그은 두 접선 l_1, l_2는 y축에 대하여 대칭이므로 두 점 Q, R도 y축에 대하여 대칭이다.

점 P에서 쌍곡선에 그은 접선과 쌍곡선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 (x_1, y_1)이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로

$x_1^2-\frac{y_1^2}{4}=1$ …… ㉠

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x-\frac{y_1y}{4}=1$ …… ㉡

직선 ㉡이 점 $P(0, t)$를 지나므로

$-\frac{y_1t}{4}=1$, $y_1=-\frac{4}{t}$

$y_1=-\frac{4}{t}$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$x_1^2=1+\frac{y_1^2}{4}=1+\left(-\frac{4}{t}\right)^2\times\frac{1}{4}=1+\frac{4}{t^2}$

$x_1=\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}$ 또는 $x_1=-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}$

즉, $Q\left(-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}, -\frac{4}{t}\right)$이므로 ㉡에서 직선 l_1의 방정식은

$-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}x+\frac{1}{t}y=1$ …… ㉢

$R\left(\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}, -\frac{4}{t}\right)$이므로 ㉡에서 직선 l_2의 방정식은

$\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}x+\frac{1}{t}y=1$ …… ㉣

ㄱ. $t=1$을 ㉢에 대입하면 직선 l_1의 방정식은

$-\sqrt{5}x+y=1$, 즉 $y=\sqrt{5}x+1$

$t=1$을 ㉣에 대입하면 직선 l_2의 방정식은

$\sqrt{5}x+y=1$, 즉 $y=-\sqrt{5}x+1$

그러므로 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱은

$\sqrt{5}\times(-\sqrt{5})=-5$ (참)

ㄴ. $Q\left(-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}, -\frac{4}{t}\right)$, $R\left(\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}, -\frac{4}{t}\right)$이므로

$\overline{QR}^2=\left(2\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}\right)^2=4\left(1+\frac{4}{t^2}\right)$

$\overline{QR}^2\le5$에서

$4\left(1+\frac{4}{t^2}\right)\le5$, $1+\frac{4}{t^2}\le\frac{5}{4}$, $\frac{1}{t^2}\le\frac{1}{16}$

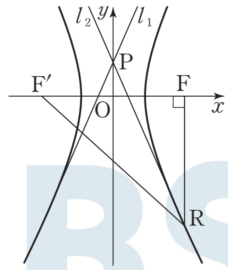
즉, $t^2\ge16$에서 $t^2-16=(t+4)(t-4)\ge0$

$t>0$이므로 $t\ge4$

따라서 t의 최솟값은 4이다. (참)

ㄷ. $R\left(\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}, -\frac{4}{t}\right)$이므로 삼각형 FF′R가 직각삼각형이 되도록 하는 t의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $\angle F'FR=\frac{\pi}{2}$일 때



점 R의 x좌표는 $\sqrt{5}$이므로

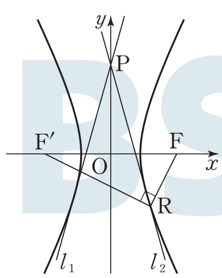
$\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$1+\frac{4}{t^2}=5,\ t^2=1$

$t>0$이므로 $t=1$

(ii) $\angle FRF'=\frac{\pi}{2}$일 때



세 점 F, F′, R가 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위에 있으므로 $\overline{OR}=\sqrt{5}$

$\overline{OR}=\sqrt{1+\frac{4}{t^2}+\frac{16}{t^2}}=\sqrt{1+\frac{20}{t^2}}$

즉, $\sqrt{1+\frac{20}{t^2}}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$1+\frac{20}{t^2}=5,\ t^2=5$

$t>0$이므로 $t=\sqrt{5}$

(i), (ii)에 의하여 $t=1$ 또는 $t=\sqrt{5}$이므로 $\alpha=1,\ \beta=\sqrt{5}$

그러므로 $\alpha^2+\beta^2=1^2+(\sqrt{5})^2=6$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

04 벡터의 연산

유제 본문 41~49쪽

1 ③	**2** ③	**3** ④	**4** 4	**5** ②
6 ②	**7** ②	**8** 6	**9** ⑤	**10** ④

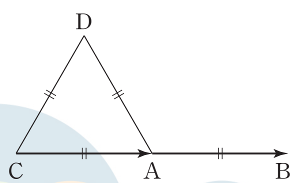
1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$이므로 벡터의 정의에 의하여 그림과 같다.

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$에서 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$

이때 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$에서 $\overline{AB}=\overline{CA}$이므로

$\overline{CA}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$

그러므로 삼각형 CAD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

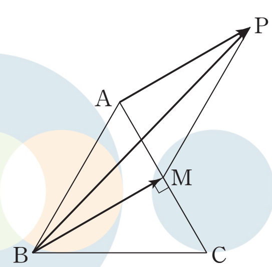


따라서 삼각형 ADB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

답 ③

2 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BM}$이므로 그림과 같이 사각형 ABMP는 평행사변형이다.



한편, 삼각형 ABC에서 $\overline{BM}\perp\overline{CA}$이므로

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BM}|=\overline{BM}=2\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\angle ABM=30^\circ$이고 사각형 ABMP는 평행사변형이므로

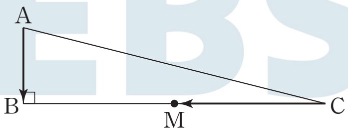
$\angle BAP=150^\circ$

따라서 $\overline{AB}=2$이고 $\overline{AP}=\sqrt{3}$이므로 코사인법칙에 의하여

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\overline{\mathrm{BP}}$
$=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2-2\times2\times\sqrt{3}\times\cos 150^\circ}$
$=\sqrt{4+3+6}=\sqrt{13}$

답 ③

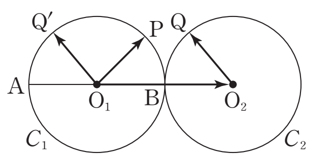
3



$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}|=\sqrt{5}$에서
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$
즉, 직각삼각형 ABM에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{5}$이므로
$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$
따라서
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

답 ④

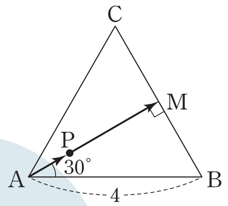
4



원 C_1 위의 점 Q′을 $\overrightarrow{\mathrm{O_1Q'}}=\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$가 되도록 잡으면
$\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}-\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}-\overrightarrow{\mathrm{O_1Q'}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}+\overrightarrow{\mathrm{Q'O_1}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{Q'O_1}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}$
$=(\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{Q'O_1}})+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}$
$=(\overrightarrow{\mathrm{Q'O_1}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1P}})+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}$
$=\overrightarrow{\mathrm{Q'P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}$
직선 $\mathrm{O_1O_2}$가 원 C_1과 만나는 점 중 선분 $\mathrm{O_1O_2}$ 위에 있지 않은 점을 A, 선분 $\mathrm{O_1O_2}$ 위에 있는 점을 B라 할 때, 구하는 벡터의 크기가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{Q'P}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이어야 한다.
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로 구하는 최댓값은
$2\times|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\times2=4$

답 4

5 정삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$
$=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$
$=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}|}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}})$
$=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$
즉, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$는 크기는 1이고 방향은 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$과 같다.
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$, $\angle\mathrm{MAB}=30^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로
구하는 삼각형 ABP의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times1\times4\times\sin 30^\circ=1$

답 ②

6 $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$이므로
$\vec{p}+\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-2\vec{b})$
$=2\vec{a}-\vec{b}$ …… ㉠
또 $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{r}=2\vec{a}+k\vec{b}$이므로
$\vec{p}-2\vec{r}=(\vec{a}+\vec{b})-2(2\vec{a}+k\vec{b})$
$=-3\vec{a}+(1-2k)\vec{b}$ …… ㉡
두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{p}-2\vec{r}$가 평행하므로 0이 아닌 상수 m에 대하여
$m(\vec{p}+\vec{q})=\vec{p}-2\vec{r}$ …… ㉢
㉠과 ㉡을 ㉢에 대입하면
$2m\vec{a}-m\vec{b}=-3\vec{a}+(1-2k)\vec{b}$
이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 모두 영벡터가 아니고 평행하지 않으므로
$2m=-3$, $-m=1-2k$
따라서 $m=-\dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{3}{2}=1-2k$
$k=-\dfrac{1}{4}$

답 ②

7 점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$ …… ㉠

또 점 C가 선분 AB를 1 : 5로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{5\vec{a}+\vec{b}}{5+1}=\dfrac{5\vec{a}+\vec{b}}{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

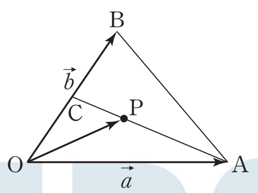
$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\dfrac{5\vec{a}+\vec{b}}{6}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$=\dfrac{3\vec{a}-\vec{b}}{6}=\dfrac{3}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{6}\vec{b}$

따라서 $m+n=\dfrac{3}{6}+\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$

답 ②

8 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)$



이때 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$라 하면 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{c}}{3}$이므로 점 P는 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 $k=\dfrac{1}{2}$, $m=2$, $n=1$이므로

$\dfrac{m+n}{k}=\dfrac{2+1}{\frac{1}{2}}=6$

답 6

참고

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$를 만족시키는 점 P는 삼각형 OAB의 무게중심이다.

9 $\vec{a}=(x,\ x-y)$, $\vec{b}=(y+1,\ 2y+5)$이고 $\vec{a}=\vec{b}$이므로

$x=y+1$ …… ㉠

$x-y=2y+5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(y+1)-y=2y+5$

$2y=-4$, $y=-2$

이때 $x=(-2)+1=-1$

따라서 $xy=(-1)\times(-2)=2$

답 ⑤

10 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대인 벡터는 $-\vec{a}$

이 벡터와 방향이 같고 크기가 1인 벡터는

$\dfrac{-\vec{a}}{|-\vec{a}|}=-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\dfrac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}(3,\ -4)$

$=-\dfrac{1}{5}(3,\ -4)=\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

따라서 모든 성분의 합은

$\left(-\dfrac{3}{5}\right)+\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 50~51쪽

1 ④	2 ③	3 ④	4 ④	5 ④
6 ②	7 ①	8 ③	9 ⑤	

1 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}+5\vec{b}$ …… ㉠

$\vec{x}-\vec{y}=3\vec{a}+\vec{b}$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 변끼리 더하면

$2\vec{x}=4\vec{a}+6\vec{b}$, $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}$

㉠에서 $\vec{y}=\vec{a}+5\vec{b}-\vec{x}$이므로

$\vec{y}=\vec{a}+5\vec{b}-(2\vec{a}+3\vec{b})=-\vec{a}+2\vec{b}$

따라서

$\vec{x}+3\vec{y}=(2\vec{a}+3\vec{b})+3(-\vec{a}+2\vec{b})=-\vec{a}+9\vec{b}$

즉, $m=-1$, $n=9$이므로

$m+n=(-1)+9=8$

답 ④

2 $|2(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}|=5$에서

$|2\vec{a}+\vec{b}|=5$ …… ㉠

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하고 방향은 반대이므로

$\vec{b}=k\vec{a}$ $(k<0)$으로 놓으면 ㉠에서

$|(2+k)\vec{a}|=5$

$|k+2|\times|\vec{a}|=5$

$|\vec{a}|=2$이므로 $|k+2|=\dfrac{5}{2}$

$k+2=\dfrac{5}{2}$ 또는 $k+2=-\dfrac{5}{2}$

$k=\dfrac{1}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{9}{2}$

이때 $k<0$이므로 $k=-\frac{9}{2}$

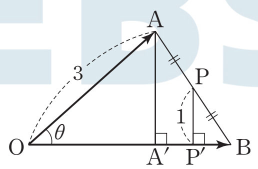
따라서

$|\vec{a}+\vec{b}|=\left|\vec{a}+\left(-\frac{9}{2}\right)\vec{a}\right|=\left|-\frac{7}{2}\vec{a}\right|$

$=\frac{7}{2}\times|\vec{a}|=\frac{7}{2}\times 2=7$

답 ③

3



$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$에서 점 P는 선분 AB의 중점이다.

점 P에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 P′, 점 A에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 A′이라 하면

$\overline{AA'}=2\overline{PP'}=2\times 1=2$

따라서 $\sin\theta=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}}=\frac{2}{3}$

답 ④

4 $(3k-2)\overrightarrow{PO}=k\overrightarrow{PA}+2k\overrightarrow{PB}$에서

$(2-3k)\overrightarrow{OP}=k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+2k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$

이때 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하면

$(2-3k)\vec{p}=k(\vec{a}-\vec{p})+2k(\vec{b}-\vec{p})$

$\vec{p}=\frac{k}{2}(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}k\times\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

이때 $\overrightarrow{OX}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$를 만족시키는 점 X는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P가 삼각형 OAB의 경계 또는 내부에 있으려면

$0\le\frac{3}{2}k\le 1$, $0\le k\le\frac{2}{3}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{2}{3}$이므로 $\alpha+\beta=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

답 ④

5 $\vec{a}+2\vec{b}=(1, 2)+2(3, -1)=(1, 2)+(6, -2)$

$=(7, 0)$

따라서 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은

$7+0=7$

답 ④

6 $\vec{a}-(\vec{b}-2\vec{a})=\vec{a}+(2\vec{a}-\vec{b})=3\vec{a}-\vec{b}$

$=3(-1, 2)-(3, 1)$

$=(-3, 6)-(3, 1)$

$=(-6, 5)$

이므로 모든 성분의 합은 $(-6)+5=-1$

답 ②

7 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PC}$에서 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$

$2\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$

$2(a, b)=2(-3, 2)-(2, 3)+(1, 2)$

$2(a, b)=(-7, 3)$

$(a, b)=\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

따라서 $a+b=\left(-\frac{7}{2}\right)+\frac{3}{2}=-2$

답 ①

8 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}$가 평행하므로 0이 아닌 상수 k에 대하여

$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$

$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

이때 A$(2, 1)$, B$(5, x)$, C$(x+1, 7)$이므로

$k(2, 1)=(x+1, 7)-(5, x)$

$(2k, k)=(x-4, 7-x)$

$2k=x-4$ …… ㉠

$k=7-x$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$14-2x=x-4$, $3x=18$

따라서 $x=6$

답 ③

9 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(2, 4)$이고

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\times\left(\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right)=2\overrightarrow{PM}$

따라서 $2|\overrightarrow{PM}|$의 최댓값은 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 중심을 C$(-1, 0)$이라 할 때

$2\times(\overline{CM}+1)=2\times\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(4-0)^2}+2$

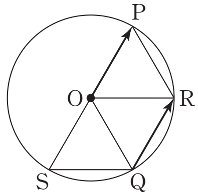
$=2\times 5+2=12$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 52~53쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ② 4 ④ 5 80
6 ④

1 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{QR}$의 크기가 같아야 한다. 이때 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 1이므로 벡터 $\overrightarrow{QR}$의 크기도 1이다. 또 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{QR}$의 방향이 같아야 한다. 선분 PS가 원의 지름이 되도록 원 위의 점 S를 잡으면 세 삼각형 OSQ, OQR, ORP는 모두 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

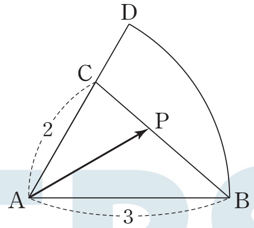


따라서 세 점 P, Q, R를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR에서 $\angle QRP=120^\circ$이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{RP}\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ①

2 벡터 $\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|}$는 방향이 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 같고 크기가 1인 벡터이므로 벡터 $3\times\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|}$는 방향이 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 같고 크기가 3인 벡터이다.



