

# 수능완성



수학영역 | 수학 I·수학 II·미적분

## 정답과 풀이

# 01

## 지수함수와 로그함수

정답

본문 6~15쪽

(필수 유형 ①) ①	01 ④	02 ③	03 ④
	04 5		
(필수 유형 ②) ①	05 ①	06 ④	07 16
	08 48		
(필수 유형 ③) 2	09 ①	10 ②	11 5
	12 ③		
(필수 유형 ④) ①	13 ①	14 ④	15 37
(필수 유형 ⑤) ②	16 ②	17 8	18 ⑤
(필수 유형 ⑥) ⑤	19 ③	20 ④	21 ③
(필수 유형 ⑦) ③	22 ③	23 ②	24 7
(필수 유형 ⑧) 15	25 4	26 ①	27 6
(필수 유형 ⑨) 192	28 ⑤	29 ①	30 22
(필수 유형 ⑩) ④	31 ①	32 ②	33 23

### (필수 유형 ①)

$-n^2+9n-18=-(n^2-9n+18)=-(n-3)(n-6)$ 이므로  
 $-n^2+9n-18$ 의  $n$ 제곱근 중에서 음의 실수는  
 $-n^2+9n-18 < 0$ 일 때, 홀수  $n$ 에 대하여  $\sqrt{-n^2+9n-18}$ 이고  
 $-n^2+9n-18 > 0$ 일 때, 짝수  $n$ 에 대하여  $-\sqrt{-n^2+9n-18}$ 이다.  
 (i)  $-n^2+9n-18 < 0$ 일 때  
 $-(n-3)(n-6) < 0$ 에서  $(n-3)(n-6) > 0$ 이므로  
 $n < 3$  또는  $n > 6$   
 즉,  $2 \leq n < 3$  또는  $6 < n \leq 11$ 을 만족시키는 홀수는 7, 9, 11이다.  
 (ii)  $-n^2+9n-18 > 0$ 일 때  
 $-(n-3)(n-6) > 0$ 에서  $(n-3)(n-6) < 0$ 이므로  $3 < n < 6$   
 즉, 이를 만족시키는 짝수는 4이다.  
 (i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든  $n$ 의 값의 합은  
 $4+7+9+11=31$

답 ①

### 01

$(\sqrt[3]{5})^3=5, \sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{16}=\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[4]{2^4}=3 \times 2=6,$   
 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$ 이므로  
 $(\sqrt[3]{5})^3+\sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{\sqrt{64}}=5+6-2=9$

답 ④

### 02

$a > 0, b > 0$ 일 때, 지수법칙에 의하여  $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}$   
 $a^3=\sqrt[4]{5}$ 이므로  $a^{12}=(a^3)^4=(\sqrt[4]{5})^4=5$   
 $b^4=\sqrt[3]{3}$ 이므로  $b^{12}=(b^4)^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$   
 따라서  $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}=5 \times 3=15$

답 ③

### 03

$m^2-4m-5$ 의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않으려면  
 $m^2-4m-5 < 0$ 이어야 한다.  
 $m^2-4m-5 < 0$ 에서  $(m+1)(m-5) < 0$ 이므로  
 $-1 < m < 5$   
 따라서 조건을 만족시키는 자연수  $m$ 의 최댓값은 4이다.

답 ④

### 04

$x^2-65x+64=0$ 에서  $(x-1)(x-64)=0$   
 $x=1$  또는  $x=64$ 이므로  $A=\{1, 64\}$   
 또한  $x^2-7x+10 < 0$ 에서  $(x-2)(x-5) < 0$   
 $2 < x < 5$ 이므로 부등식  $x^2-7x+10 < 0$ 을 만족시키는 자연수  $x$ 의 값은 3, 4이다. 즉,  $B=\{3, 4\}$   
 (i)  $a=1, n=3$ 인 경우  
 $x^3=1$ 에서  $x^3-1=0$   
 $(x-1)(x^2+x+1)=0$   
 $x=1$  또는  $x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 이므로 1의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.  
 (ii)  $a=1, n=4$ 인 경우  
 $x^4=1$ 에서  $x^4-1=0$   
 $(x^2-1)(x^2+1)=0$   
 $x=\pm 1$  또는  $x=\pm i$ 이므로 1의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.  
 (iii)  $a=64, n=3$ 인 경우  
 $x^3=64$ 에서  $x^3-64=0$   
 $(x-4)(x^2+4x+16)=0$   
 $x=4$  또는  $x=-2 \pm 2\sqrt{3}i$ 이므로 64의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.  
 (iv)  $a=64, n=4$ 인 경우  
 $x^4=64$ 에서  $x^4-64=0$   
 $(x^2-8)(x^2+8)=0$   
 $x=\pm 2\sqrt{2}$  또는  $x=\pm 2\sqrt{2}i$ 이므로 64의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.  
 (i)~(iv)에서 1은 1의 세제곱근이면서 동시에 1의 네제곱근이므로 집합 C의 원소 중에서 실수인 것의 개수는  $1+2+1+2-1=5$ 이다.

답 5

### (필수 유형 ②)

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=3^{-\frac{1}{4}}$ 이므로  
 $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}=3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$   
 $=3^{-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}}$   
 $=3^{-2}=\frac{1}{9}$

답 ①

05

$$(2-\sqrt{2})^{1+\sqrt{3}} \times (2-\sqrt{2})^{1-\sqrt{3}} + 2^{\frac{5}{2}} = (2-\sqrt{2})^{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})} + 4\sqrt{2}$$

$$= (2-\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2}$$

$$= 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2} = 6$$

답 ①

06

$$2^{\frac{4}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times (2 \times 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = (2^6 \times 3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^2}$$

따라서  $p=6, q=2$ 이므로  
 $p+q=6+2=8$

답 ④

07

$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ 이므로  $f(f(n)) = (n^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} = n^{\frac{9}{4}}$   
 $n^{\frac{9}{4}}$ 의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면  $n$ 은 1보다 큰 자연수  $k$ 에 대하여  $n=k^4$ 의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수  $n$ 의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 네제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로  
 $2^4=16$

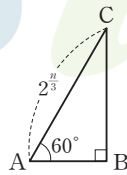
답 16

08

한 내각의 크기가  $60^\circ$ 이고 한 변의 길이가  $2^{\frac{n}{3}}$ 인 직각삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하면 직각삼각형 ABC는 다음과 같다.

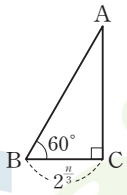
(i) 그림과 같이 길이가  $2^{\frac{n}{3}}$ 인 변이 빗변인 직각삼각형일 때

$\angle A = 60^\circ, \overline{AC} = 2^{\frac{n}{3}}$ 이라 하면  
 $\overline{AB} = 2^{\frac{n}{3}} \times \cos 60^\circ, \overline{BC} = 2^{\frac{n}{3}} \times \sin 60^\circ$   
 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times (2^{\frac{n}{3}} \times \cos 60^\circ) \times (2^{\frac{n}{3}} \times \sin 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8} \times 2^{\frac{2n}{3}}$



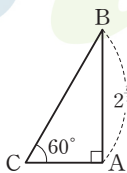
(ii) 그림과 같이 길이가  $2^{\frac{n}{3}}$ 인 변의 양 끝 각의 크기가  $60^\circ, 90^\circ$ 인 직각삼각형일 때

$\angle B = 60^\circ, \overline{BC} = 2^{\frac{n}{3}}$ 이라 하면  
 $\overline{AC} = 2^{\frac{n}{3}} \times \tan 60^\circ$   
 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times 2^{\frac{n}{3}} \times (2^{\frac{n}{3}} \times \tan 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^{\frac{2n}{3}}$



(iii) 그림과 같이 길이가  $2^{\frac{n}{3}}$ 인 변과 마주 보는 각의 크기가  $60^\circ$ 인 직각삼각형일 때

$\angle C = 60^\circ, \overline{AB} = 2^{\frac{n}{3}}$ 이라 하면  
 $\overline{AC} \times \tan 60^\circ = 2^{\frac{n}{3}}$ 에서  $\overline{AC} = 2^{\frac{n}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$   
 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times 2^{\frac{n}{3}} \times (2^{\frac{n}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2^{\frac{2n}{3}}$



(i), (ii), (iii)에 의하여  $f(n) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^{\frac{2n}{3}}$ 이므로

$$f(3) \times f(6) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^2\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^4\right) = 48$$

답 48

(필수 유형 ③)

$$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 \left(\frac{2}{3} \times 24\right) = \log_4 16 = 2$$

답 2

09

로그의 성질에 의하여  
 $\log_2(\sqrt{17}+1) + \log_2(\sqrt{17}-1) - \log_2 8$   
 $= \log_2\{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)\} - 3$   
 $= \log_2 16 - 3 = 4 - 3 = 1$

답 ①

10

$\log_{(x-2)}\{-x^2 + (2a+3)x - a(a+3)\}$ 이 정의되기 위해서는 밑의 조건  $x-2 \neq 1, x-2 > 0$ 과 진수의 조건

$$-x^2 + (2a+3)x - a(a+3) > 0$$

을 모두 만족시켜야 한다.