즉, 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 A이고 반지름의 길이가 3인 원이 직선 AC와 만나는 두 점 중 점 C와 가까운 점을 D라 할 때, 호 BD이다.

$\angle DAB=\theta$라 하면 호 BD의 길이가 π이므로

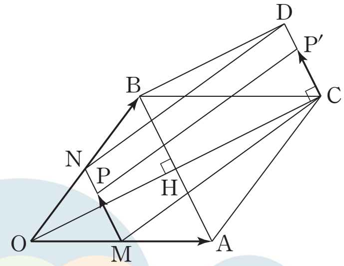
$3\times\theta=\pi$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

3



점 C를 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 잡으면

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ …… ㉠

또 두 점 D, P′을 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CP'}=\overrightarrow{MP}$가 되도록 잡으면 점 P′은 선분 CD 위에 있다.

㉠에서

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP'}$

$=\overrightarrow{OP'}$ …… ㉡

이때 두 선분 AB, OC의 교점을 H라 하면 삼각형 OAB가 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OCD=\angle OHB=90^\circ$

㉡에서 벡터 $\overrightarrow{OP'}$의 크기가 최대이기 위해서는 점 P′이 점 D이어야 하고 $|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{17}$

$\overline{OH}=x$라 하면 직각삼각형 OCD에서

$\overline{OD}^2=(2\overline{OH})^2+\overline{CD}^2$

$17=(2x)^2+1^2$, $4x^2=16$, $x^2=4$

$x>0$이므로 $x=2$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

답 ②

4 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{DP'}$이 되도록 하는 점 P′을 잡으면

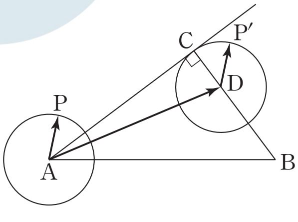
$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DP'}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP'}=\overrightarrow{AP'}$

이때 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 D이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

한편, 직선 AC와 이 원이 한 점 C에서만 만나므로

$\angle ACB=90^\circ$

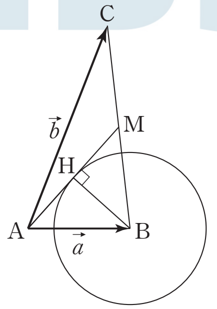


따라서 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$

답 ④

5 $\overrightarrow{AP}=t(\vec{a}+\vec{b})$에서 $\overrightarrow{AP}=2t\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$이므로 선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 P가 나타내는 도형은 직선 AM이고, 삼각형 ABM은 $\overline{AB}=\overline{BM}=3$인 이등변삼각형이다.



한편, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이 직선 AM과 한 점에서만 만나므로 만나는 점을 H라 하면 H는 접점이다.

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

이때 삼각형 ABM은 이등변삼각형이므로 이 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times 2\overline{AH}\times\overline{BH}$

$=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는 삼각형 ABM의 넓이의 2배와 같으므로

$S=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

$S^2=80$

답 80

6 점 C가 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OC}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

이때 세 점 O, C, E가 한 직선 위에 있으므로 0이 아닌 어떤 실수 s에 대하여

$\overrightarrow{OE}=s\overrightarrow{OC}=\frac{2s}{3}\vec{a}+\frac{s}{3}\vec{b}$ …… ㉠

또 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$이므로 어떤 실수 t에 대하여

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AD}=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$

$=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 서로 같아야 하고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로

$\frac{2s}{3}=1-t$ …… ㉢

$\frac{s}{3}=\frac{t}{2}$ …… ㉣

㉣에서 $t=\frac{2}{3}s$이므로 이것을 ㉢에 대입하면

$\frac{2s}{3}=1-\frac{2s}{3}$, $\frac{4s}{3}=1$, $s=\frac{3}{4}$

따라서 $s=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

즉, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$이므로 $m+n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 ④

참고

$0<t<1$인 어떤 실수 t에 대하여 점 E가 선분 AD를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이라 하면

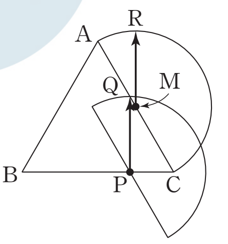
$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OD}+(1-t)\overrightarrow{OA}=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}$

Level 3 실력 완성

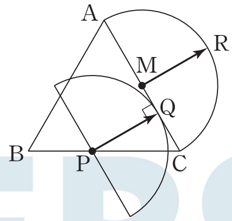
본문 54쪽

1 ④	**2** 15	**3** 12

1 지름이 선분 CA인 반원을 점 M이 점 P가 되도록 평행이동하여 그리면 이 반원과 선분 CA가 만나는 점 중 하나가 점 Q가 되고, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MR}$에 의하여 점 R가 결정된다.



이때 $|\overrightarrow{PC}|$의 값이 최대가 되기 위해서는 아래 그림과 같이 점 P를 중심으로 하는 반원의 호가 선분 AC와 접해야 한다.



한편, 직각삼각형 PCQ에서 $\angle PCQ=60^\circ$이므로

$\overline{PQ}=\overline{PC}\sin 60^\circ$

이때 $\overline{PQ}=1$이므로

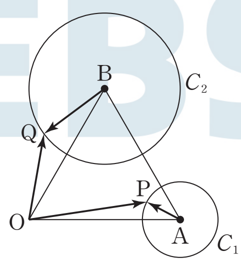
$1=\overline{PC}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{PC}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $|\overrightarrow{PC}|$의 최댓값은 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ④

2



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BQ}=\vec{q}$라 하면

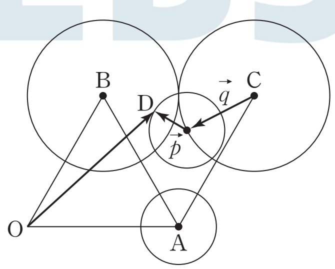
$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

$\quad=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ})$

$\quad=(\vec{a}+\vec{p})+(\vec{b}+\vec{q})$

$\quad=(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{p}+\vec{q})$ ...... ㉠

이때 점 C를 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$가 되도록 잡고, 벡터 $\vec{q}$의 시점을 점 C, 벡터 $\vec{p}$의 시점을 벡터 $\vec{q}$의 종점으로 놓으면 그림과 같다.



이때 벡터 $\vec{p}$의 종점을 D라 하면

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$ ...... ㉡

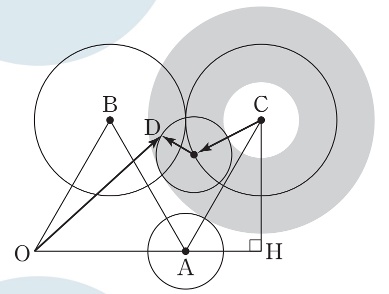
$\vec{p}+\vec{q}=\vec{q}+\vec{p}=\overrightarrow{CD}$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$

그러므로 점 X가 나타내는 영역은 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원의 경계 또는 내부에서 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 내부를 제외한 부분이므로 넓이는

$3^2\pi-1^2\pi=8\pi$



또 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{AH}=4+2=6$

$\overline{CH}=\overline{CA}\sin 60^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

이므로

$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{CH}^2}$

$\quad=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

이때 $|\overrightarrow{OX}|$의 최댓값은

$\overline{OC}+3=4\sqrt{3}+3=3+4\sqrt{3}$

따라서 $a=8$, $b=3$, $c=4$이므로

$a+b+c=8+3+4=15$

답 15

3 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$라 하면

$\overrightarrow{OX}=\dfrac{\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}}{3}=\dfrac{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})+2\overrightarrow{OQ}}{3}$

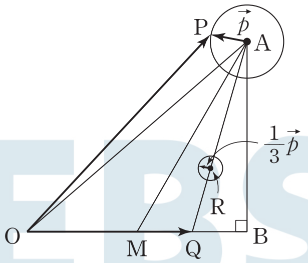
$\quad=\dfrac{(\vec{a}+\vec{p})+2\vec{q}}{3}$

$\quad=\dfrac{1}{3}\vec{p}+\dfrac{\vec{a}+2\vec{q}}{3}$ ...... ㉠

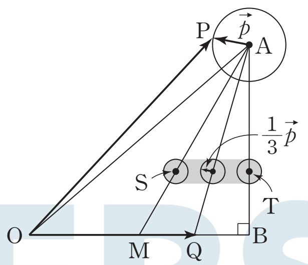
이때 선분 AQ를 $2:1$로 내분하는 점을 R라 하면 ㉠에서

$\overrightarrow{OX}=\dfrac{1}{3}\vec{p}+\overrightarrow{OR}$

그러므로 점 X는 중심이 R이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$인 원 위의 점이다.



이때 점 Q가 선분 MB 위를 움직이므로 두 선분 AM, AB를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 S, T라 하면 점 X는 중심이 선분 ST 위에 있고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$인 원 위의 점이다.



$\overline{\mathrm{AM}}=6$이고 $\angle\mathrm{OMA}=120°$에서 $\angle\mathrm{AMB}=60°$이므로

$\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{AM}}\cos 60°=6\times\frac{1}{2}=3$

삼각형 AMB에서

$\overline{\mathrm{ST}}=\frac{2}{3}\,\overline{\mathrm{MB}}=\frac{2}{3}\times 3=2$

따라서 점 X가 나타내는 영역의 넓이는

$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\pi+2\times\frac{2}{3}=\frac{\pi}{9}+\frac{4}{3}$

이므로 $a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{4}{3}$

즉, $\frac{b}{a}=12$

답 12

05 벡터의 내적, 직선과 원의 방정식

유제 본문 57~63쪽

1 ④ **2** ① **3** ⑤ **4** ② **5** ①
6 ③ **7** ① **8** ②

1 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=4$

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로

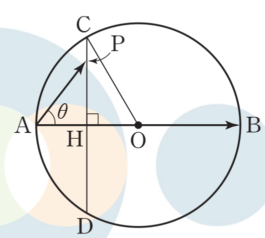
$4|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta=4$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta=1$ …… ㉠

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}\cos\theta=\overline{\mathrm{AH}}$

이므로 ㉠에서 $\overline{\mathrm{AH}}=1$



따라서 점 H를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 각각 C, D라 하면 점 P가 나타내는 도형은 선분 CD이다. 원의 중심을 O라 하면

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OA}}=2$

이때 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AH}}=2-1=1$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OC}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

따라서 구하는 선분 CD의 길이는

$\overline{\mathrm{CD}}=2\overline{\mathrm{CH}}=2\sqrt{3}$

답 ④

2 A(1, 2), B(3, −1)이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(1,\ 2)\cdot\{(3,\ -1)-(1,\ 2)\}\\&=(1,\ 2)\cdot(2,\ -3)\\&=1\times2+2\times(-3)\\&=-4\end{aligned}$$

답 ①

3 $|\vec{a}+\vec{b}|=4$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=4^2$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=4^2$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16$

이때 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이므로

$4+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=16$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}|\vec{a}+2\vec{b}|^2&=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2\\&=2^2+4\times\frac{3}{2}+4\times3^2=46\end{aligned}$$

이므로 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{46}$

답 ⑤

4 $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 2)+(3,\ 1)=(4,\ 3)$

$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ 2)-(3,\ 1)=(-2,\ 1)$

이때 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{(4,\ 3)\cdot(-2,\ 1)}{\sqrt{4^2+3^2}\times\sqrt{(-2)^2+1^2}}\\&=\frac{4\times(-2)+3\times1}{5\times\sqrt{5}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

답 ②

5 직선 $3x+4y=8$에서

$3x=-4y+8$

$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{-3}$

이므로 방향벡터를 $\vec{e}$라 하면

$\vec{e}=(4,\ -3)$

따라서 $\vec{d}=(1,\ 2)$, $\vec{e}=(4,\ -3)$이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\vec{d}\cdot\vec{e}|}{|\vec{d}||\vec{e}|}\\&=\frac{|(1,\ 2)\cdot(4,\ -3)|}{\sqrt{1^2+2^2}\times\sqrt{4^2+(-3)^2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{5}\times5}=\frac{2\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

답 ①

6 직선 $y=kx+5$에서 $kx-y+5=0$

이 직선의 법선벡터를 $\vec{m}$이라 하면

$\vec{m}=(k,\ -1)$

법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 3)$인 직선과 이 직선이 서로 수직이므로 $\vec{n}\perp\vec{m}$

따라서

$\vec{n}\cdot\vec{m}=(2,\ 3)\cdot(k,\ -1)=2k-3=0$

이므로 $k=\dfrac{3}{2}$

답 ③

7 $|\vec{p}-\vec{a}|=k$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $\mathrm{C}(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 k인 원이다.

이 원과 방향벡터가 $\vec{d}=(4,\ 3)$인 직선이 한 점 $\mathrm{A}(-2,\ l)$에서만 만나므로 직선과 원은 점 $\mathrm{A}(-2,\ l)$에서 접한다.

즉, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{d}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{d}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\vec{d}=0$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2)-(-2,\ l)=(3,\ 2-l)$이므로

$(3,\ 2-l)\cdot(4,\ 3)=0$

$3\times4+(2-l)\times3=0$

$3l=18$, $l=6$

한편, k는 반지름의 길이이고 $\mathrm{A}(-2,\ 6)$이므로

$k=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2-1)^2+(6-2)^2}=5$

따라서 $k=5$, $l=6$이므로

$k+l=5+6=11$

답 ①

8 $\vec{p}\cdot\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

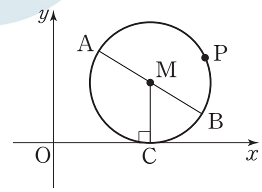
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

이때 이 원이 x축과 한 점에서만 만나므로 이 점을 C라 하면 점 C의 x좌표는 선분 AB의 중점 M의 x좌표와 같다.

점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2+k}{2}\right)$, 즉 $\left(2,\ \dfrac{2+k}{2}\right)$이므로

$\mathrm{C}(2,\ 0)$



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\{(2,\ 0)-(1,\ 2)\}\cdot\{(2,\ 0)-(3,\ k)\}$

$=(1,\ -2)\cdot(-1,\ -k)$

$=1\times(-1)+(-2)\times(-k)$

$=-1+2k=0$

따라서 $k=\frac{1}{2}$

답 ②

참고

$\overline{AM}=\overline{MC}$임을 이용하여 k의 값을 구해도 된다.