밑의 조건에 의하여  $x \neq 3, x > 2 \dots\dots ㉠$

진수의 조건에 의하여

$$-x^2 + (2a+3)x - a(a+3) = -(x-a)\{x-(a+3)\} > 0$$

$(x-a)\{x-(a+3)\} < 0$ 에서

$$a < x < a+3 \dots\dots ㉡$$

$a$ 가 자연수이므로 ㉡을 만족시키는 자연수  $x$ 의 값은  $a+1, a+2$ 이다.

(i)  $a+1=4$ 일 때

$a=3$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여  $3 < x < 6$ 이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수  $x$ 의 값은 4, 5이다.  
 즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii)  $a+2=4$ 일 때

$a=2$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여  $2 < x < 5, x \neq 3$ 이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수  $x$ 의 값은 4뿐이다.  
 즉, 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여  $a=2$

답 ②

11

$a=2^m, b=3^{3m+1}$ 이므로  
 $\log_2(\log_2 a) + \log_2(\log_3 b) = \log_2(\log_2 2^m) + \log_2(\log_3 3^{3m+1})$   
 $= \log_2 m + \log_2(3m+1)$   
 $= \log_2 m(3m+1)$

이므로  $\log_2 m(3m+1) = 4$ 에서  $m(3m+1) = 16$   
 $3m+1$ 이 16의 양의 약수이어야 하므로 자연수  $n$ 의 값은 1 또는 5이다.  
 $n=1$ 이면  $m=4$ 이고  $n=5$ 이면  $m=1$ 이므로  $m+n$ 의 최솟값은 5이다.

답 5

12

두 물체 A, B의 단면의 넓이를 각각  $S_A, S_B$ 라 하고 두께를 각각  $L_A, L_B$ 라 하자.

물체 A의 열전도율  $P_A$ 는 다음을 만족시킨다.

$$\log_a P_A = k + \log_a \frac{S_A T}{L_A} \quad \dots \textcircled{1}$$

물체 B는 물체 A에 비하여 단면의 넓이를 25% 확장시키고 두께를 50% 증가시켰으므로

$$S_B = \left(1 + \frac{25}{100}\right) S_A = \frac{5}{4} S_A, \quad L_B = \left(1 + \frac{50}{100}\right) L_A = \frac{3}{2} L_A$$

이고 물체 B의 열전도율  $P_B$ 는 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \log_a P_B &= k + \log_a \frac{S_B T}{L_B} = k + \log_a \frac{\frac{5}{4} S_A T}{\frac{3}{2} L_A} \\ &= k + \log_a \frac{S_A T}{L_A} + \log_a \frac{5}{6} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \log_a P_B - \log_a P_A = \log_a \frac{5}{6}$$

$$\text{즉, } \log_a \frac{P_B}{P_A} = \log_a \frac{5}{6} \text{이므로 } \frac{P_B}{P_A} = \frac{5}{6}$$

답 ③

**(필수 유형 4)**

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = k \text{라 하면 } k > 0 \text{이고}$$

$$\log_a b = k, \log_b c = 2k, \log_c a = 4k$$

$$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1 \text{에서 } k \times 2k \times 4k = 8k^3 = 1$$

$$k^3 = \frac{1}{8}, k = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = k + 2k + 4k = 7k = \frac{7}{2}$$

답 ①

**13**

$$\begin{aligned} \log_3 6 \times \log_3 81 - \frac{1}{\log_3 2} &= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{\log 81}{\log 4} - \log_2 3 \\ &= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{4 \log 3}{2 \log 2} - \log_2 3 \\ &= \frac{2 \log 6}{\log 2} - \log_2 3 \\ &= 2 \log_2 6 - \log_2 3 \\ &= \log_2 36 - \log_2 3 \\ &= \log_2 12 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } k = \log_2 12$$

$$\text{따라서 } 2^k = 12$$

답 ①

**14**

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점  $(\log_3 2, \log_3 a), (\log_3 54, \log_3 a^2)$ 을 지나는 직선의 기울기는  $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{\log_3 a^2 - \log_3 a}{\log_3 54 - \log_3 2} = \frac{\log_3 a}{\log_3 27} = \frac{\log_3 a}{3} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_3 a = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$a = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2 \times \frac{3}{2}} = 3^3 = 27$$

답 ④

**15**

$$\frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{\log_3 3^3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} \log_b b^5 = \frac{5}{3} \log_b b = \frac{5}{3}$$

$$\log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_a a = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$A = \left\{ \log_a b, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right\}, \quad B = \left\{ 2, \frac{2}{3}, \log_2 a + \log_2 b \right\}$$

$A = B$ 이기 위해서는  $\log_a b = 2, \log_2 a + \log_2 b = \frac{5}{3}$ 이어야 한다.

$$\log_a b = 2 \text{에서 } \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = 2 \text{이므로}$$

$$\log_2 b = 2 \log_2 a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 a + \log_2 b = \frac{5}{3} \text{에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면 } \log_2 a = \frac{5}{9}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \log_2 b = \frac{10}{9}$$

$$\text{이때 } \log_a 2 + \log_a 2 = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_2 b} = \frac{9}{5} + \frac{9}{10} = \frac{27}{10}$$

따라서  $p = 10, q = 27$ 이므로

$$p + q = 10 + 27 = 37$$

답 37

**(필수 유형 6)**

곡선  $y = 2^{x+2} - 1$ 을  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 곡선은

$$y = -2^{x+2} + 1 \text{이므로 } f(x) = -2^{x+2} + 1$$

곡선  $y = f(x)$ 와  $y$ 축이 만나는 점의 좌표가  $(0, a)$ 이므로

$$a = -2^{0+2} + 1, a = -3$$

한편, 점근선은 직선  $y = 1$ 이므로  $b = 1$

$$\text{따라서 } a + b = (-3) + 1 = -2$$

답 ②

**16**

곡선  $y = 2^{x+2} - 3$ 을  $x$ 축의 방향으로 -1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면  $y - 2 = 2^{(x+1)+2} - 3$ , 즉  $y = 2^{x+3} - 1$ 이므로

$$f(x) = 2^{x+3} - 1$$

이때 점근선은 직선  $y = -1$ 이므로  $a = -1$

$$\text{따라서 } f(a) = f(-1) = 2^2 - 1 = 3 \text{이므로}$$

$$a + f(a) = -1 + 3 = 2$$

답 ②

**17**

두 점 B, C의  $x$ 좌표를 각각

$b, c$  ( $0 < b < c$ )라 하면

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2 \text{이므로}$$

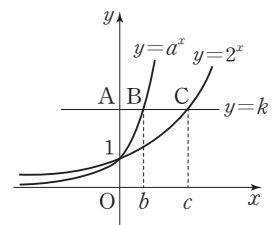
$$c = 3b \quad \dots \textcircled{1}$$

두 점 B, C의  $y$ 좌표는 서로 같으므로

$$a^b = 2^c \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$a^b = 2^{3b} = 8^b \quad \dots \textcircled{3}$$

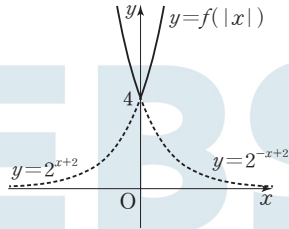


따라서  $a > 2, b > 0$ 이므로 ㉔에서  $a = 8$

답 8

### 18

- ㄱ.  $x \geq 0$ 일 때,  $|x| = x$ 이므로  $f(|x|) = f(x) = 2^{x+2}$ 이고  
 $x < 0$ 일 때,  $|x| = -x$ 이므로  $f(|x|) = f(-x) = 2^{-x+2}$ 이다.  
 따라서 함수  $y = f(|x|)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 치역은  $\{y | y \geq 4\}$ 이다. (참)

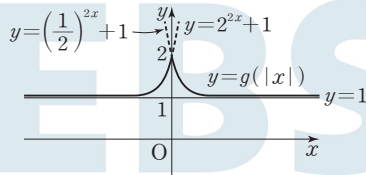
- ㄴ. (i)  $x \geq 0$ 일 때,  $|x| = x$ 이므로

$$g(|x|) = g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 1$$

- (ii)  $x < 0$ 일 때,  $|x| = -x$ 이므로

$$g(|x|) = g(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} + 1 = 2^{2x} + 1$$

$g(0) = 2$ 이므로 (i), (ii)에 의하여 함수  $y = g(|x|)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수  $y = g(|x|)$ 의 최솟값은 2이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(|x|) \leq 2$ 이다. (참)

- ㄷ. ㄱ에서 함수  $y = f(|x|)$ 의 그래프가  $y$ 축과 만나는 점은 점  $(0, 4)$ 이고, ㄴ에서 함수  $y = g(|x|)$ 의 그래프가  $y$ 축과 만나는 점은 점  $(0, 2)$ 이므로  $g(0) = 2$

이때 두 함수  $y = f(|x|), y = g(|x|) + k$ 의 그래프가  $y$ 축 위의 점에서 만나므로 함수  $y = g(|x|) + k$ 의 그래프가 점  $(0, 4)$ 를 지나야 한다.