Level 1 기초 연습

본문 64~65쪽

1 ①	2 ④	3 ⑤	4 ①	5 ①
6 ④	7 ③	8 ④		

1 $\vec{a}=(1,\ x)$, $\vec{b}=(x+3,\ 2)$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$이므로

$(1,\ x)\cdot(x+3,\ 2)=6$

$(x+3)+2x=6$, $3x=3$

따라서 $x=1$

답 ①

2 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b})-\frac{1}{\sqrt{2}-1}(\vec{b}\cdot\vec{a})$

$=\{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(\sqrt{2}\vec{b})\}-(1+\sqrt{2})(\vec{b}\cdot\vec{a})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-(1+\sqrt{2})(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(1,\ 2)\cdot(1,\ 2)-(1,\ 2)\cdot(3,\ -1)$

$=5-1=4$

답 ④

3 $\vec{a}\cdot(4\vec{a}+3\vec{b})=|2\vec{a}|^2+6$에서

$\vec{a}\cdot(4\vec{a})+\vec{a}\cdot(3\vec{b})=(2\vec{a})\cdot(2\vec{a})+6$

$4\vec{a}\cdot\vec{a}+3\vec{a}\cdot\vec{b}=4\vec{a}\cdot\vec{a}+6$, $3\vec{a}\cdot\vec{b}=6$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

답 ⑤

4 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하자.

$|\overrightarrow{OM}|=1$에서

$\left|\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right|=1$, $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=1$

$|\vec{a}+\vec{b}|=2$

양변을 제곱하면

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=4$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ …… ㉠

또 $|\overrightarrow{AB}|=3$에서

$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=3$, $|\vec{b}-\vec{a}|=3$

$|\vec{a}-\vec{b}|=3$

양변을 제곱하면

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=9$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$ …… ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{5}{4}$

답 ①

다른 풀이

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})$

$=|\overrightarrow{OM}|^2+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

$=1+0-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}$

5 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

$(1,\ 2)\cdot\{(1,\ 2)+(3,\ x)\}=0$

$(1,\ 2)\cdot(4,\ x+2)=0$

$1\times4+2\times(x+2)=0$

$2x+8=0$, $x=-4$

답 ①

6 한 직선의 방향벡터는

$\vec{d}=(1,\ \sqrt{3})$ …… ㉠

또 두 점 $A(1,\ \sqrt{3})$, $B(-1,\ 3\sqrt{3})$을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{e}$, 점 O를 원점이라 하면

$\vec{e}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(-1,\ 3\sqrt{3})-(1,\ \sqrt{3})$

$=(-2,\ 2\sqrt{3})$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{d}\cdot\vec{e}|}{|\vec{d}||\vec{e}|}$$

$$=\frac{|(1,\ \sqrt{3})\cdot(-2,\ 2\sqrt{3})|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\times\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}}$$

$$=\frac{4}{2\times4}=\frac{1}{2}$$

답 ④

7 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{d}=(3,\ 1)$인 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}=\frac{y}{1}$

한편, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값이 0이 아닌 양수이므로 직선 l은 위의 직선과 평행하다.

즉, 직선 l의 x절편을 k라 하면 직선 l의 방정식은

$\frac{x-k}{3}=y$로 놓을 수 있다.

이때 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값이 $\sqrt{10}$이므로 원점과 직선 $x-3y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이어야 한다.

$\frac{|0-3\times0-k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$

$|k|=10$

$k>0$이므로 $k=10$

답 ③

8 $|2\vec{p}-\vec{a}|=2$에서 $\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=1$

이때 $\frac{1}{2}\vec{a}=(2,\ \sqrt{5})$이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $\mathrm{C}(2,\ \sqrt{5})$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값은

$\overline{\mathrm{OC}}+1=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}+1=3+1=4$

답 ④

Level 2 **기본 연습** 본문 66~67쪽

1 ③	**2** ④	**3** ③	**4** ③	**5** ②
6 ②				

1 $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

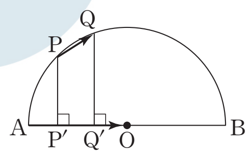
$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta=\frac{1}{2}$

이때 $\overline{\mathrm{AO}}=1$이므로

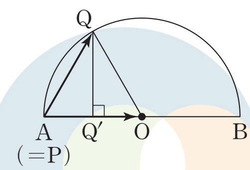
$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta=\frac{1}{2}$ …… ㉠

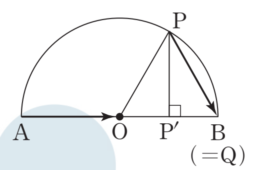
두 점 P, Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 ㉠에서

$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\frac{1}{2}$



이때 그림에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 크기가 최대이기 위해서는 점 P가 점 A이거나 점 Q가 점 B이어야 한다.





따라서 세 점 O, P, Q를 꼭짓점으로 하는 삼각형은 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$의 크기의 최댓값은 1이다.

답 ③

2 A(1, 2), B(3, 1)이고 네 점 O, A, B, C를 꼭짓점으로 하는 사각형이 선분 OC를 대각선으로 하는 평행사변형이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2)+(3,\ 1)=(4,\ 3)$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{(1,\ 2)\cdot(4,\ 3)}{\sqrt{1^2+2^2}\times\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{5}\times5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ④

3 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

이므로 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BA}$

따라서 직각삼각형 OAP에서

$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|\sin 30^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$

답 ③

4 법선벡터가 $\vec{n}=(3, 4)$이므로 직선 l의 방정식은

$3x+4y=k$ (k는 상수)

이때 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점을 R라 하면

$|2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=3\times\left|\frac{2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{3}\right|=3\times|\overrightarrow{OR}|$

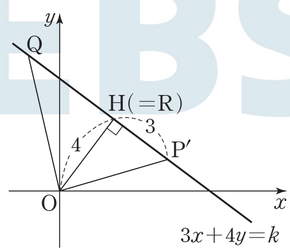
이 값의 최솟값이 12이므로 $|\overrightarrow{OR}|$의 최솟값은 4이다.

원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 R가 점 H일 때 $|\overrightarrow{OR}|$는 최솟값을 갖는다.

즉, $\overline{OH}=4$

또 $\overline{PQ}=9$이므로

$\overline{P'H}=\frac{1}{3}\overline{PQ}=\frac{1}{3}\times9=3$



직각삼각형 OP′H에서

$\overline{OP'}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{P'H}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

또 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 4이므로

$\frac{|3\times0+4\times0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

$|k|=20$

$k=-20$ 또는 $k=20$

직선 l의 y절편 m이 $m>0$이므로 직선의 방정식은

$3x+4y=20$이고 $m=5$

따라서 $m+\overline{OP'}=5+5=10$

답 ③

5 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AB}$

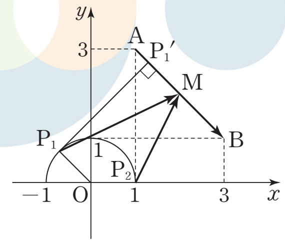
$=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{AB}$

이때 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{AB}=2\times\left(\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

$=2\times\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB}$ …… ㉠

이때 원점을 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 반원의 호 $x^2+y^2=1\ (y\geq0)$과 만나는 점을 P_1, 좌표가 $(1, 0)$인 점을 P_2라 하면 점 P_1에서 ㉠은 최대이고 점 P_2에서 ㉠은 최소이다.



그러므로 점 P_1에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P_1'이라 하면 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$이므로 최댓값 M은

$M=2\times\overrightarrow{P_1M}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=2\times\overline{P_1'M}\times\overline{AB}$

$=2\times1\times2\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}$

또 $P_2(1, 0)$, $M(2, 2)$이므로 최솟값 m은

$m=2\times\overrightarrow{P_2M}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=2\times(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP_2})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=2\times\{(2, 2)-(1, 0)\}\cdot\{(3, 1)-(1, 3)\}$

$=2\times\{(1, 2)\cdot(2, -2)\}$

$=2\times\{1\times2+2\times(-2)\}$

$=2\times(-2)$

$=-4$

따라서 $M\times m=4\sqrt{2}\times(-4)=-16\sqrt{2}$

답 ②

6 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ …… ㉠

또 점 S는 선분 BC를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AS}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$

그러므로

$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AQ}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{12}$ …… ㉡

이때 $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS}=-\frac{2}{3}$이고 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$이므로 ㉠과 ㉡에서

$\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{12}\right)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{12}(\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+5\vec{b})$

$=\frac{1}{18}(3|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2)$

$=\frac{1}{18}(3|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-5|\vec{b}|^2)$

$=\frac{1}{18}(3\times3^2+2\times3\times3\times\cos\theta-5\times3^2)$

$=\frac{1}{18}(-18+18\cos\theta)$

$=-1+\cos\theta=-\frac{2}{3}$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

답 ②

Level 3 **실력 완성** 본문 68~69쪽

1	24	2	③	3	16	4	③	5	7

1 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

에서

$\left(\frac{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$(|\overrightarrow{OB}|\cos\theta)\times\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=\overrightarrow{BC}$ ...... ㉠

점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

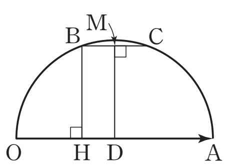
$\overline{OB}\cos\theta=\overline{OH}$이므로 ㉠은

$\overline{OH}\times\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=\overrightarrow{BC}$

이때 $\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$는 단위벡터이므로 벡터 $\overrightarrow{BC}$는 크기가 선분 OH의 길이이고 방향은 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 같다.

선분 OA의 중점을 D, 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{DM}\perp\overline{BC}$



한편, 이 반원의 지름의 길이가 6이므로

$\overline{OH}+\overline{BM}=3$

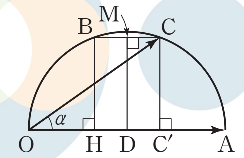
$2\overline{BM}+\overline{BM}=3$, $3\overline{BM}=3$

$\overline{BM}=1$

즉, $\overline{MC}=1$

점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 C′이라 하면

$\overline{OC'}=\overline{OD}+\overline{DC'}=3+1=4$



따라서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\alpha$

$=\overline{OA}\times\overline{OC'}$

$=6\times4=24$

답 24

참고

점 O를 원점으로 하고 A(6, 0)으로 놓으면 두 점 B, C는 반원의 호 $(x-3)^2+y^2=9$ $(y\geq0)$ 위의 점이다.

H$(a, 0)$ $(a>0)$이라 하면 두 점 B, C의 좌표는 B(a, b), C$(2a, b)$ $(b>0)$으로 놓을 수 있다.

두 점 B, C가 호 OA 위에 있으므로

$(a-3)^2+b^2=9$ ...... ㉠

$(2a-3)^2+b^2=9$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $(a-3)^2=(2a-3)^2$

$a-3=2a-3$ 또는 $a-3=-2a+3$

$a=0$ 또는 $a=2$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

2 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})$

$=|\overrightarrow{AO}|^2+(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ ...... ㉠

이때

$|\overrightarrow{AO}|^2=3^2+4^2=25$ ...... ㉡

원의 중심 O(0, 0)에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로 점 H는 선분 PQ의 중점이다.

그러므로

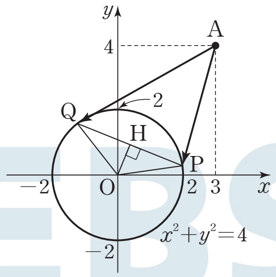
$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\times\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}=2\overrightarrow{OH}$ ...... ㉢

이때 $\overline{PQ}=2\sqrt{3}$에서 $\overline{PH}=\sqrt{3}$, $\overline{OP}=2$이므로

$\angle HOP=60°$

이때 $\angle POQ=120^{\circ}$이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\times2\times\cos120^{\circ}=-2$ …… ㉣

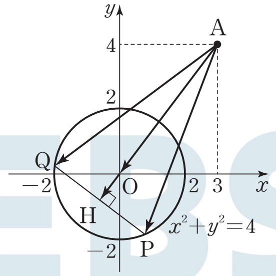


㉠에 ㉡, ㉢, ㉣을 대입하면

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=25+2\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AO}+(-2)$

$=23+2\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AO}$ …… ㉤

㉤이 최대이기 위해서는 아래 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OH}$의 방향이 같아야 한다.



따라서 $\overline{OH}=1$이므로 ㉤의 최댓값은

$23+2\times1\times|\overrightarrow{AO}|=23+2\times1\times5=33$

답 ③

3 조건 (가)에서 $\vec{b}-\vec{a}=(6, 8)$이므로

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6, 8)$

$\overrightarrow{AB}=(6, 8)$ …… ㉠

또 조건 (나)에서 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 하면

$\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{b}$이므로

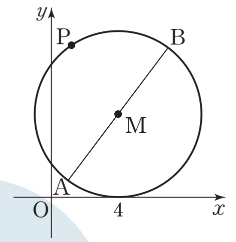
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{p}-(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

이때 이 원이 x축과 한 점 C(4, 0)에서 만나므로 중심의 x좌표는 4이다.

또 ㉠에서 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로 이 원의 반지름의 길이는 5이다. 이 원의 중심을 M이라 하면 조건 (나)에서 이 원과 x축이 만나는 점은 C(4, 0)뿐이고, 점 B의 x좌표와 y좌표가 모두 양수이므로 M(4, 5)



이때 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$이므로

$(4-a_1, 5-a_2)=(3, 4)$

$4-a_1=3$, $5-a_2=4$

$a_1=1$, $a_2=1$

또 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$이므로

$(b_1-4, b_2-5)=(3, 4)$

$b_1-4=3$, $b_2-5=4$

$b_1=7$, $b_2=9$

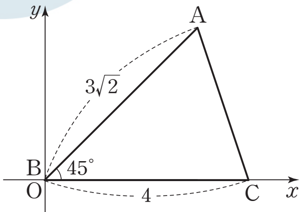
따라서 $\vec{a}=(1, 1)$, $\vec{b}=(7, 9)$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1, 1)\cdot(7, 9)=1\times7+1\times9=16$

답 16

4 삼각형 ABC를 점 B를 원점 O, 직선 OC를 x축으로 하는 좌표평면 위에 놓으면 C(4, 0)

또 $\angle ABC=45^{\circ}$, $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로 A(3, 3)



P(x, y)로 놓으면 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-2$에서

$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=-2$

$\{(3, 3)-(x, y)\}\cdot\{(0, 0)-(x, y)\}=-2$

$(3-x, 3-y)\cdot(-x, -y)=-2$

$(x^2-3x)+(y^2-3y)=-2$ …… ㉠

또 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AC}=4$에서

$(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=4$

$\{(4, 0)-(x, y)\}\cdot\{(4, 0)-(3, 3)\}=4$

$(4-x, -y)\cdot(1, -3)=4$

$(4-x)+3y=4$

$x=3y$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(9y^2-9y)+(y^2-3y)=-2$

$10y^2-12y=-2$

$5y^2-6y+1=0$, $(5y-1)(y-1)=0$

$y=\frac{1}{5}$ 또는 $y=1$

이것을 ㉡에 대입하면

$\begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{1}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

따라서 $|\overrightarrow{BP}|$가 최대가 되는 점 P의 좌표는 $(3,\ 1)$이므로 $|\overrightarrow{BP}|$의 최댓값은

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

답 ③

5 점 Q′을 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PQ'}$이 되도록 잡으면

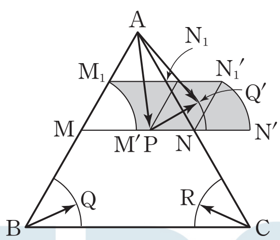
$(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})\cdot\overrightarrow{CR}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ'})\cdot\overrightarrow{CR}$

$=\overrightarrow{AQ'}\cdot\overrightarrow{CR}$ ...... ㉠

이때 두 선분 AM, AN의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하고 두 점 N_1', N′을

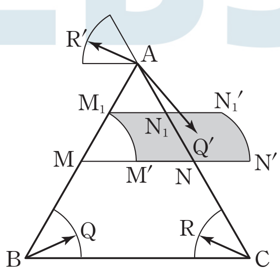
$\overrightarrow{M_1N_1'}=2\overrightarrow{M_1N_1}$, $\overrightarrow{MN'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$

이 되도록 잡는다. 또 선분 MN 위의 점 M′을 $\overline{MM'}=1$이 되도록 잡으면 점 Q′은 부채꼴 $MM'M_1$의 호 $M'M_1$, 부채꼴 $NN'N_1'$의 호 $N'N_1'$과 두 선분 M_1N_1', M′N′으로 둘러싸인 부분의 경계 또는 내부의 점이다.