따라서  $4 = g(0) + k$ 에서  $k = 4 - g(0)$ 이므로  $k = 2$ 이다.

함수  $y = g(|x|)$ 의 그래프의 점근선은 직선  $y = 1$ 이고 함수  $y = g(|x|) + 2$ 의 그래프는 함수  $y = g(|x|)$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선  $y = 3$ 이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 5

### (필수 유형 6)

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = (3^{-2})^x = 3^{-2x}$ 이므로 부등식  $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$ 에서  $3^{-2x} < 3^{21-4x}$ 이다.

밑 3은 1보다 크므로  $-2x < 21 - 4x$ 에서

$$x < \frac{21}{2} = 10.5$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수  $x$ 의 값은 1, 2, 3, ..., 10이고 그 개수는 10이다.

답 5

### 19

$3^x = t$ 라 하면  $t > 0$ 이고  $9^x = t^2$ 이므로 방정식  $2 \times 9^x + 63 = (3^x + 6)^2$ 은  $2t^2 + 63 = (t + 6)^2, t^2 - 12t + 27 = 0, (t - 3)(t - 9) = 0$

$t = 3$  또는  $t = 9$

따라서  $3^x = 3$ 에서  $x = 1$ 이고  $3^x = 9$ 에서  $x = 2$ 이므로 모든 실수  $x$ 의 값의 합은

$$1 + 2 = 3$$

답 3

### 20

곡선  $y = 2^x$ 과 직선  $x = n$ 이 만나는 점  $A_n$ 의 좌표는  $(n, 2^n)$

곡선  $y = (\sqrt{2})^x$ 과 직선  $x = n$ 이 만나는 점  $B_n$ 의 좌표는  $(n, 2^{\frac{n}{2}})$

$$f(n) = \frac{1}{2} \times \overline{OP}_n \times \overline{A_n P}_n = \frac{1}{2} \times n \times 2^n = \frac{n}{2} \times 2^n$$

$$g(n) = \frac{1}{2} \times \overline{OP}_n \times \overline{B_n P}_n = \frac{1}{2} \times n \times 2^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \times 2^{\frac{n}{2}}$$

부등식  $f(n) - 4 \times g(n) \geq 16n$ 에서

$$\frac{n}{2} \times 2^n - 4 \times \frac{n}{2} \times 2^{\frac{n}{2}} \geq 16n, 2^n - 4 \times 2^{\frac{n}{2}} \geq 32$$

$2^{\frac{n}{2}} = t$ 라 하면  $t > 0$ 이고  $t^2 - 4t - 32 \geq 0$

$(t + 4)(t - 8) \geq 0$ 이므로  $t \geq 8$

즉,  $2^{\frac{n}{2}} \geq 8 = 2^3$ 이므로  $\frac{n}{2} \geq 3, n \geq 6$

따라서 자연수  $n$ 의 최솟값은 6이다.

답 4

### 21

부등식  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+1} \leq 4^{x-3}$ 에서

$2^{x^2-4x-1} \leq 2^{2x-6}$ 이고 밑 2가 1보다 크므로

$$x^2 - 4x - 1 \leq 2x - 6$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0, (x - 1)(x - 5) \leq 0, 1 \leq x \leq 5$$

따라서 부등식을 만족시키는 정수  $x$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$a \in A$ 에 대하여

$$x = 3^a \times \left(\frac{1}{3}\right)^{6a-k} = 3^{a(a-6)+k}$$
이므로

$$a = 1 \text{ 일 때, } x = 3^{-5+k}$$

$$a = 2 \text{ 일 때, } x = 3^{-8+k}$$

$$a = 3 \text{ 일 때, } x = 3^{-9+k}$$

$$a = 4 \text{ 일 때, } x = 3^{-8+k}$$

$$a = 5 \text{ 일 때, } x = 3^{-5+k}$$

집합  $B = \{3^{-5+k}, 3^{-8+k}, 3^{-9+k}\}$ 이므로

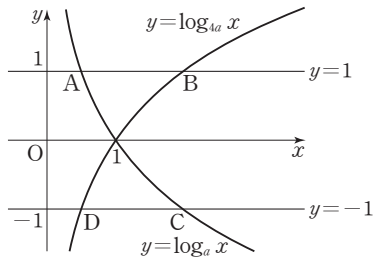
집합  $B$ 의 모든 원소의 곱은

$$3^{-5+k} \times 3^{-8+k} \times 3^{-9+k} = 3^{-22+3k}$$

즉,  $3^{-22+3k} = 3^2$ 에서  $-22 + 3k = 2$ 이므로  $k = 8$

답 3

필수 유형 ①



- ㄱ. A(a, 1), B(4a, 1)이므로 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는  $(\frac{4a-4a}{1-4}, \frac{1-4}{1-4})$ , 즉 (0, 1)이다. (참)
- ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 x축에 대하여 대칭이므로 x좌표가 각각 같다. 한편, 점 D의 좌표는  $(\frac{1}{4a}, -1)$ 이므로  $a = \frac{1}{4a}$ 에서  $4a^2 = 1$ 이고  $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로  $a = \frac{1}{2}$  (참)

ㄷ. 네 점의 좌표가 각각 A(a, 1), B(4a, 1), C( $\frac{1}{a}$ , -1),

D( $\frac{1}{4a}$ , -1)이므로  $\overline{AB} = 3a$ ,  $\overline{CD} = \frac{3}{4a}$

$\overline{AB} < \overline{CD}$ 이면  $3a < \frac{3}{4a}$ 에서  $a^2 < \frac{1}{4}$ 이고,  $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로

$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$  (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

22

곡선  $y = \log_3(ax+b)$ 가 점 (0, 2)를 지나므로  $2 = \log_3 b$ 에서  $b = 9$

곡선  $y = \log_3(ax+9)$ 의 점근선이 직선  $x = -\frac{9}{a}$ 이므로

$-\frac{9}{a} = -3$ 에서  $a = 3$

따라서 주어진 곡선은  $y = \log_3(3x+9)$ 이고 이 곡선이 점 (2, k)를 지나므로

$k = \log_3(3 \times 2 + 9) = \log_3 15 = \log_3(3 \times 5) = 1 + \log_3 5$

답 ③

23

곡선  $y = \log_a x$ 와 직선  $x = n$ 이 만나는 점의 x좌표가 n이므로 점 P<sub>n</sub>의 좌표는 (n, log<sub>a</sub> n)이고 점 P<sub>n+1</sub>의 좌표는 (n+1, log<sub>a</sub>(n+1))이다. 주어진 직사각형은 선분 P<sub>n</sub>P<sub>n+1</sub>을 대각선으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하므로 그 넓이 f(n)은

$$f(n) = \{(n+1) - n\} \times \{\log_a(n+1) - \log_a n\}$$

$$= \log_a(n+1) - \log_a n = \log_a \frac{n+1}{n}$$

따라서

$f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$

$= \log_a \frac{3}{2} + \log_a \frac{4}{3} + \log_a \frac{5}{4} + \log_a \frac{6}{5} = \log_a \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}\right)$

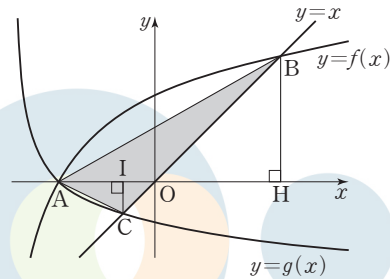
$= \log_a 3 = 3$

이므로  $a^3 = 3$ 에서  $a = \sqrt[3]{3}$

답 ②

24

함수  $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$ 의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 (-3, 0)이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (-3, 0)을 지난다. 즉,  $0 = \log_a(-3-m)$ 에서  $m = -4$ 이므로  $f(x) = \log_a(x+4)$



점 B는 직선  $y = x$  위의 점이므로 점 B의 좌표를 (k, k) (k > 0)이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 C(-1, -1)에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면  $\overline{CI} = 1$ 이고  $\overline{BH} = k$  한편, 삼각형 ABC의 넓이는 원점 O에 대하여 두 삼각형 OAC와 OAB의 넓이의 합이므로

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{CI} + \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times k = \frac{3}{2}(1+k)$$

즉,  $\frac{3}{2}(1+k) = \frac{15}{2}$ 에서  $k = 4$

점 B가 곡선  $y = f(x)$  위의 점이므로  $4 = \log_a(4+4)$ 에서  $a^4 = 8$

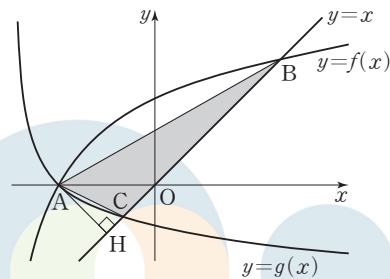
$a > 1$ 이므로  $a = 2^{\frac{3}{4}}$

따라서  $p = 4$ ,  $q = 3$ 이므로  $p + q = 4 + 3 = 7$

답 7

다른 풀이

함수  $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$ 의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 (-3, 0)이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (-3, 0)을 지난다. 즉,  $0 = \log_a(-3-m)$ 에서  $m = -4$ 이므로  $f(x) = \log_a(x+4)$



한편, 점 A(-3, 0)에서 직선  $y = x$ , 즉  $x - y = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-3-0|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

또한 점 B의 좌표를 (k, k)라 하면  $k > 0$ 이고 C(-1, -1)이므로

$\overline{BC} = \sqrt{2(k+1)^2} = \sqrt{2}(k+1)$

삼각형 ABC의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}(k+1) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2}$ 에서  $k = 4$

점 B(4, 4)가 곡선  $y = f(x)$  위의 점이므로  $4 = \log_a(4+4)$ 에서  $a^4 = 8$

$a > 1$ 이므로  $a = 2^{\frac{3}{4}}$

따라서  $p = 4$ ,  $q = 3$ 이므로  $p + q = 4 + 3 = 7$



**필수 유형 ⑧**

로그의 진수의 조건에 의하여  $f(x) > 0, x > 1$   
 $f(x) > 0$ 에서  $0 < x < 7$ 이고,  $x > 1$ 이므로  $1 < x < 7$   
 $\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0$ 에서  
 $\log_3 f(x) - \log_3(x-1) \leq 0$   
 $\log_3 f(x) \leq \log_3(x-1)$   
 $f(x) \leq x-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$   
 $1 < x < 7$ 에서  $\textcircled{1}$ 을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  $4 \leq x < 7$   
 따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수  $x$ 의 값은 4, 5, 6이고 그 합은  
 $4+5+6=15$

답 15

**25**

로그의 진수의 조건에 의하여  $x > \frac{1}{3}, x > 3$ 에서  $x > 3$   
 $\log_4(3x-1) + \log_4(x-3) = \log_4 11$ 에서  
 $\log_4(3x-1)(x-3) = \log_4 11$ 이므로  $(3x-1)(x-3) = 11$   
 $3x^2 - 10x - 8 = 0, (3x+2)(x-4) = 0$   
 따라서  $x = -\frac{2}{3}$  또는  $x = 4$   
 $x > 3$ 이므로 구하는 실수  $x$ 의 값은 4이다.

답 4

**26**

$\log_3 \frac{x}{3} \times \log_3 \frac{x}{9} = (\log_3 x - \log_3 3)(\log_3 x - \log_3 9)$   
 $= (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 2)$   
 $\log_3 x = t$ 라 하면  
 $(t-1)(t-2) < 6$ 에서  $t^2 - 3t - 4 < 0$   
 $(t+1)(t-4) < 0$ 이므로  $-1 < t < 4$   
 즉,  $-1 < \log_3 x < 4, \frac{1}{3} < x < 81$   
 따라서 부등식을 만족시키는 자연수  $x$ 의 최댓값은 80이다.

답 ①

**27**

사각형 ABDC는 두 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴이다.  
 $\overline{AB} = \log_4 n - \log_{\frac{1}{2}} n = \frac{1}{2} \log_2 n + \log_2 n = \frac{3}{2} \log_2 n$   
 $\overline{CD} = \log_4 m - \log_{\frac{1}{2}} m = \frac{1}{2} \log_2 m + \log_2 m = \frac{3}{2} \log_2 m$   
 사다리꼴 ABDC의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times \left( \frac{3}{2} \log_2 m + \frac{3}{2} \log_2 n \right) \times (m-n)$ 이므로  
 $\frac{1}{2} \times \left( \frac{3}{2} \log_2 m + \frac{3}{2} \log_2 n \right) \times (m-n) = \frac{9}{2}$   
 $\frac{3}{4} (m-n) \log_2 mn = \frac{9}{2}$   
 $\log_2 mn = \frac{6}{m-n}$   
 $mn = 2^{\frac{6}{m-n}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

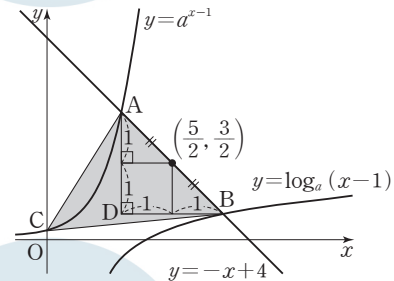
이때  $m, n$ 이 2 이상의 자연수이고  $m > n$ 이므로  $m-n$ 은 자연수이다.  
 $mn$ 은 자연수이므로  $\textcircled{1}$ 을 만족시키기 위해서는  $m-n$ 이 6의 양의 약수  
 이어야 한다.

- (i)  $m-n=1$ 일 때,  $m=n+1$ 이고  
 $mn=64$ 에서  $n(n+1)=64, n^2+n-64=0$   
 이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수  $n$ 은 존재하지 않는다.
  - (ii)  $m-n=2$ 일 때,  $m=n+2$ 이고  
 $mn=8$ 에서  $n(n+2)=8, n^2+2n-8=0, (n+4)(n-2)=0$   
 $n$ 은 2 이상의 자연수이므로  $n=2$ 이고  $m=4$
  - (iii)  $m-n=3$ 일 때,  $m=n+3$ 이고  
 $mn=4$ 에서  $n(n+3)=4, n^2+3n-4=0, (n+4)(n-1)=0$   
 이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수  $n$ 은 존재하지 않는다.
  - (iv)  $m-n=6$ 일 때,  $m=n+6$ 이고  
 $mn=2$ 에서  $n(n+6)=2, n^2+6n-2=0$   
 이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수  $n$ 은 존재하지 않는다.
- (i)~(iv)에 의하여  $m=4, n=2$ 이므로  
 $m+n=4+2=6$

답 6

**필수 유형 ⑨**

두 곡선  $y=a^{x-1}, y=\log_a(x-1)$ 은 두 곡선  $y=a^x, y=\log_a x$ 를  $x$ 축  
 의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 것이다. 두 곡선  $y=a^x, y=\log_a x$   
 는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선  $y=a^{x-1}, y=\log_a(x-1)$   
 의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 두 곡선  $y=a^{x-1}, y=\log_a(x-1)$   
 은 직선  $y=x-1$ 에 대하여 대칭이다.  
 따라서 두 점 A, B는 두 직선  $y=x-1$ 과  $y=-x+4$ 의 교점인 점  
 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 에 대하여 대칭이다.



$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로 그림의 직각이등변삼각형 ADB에서  
 $A(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), B(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ 임을 알 수 있다.  
 함수  $y=a^{x-1}$ 의 그래프가 점  $A(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 를 지나므로  $a^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}, a = \frac{25}{4}$   
 따라서 점 C의 좌표는  $(0, \frac{4}{25})$ 이다.  
 선분 AB를 밑변으로 할 때, 점 C와 직선  $x+y-4=0$  사이의 거리는  
 $\frac{|0 + \frac{4}{25} - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{96}{25\sqrt{2}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$   
 이므로 삼각형 ABC의 넓이  $S$ 는  $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} = \frac{96}{25}$   
 따라서  $50 \times S = 50 \times \frac{96}{25} = 192$

답 192

## 28

함수  $f(x) = 2^{x-1} + a$ 의 역함수는  $y = 2^{x-1} + a$ 에서  $x$ 와  $y$ 를 바꾸면  $x = 2^{y-1} + a$ 이고

$$y = \log_2(x - a) + 1 \text{ 이므로 } a = 2$$

한편, 함수  $g(x) = \log_2(x - 2) + 1$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $m$ 만큼 평행이동하면  $g(x - m) = \log_2(x - m - 2) + 1$ 이고, 이 함수의 그래프의 점근선은  $x = m + 2$ 이므로  $m + 2 = 5$ 에서  $m = 3$

$$\text{따라서 } a + m = 2 + 3 = 5$$

답 ⑤

## 29

곡선  $y = \log_2(x - 1) - 1$ 을  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $1$ 만큼 평행이동하면 곡선  $y = \log_2 x$ 가 되고, 점  $(5, 1)$ 을  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $1$ 만큼 평행이동하면 점  $(4, 2)$ 가 되며 이 점은 직선  $l$  위의 점이다.