㉠에서 점 R′을 $\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{AR'}$이 되도록 잡으면

$\overrightarrow{AQ'}\cdot\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{AQ'}\cdot\overrightarrow{AR'}$ ...... ㉡



$\overrightarrow{AQ'}\cdot\overrightarrow{CR}$의 값의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

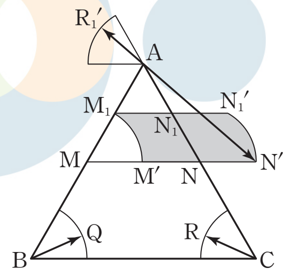
(ⅰ) ㉡의 값이 음수인 경우

점 R′을 벡터 $\overrightarrow{AR'}$의 방향이 벡터 $\overrightarrow{AN'}$과 반대인 점으로 잡고 이 점 R′을 R_1'이라 하면 ㉡의 최솟값 m은

$m=-\overline{AR_1'}\times\overline{AN'}$

$=-1\times\sqrt{\overline{AM'}^2+\overline{M'N'}^2}$

$=-1\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=-\sqrt{7}$



(ⅱ) ㉡의 값이 양수인 경우

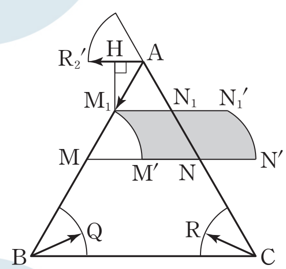
점 R′을 두 선분 AR′, BC가 평행하도록 잡고 이 점 R′을 R_2'이라 하면 ㉡의 최댓값 M은

$M=\overrightarrow{AR_2'}\cdot\overrightarrow{AM_1}$ ...... ㉢

이때 점 M_1에서 선분 AR_2'에 내린 수선의 발을 H라 하면 ㉢은

$\overrightarrow{AR_2'}\cdot\overrightarrow{AM_1}=\overline{AR_2'}\times\overline{AH}$

$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$



(ⅰ), (ⅱ)에서

$4\times(M\times m)^2=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times(-\sqrt{7})^2=7$

답 7

06 공간도형

유제 본문 73~79쪽

1 6　2 ①　3 ⑤　4 ①　5 ④

1 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 CD, DE, CF, EF이므로

$a=4$

사각형 ABFD가 정사각형이므로 직선 AB와 이루는 각의 크기가 90°인 직선은 BF, AD이다.

$b=2$

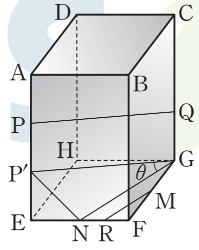
따라서 $a+b=4+2=6$

답 6

참고

	위치 관계	두 직선이 이루는 각의 크기
직선 AB와 직선 AC	한 점에서 만난다	60°
직선 AB와 직선 AD	한 점에서 만난다	90°
직선 AB와 직선 AE	한 점에서 만난다	60°
직선 AB와 직선 BC	한 점에서 만난다	60°
직선 AB와 직선 BE	한 점에서 만난다	60°
직선 AB와 직선 CD	꼬인 위치	60°
직선 AB와 직선 DE	꼬인 위치	60°
직선 AB와 직선 BF	한 점에서 만난다	90°
직선 AB와 직선 CF	꼬인 위치	60°
직선 AB와 직선 DF	평행	0°
직선 AB와 직선 EF	꼬인 위치	60°

2 선분 AE를 $2:1$로 내분하는 점을 P′이라 하면



$\overline{PQ}\,/\!/\,\overline{P'G}$ ...... ㉠

선분 EF의 중점을 N이라 하면 삼각형 FGN에서 삼각형의 중점연결 정리에 의하여

$\overline{RM}\,/\!/\,\overline{NG}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 두 직선 PQ, RM이 이루는 예각의 크기는 두 직선 P′G, NG가 이루는 예각의 크기이므로

$\angle NGP'=\theta$

$\overline{P'N}=\sqrt{\overline{P'E}^2+\overline{EN}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{NG}=\sqrt{\overline{NF}^2+\overline{FG}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

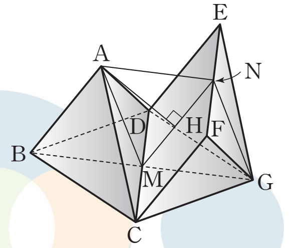
$\overline{P'G}=\sqrt{\overline{P'E}^2+\overline{EG}^2}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

따라서 삼각형 GP′N에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{5})^2+3^2-(\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{5}\times3}=\dfrac{12}{6\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ①

3



두 선분 CD, EF의 중점을 각각 M, N이라 하자.

$\overline{AH}\perp$(평면 CDEF), $\overline{AM}\perp\overline{CD}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{MH}\perp\overline{CD}$

그런데 $\overline{MN}\perp\overline{CD}$이므로 점 H는 선분 MN 위에 있다.

두 삼각형 ABM, NMG에서

$\overline{AB}=\overline{NM}=4$ ...... ㉠

$\overline{BM}=\overline{MG}=2\sqrt{3}$ ...... ㉡

$\overline{AM}=\overline{NG}=2\sqrt{3}$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\triangle ABM\equiv\triangle NMG$이므로

$\angle AMB=\angle NGM$ ...... ㉣

$\overline{CD}\perp$(평면 MAB), $\overline{CD}\perp$(평면 MNA), $\overline{CD}\perp$(평면 MGN)

이므로 5개의 점 A, B, M, N, G가 모두 한 평면 위에 있다.

㉣에서 $\overline{AM}\,/\!/\,\overline{NG}$ ...... ㉤

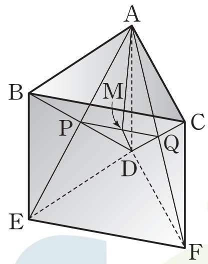
㉡, ㉢, ㉤에서 사각형 AMGN은 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 마름모이므로 점 H는 선분 MN의 중점이다.

따라서 직각삼각형 AMH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$

답 ⑤

4 두 선분 AE, BD의 교점을 P, 두 선분 AF, CD의 교점을 Q라 하면 두 평면 AEF, BCD의 교선은 직선 PQ이다.



두 삼각형 AEF, DCB에서

$\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{DC}=\overline{DB}=2\sqrt{2}$

$\overline{EF}=\overline{CB}=2$

이므로

$\triangle AEF \equiv \triangle DCB$

한편, 두 점 P, Q가 각각 두 선분 AE, AF의 중점이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{PQ}=1$이고

$\triangle APQ \equiv \triangle DQP$

선분 PQ의 중점을 M이라 하면 합동인 두 이등변삼각형 APQ, DQP에서

$\overline{AM}\perp\overline{PQ}$, $\overline{DM}\perp\overline{PQ}$

$$\overline{AM}=\overline{DM}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{PM}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\overline{AD}=2$

$\angle AMD=\alpha$라 하면 삼각형 AMD에서 코사인법칙에 의하여

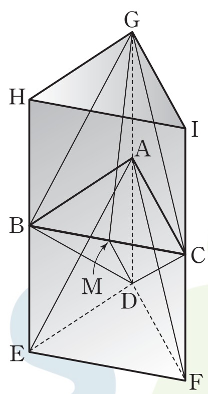
$$\cos\alpha=\frac{\frac{7}{4}+\frac{7}{4}-4}{2\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}}=-\frac{1}{7}$$

따라서 $\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{1}{7}$

답 ①

다른 풀이

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 GHI−ABC를 만들면 두 평면 AEF, BCD가 이루는 예각의 크기는 두 평면 GBC, BCD가 이루는 예각의 크기이다.



두 삼각형 GBC, DCB에서

$\overline{GB}=\overline{GC}=\overline{DC}=\overline{DB}=2\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=2$는 공통이므로

$\triangle GBC \equiv \triangle DCB$

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overline{GM}\perp\overline{BC}$, $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

$$\overline{GM}=\overline{DM}=\sqrt{\overline{GB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$$

$\overline{GD}=4$

$\angle GMD=\alpha$라 하면 삼각형 GMD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{7+7-16}{2\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{-2}{2\times7}=-\frac{1}{7}$$

따라서 $\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{1}{7}$

5 두 평면 ABC, DEF가 서로 평행하므로 직선 MN과 평면 DEF가 이루는 예각의 크기는 직선 MN과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기이다. 점 N에서 평면 ABC에 내린 수선의 발이 B이므로 직선과 평면이 이루는 각의 크기의 정의에 의하여

$\angle BMN=\theta$

직각삼각형 BMN에서 $\overline{BN}=1$, $\overline{BM}=\sqrt{3}$이므로

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{BN}^2+\overline{BM}^2}=\sqrt{1+3}=2$$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{BM}}{\overline{MN}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 80~81쪽

1 10	**2** ①	**3** ②	**4** 10	**5** ②
6 ⑤	**7** ⑤			

1 직선 DF와 꼬인 위치에 있는 직선은

AB, BC, AE, CG, EH, GH

이므로 $p=6$

직선 DE와 수직인 직선은

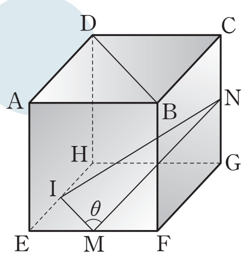
AB, EF, HG, DC

이므로 $q=4$

따라서 $p+q=6+4=10$

답 10

2 선분 EH의 중점을 I라 하면



$\overline{BD}\,/\!/\,\overline{FH}$, $\overline{FH}\,/\!/\,\overline{MI}$

이므로

$\overline{BD}\,/\!/\,\overline{MI}$

즉, $\angle NMI=\theta$

$\overline{EM}=a$라 하면

$\overline{IM}=\sqrt{2}a$

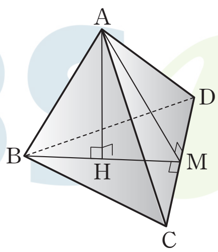
$$\overline{IN}=\overline{MN}=\sqrt{\overline{MF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GN}^2}=\sqrt{a^2+4a^2+a^2}=\sqrt{6}a$$

따라서 이등변삼각형 NIM에서

$$\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{MI}}}{\overline{\mathrm{NM}}}=\frac{\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a}{\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

답 ①

3 $\overline{\mathrm{AH}}\perp$(평면 BCD)이고 정삼각형 BCD에서 $\overline{\mathrm{HM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{HM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 AHM에서

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HM}}^2}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

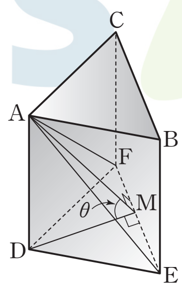
답 ②

4 두 평면 ABC, DEF가 서로 평행하므로 두 평면 AEF, ABC가 이루는 예각의 크기는 두 평면 AEF, DEF가 이루는 예각의 크기이다.

선분 EF의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}\perp$(평면 DEF), $\overline{\mathrm{DM}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{EF}}$

이면각의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{AMD}=\theta$

$\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{DM}}=\sqrt{3}$이므로

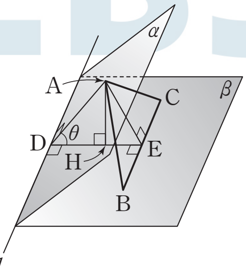
$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{DM}}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

$\cos^2\theta=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{3}{7}$

따라서 $p=7$, $q=3$이므로 $p+q=7+3=10$

답 10

5



점 A에서 직선 l과 평면 β에 내린 수선의 발을 각각 D, H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $l\perp\overline{\mathrm{DH}}$

$\cos\theta=\frac{3}{5}=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{AD}}}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=5k$, $\overline{\mathrm{DH}}=3k$ $(k>0)$

이라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{DH}}^2}=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k=4$

즉, $k=1$이므로

$\overline{\mathrm{DH}}=3$

직선 DH가 직선 BC와 만나는 점을 E라 하면 조건 (나)에 의하여 $\overline{\mathrm{HE}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{DE}}=5$

$\overline{\mathrm{HE}}=\overline{\mathrm{DE}}-\overline{\mathrm{DH}}=5-3=2$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HE}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

답 ②

6 점 P의 평면 ABCD 위로의 정사영을 P′이라 하면 점 P′은 선분 AB 위의 점이고, 두 선분 PI, PJ의 평면 ABCD 위로의 정사영은 각각 P′I, P′J이다.

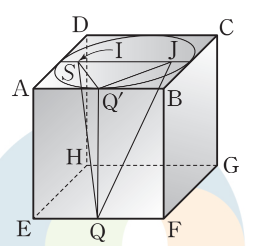
타원 S의 장축의 길이가 6이므로 점 P′이 타원 위에 있으면

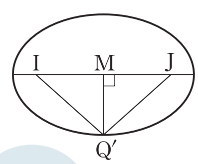
$\overline{\mathrm{P'I}}+\overline{\mathrm{P'J}}=6$

이고 점 P′이 타원 외부에 있으면

$\overline{\mathrm{P'I}}+\overline{\mathrm{P'J}}>6$

이다. 즉, 점 P′이 타원 S와 선분 AB가 접하는 점일 때, $\overline{\mathrm{P'I}}+\overline{\mathrm{P'J}}$는 최소이다.





그러므로 두 점 Q′, Q는 각각 두 선분 AB, EF의 중점이고 점 Q′은 타원 S의 꼭짓점 중 하나이다. 선분 IJ의 중점을 M이라 하면 타원 S의 장축의 길이가 6, 단축의 길이가 4이므로

$\overline{\mathrm{Q'M}}=2$, $\overline{\mathrm{IM}}=\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{IJ}}=2\overline{\mathrm{IM}}=2\sqrt{5}$

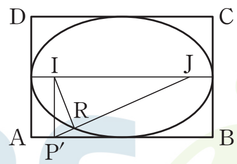
따라서 구하는 부피는

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{IJ}}\times\overline{\mathrm{Q'M}}\times\overline{\mathrm{Q'Q}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\times6=4\sqrt{5}$

답 ⑤

참고

점 P′이 타원 외부에 있는 경우를 살펴보자.



선분 P′J가 타원과 만나는 점을 R라 하면 삼각형 P′RI에서

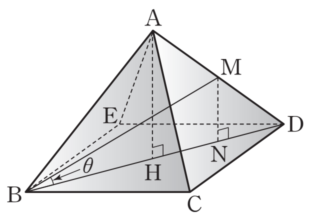
$\overline{\mathrm{P'I}}+\overline{\mathrm{P'R}}>\overline{\mathrm{RI}}$

$\overline{\mathrm{P'I}}+\overline{\mathrm{P'R}}+\overline{\mathrm{RJ}}>\overline{\mathrm{RI}}+\overline{\mathrm{RJ}}$

그런데 $\overline{\mathrm{P'R}}+\overline{\mathrm{RJ}}=\overline{\mathrm{P'J}}$이므로

$\overline{\mathrm{P'I}}+\overline{\mathrm{P'J}}>\overline{\mathrm{RI}}+\overline{\mathrm{RJ}}=6$

7



두 점 A, M의 평면 BCDE 위로의 정사영을 각각 H, N이라 하면 두 점 H, N은 각각 두 선분 BD, HD의 중점이므로

$\overline{\mathrm{BN}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{BD}}=\frac{3}{4}\times4\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

한편, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BA}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

직선과 평면이 이루는 각의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{NBM}=\theta$

따라서 직각삼각형 MBN에서

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{BN}}}{\overline{\mathrm{BM}}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

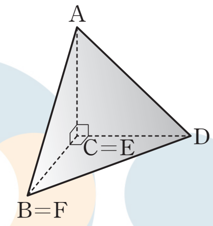
본문 82~83쪽

1 ③ 2 ① 3 65 4 ④ 5 ③
6 ⑤

1 조건에 의하여

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{DCA}=\angle\mathrm{FED}=90^\circ$

이므로 주어진 전개도로 만들어지는 사면체는 그림과 같다.



ㄱ. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$에서 C=E이므로 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{ED}}$ (참)

ㄴ. $\angle\mathrm{DBA}=60^\circ$에서 B=F이므로 $\angle\mathrm{DFA}=60^\circ$ (거짓)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{CB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}\perp$(평면 BCD)
직선과 평면의 수직 관계에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$
그런데 C=E이므로 $\overline{\mathrm{AE}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

2 선분 GI의 중점을 M이라 하면 $\angle\mathrm{GHI}=120^\circ$이므로

$\angle\mathrm{GHM}=60^\circ$

직각삼각형 GHM에서

$\overline{\mathrm{GM}}=\overline{\mathrm{GH}}\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{GI}}=2\overline{\mathrm{GM}}=2\sqrt{3}$

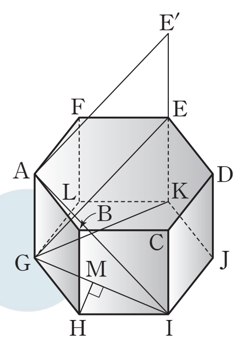
직각삼각형 AGI에서

$\overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AG}}^2+\overline{\mathrm{GI}}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

같은 방법으로 직각삼각형 EGK에서

$\overline{\mathrm{GE}}=4$

직선 KE 위에 $\overline{\mathrm{GE}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{AE'}}$이 되도록 점 E′을 잡으면 사각형 AGEE′은 평행사변형이므로



$\overline{\mathrm{AE'}}=\overline{\mathrm{GE}}=4$

두 직선 AI, GE가 이루는 예각의 크기는 두 직선 AI, AE′이 이루는 예각의 크기이므로

$\angle\mathrm{IAE'}=\theta$

직각삼각형 E′KI에서

$\overline{\mathrm{E'K}}=4$, $\overline{\mathrm{KI}}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{E'I}}=\sqrt{\overline{\mathrm{E'K}}^2+\overline{\mathrm{KI}}^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$

따라서 삼각형 AIE′에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{16+16-28}{2\times4\times4}=\frac{1}{8}$

답 ①

3 $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{AB}}=4$

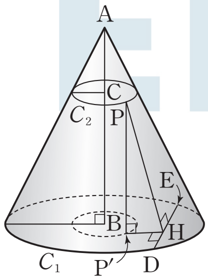
$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AC}}=12-4=8$

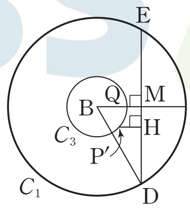
원 C_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$4:12=r:6$, $r=2$

점 P에서 원 C_1이 있는 밑면과 직선 DE에 내린 수선의 발을 각각 P′, H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{P'H}}\perp\overline{\mathrm{DE}}$





$\overline{\mathrm{PP'}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{PP'}}^2+\overline{\mathrm{P'H}}^2=8^2+\overline{\mathrm{P'H}}^2$ ...... ㉠

즉, $\overline{\mathrm{P'H}}$가 최소일 때, $\overline{\mathrm{PH}}^2$은 최소이다.

점 B를 중심으로 하는 밑면 위의 원 중, 반지름의 길이가 2인 원을 C_3이라 하면 점 P′은 원 C_3 위의 점이다. 선분 DE의 중점을 M이라 하고, 직선 BM이 원 C_3과 만나는 두 점 중 점 M에 가까운 점을 Q라 하면 점 P′이 점 Q일 때, $\overline{\mathrm{P'H}}$는 $\overline{\mathrm{QM}}$으로 최소이다.

$\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{BM}}-\overline{\mathrm{BQ}}$

$=\sqrt{\overline{\mathrm{BD}}^2-\overline{\mathrm{DM}}^2}-\overline{\mathrm{BQ}}$

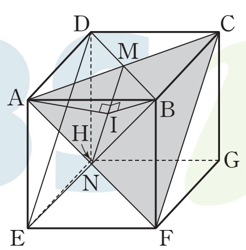
$=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}-2=3-2=1$

따라서 ㉠에서

$k^2=8^2+\overline{\mathrm{QM}}^2=64+1=65$

답 65

4 두 선분 AC, BD의 교점을 M, 두 선분 AF, BE의 교점을 N이라 하면 직선 MN은 두 평면 AFC, BDE의 교선이고, 두 점 M, N은 각각 두 선분 AC, AF의 중점이다.



두 삼각형 AFC, BDE는 모두 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 삼각형의 중점연결 정리에 의하여 두 삼각형 ANM, BMN은 모두 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다. 선분 MN의 중점을 I라 하면

$\overline{\mathrm{AI}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{BI}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$

$\overline{\mathrm{AI}}=\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{AN}}\sin 60^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$

$\angle\mathrm{BIA}=\alpha$라 하면 삼각형 AIB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\alpha=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2-4^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\frac{1}{3}$

두 평면 AFC, BDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{1}{3}$

삼각형 AFC의 넓이를 S라 하면 구하는 정사영의 넓이 S'은

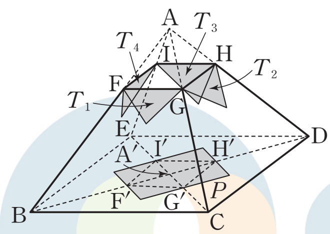
$S'=S\cos\theta$

따라서

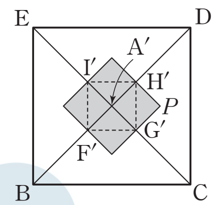
$S'=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2\times\frac{1}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

답 ④

5



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 다섯 개의 점 A, F, G, H, I의 밑면 BCDE 위로의 정사영을 각각 A′, F′, G′, H′, I′이라고 하면 정사각형 FGHI의 밑면 BCDE 위로의 정사영은 정사각형 F′G′H′I′이고, 두 밑면이 서로 평행하므로 두 정사각형 FGHI와 F′G′H′I′은 서로 합동이다.

[그림 2]에서 도형 P가 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정사각형이고, 한 변은 직선 BD와 평행하므로

$\overline{\mathrm{F'G'}}=2$

정사각뿔 A−BCDE의 한 옆면과 밑면 BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 삼각형 ABE의 밑면 BCDE 위로의 정사영이 삼각형 A′BE이므로

$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 A'BE의 넓이})}{(\text{삼각형 ABE의 넓이})}=\frac{\frac{1}{2}\times6\times3}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

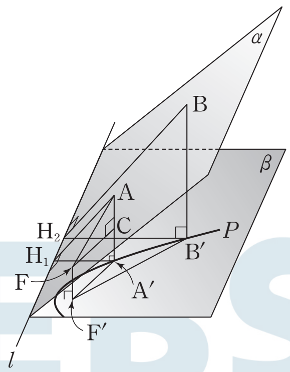
네 개의 삼각형 T_1, T_2, T_3, T_4의 넓이의 합을 S_1, 정사각형 FGHI의 넓이를 S_2라 하면

$S_1\cos\theta+S_2=(2\sqrt{2})^2$, $S_1\times\frac{1}{\sqrt{3}}+4=8$

따라서 $S_1=4\sqrt{3}$

답 ③

6



두 점 A, B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{A'H_1}} \perp l$, $\overline{\mathrm{B'H_2}} \perp l$

이고 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{A'F'}}=\overline{\mathrm{A'H_1}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{B'F'}}=\overline{\mathrm{B'H_2}}=2\sqrt{21}$

선분 AA′ 위에 $\overline{\mathrm{A'C}}=3$인 점 C를 잡으면

$\overline{\mathrm{FC}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{F'A'}}$, $\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{F'A'}}=3\sqrt{3}$

이므로 직각삼각형 AFC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{FC}}^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3$

$\overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CA'}}=3+3=6$

직각삼각형 $\mathrm{AH_1A'}$에서

$\overline{\mathrm{AH_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA'}}^2+\overline{\mathrm{A'H_1}}^2}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{7}$

이면각의 정의에 의하여 두 평면 α와 β가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta=\angle \mathrm{A'H_1A}=\angle \mathrm{B'H_2B}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{A'H_1}}}{\overline{\mathrm{AH_1}}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

따라서 점 B에서 직선 l까지의 거리는 선분 $\mathrm{BH_2}$의 길이와 같으므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{B'H_2}}}{\overline{\mathrm{BH_2}}}$에서

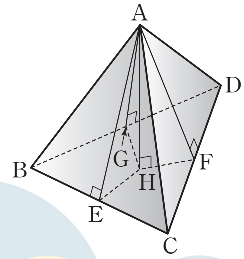
$\overline{\mathrm{BH_2}}=\dfrac{\overline{\mathrm{B'H_2}}}{\cos\theta}=2\sqrt{21}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=14$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 84~85쪽

1 ②	2 ④	3 ④	4 22	5 ③

1



삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos\dfrac{\pi}{3}=25+64-40=49$

$\overline{\mathrm{CD}}=7$

점 A에서 세 직선 BC, CD, BD에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하면

$S_1 : S_2 : S_3$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AE}} : \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{AF}} : \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AG}}$

$=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{\mathrm{AE}} : \dfrac{1}{2}\times7\times\overline{\mathrm{AF}} : \dfrac{1}{2}\times8\times\overline{\mathrm{AG}}$

$=5\times\overline{\mathrm{AE}} : 7\times\overline{\mathrm{AF}} : 8\times\overline{\mathrm{AG}}$

$=5 : 7 : 8$

이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AG}}$

세 직각삼각형 AEH, AFH, AGH에서 빗변의 길이가 같고 한 변의 길이가 공통이므로 세 직각삼각형 AEH, AFH, AGH는 서로 합동이고

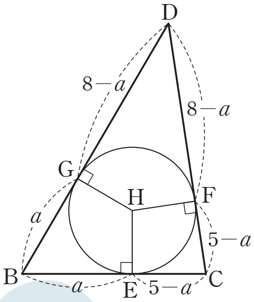
$\overline{\mathrm{HE}}=\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{HG}}$ …… ㉠

이다.

또 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HE}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{HF}}\perp\overline{\mathrm{CD}}$,

$\overline{\mathrm{HG}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 점 H는 삼각형 BCD의 내접원의 중심이다.

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BG}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CF}}=5-a$

$\overline{\mathrm{DG}}=\overline{\mathrm{DF}}=8-a$

$\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{DF}}+\overline{\mathrm{CF}}$

$\quad=(8-a)+(5-a)=7$

이므로 $a=3$

$\angle\mathrm{EBH}=\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$

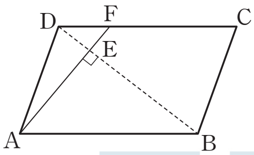
$\overline{\mathrm{BH}}=3\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 ABH에서

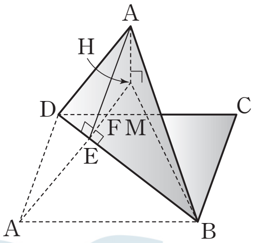
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$

답 ②

2



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]의 평행사변형 ABCD에서 점 A를 지나고 직선 BD와 수직인 직선이 두 직선 BD, CD와 만나는 점을 각각 E, F라 하면 [그림 2]에서

$\overline{AE}\perp\overline{BD}$, $\overline{EF}\perp\overline{BD}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 점 A에서 직선 EF에 내린 수선의 발이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발 H이다.

이등변삼각형 BDA에서 $\angle ADB=\theta_1$이라 하면

$\cos\theta_1=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

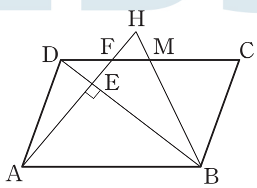
직각삼각형 AED에서

$\overline{DE}=\overline{AD}\cos\theta_1=2\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=2$

$\overline{BE}=\overline{BD}-\overline{DE}=10-2=8$

직각삼각형 ABE에서

$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BE}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$



[그림 3]

[그림 3]에서 두 삼각형 EFD, EAB가 서로 닮음이므로

$\overline{DE}:\overline{BE}=\overline{DF}:\overline{BA}$, $2:8=\overline{DF}:10$, $\overline{DF}=\dfrac{5}{2}$

$\overline{DE}:\overline{BE}=\overline{EF}:\overline{EA}$, $2:8=\overline{EF}:6$, $\overline{EF}=\dfrac{3}{2}$

$\overline{FM}=\overline{MD}-\overline{DF}=5-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$

두 삼각형 HFM과 HAB가 서로 닮음이므로

$\overline{HF}:\overline{HA}=\overline{FM}:\overline{AB}$

$\overline{HF}:(\overline{HF}+\overline{FE}+\overline{EA})=\dfrac{5}{2}:10$

$\overline{HF}:\left(\overline{HF}+\dfrac{3}{2}+6\right)=\dfrac{5}{2}:10$

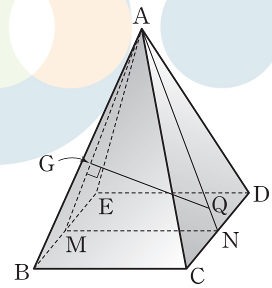
$\overline{HF}=\dfrac{5}{2}$

따라서 [그림 2]에서 이면각의 정의에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{EH}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{EF}+\overline{HF}}{\overline{AE}}=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{6}=\dfrac{2}{3}$

답 ④

3



두 선분 BE, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{BE}\perp\overline{AM}$, $\overline{BE}\perp\overline{MN}$이므로

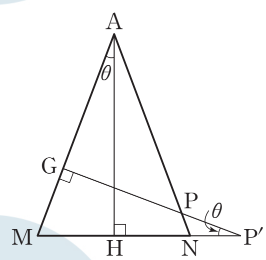
$\overline{BE}\perp$(평면 AMN) ⋯⋯ ㉠

선분 AN 위에 $\overline{GQ}\perp\overline{AM}$이 되도록 점 Q를 잡으면 ㉠에서

$\overline{BE}\perp\overline{GQ}$

그러므로 직선 GQ는 두 직선 AM, BE를 포함하는 평면 ABE와 서로 수직이다.