곡선  $y = \log_2 x$ 와 곡선  $y = 2^x$ 은 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 직선  $l$ 과 곡선  $y = 2^x$ 이 만나는 점의 좌표는  $(2, 4)$ 이다.

$$\text{따라서 } a = 2, b = 4 \text{ 이므로 } \frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

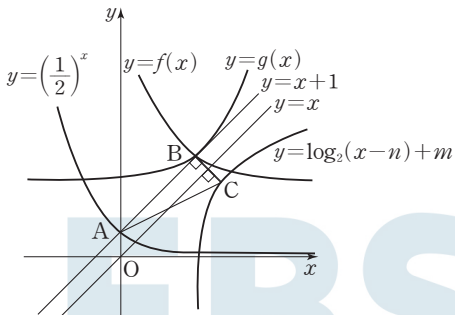
답 ①

## 30

점 A의 좌표는  $(0, 1)$ 이므로 점 B의 좌표는  $(m, 1 + n)$ 이다.

점 B는 직선  $y = x + 1$  위의 점이므로  $1 + n = m + 1$ 에서  $m = n$ 이다.

함수  $y = 2^x$ 의 그래프도  $y$ 축과 점 A에서 만나므로  $g(x) = 2^{x-m} + n$ 이라 하면 함수  $y = g(x)$ 의 그래프도 점 B  $(m, 1 + n)$ 을 지난다. 또한 함수  $y = g(x)$ 의 역함수가  $y = \log_2(x - n) + m$ 이고 기울기가  $-1$ 인 직선이 두 함수  $y = g(x)$ ,  $y = \log_2(x - n) + m$ 의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각  $(m, m + 1)$ ,  $(m + 1, m)$ 이므로  $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은  $-1$ 이므로 삼각형 ABC에서  $\angle B = 90^\circ$ 이다.

$m > 0$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}m \times \sqrt{2} = m = 6$$

따라서  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + 6$ 이므로

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + 6 = 16 + 6 = 22$$

답 22

## (필수 유형 10)

함수  $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x + k)$ 는 밑  $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로

$x = 0$ 에서 최댓값을 갖고  $x = 12$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$f(0) = 2 \log_{\frac{1}{2}} k = -4 \text{ 에서 } \log_{\frac{1}{2}} k = -2 \text{ 이므로 } k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

한편,  $m = f(12) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(12 + 4) = -2 \log_2 16 = -8$

$$\text{따라서 } k + m = 4 + (-8) = -4$$

답 ④

## 31

함수  $g(x)$ 는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 실수 전체의 집합에서  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.

$$g(f(x)) = 2^{x^2 - 2x + 3} = 2^{(x-1)^2 + 2} \text{ 이고 } (x-1)^2 + 2 \geq 2 \text{ 이므로 } 2^{(x-1)^2 + 2} \geq 2^2$$

따라서 함수  $y = (g \circ f)(x)$ 는  $x = 1$ 일 때 최솟값  $2^2 = 4$ 를 갖는다.

답 ①

## 32

$a > 1$ 이므로 두 함수  $y = 2^{x+2}$ ,  $y = \log_a(x + 2)$ 는 모두  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.

$-1 \leq x_1 < x_2$ 이면  $2^{x_1+2} < 2^{x_2+2}$ ,  $\log_a(x_1 + 2) < \log_a(x_2 + 2)$ 이므로  $f(x_1) < f(x_2)$ 이다. 즉, 함수  $f(x)$ 도  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가하는 함수이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = -1$ 에서 최솟값을 갖고,  $x = 2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$f(-1) = 2^1 + \log_a 1 = 2, f(2) = 2^4 + \log_a 4 = 16 + \log_a 4$$

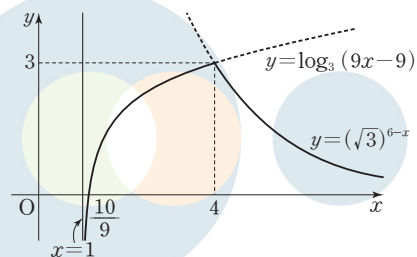
$$\text{이고 } 2 + (16 + \log_a 4) = 19 \text{ 에서 } \log_a 4 = 1$$

따라서  $a = 4$

답 ②

## 33

함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수  $f(x)$ 는  $x = 4$ 일 때 최댓값 3을 가지므로  $t \leq x \leq t + 2$ 에  $x = 4$ 가 포함되면 최댓값은 3이다. 즉,  $t \leq 4 \leq t + 2$ 에서  $2 \leq t \leq 4$ 이고 이를 만족시키는 자연수  $t$ 의 값은 2, 3, 4로 그 개수는 3이다. 즉,  $a = 3$

$s \leq x \leq s + 1$ 에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i)  $s > 1$ ,  $s + 1 < 4$ 일 때,  $1 < s < 3$ 이고 함수  $f(x)$ 는  $s \leq x \leq s + 1$ 에서  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가하는 함수이므로  $x = s$ 일 때 최솟값이다.



$$f(s) = \log_3(9s-9) = 1 \text{에서 } 9s-9=3, s=\frac{4}{3}$$

이는  $1 < s < 3$ 을 만족시킨다.

(ii)  $1 < s < 4, s+1 \geq 4$ 일 때,  $3 \leq s < 4$ 이고  $f(3) = \log_3 18 > \log_3 3 = 1$   
 $f(4) = (\sqrt{3})^2 = 3 > 1$ 이므로  $s \leq x \leq s+1$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최솟값은 1보다 크다.

(iii)  $s \geq 4$ 일 때, 함수  $f(x)$ 는  $s \leq x \leq s+1$ 에서  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값은 감소하는 함수이므로  $x=s+1$ 일 때 최소이다.

즉,  $f(s+1) = (\sqrt{3})^{6-(s+1)} = 1$ 에서  $5-s=0, s=5$

이는  $s \geq 4$ 를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여  $b = \frac{4}{3} \times 5 = \frac{20}{3}$

따라서  $a+3b = 3 + 3 \times \frac{20}{3} = 23$

답 23

## 02 삼각함수

정답

본문 18~25쪽

(필수 유형 1) ③	01 ②	02 ④	03 11
(필수 유형 2) ④	04 ⑤	05 ⑤	06 ①
	07 ⑤		
(필수 유형 3) ③	08 24	09 ⑤	
(필수 유형 4) ⑤	10 ①	11 ③	12 ④
(필수 유형 5) ③	13 ④	14 ③	15 64
(필수 유형 6) ②	16 ①	17 ③	18 ②
	19 185		
(필수 유형 7) 21	20 ④	21 ②	22 39
(필수 유형 8) ①	23 9	24 135	

### (필수 유형 1)

부채꼴의 반지름의 길이를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

이 부채꼴의 중심각의 크기는  $\frac{5}{9}\pi$ 이고 호의 길이는  $\frac{10}{3}\pi$ 이므로

$$r \times \frac{5}{9}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

$$r = 6$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5}{9}\pi = 10\pi$$

답 ③

## 01

중심각과 원주각의 크기 사이의 관계에 의하여

$$\angle AOP = 2\angle ABP = \frac{\pi}{6},$$

$$\angle BOP = 2\angle BAP = \frac{\pi}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOP + \angle BOP \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

부채꼴 OAB의 넓이가  $30\pi$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{5}{12}\pi = 30\pi$$

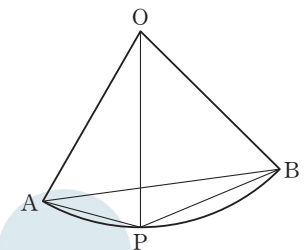
$$r^2 = 144$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 12$$

따라서 호 AB의 길이는

$$12 \times \frac{5}{12}\pi = 5\pi$$

답 ②



## 02

선분 AB의 중점을 O라 하면

$$\overline{OA} = \overline{OB} = 3$$

$\angle POB = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ )라 하면 호 BP의

길이가  $\pi$ 이므로

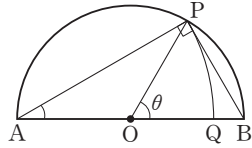
$$\pi = 3 \times \theta, \theta = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 ABP에서  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle PAB = \frac{1}{2} \angle POB = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{AP} = \overline{AB} \times \cos \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

따라서 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는

$$3\sqrt{3} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$



답 ④

## 03

부채꼴 OAB의 중심각의 크기는  $\frac{4}{25}\pi$ 이고 호의 길이는  $\frac{8}{5}\pi$ 이므로

$$\overline{OA} \times \frac{4}{25}\pi = \frac{8}{5}\pi, \overline{OA} = 10$$

부채꼴 OAB의 넓이는  $\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{4}{25}\pi = 8\pi$