점 G를 지나고 평면 ABE와 수직인 직선이 평면 ACD와 만나는 점은 유일하므로 점 Q가 점 P이다.



점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 MN의 중점이다. 직선 PG가 직선 MN과 만나는 점을 P′이라 하면

$\theta=\angle MP'G$

그런데 $\angle P'MA$를 공통으로 갖는 두 직각삼각형 P′MG, AMH는 서로 닮음이므로

$\theta=\angle MP'G=\angle MAH$

직각삼각형 ABM에서

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6$

직각삼각형 AMH에서

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{AM}}^2-\overline{\text{MH}}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

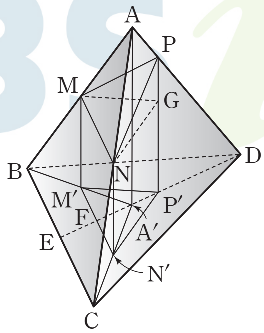
따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\text{AH}}}{\overline{\text{AM}}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ④

4 선분 BC의 중점을 E라 하면 두 이등변삼각형 ABC, DBC에서

$\overline{\text{AE}}\perp\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{DE}}\perp\overline{\text{BC}}$

이므로 두 점 A, P의 평면 BCD 위로의 정사영 A′, P′은 선분 DE 위에 있다.



두 점 M, N의 평면 BCD 위로의 정사영을 각각 M′, N′이라 하고, 선분 M′N′의 중점을 F라 하면 두 점 M′, N′은 각각 두 선분 A′B, A′C의 중점이다.

삼각형 ABC에서 중점연결정리에 의하여

$\overline{\text{MN}}/\!/\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{MN}}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{BC}}$ …… ㉠

삼각형 A′BC에서 중점연결정리에 의하여

$\overline{\text{M}'\text{N}'}/\!/\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{M}'\text{N}'}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{BC}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\text{MN}}/\!/\overline{\text{M}'\text{N}'}$, $\overline{\text{MN}}=\overline{\text{M}'\text{N}'}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{BC}}$

조건 (가)에서

$\overline{\text{MN}}=\overline{\text{M}'\text{N}'}=2\sqrt{3}$

이므로 $\overline{\text{BC}}=4\sqrt{3}$

정삼각형 P′M′N′에서 $\overline{\text{M}'\text{F}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{\text{P}'\text{F}}=3$

조건 (나)에서 삼각형 A′M′N′의 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\overline{\text{M}'\text{N}'}\times\overline{\text{A}'\text{F}}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\overline{\text{A}'\text{F}}=2\sqrt{3}$

$\overline{\text{A}'\text{F}}=2$

$\overline{\text{P}'\text{A}'}=\overline{\text{P}'\text{F}}-\overline{\text{A}'\text{F}}=3-2=1$

두 직각삼각형 A′M′F와 A′BE는 서로 닮음이고 그 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{\text{A}'\text{M}'}=\sqrt{\overline{\text{A}'\text{F}}^2+\overline{\text{M}'\text{F}}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}=\overline{\text{BM}'}$

$\overline{\text{A}'\text{E}}=2\overline{\text{A}'\text{F}}=4$

직각삼각형 MBM′에서

$\overline{\text{MM}'}=\sqrt{\overline{\text{MB}}^2-\overline{\text{BM}'}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$

$\overline{\text{AA}'}=2\overline{\text{MM}'}=6$

조건 (다)에서

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{BC}}\times\overline{\text{DE}}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\overline{\text{DE}}=20\sqrt{3}$

$\overline{\text{DE}}=10$

$\overline{\text{DA}'}=\overline{\text{DE}}-\overline{\text{A}'\text{E}}=10-4=6$

$\overline{\text{DP}'}=\overline{\text{DA}'}-\overline{\text{A}'\text{P}'}=6-1=5$

두 직각이등변삼각형 DPP′, DAA′은 서로 닮음이고 그 닮음비가 5 : 6이므로

$\overline{\text{PP}'}=5$

선분 PP′ 위에 $\overline{\text{GP}'}=3$인 점 G를 잡으면

서로 합동인 두 직각삼각형 PMG와 PNG에서

$\overline{\text{PM}}=\overline{\text{PN}}=\sqrt{\overline{\text{PG}}^2+\overline{\text{NG}}^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

이등변삼각형 PMN에서 선분 MN을 밑변으로 할 때 높이는

$\sqrt{4^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{13}$

$$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 P}'\text{M}'\text{N}'\text{의 넓이})}{(\text{삼각형 PMN의 넓이})}=\frac{\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3}{\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

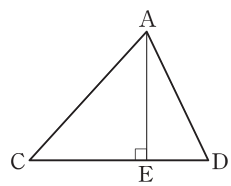
$\cos^2\theta=\dfrac{9}{13}$

따라서 $p=13$, $q=9$이므로 $p+q=13+9=22$

답 22

5 조건 (가)에서 $\overline{\text{AB}}\perp$(평면 ACD)

점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 E라 하면 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{\text{BE}}\perp\overline{\text{CD}}$

조건 (나)에서

$\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}=2\overrightarrow{\text{DA}}\cdot\overrightarrow{\text{DC}}\le0$이면 ∠DCA와 ∠ADC가 모두 90° 이상이므로 모순이다.

그러므로 $\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}=2\overrightarrow{\text{DA}}\cdot\overrightarrow{\text{DC}}>0$이다. 즉, ∠DCA와 ∠ADC는 모두 예각이므로 점 E는 선분 CD 위에 있다.

$\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}=|\overrightarrow{\text{CE}}|\times|\overrightarrow{\text{CD}}|$

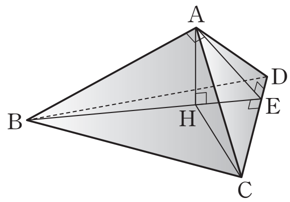
$\overrightarrow{\text{DA}}\cdot\overrightarrow{\text{DC}}=|\overrightarrow{\text{DE}}|\times|\overrightarrow{\text{DC}}|$

이므로

$|\overrightarrow{\text{CE}}|\times|\overrightarrow{\text{CD}}|=2|\overrightarrow{\text{DE}}|\times|\overrightarrow{\text{DC}}|$

$|\overrightarrow{\text{CE}}|=2|\overrightarrow{\text{DE}}|$

$\overline{\text{CE}}=4$, $\overline{\text{DE}}=2$



점 A에서 직선 BE에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD)

이면각의 정의에 의하여 $\angle AEB=60^\circ$

직각삼각형 AHE에서 $\overline{EH}=a$라 하면

$\overline{AH}=\sqrt{3}a$, $\overline{AE}=2a$

직각삼각형 HEC에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{EH}^2}=\sqrt{4^2+a^2}$

조건 (다)에서 $\angle HCA=45^\circ$이므로

$\overline{AH}=\overline{CH}$

$\sqrt{3}a=\sqrt{4^2+a^2}$, $3a^2=16+a^2$, $a=2\sqrt{2}$

그러므로 $\overline{AE}=4\sqrt{2}$

직각삼각형 ABE에서 $\cos 60^\circ=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$

$\overline{BE}=2\overline{AE}=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\times6\times8\sqrt{2}=24\sqrt{2}$

답 ③

07 공간좌표

유제 본문 89~95쪽

1 ③ 2 ② 3 ② 4 ② 5 ⑤
6 ⑤ 7 6 8 ④

1 점 P$(3, a, b)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점은

Q$(3, -a, -b)$

점 Q$(3, -a, -b)$를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점은

R$(3, -a, b)$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=3$이므로

$a+b+c=(-1)+4+3=6$

답 ③

2 점 P$(2, a, b)$를 x축, y축에 대하여 대칭이동시킨 점은 각각

Q$(2, -a, -b)$, R$(-2, a, -b)$

점 P$(2, a, b)$를 yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점은 각각

S$(-2, a, b)$, T$(2, -a, b)$

세 점 P, R, S의 y좌표가 모두 같고,

$\overline{PS}=4$, $\overline{RS}=2b$, $\overline{PS}\perp\overline{RS}$이므로

삼각형 PRS의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times4\times2b=4b$

$4b=12$에서 $b=3$

세 점 P, S, T의 z좌표가 모두 같고,

$\overline{PS}=4$, $\overline{PT}=2a$, $\overline{PS}\perp\overline{PT}$이므로

삼각형 PST의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times4\times2a=4a$

$4a=18$에서 $a=\dfrac{9}{2}$

세 점 P, Q, T의 x좌표가 모두 같고,

$\overline{PT}=2a=9$, $\overline{QT}=2b=6$, $\overline{PT}\perp\overline{QT}$이므로

삼각형 PQT의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times9\times6=27$

답 ②

3 점 C가 z축 위의 점이므로 C$(0, 0, t)$라 하면 두 점 A$(2, 3, -1)$, B$(4, -1, 0)$에 대하여

$\overline{AC}^2=(0-2)^2+(0-3)^2+\{t-(-1)\}^2$

$\quad=t^2+2t+14$

$\overline{\mathrm{BC}}^2=(0-4)^2+\{0-(-1)\}^2+(t-0)^2$

$=t^2+17$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$t^2+2t+14=t^2+17$

$2t=3,\ t=\dfrac{3}{2}$

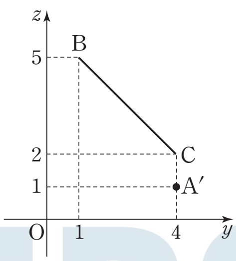
따라서 점 C의 z좌표는 $\dfrac{3}{2}$이다.

답 ②

4 점 A에서 yz평면에 내린 수선의 발을 A'이라 하면

$\overline{\mathrm{AA}'}=a$

yz평면 위의 세 점 A', B, C와 선분 BC는 그림과 같다.



선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P가 점 C의 위치에 있을 때 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}$의 값은 최소이고 그 값은 1이다.

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA}'}^2+\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}^2}=\sqrt{a^2+1}$

$\sqrt{a^2+1}=2\sqrt{3}$에서

$a^2+1=12,\ a^2=11$이므로 $a=\sqrt{11}$

또한 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P가 점 B의 위치에 있을 때 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}$의 값은 최대이고 그 값은 5이다.

이때

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA}'}^2+\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}^2}=\sqrt{(\sqrt{11})^2+5^2}=6$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최댓값은 6이다.

답 ②

5 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{5+(-3)+a}{3},\ \dfrac{7+1+(-5)}{3},\ \dfrac{(-2)+6+5}{3}\right)$

즉, $\left(\dfrac{a+2}{3},\ 1,\ 3\right)$ ······ ㉠

선분 AD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{7+b}{2},\ \dfrac{-2+c}{2}\right)$

즉, $\left(3,\ \dfrac{b+7}{2},\ \dfrac{c-2}{2}\right)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{a+2}{3}=3$에서 $a=7$

$\dfrac{b+7}{2}=1$에서 $b=-5$

$\dfrac{c-2}{2}=3$에서 $c=8$

따라서 $a+b+c=7+(-5)+8=10$

답 ⑤

6 점 P는 선분 AB 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\ (m>0,\ n>0)$

이라 하면 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이다.

즉, 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{-2m+4n}{m+n},\ \dfrac{km+n}{m+n},\ \dfrac{7m-2n}{m+n}\right)$

이때 점 P가 yz평면 위의 점이므로 x좌표가 0이다.

$\dfrac{-2m+4n}{m+n}=0$에서

$2m=4n$이므로 $m:n=2:1$

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$에서 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times(-2)+1\times4}{2+1},\ \dfrac{2\times k+1\times1}{2+1},\ \dfrac{2\times7+1\times(-2)}{2+1}\right)$

즉, $\left(0,\ \dfrac{2k+1}{3},\ 4\right)$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{0^2+\left(\dfrac{2k+1}{3}\right)^2+4^2}$이므로

$\sqrt{\left(\dfrac{2k+1}{3}\right)^2+4^2}=5$의 양변을 제곱하면

$\left(\dfrac{2k+1}{3}\right)^2+16=25,\ \dfrac{4k^2+4k+1}{9}=9$

$k^2+k-20=0,\ (k+5)(k-4)=0$

$k>0$이므로 $k=4$

답 ⑤

7 $x^2+y^2+z^2-4ax-12z+16=0$에서

$(x-2a)^2+y^2+(z-6)^2=4a^2+20$

이므로 중심이 $(2a,\ 0,\ 6)$이고 반지름의 길이가

$\sqrt{4a^2+20}$인 구이다.

구 $(x-2a)^2+y^2+(z-6)^2=4a^2+20$이 xy평면과 접하므로 구의 반지름의 길이는 6이고, $\sqrt{4a^2+20}=6$에서

$4a^2+20=36,\ 4a^2=16,\ a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

구의 중심 $(4,\ 0,\ 6)$에서 xy평면에 내린 수선의 발이

$(4,\ 0,\ 0)$이므로

$p=4$

따라서 $a+p=2+4=6$

답 6

8 구 $(x-1)^2+y^2+(z+4)^2=25$가 xy평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은

$(x-1)^2+y^2+4^2=25$, 즉 $(x-1)^2+y^2=9$

이므로 도형 C는 xy평면 위의 중심이 $(1,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

점 Q에서 xy평면에 내린 정사영을 Q′이라 하면

$\mathrm{Q}'(4,\ 4,\ 0)$

원 C의 중심을 $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$이라 하면 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}'}\le\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{CQ}'}$이므로

$\overline{\mathrm{PC}}=3$, $\overline{\mathrm{CQ}'}=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2+(0-0)^2}=5$

에서 $\overline{\mathrm{PQ}'}$의 최댓값은 8이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}'}^2+\overline{\mathrm{QQ}'}^2}\le\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값은 $2\sqrt{17}$이다.

답 ④

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ③	2 ⑤	3 ①	4 ①	5 ①
6 ③	7 ⑤	8 ①		

1 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ 2b)$를 z축에 대하여 대칭이동시킨 점은

$\mathrm{Q}(-a,\ -b,\ 2b)$

점 $\mathrm{Q}(-a,\ -b,\ 2b)$를 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점은

$\mathrm{R}(-a,\ b,\ 2b)$

$\overline{\mathrm{PR}}=2a=6$이므로 $a=3$

즉, 점 R의 좌표는 $(-3,\ b,\ 2b)$이므로

$p=-3$, $q=b$, $r=2b$

이때 $-3+b+2b=12$에서 $3b=15$, $b=5$

따라서 $a+b=3+5=8$

답 ③

2 점 $\mathrm{A}(5,\ -2,\ 3)$에서 y축에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $(0,\ -2,\ 0)$이고,

점 $\mathrm{A}(5,\ -2,\ 3)$을 zx평면에 대하여 대칭이동시킨 점 C의 좌표는 $(5,\ 2,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(5-0)^2+\{2-(-2)\}^2+(3-0)^2}$

$=\sqrt{25+16+9}=5\sqrt{2}$

답 ⑤

3 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(a-4)^2+(a-5)^2+(0-6)^2}$

$=\sqrt{2a^2-18a+77}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(a-1)^2+\{a-(-2)\}^2+\{0-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{2a^2+2a+6}$

$\overline{\mathrm{AP}}>\overline{\mathrm{BP}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2>\overline{\mathrm{BP}}^2$이면 $\overline{\mathrm{AP}}>\overline{\mathrm{BP}}$이다.

그러므로

$2a^2-18a+77>2a^2+2a+6$

$20a<71$, $a<\dfrac{71}{20}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}>\overline{\mathrm{BP}}$를 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3이므로 그 개수는 3이다.

답 ①

4 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{2t-(t+1)\}^2+(t-3)^2+(1-5)^2}$

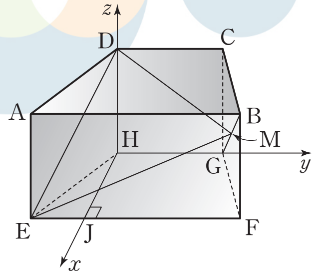
$=\sqrt{2t^2-8t+26}$

$=\sqrt{2(t-2)^2+18}$

따라서 $t=2$일 때 선분 AB의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{2}$이다.

답 ①

5 점 H를 원점이라 하고 점 H에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 J라 할 때, 반직선 HJ가 x축의 양의 방향, 반직선 HG가 y축의 양의 방향, 반직선 HD가 z축의 양의 방향이 되도록 사각기둥 ABCD−EFGH를 놓으면 그림과 같다.



사각기둥 ABCD$-$EFGH에서
$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=2$, $\overline{HD}=2$이고
$\overline{EJ}=1$, $\overline{HJ}=\sqrt{3}$이므로
$B(\sqrt{3}, 3, 2)$, $D(0, 0, 2)$, $E(\sqrt{3}, -1, 0)$, $G(0, 2, 0)$
점 M은 선분 BG의 중점이므로
$M\left(\frac{\sqrt{3}+0}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$
삼각형 DEM의 무게중심 I의 좌표는
$\left(\frac{0+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}, \frac{0+(-1)+\frac{5}{2}}{3}, \frac{2+0+1}{3}\right)$
즉, $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$
따라서
$\overline{HI}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(1-0)^2=2$

답 ①

6 점 C는 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점이므로
$C\left(\frac{1\times3+k\times(-1)}{1+k}, \frac{1\times4+k\times(-4)}{1+k}, \frac{1\times(-3)+k\times3}{1+k}\right)$
즉, $C\left(\frac{-k+3}{1+k}, \frac{-4k+4}{1+k}, \frac{3k-3}{1+k}\right)$에서
$\frac{-k+3}{1+k}+\frac{-4k+4}{1+k}+\frac{3k-3}{1+k}=\frac{-2k+4}{1+k}=0$
이므로
$k=2$
따라서 점 $C\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)$에서
$a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$, $c=1$이므로
$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1^2=\frac{26}{9}$

답 ③

7 점 P는 xy평면 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(p, q, 0)$이라 하고, 점 Q는 zx평면 위의 점이므로 점 Q의 좌표를 $(r, 0, s)$라 하자.
선분 PQ를 $1:2$, $2:1$로 내분하는 점이 각각 A, B이므로 점 A는 선분 PB의 중점이고, 점 B는 선분 AQ의 중점이다.
선분 PB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{p+4}{2}, \frac{q+2}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$이므로
$\frac{p+4}{2}=1$에서 $p=-2$
$\frac{q+2}{2}=a$에서 $2a-q=2$ ······ ㉠
$\frac{0+b}{2}=-2$에서 $b=-4$
이고 점 B의 좌표는 $(4, 2, -4)$이다.
선분 AQ의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1+r}{2}, \frac{a+0}{2}, \frac{-2+s}{2}\right)$
이므로
$\frac{1+r}{2}=4$에서 $r=7$
$\frac{a+0}{2}=2$에서 $a=4$ ······ ㉡
$\frac{-2+s}{2}=-4$에서 $s=-6$
㉠, ㉡에서 $q=6$
그러므로 점 A의 좌표는 $(1, 4, -2)$이고, 점 P의 좌표는 $(-2, 6, 0)$, 점 Q의 좌표는 $(7, 0, -6)$이므로
$\overline{OP}^2=(-2)^2+6^2=40$
$\overline{OQ}^2=7^2+(-6)^2=85$
따라서 $\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=40+85=125$

답 ⑤

8 선분 AB를 지름으로 하는 구 S의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이다.
$C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{3+a}{2}\right)$에서
$C\left(2, 0, \frac{a+3}{2}\right)$
점 P는 구 S 위의 점이므로 $\overline{AC}=\overline{PC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{PC}^2$
$\overline{AC}^2=(2-0)^2+(0-2)^2+\left(\frac{a+3}{2}-3\right)^2$
$=\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{41}{4}$
$\overline{PC}^2=\{2-(-1)\}^2+(0-0)^2+\left(\frac{a+3}{2}-2\right)^2$
$=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{37}{4}$
이므로
$\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{41}{4}=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{37}{4}$
따라서 $a=1$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ④	2 11	3 ②	4 ②	5 ⑤
6 201	7 ⑤			

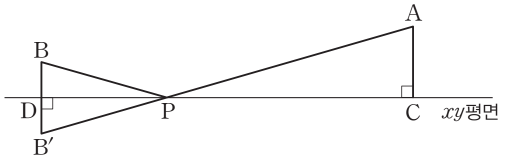
1 점 E의 좌표를 $(p,\ q,\ r)$라 하자.
직선 AB가 x축에 평행하므로 평면 AEHD와 평면 BFGC는 각각 x축에 수직이다.
즉, 두 점 B, G의 x좌표는 점 C의 x좌표와 같으므로 a이고, 두 점 A, D의 x좌표는 점 E의 x좌표와 같으므로 p이다.
직선 AD가 y축에 평행하므로 평면 ABFE와 평면 DCGH는 각각 y축에 수직이다.
즉, 두 점 D, G의 y좌표는 점 C의 y좌표와 같으므로 b이고, 두 점 A, B의 y좌표는 점 E의 y좌표와 같으므로 q이다.
직선 AE가 z축에 평행하므로 평면 ABCD와 평면 EFGH는 각각 z축에 수직이다.
즉, 세 점 A, B, D의 z좌표는 점 C의 z좌표와 같으므로 c이고, 점 G의 z좌표는 점 E의 z좌표와 같으므로 r이다.
그러므로
$\mathrm{A}(p,\ q,\ c)$, $\mathrm{B}(a,\ q,\ c)$, $\mathrm{D}(p,\ b,\ c)$, $\mathrm{G}(a,\ b,\ r)$
이다.
선분 AE의 중점의 좌표는 $\left(p,\ q,\ \frac{c+r}{2}\right)$이므로
$\frac{c+r}{2}=-1$에서 $c+r=-2$ …… ㉠
삼각형 BGD의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{2a+p}{3},\ \frac{2b+q}{3},\ \frac{2c+r}{3}\right)$이므로
$\frac{2a+p}{3}=4$에서 $2a+p=12$ …… ㉡
$\frac{2b+q}{3}=0$에서 $2b+q=0$ …… ㉢
$\frac{2c+r}{3}=0$에서 $2c+r=0$ …… ㉣
㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $c=2,\ r=-4$
한편, 선분 AE의 길이는 $\overline{\mathrm{AE}}=2-(-4)=6$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=12$, $\overline{\mathrm{AD}}=8$
$\overline{\mathrm{AB}}=a-p$이므로 $a-p=12$ …… ㉤
㉡, ㉤을 연립하여 풀면 $a=8,\ p=-4$
$\overline{\mathrm{AD}}=b-q$이므로 $b-q=8$ …… ㉥
㉢, ㉥을 연립하여 풀면 $b=\frac{8}{3},\ q=-\frac{16}{3}$
따라서 $a+b+c=8+\frac{8}{3}+2=\frac{38}{3}$

답 ④

2 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2+\{2-(-2)\}^2+(a-1)^2}$
$=\sqrt{(a-1)^2+18}$
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2+\{b-(-2)\}^2+(1-1)^2}$
$=\sqrt{(b+2)^2+18}$
조건 (가)의 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로
$(a-1)^2=(b+2)^2$ …… ㉠
또한
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(b-2)^2+(1-a)^2}$
$=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+8}$
이고, 두 점 B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발 B′, C′의 좌표는 각각 $(\sqrt{2},\ 2,\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ b,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{B'C'}}=\sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(b-2)^2+(0-0)^2}$
$=\sqrt{(b-2)^2+8}$
조건 (나)의 $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{B'C'}}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2=4\overline{\mathrm{B'C'}}^2$이므로
$(a-1)^2+(b-2)^2+8=4\{(b-2)^2+8\}$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면
$(b+2)^2+(b-2)^2+8=4(b-2)^2+32$
$2b^2+16=4b^2-16b+48$
$2b^2-16b+32=0$, $2(b-4)^2=0$, $b=4$
$b=4$를 ㉠에 대입하면
$(a-1)^2=6^2$
$a^2-2a-35=0$, $(a-7)(a+5)=0$
$a=7$ 또는 $a=-5$
$a>b$이므로 $a=7$
따라서 $a+b=7+4=11$

답 11

3 점 B를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 B′이라 하면 $\mathrm{B'}(-4,\ a,\ -1)$이고, 점 P가 xy평면 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\ge\overline{\mathrm{AB'}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 AB′의 길이와 같다.
$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(-4-5)^2+\{a-(-1)\}^2+(-1-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+2a+91}$
이므로 $\sqrt{a^2+2a+91}=3\sqrt{14}$에서
$a^2+2a+91=126$
$a^2+2a-35=0$, $(a+7)(a-5)=0$
$a>0$이므로 $a=5$



점 A와 점 B에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면

$\overline{AC}=2$, $\overline{BD}=\overline{B'D}=1$이므로 삼각형 APC와 삼각형 B′PD는 닮음비가 $2:1$인 닮은 도형이다.

즉, 점 P는 선분 AB′을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{2\times(-4)+1\times5}{2+1}, \frac{2\times5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times2}{2+1}\right)$$

즉, $P(-1, 3, 0)$이므로 $b=-1$, $c=3$

따라서 $a+b+c=5+(-1)+3=7$

답 ②

4 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(0, 0, 0)$이고, 두 점 A, B는 x축 위의 점이므로 $\overline{AB}\perp\overline{CH}$이다.

$\overline{AB}=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(0-0)^2+(0-0)^2}=8$

$\overline{CH}=\sqrt{(0-0)^2+(0-p)^2+(0-q)^2}=\sqrt{p^2+q^2}$

이고, 삼각형 ABC의 넓이가 $8\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times8\times\sqrt{p^2+q^2}=8\sqrt{5}$

즉, $\sqrt{p^2+q^2}=2\sqrt{5}$에서

$p^2+q^2=20$ …… ㉠

또한 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 I라 하면 $I(0, p, 0)$

$\overline{BC}=\sqrt{(0-6)^2+(p-0)^2+(q-0)^2}$

$=\sqrt{p^2+q^2+36}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

$\overline{BI}=\sqrt{(0-6)^2+(p-0)^2+(0-0)^2}$

$=\sqrt{p^2+36}$

이고, 직선 BC가 xy평면과 이루는 예각의 크기는 30°이므로

$\overline{BC}\times\cos 30^\circ=\overline{BI}$에서

$2\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{p^2+36}$

$\sqrt{p^2+36}=\sqrt{42}$

$p^2+36=42$, $p^2=6$이므로 ㉠에서 $q^2=14$

따라서 $p>0$, $q>0$이므로 $p=\sqrt{6}$, $q=\sqrt{14}$이고

$p\times q=\sqrt{6}\times\sqrt{14}=2\sqrt{21}$

답 ②

5 점 P는 점 C를 xy평면에 대하여 대칭이동시킨 점이므로 $P(a, b, -c)$

점 A의 z좌표는 0이므로 점 A는 xy평면 위에 있고, 점 B의 z좌표는 3으로 0보다 크고, 점 P의 z좌표는 $-c$로 0보다 작으므로 두 점 B, P는 xy평면에 대하여 서로 다른 쪽에 있다.

또한 점 A가 선분 BP 위의 점이므로 점 A는 선분 BP를 $3:c$로 내분하는 점이고, 점 A의 좌표는

$$\left(\frac{3\times a+c\times(-2)}{3+c}, \frac{3\times b+c\times(-9)}{3+c}, \frac{3\times(-c)+c\times3}{3+c}\right)$$

이때 점 $A(1, -3, 0)$이므로

$\frac{3a-2c}{3+c}=1$에서 $3a=3c+3$, $a=c+1$

$\frac{3b-9c}{3+c}=-3$에서 $3b=6c-9$, $b=2c-3$

즉,

$a^2+b^2+c^2=(c+1)^2+(2c-3)^2+c^2$

$=c^2+2c+1+4c^2-12c+9+c^2$

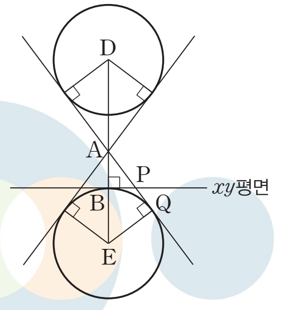
$=6c^2-10c+10$

$=6\left(c-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{35}{6}$

따라서 $a^2+b^2+c^2$은 $c=\frac{5}{6}$일 때 최솟값 $\frac{35}{6}$를 갖는다.

답 ⑤

6 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 B이므로 직선 AB를 포함하고 xy평면에 수직인 평면으로 좌표공간을 자른 단면은 그림과 같다.



점 P는 xy평면 위의 점이므로 직선 AB와 직선 BP는 서로 수직이고, $\overline{AB}=4$, $\overline{BP}=3$이므로 $\overline{AP}=5$

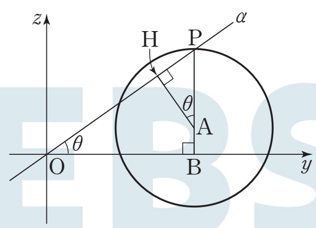
직선 AB 위의 점 중 z좌표가 음수인 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 구가 직선 AP와 접할 때, 접점을 Q라 하면 두 직각삼각형 ABP, AQE는 서로 닮음이므로

$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{AE}:\overline{QE}$

$5:3=\overline{\mathrm{AE}}:6$에서 $\overline{\mathrm{AE}}=10$
한편, 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발이 B이고,
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=10$이므로
점 D의 좌표는 $(2,\ 1,\ 14)$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OD}}^2=2^2+1^2+14^2=201$

답 201

7 구 S의 중심을 A라 하면 $\mathrm{A}(0,\ 8\sqrt{2},\ 2)$이고, 구의 반지름의 길이는 6이다.
구의 중심 $\mathrm{A}(0,\ 8\sqrt{2},\ 2)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 B라 하면 직선 AB가 구 S와 만나는 점 중 z좌표가 양수인 점이 구 S 위의 점 중 xy평면으로부터 가장 멀리 떨어진 점이므로 이 점이 P이다.
구 S와 yz평면이 만나서 생기는 원과 평면 α가 yz평면과 만나서 생기는 직선은 그림과 같다.