한편, 선분 OB를 3:2로 내분하는 점이 C이므로

$$\overline{OC} = \frac{3}{5} \times 10 = 6$$

부채꼴 OCD에서  $\angle COD = \theta$ 라 하면 부채꼴 OCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 18\theta$$

부채꼴 OAB의 넓이와 부채꼴 OCD의 넓이가 같으므로

$$8\pi = 18\theta \text{에서 } \theta = \frac{4}{9}\pi$$

부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는

$$6 \times \frac{4}{9}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

따라서  $p=3$ ,  $q=8$ 이므로

$$p+q=3+8=11$$

답 11

### (필수 유형 ②)

$\cos^2 \theta = \frac{4}{9}$ 이고  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 일 때  $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{2}{3}$$

한편,  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{따라서 } \sin^2 \theta + \cos \theta = \frac{5}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9}$$

답 ④

## 04

$\sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ 이고  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{일 때 } \cos \theta > 0 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{6}{7}$$

답 ⑤

## 05

$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -4$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -4, \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -4$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -4, \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

한편,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서  $\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 } \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

답 ⑤

## 06

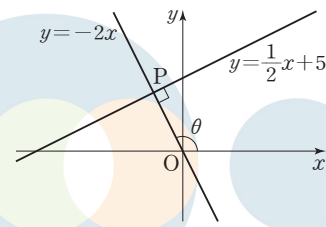
직선 OP의 기울기를  $m$ 이라 하면 직선  $y = \frac{1}{2}x + 5$ 와 직선 OP가 서로 수직이므로

$$m \times \frac{1}{2} = -1, m = -2$$

직선  $y = \frac{1}{2}x + 5$ 와 직선  $y = -2x$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표는

$$\frac{1}{2}x + 5 = -2x \text{에서 } x = -2$$

이때  $y = -2 \times (-2) = 4$ 이므로 점 P의 좌표는  $(-2, 4)$ 이다.



$$\overline{OP} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta \times \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

답 ①

## 07

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서  $\angle AOP = \alpha$ 라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가  $4\pi$ 이므로

$$6\alpha = 4\pi, \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

이때  $\theta = \frac{2}{3}\pi$  또는  $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

(i)  $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 일 때,  $\theta$ 는 제2사분면의 각이므로  $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

이때  $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 일 때,  $\theta$ 는 제3사분면의 각이므로  $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

이때  $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서  $\theta = \frac{4}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

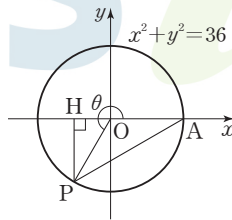
$$\overline{OH} = 3, \overline{PH} = 3\sqrt{3}$$

이므로 점 P의 좌표는  $(-3, -3\sqrt{3})$ 이다.

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{-3\sqrt{3}}{-3} = \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta + \tan^2 \theta = -\frac{1}{2} + (\sqrt{3})^2 = \frac{5}{2}$$



답 ⑤

다른 풀이

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서  $\angle AOP = \alpha$ 라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가  $4\pi$ 이므로

$$6\alpha = 4\pi, \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

이때  $\theta = \frac{2}{3}\pi$  또는  $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

(i)  $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 일 때,  $\theta$ 는 제2사분면의 각이므로  $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

이때  $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 일 때,  $\theta$ 는 제3사분면의 각이므로  $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

이때  $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서  $\theta = \frac{4}{3}\pi$

$$\cos \theta = \cos \frac{4}{3}\pi = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \tan \frac{4}{3}\pi = \tan \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \cos \theta + \tan^2 \theta = -\frac{1}{2} + (\sqrt{3})^2 = \frac{5}{2}$$

필수 유형 ⑧

함수  $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는  $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$

점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하면

$$A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right) \text{ 이므로 } \overline{AB} = \frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

삼각형 OAB의 넓이가 5이므로  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{b} \times a = 5, \frac{a}{b} = 5$

$$a = 5b \quad \dots \text{ ㉠}$$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이  $\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{\frac{1}{2b}} \times \frac{a}{\frac{5}{2b}} = 2ab \times \frac{2ab}{5} = \frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4}$$

$$a^2b^2 = \frac{25}{16}$$

$$ab > 0 \text{ 이므로 } ab = \frac{5}{4} \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면 } 5b^2 = \frac{5}{4}, b^2 = \frac{1}{4}$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ 을 ㉡에 대입하면 } a = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

답 ③

08

함수  $f(x) = -a \cos \frac{\pi x}{b}$ 의 주기는  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = 2b$ 이므로

$A\left(\frac{b}{2}, 0\right), B\left(\frac{3b}{2}, 0\right)$ 이고,

함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

함수  $f(x)$ 는  $x = b$ 일 때,

최댓값  $f(b) = a$ 를 가지므로  $c = b$ 이고

$C(b, a), D(0, -a)$ 이다.

한편, 직선 AC의 기울기는  $\frac{a}{b - \frac{b}{2}} = \frac{2a}{b}$

이고, 직선 BC의 기울기는  $\frac{a}{b - \frac{3b}{2}} = -\frac{2a}{b}$ 이다.

조건 (가)에 의하여

$$\frac{2a}{b} \times \left(-\frac{2a}{b}\right) = -16, \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 4$$

$$\frac{a}{b} > 0 \text{ 이므로 } \frac{a}{b} = 2$$

$$a = 2b \quad \dots \text{ ㉠}$$

조건 (나)에서

(삼각형 BCD의 넓이)

= (삼각형 ABC의 넓이) + (삼각형 ADB의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times b \times a + \frac{1}{2} \times b \times a$$

$$= ab = 72 \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면 } 2b^2 = 72, b^2 = 36$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = 6$$

$$b = 6 \text{ 을 ㉠에 대입하면 } a = 12$$

한편,  $c = b = 6$

$$\text{따라서 } a + b + c = 12 + 6 + 6 = 24$$

답 24

09

함수  $y = f(x)$ 의 주기가 2이므로  $\frac{\pi}{b} = 2$ , 즉  $b = \frac{\pi}{2}$

$\overline{OA} = 2$ 이므로 점 A의 좌표는  $(2, 0)$ 이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라

하면  $\angle BAO = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{AH} = \overline{BH} = k, \overline{OH} = 2 - k$$

직각삼각형 BOH에서

$$\tan \theta = \tan(\angle BOH) = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}} = \frac{k}{2-k} = 3, k = \frac{3}{2}$$

점 B의 좌표가  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 이고, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 점 B를 지나므로

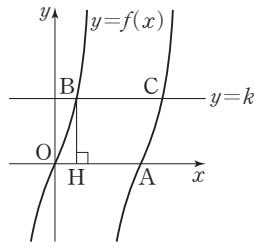
$$f(\frac{1}{2}) = a \tan(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}) = a \tan \frac{\pi}{4} = a = \frac{3}{2}$$

이때 점 C의 좌표는  $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 이고  $f(x) = \frac{3}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$ 이다.

$$f(\frac{k}{3}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{OC}^2 = (\frac{5}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{17}{2}$$

$$\text{따라서 } f(\frac{k}{3}) + \overline{OC}^2 = \frac{3}{2} + \frac{17}{2} = 10$$



답 ⑤

**(필수 유형 ④)**

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta \text{이므로 } \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{에서 } \sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\tan \theta < 0$ ,  $\sin \theta < 0$ 이므로  $\theta$ 는 제4사분면의 각이고,  $\cos \theta > 0$ 이다.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - (-\frac{\sqrt{5}}{5})^2 = \frac{4}{5} \text{에서}$$

$$\cos \theta > 0 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ⑤

**10**

$$\sin(-\frac{5}{6}\pi) = -\sin \frac{5}{6}\pi = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{8}{3}\pi = \cos(2\pi + \frac{2}{3}\pi) = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \sin(-\frac{5}{6}\pi) + \cos \frac{8}{3}\pi = -\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = -1$$

답 ①

**11**

$$\cos \theta = -\frac{1}{3} \text{이므로 } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{일 때, } \sin \theta > 0 \text{이므로 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta = -\frac{1}{3}, \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \sin(\pi + \theta) \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \cos(\pi - \theta) \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-\frac{2\sqrt{2}}{3}) + (-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

답 ③

**12**

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi + \theta) = \cos[\pi + (\frac{\pi}{2} + \theta)] = -\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin \theta$$

$$\text{이므로 } \sin(2\pi - \theta) + \cos(\pi + \theta) + 2 \cos(\frac{3}{2}\pi + \theta) = 3 \sin \theta \text{에서}$$

$$-\sin \theta - \cos \theta + 2 \sin \theta = 3 \sin \theta$$

$$\cos \theta = -2 \sin \theta \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{한편, } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로 } \sin^2 \theta + (-2 \sin \theta)^2 = 1, \sin^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{에서 } \sin \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 ④

**(필수 유형 ⑤)**

함수  $f(x) = a - \sqrt{3} \tan 2x$ 의 그래프의 주기는  $\frac{\pi}{2}$ 이다.