점 B의 좌표는 $(0,\ 8\sqrt{2},\ 0)$이므로 좌표공간의 원점을 O라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=8\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 $\overline{\mathrm{AP}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=8$
직각삼각형 OBP에서
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2}=\sqrt{(8\sqrt{2})^2+8^2}=8\sqrt{3}$
$\angle\mathrm{BOP}=\theta$라 하면
$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{8\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
한편, 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle\mathrm{PAH}=\theta$이므로
$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{6}$에서
$\overline{\mathrm{PH}}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$
그러므로 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 도형 C는 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이므로 그 넓이는 12π이다.
따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는
$12\pi\times\cos\theta=12\pi\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{6}\pi$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 100~101쪽

1 ①	2 ④	3 ④	4 209	5 42

1 두 점 A, B는 z축 위에 있으므로 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ a)$, $\mathrm{B}(0,\ 0,\ b)$라 하고, 점 C를 $\mathrm{C}(p,\ q,\ r)$라 하자.
직선 AC는 xy평면과 평행하므로 점 $\mathrm{C}(p,\ q,\ r)$에서 z축에 내린 수선의 발이 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ a)$이고, $r=a$이므로 점 C는 $\mathrm{C}(p,\ q,\ a)$이다.
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{0+0+p}{3},\ \dfrac{0+0+q}{3},\ \dfrac{a+b+a}{3}\right)$
즉, $\left(\dfrac{p}{3},\ \dfrac{q}{3},\ \dfrac{2a+b}{3}\right)$이므로
$\dfrac{p}{3}=1$에서 $p=3$
$\dfrac{q}{3}=2$에서 $q=6$
$\dfrac{2a+b}{3}=3$에서 $2a+b=9$ $\cdots\cdots$ ㉠
한편, 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$인 직각삼각형이므로
넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$이고,
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(3-0)^2+(6-0)^2+(a-a)^2}=3\sqrt{5}$이므로
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times3\sqrt{5}=\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=3$
$|a-b|=3$이므로
$a-b=3$인 경우 ㉠에서 $a=4$, $b=1$이 되어 점 C는 $\mathrm{C}(3,\ 6,\ 4)$이고,
$a-b=-3$인 경우 ㉠에서 $a=2$, $b=5$가 되어 점 C는 $\mathrm{C}(3,\ 6,\ 2)$이다.
따라서 점 C의 좌표가 $(3,\ 6,\ 4)$일 때 $\overline{\mathrm{OC}}$의 값은 최대이고 그 값은
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{3^2+6^2+4^2}=\sqrt{61}$

답 ①

2 ㄱ. 점 P의 좌표를 $(0,\ b,\ 0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(0-1)^2+(b-2)^2+(0-5)^2}$
$=\sqrt{b^2-4b+30}$
$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+(b-6)^2+(0-5)^2}$
$=\sqrt{b^2-12b+65}$
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$b^2-4b+30=b^2-12b+65$, $8b=35$에서 $b=\dfrac{35}{8}$

그러므로 y축 위의 점 $\mathrm{P}\left(0,\ \frac{35}{8},\ 0\right)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(6-2)^2+(5-5)^2}=5$이므로

삼각형 ABQ가 정삼각형이 되려면

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=5$이어야 하므로 $\overline{\mathrm{BQ}}^2=25$이어야 한다.

점 Q의 좌표를 $(a,\ 0,\ c)$라 하면

$\overline{\mathrm{BQ}}^2=\{a-(-2)\}^2+(0-6)^2+(c-5)^2$

$=(a+2)^2+(c-5)^2+36$

$(a+2)^2+(c-5)^2+36=25$에서

$(a+2)^2+(c-5)^2=-11$ …… ㉠

이때 임의의 두 실수 a, c에 대하여 $(a+2)^2\ge0$, $(c-5)^2\ge0$이므로 ㉠을 만족시키는 실수 a, c는 존재하지 않는다.

그러므로 삼각형 ABQ가 정삼각형이 되도록 하는 zx평면 위의 점 Q가 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 삼각형 ABR가 직각이등변삼각형이 되려면

$\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{BR}}$, $\overline{\mathrm{AR}}\perp\overline{\mathrm{BR}}$ 또는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BR}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BR}}$ 또는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AR}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AR}}$이어야 한다.

점 R의 좌표를 $(a,\ b,\ 0)$이라 하자.

(i) $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{BR}}$, $\overline{\mathrm{AR}}\perp\overline{\mathrm{BR}}$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}}=5$이므로 $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{BR}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이어야 한다.

$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(0-5)^2}$

$=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+25}$

$\overline{\mathrm{AR}}\ge5$이므로 $\overline{\mathrm{AR}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$인 점 R는 존재하지 않는다.

(ii) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BR}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BR}}$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BR}}=5$, $\overline{\mathrm{AR}}=5\sqrt{2}$이어야 한다.

$\overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(b-6)^2+(0-5)^2}$

$=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2+25}$

$\overline{\mathrm{BR}}=5$에서 $a=-2$, $b=6$

점 R의 좌표를 $(-2,\ 6,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{(-2-1)^2+(6-2)^2+(0-5)^2}=5\sqrt{2}$

이므로 삼각형 ABR가 직각이등변삼각형이 되도록 하는 점 R가 존재한다.

(iii) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AR}}$, $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{AR}}$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AR}}=5$, $\overline{\mathrm{BR}}=5\sqrt{2}$이어야 한다.

$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(0-5)^2}$

$=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+25}$

$\overline{\mathrm{AR}}=5$에서 $a=1$, $b=2$

점 R의 좌표를 $(1,\ 2,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-6)^2+(0-5)^2}=5\sqrt{2}$

이므로 삼각형 ABR가 직각이등변삼각형이 되도록 하는 점 R가 존재한다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 삼각형 ABR가 직각이등변삼각형이 되도록 하는 xy평면 위의 점 R가 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

참고

ㄷ의 (ii)에서 점 R는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구가 xy평면과 접하는 점이고, ㄷ의 (iii)에서 점 R는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구가 xy평면과 접하는 점이다.

3 구 S의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$라 하고, 반지름의 길이를 r라 하면 구 S의 방정식은

$S:\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ …… ㉠

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 도형은 ㉠에 $z=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-b)^2+(0-c)^2=r^2$

즉, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2$ (단, $z=0$)

이므로 중심이 점 $(a,\ b,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2-c^2}$인 xy평면 위의 원이다.

즉, $r^2-c^2=28$ …… ㉡

구 S가 yz평면과 만나서 생기는 도형은 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$(0-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

즉, $(y-b)^2+(z-c)^2=r^2-a^2$ (단, $x=0$)

이므로 중심이 점 $(0,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2-a^2}$인 yz평면 위의 원이다.

즉, $r^2-a^2=30$ …… ㉢

구 S가 zx평면과 만나서 생기는 도형은 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(0-b)^2+(z-c)^2=r^2$

즉, $(x-a)^2+(z-c)^2=r^2-b^2$ (단, $y=0$)

이므로 중심이 점 $(a,\ 0,\ c)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2-b^2}$인 zx평면 위의 원이다.

즉, $r^2-b^2=34$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $3r^2-(a^2+b^2+c^2)=92$ …… ㉤

또한 구 S 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OP의 길이가 최대이려면 원점 O와 구의 중심 C를 지나는 직선이 구 S와 만나는 점 중 원점 O에서 멀리 있는 점이 P일 때이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+r=10$ …… ㉥

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=x$라 하면 ㉤, ㉥에서

$3r^2-x^2=92$, $x+r=10$

두 식을 연립하면

$3r^2-(10-r)^2=92$, $2r^2+20r-192=0$

$r^2+10r-96=0$, $(r-6)(r+16)=0$

$r>0$이므로 $r=6$

㉡에서 $36-c^2=28$, $c^2=8$

$c>0$이므로 $c=2\sqrt{2}$

㉢에서 $36-a^2=30$, $a^2=6$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{6}$

㉣에서 $36-b^2=34$, $b^2=2$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}$

그러므로 구 S는 중심이 $\mathrm{C}(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$이고 반지름의 길이가 6이므로 구의 방정식은

$(x-\sqrt{6})^2+(y-\sqrt{2})^2+(z-2\sqrt{2})^2=36$

구의 중심 $\mathrm{C}(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(0, \sqrt{2}, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(\sqrt{6}-0)^2+(\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{14}$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{6^2-(\sqrt{14})^2}=\sqrt{22}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{22}$

답 ④

참고

구 S의 방정식이

$(x-\sqrt{6})^2+(y-\sqrt{2})^2+(z-2\sqrt{2})^2=36$

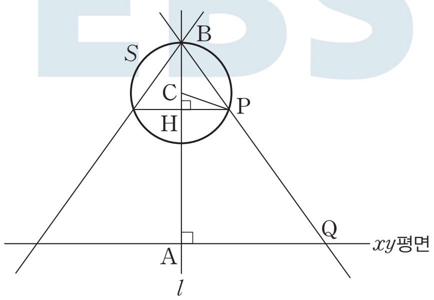
이므로 $x=0$, $z=0$을 대입하면

$(y-\sqrt{2})^2=22$에서 $y-\sqrt{2}=\pm\sqrt{22}$

$y=\sqrt{2}+\sqrt{22}$ 또는 $y=\sqrt{2}-\sqrt{22}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{22}$

4 직선 AB를 포함하고 xy평면에 수직인 평면으로 좌표공간을 자른 단면은 그림과 같다.



점 B의 z좌표를 a $(a>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=a$이고,

점 C는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{a}{4}$

점 P는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{a}{4}$인 구 S 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\dfrac{a}{4}$ ...... ㉠

구 S 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 BP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하면 점 Q는 xy평면 위의 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AQ}}$인 원 위의 점이다.

조건 (나)에서 점 Q가 나타내는 도형의 길이가 24π이므로

$2\pi\times\overline{\mathrm{AQ}}=24\pi$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=12$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 PBH, QBA는 서로 닮음이고, 점 P는 선분 BQ를 1 : 2로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{BQ}}=1:3$이고

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{BA}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{BA}}=a$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{a}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{BH}}-\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{4}=\dfrac{a}{12}$

$\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{QA}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{QA}}=12$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=4$

직각삼각형 CPH에서 $\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{CH}}^2$이므로

$\left(\dfrac{a}{4}\right)^2=4^2+\left(\dfrac{a}{12}\right)^2$

$\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{a^2}{144}=16$, $\dfrac{1}{18}a^2=16$

$a^2=288$에서 $a=12\sqrt{2}$

점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P′이라 하면

$\overline{\mathrm{PP'}}=\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{3}a=\dfrac{2}{3}\times12\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{OP'}}^2+\overline{\mathrm{PP'}}^2$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 값이 최대이려면 $\overline{\mathrm{OP'}}$의 값이 최대이어야 한다.

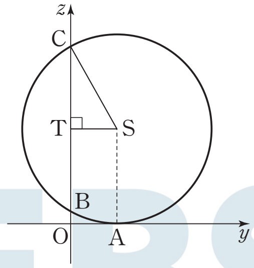
xy평면에서 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원을 C라 하면 점 P′은 원 C 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{OP'}}$의 값이 최대이려면 점 P′이 직선 OA가 원 C와 만나는 두 점 중 원점으로부터 멀리 떨어진 점이면 되고, 이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{\mathrm{AP'}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{OP'}}$의 최댓값은 9이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}^2$의 최댓값은

$9^2+(8\sqrt{2})^2=81+128=209$

답 209

5 구 S와 yz평면이 만나서 생기는 원은 그림과 같다.

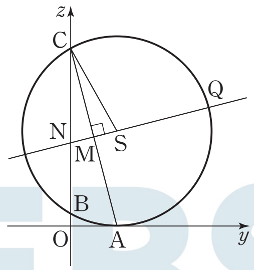


구 S의 중심을 S라 하고 점 S에서 z축에 내린 수선의 발을 T라 하면 $\overline{OC}-\overline{OB}=\overline{BC}=14$이므로 $\overline{CT}=7$이고,

$\overline{ST}=\sqrt{15}$이므로

$\overline{SC}=\sqrt{(\sqrt{15})^2+7^2}=8$

즉, 구 S의 반지름의 길이는 8이다.



$\overline{OC}=\overline{OT}+\overline{CT}=8+7=15$

이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{15})^2+15^2}=4\sqrt{15}$

한편, 구 S 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ACP의 넓이가 최대이려면 선분 AC의 수직이등분선이 구 S와 yz평면이 만나서 생기는 원과 만나는 두 점 중 직선 AC로부터 더 멀리 있는 점이어야 한다.

선분 AC의 중점을 M이라 할 때, 직선 MS가 구 S와 yz평면이 만나서 생기는 원과 만나는 두 점 중 직선 AC로부터 더 멀리 있는 점이 Q가 된다.

직선 MS가 z축과 만나는 점을 N이라 하면 두 삼각형 OCA와 MCN은 서로 닮음이므로

$\overline{OC}:\overline{AC}=\overline{MC}:\overline{NC}$

$\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=2\sqrt{15}$이므로

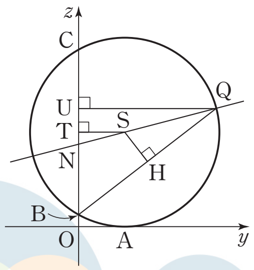
$15:4\sqrt{15}=2\sqrt{15}:\overline{NC}$

에서 $\overline{NC}=8$이고

$\overline{MN}=\sqrt{8^2-(2\sqrt{15})^2}=2$

또한 $\overline{SC}=8$이므로 두 직각삼각형 MCS와 MCN은 서로 합동이고

$\overline{MS}=2$



그림과 같이 점 Q에서 z축에 내린 수선의 발을 U라 하면 두 직각삼각형 NST와 NQU는 서로 닮음이고

$\overline{NS}=4$, $\overline{SQ}=8$이므로 $\overline{QU}=3\sqrt{15}$

$\overline{TN}=\sqrt{4^2-(\sqrt{15})^2}=1$

이므로 $\overline{TU}=2$, $\overline{BU}=9$

그러므로 $\overline{BQ}=\sqrt{(3\sqrt{15})^2+9^2}=6\sqrt{6}$

직선 RS는 yz평면과 수직이고, 두 직선 RH와 BQ는 서로 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 두 직선 SH와 BQ도 서로 수직이다.

$\overline{HQ}=\frac{1}{2}\overline{BQ}=3\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 QSH에서

$\overline{SH}=\sqrt{8^2-(3\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$

직각삼각형 RHS에서

$\overline{RH}=\sqrt{8^2+(\sqrt{10})^2}=\sqrt{74}$

선분 RH의 yz평면 위로의 정사영은 선분 SH이므로

$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{74}}$

따라서 $\cos^2\theta=\frac{5}{37}$이므로 $p=37$, $q=5$에서

$p+q=37+5=42$

답 42

MEMO