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[-\frac{\pi}{6}, b]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4} \text{이다.}$$

한편, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 구간  $[-\frac{\pi}{6}, b]$ 에서  $x$ 의 값이 증가할

때,  $y$ 의 값은 감소하므로 함수  $f(x)$ 는  $x = -\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 7을 갖는다.

$$\text{즉, } f(-\frac{\pi}{6}) = a - \sqrt{3} \tan(-\frac{\pi}{3}) = 7 \text{에서}$$

$$a + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} = 7, a + 3 = 7, a = 4$$

함수  $f(x)$ 는  $x=b$ 에서 최솟값 3을 가지므로

$$f(b) = 4 - \sqrt{3} \tan 2b = 3 \text{에서 } \tan 2b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{이때 } -\frac{\pi}{3} < 2b < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } 2b = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

답 ③

**13**

함수  $f(x)$ 의 최솟값이  $-1$ 이고  $a > 0$ 이므로

$$-a + b = -1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{6} + b = \frac{a}{2} + b \text{이므로}$$

$$\frac{a}{2} + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{A} - \textcircled{B} \text{을 하면 } \frac{3}{2}a = 6, a = 4$$

$$a = 4 \text{를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } -4 + b = -1, b = 3$$

$$\text{따라서 } a + b = 4 + 3 = 7$$

답 ④

### 14

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin(\pi + x) \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + 3 \\ &= -2 \sin^2 x - \cos x + 3 = -2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 3 \\ &= 2 \cos^2 x - \cos x + 1 = 2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로  $\cos x = -1$ 일 때 함수  $f(x)$ 는 최댓값을 갖고  $\cos x = \frac{1}{4}$ 일 때, 함수  $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.

$$\text{따라서 } M = 2\left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = 4, m = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \text{이므로}$$

$$M + m = 4 + \frac{7}{8} = \frac{39}{8}$$

답 ③

### 15

함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선은 직선  $x = 3$ 이다.

함수  $g(x)$ 의 주기는  $\frac{\pi}{a} = a$ 이므로 함수  $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선은

$$\text{직선 } x = na + \frac{a}{2} \text{ (} n \text{은 정수)이다.}$$

$$\text{조건 (가)에서 } na + \frac{a}{2} = 3 \text{이므로 } a = \frac{6}{2n+1}$$

$a$ 는 자연수이므로  $2n+1$ 은 6의 양의 약수이어야 한다.

$$2n+1=1 \text{ 또는 } 2n+1=2 \text{ 또는 } 2n+1=3 \text{ 또는 } 2n+1=6$$

$$\text{즉, } n=0 \text{ 또는 } n=\frac{1}{2} \text{ 또는 } n=1 \text{ 또는 } n=\frac{5}{2}$$

이때  $n$ 은 정수이므로  $n=0$  또는  $n=1$

$$(i) n=0 \text{일 때, } a=6 \text{이므로 } g(x) = \tan \frac{\pi x}{6}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{9} < \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.}$$

$$(ii) n=1 \text{일 때, } a=2 \text{이므로 } g(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1 \text{이므로 조건 (나)를 만족시킨다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } g(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$$

함수  $y = f(x)$ 의 정의역은  $\{x \mid x > 3 \text{인 실수}\}$ 이고 밑 4가 1보다 크므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.

$$\frac{13}{4} \leq x \leq 19 \text{에서 } f\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{1}{3} \log_4 \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}, f(19) = \frac{1}{3} \log_4 16 = \frac{2}{3}$$

$$\text{이므로 } -\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$$

또  $-1 < x < 1$ 일 때, 함수  $y = g(x)$ 의 그래프는  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{이므로 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq (g \circ f)(x) \leq \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } M = \sqrt{3}, m = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$12(M-m)^2 = 12 \times \left[\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]^2 = 12 \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 64$$

답 64

### (필수 유형 6)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \text{이므로 } 4 \sin^2 x - 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0 \text{에서}$$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

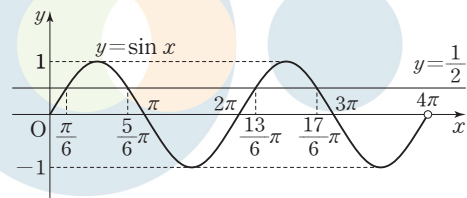
$$(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 3) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$0 \leq x < 4\pi$ 일 때,  $2 \sin x + 3 > 0$ 이므로  $\textcircled{A}$ 에서

$$2 \sin x - 1 = 0, \sin x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 4\pi$ 일 때, 방정식  $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{13\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{17\pi}{6}$$



따라서 방정식의 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} = 6\pi$$

답 ②

### 16

$$\text{부등식 } (2 \sin x - 1)(\sqrt{2} \cos x - 1) > 0 \text{에서}$$

$$2 \sin x - 1 > 0, \sqrt{2} \cos x - 1 > 0 \text{ 또는}$$

$$2 \sin x - 1 < 0, \sqrt{2} \cos x - 1 < 0$$

(i)  $2 \sin x - 1 > 0, \sqrt{2} \cos x - 1 > 0$ 일 때

$$\text{부등식 } 2 \sin x - 1 > 0 \text{에서 } \sin x > \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\text{부등식 } \sqrt{2} \cos x - 1 > 0 \text{에서 } \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$$

(ii)  $2 \sin x - 1 < 0, \sqrt{2} \cos x - 1 < 0$ 일 때

$$\text{부등식 } 2 \sin x - 1 < 0 \text{에서 } \sin x < \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\text{부등식 } \sqrt{2} \cos x - 1 < 0 \text{에서 } \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕} \text{에서 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{5}{6}\pi, \delta = \frac{7}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sin(\delta - \beta) + \cos(\gamma - \alpha) &= \sin\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\frac{3}{2}\pi + \cos\frac{2}{3}\pi \\ &= -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ①

## 17

$f(x) = |8 \cos x + 2|$ 라 하면  $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

방정식  $|8 \cos x + 2| = k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

즉,  $k=6$

방정식  $|8 \cos x + 2| = 6$ 에서

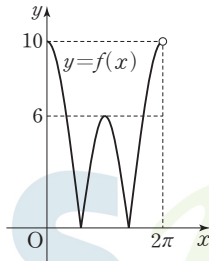
$$8 \cos x + 2 = 6 \text{ 또는 } 8 \cos x + 2 = -6$$

$$(i) 8 \cos x + 2 = 6 \text{일 때, } \cos x = \frac{1}{2} \text{이므로 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$(ii) 8 \cos x + 2 = -6 \text{일 때, } \cos x = -1 \text{이므로 } x = \pi$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \pi, \gamma = \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } \frac{k(\gamma - \alpha)}{\beta} = \frac{6 \times \left(\frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi} = 8$$



답 ③

## 18

이차방정식  $x^2 + (4 \sin \theta)x - 2 + 10 \cos \theta = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면 이차방정식  $x^2 + (4 \sin \theta)x - 2 + 10 \cos \theta = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2 \sin \theta)^2 - (-2 + 10 \cos \theta) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 4(1 - \cos^2 \theta) + 2 - 10 \cos \theta \geq 0 \text{에서}$$

$$2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 3 \leq 0$$

$$(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 3) \leq 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{이므로 } \cos \theta + 3 > 0$$

$$\text{즉, } 2 \cos \theta - 1 \leq 0 \text{에서 } \cos \theta \leq \frac{1}{2} \text{이므로 } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5}{3}\pi \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

답 ②

## 19

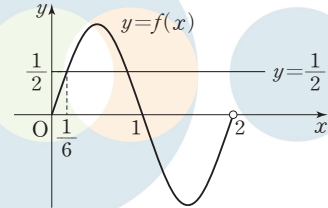
함수  $y = \sin(n\pi x)$ 의 주기는  $\frac{2\pi}{n\pi} = \frac{2}{n}$

(i)  $0 \leq x < 2$ , 즉  $n=1$ 일 때,  $f(x) = \sin(\pi x)$ 이다.

$$\text{방정식 } 2f(x) - 1 = 0 \text{에서 } \sin(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2$ 에서 방정식  $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$ 의 실근 중 가장 작은 것이  $\alpha$ 이

$$\text{므로 } \alpha = \frac{1}{6}$$

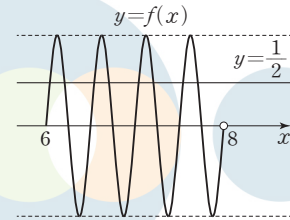


(ii)  $6 \leq x < 8$ , 즉  $n=4$ 일 때,  $f(x) = \sin(4\pi x)$ 이다.

$$\text{방정식 } 2f(x) - 1 = 0 \text{에서 } \sin(4\pi x) = \frac{1}{2}$$

$6 \leq x < 8$ 에서 방정식  $\sin(4\pi x) = \frac{1}{2}$ 의 실근 중 가장 큰 것이  $\beta$ 이

$$\text{므로 } \beta = 6 + \frac{3}{2} + \frac{5}{24} = \frac{185}{24}$$



$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{4\beta}{\alpha} = \frac{4 \times \frac{185}{24}}{\frac{1}{6}} = 185$$

답 185

### (필수 유형 ①)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \times 15 = 30$$

$$\text{따라서 } \overline{AC} = 30 \sin B = 30 \times \frac{7}{10} = 21$$

답 21

## 20

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

이때  $0 < A < \pi$ 이고  $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \frac{3}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 16이므로 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 16$$

따라서  $\overline{BC} = 2 \times 16 \times \sin A = 2 \times 16 \times \frac{3}{4} = 24$

답 ④

## 21

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} \times \sin(\angle ACD) = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = 2R \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\overline{AD}}{2 \sin(\angle ABD)} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

답 ②

## 22

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \text{이므로 } \sin(\angle CAB) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

점 D는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{BD} = \frac{1}{3} \times \overline{AB} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

직각삼각형 DBC에서  $\overline{CD} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{2}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = 2R \text{에서 } \frac{2\sqrt{2}}{\frac{4}{7}} = 2R, R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는  $\pi \times \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{32}{7}\pi$

따라서  $p=7, q=32$ 이므로

$$p+q=7+32=39$$

답 39

### (필수 유형 ①)

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 5^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 7^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

$\angle BAC = \angle CAD$ 이므로  $\overline{BC} = \overline{CD}$ , 즉  $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$ 이다.

이때  $70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$ 에서

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$$

$$\overline{BC} = \sqrt{10}$$

한편,  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

따라서  $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

답 ①

## 23

$\overline{BC} = a$  ( $a > 4\sqrt{2}$ )라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC)$$

이므로

$$(2\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2})^2 + a^2 - 2 \times 4\sqrt{2} \times a \times \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$$a^2 - 10a + 24 = 0, (a-6)(a-4) = 0$$

$$a > 4\sqrt{2} \text{이므로 } a = 6$$

한편,  $\angle BAD = \angle CAD$ 이므로  $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

즉,  $2 : 1 = \overline{BD} : \overline{CD}$ 이므로  $\overline{BD} = 2\overline{CD}$

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 3\overline{CD} = 6 \text{에서 } \overline{CD} = 2$$

이때  $\overline{BD} = 4$

직각삼각형 ABE에서  $\angle BAE = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ )라 하면

$$\overline{AE} = 4\sqrt{2} \cos \theta$$

직각삼각형 CAF에서

$$\angle CAF = \theta \text{이므로 } \overline{AF} = 2\sqrt{2} \cos \theta$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos(\angle ABD) \\ &= (4\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \times 4\sqrt{2} \times 4 \times \frac{5\sqrt{2}}{8} = 8 \end{aligned}$$

$$\overline{AD} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 ABD에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AD}} = \frac{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AF} \times \overline{AE} &= 2\sqrt{2} \cos \theta \times 4\sqrt{2} \cos \theta = 16 \cos^2 \theta \\ &= 16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 9\end{aligned}$$

답 9

## 24

삼각형 ABC에서  $\angle CAB = \theta$  ( $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ )라 하면

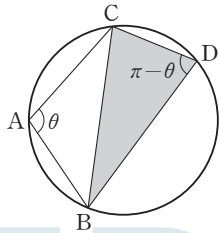
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{10}}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{\sin \theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{10}}{5}, \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{이때 } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서  $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{1}{4}$$



삼각형 BDC에서

$\angle BDC = \pi - \theta$ 이므로

$$\cos(\angle BDC) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{1}{4}$$

$\overline{CD} = k$  ( $k > 0$ )이라 하면

$$\overline{BD} = 2k$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle BDC)$$

$$(2\sqrt{6})^2 = (2k)^2 + k^2 - 2 \times 2k \times k \times \frac{1}{4}$$

$$24 = 4k^2, k^2 = 6$$

$k > 0$ 이므로

$$k = \sqrt{6}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{6}, \overline{BD} = 2\sqrt{6}$$

$$\sin(\angle BDC) = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{이므로}$$

삼각형 BDC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle BDC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{따라서 } 4S^2 = 4 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 = 135$$

답 135

## 03

## 수열

정답

본문 28~39쪽

(필수 유형 ①)	①	01 ①	02 ②	03 42
(필수 유형 ②)	7	04 ③	05 ①	06 ⑤
		07 8		
(필수 유형 ③)	36	08 ④	09 ①	10 ④
(필수 유형 ④)	64	11 ①	12 ③	13 ④
(필수 유형 ⑤)	③	14 ③	15 ②	16 ③
(필수 유형 ⑥)	9	17 ④	18 ③	19 ②
(필수 유형 ⑦)	22	20 ⑤	21 ①	22 ④
(필수 유형 ⑧)	91	23 ③	24 29	25 ⑤
		26 ②		
(필수 유형 ⑨)	④	27 ②	28 ④	29 ①
(필수 유형 ⑩)	④	30 16	31 ④	32 99
(필수 유형 ⑪)	⑤	33 ⑤	34 ④	35 ③
(필수 유형 ⑫)	④	36 ②		

### (필수 유형 ①)

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_{10} - a_7 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 6d) = 3d = 6 \text{이므로 } d = 2$$

따라서  $a_4 = a_1 + 3d = 4 + 6 = 10$

답 ①

### 01

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ 라 하면

$$a_2 = a + d = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_7 - a_5 = (a + 6d) - (a + 4d) = 2d \text{에서}$$

$$2d = 3 - d \text{이므로 } d = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면  $a = 2$

따라서  $a_4 = a + 3d = 2 + 3 = 5$

답 ①

### 02

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항이 45이고 공차가  $-7$ 이므로 일반항  $a_n$ 은

$a_n = -7n + 52$ 이다. 또한 수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항과 공차가 같고 모든 항이 자연수이므로 수열  $\{b_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면  $d$ 는 자연수이다.

$$b_n = b_1 + (n-1)d \text{에서 } b_1 = d \text{이므로 } b_n = dn \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } c_n = (d-7)n + 52$$

$c_n > 100$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 최솟값이 10이므로

$$c_9 \leq 100, c_{10} > 100 \text{이다.}$$

$$c_9 = 9(d-7) + 52 = 9d - 11 \text{에서 } 9d - 11 \leq 100, d \leq \frac{37}{9}$$

$$c_{10} = 10(d-7) + 52 = 10d - 18 \text{에서 } 10d - 18 > 100, d > \frac{59}{10}$$

즉,  $\frac{59}{5} < d \leq \frac{37}{3}$  이고  $d$ 는 자연수이므로  $d=12$

따라서  $b_1=12$

답 ②

### 03

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수를 나열하면 1, 4, 7, 10, 13, ...이므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉,  $a_n=3n-2$

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면

2, 6, 10, 14, 18, ...이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉,  $b_n=4n-2$

$a_k=b_m$ 에서  $3k-2=4m-2, 3k=4m$

즉,  $k$ 는 4의 배수이고  $m$ 은 3의 배수이므로

$k=4k', m=3m'$  (단,  $k' \leq 5, m' \leq 6$ 인 자연수)

이를 대입하면  $3 \times 4k' = 4 \times 3m'$ 에서  $k'=m'$ 이다.

$k$ 와  $m$ 은 20 이하의 자연수이므로  $k+m$ 의 최솟값은  $k'=m'=1$ , 즉  $k=4, m=3$ 일 때 7이고,  $k+m$ 의 최댓값은  $k'=m'=5$ , 즉  $k=20, m=15$ 일 때 35이다.

따라서  $k+m$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$35+7=42$

답 42

### 필수 유형 ②

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=4$ 이고 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4, 2a_1+4k=2$

$a_1=1-2k \dots\dots ㉠$

한편,  $S_k = \frac{k\{2a_1+2(k-1)\}}{2} = -16$ 이고 ㉠을 대입하면

$\frac{k\{2(1-2k)+2(k-1)\}}{2} = -16$

$-k^2 = -16$ 에서  $k$ 는 자연수이므로  $k=4$

이것을 ㉠에 대입하면  $a_1 = -7$

따라서  $a_{2k} = a_8 = a_1 + 7d = -7 + 7 \times 2 = 7$

답 7

### 04

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은

$a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$ 이므로

$a_{2n-1} = 2(2n-1) + 1 = 4n - 1, a_{2n} = 2 \times 2n + 1 = 4n + 1$ 이고

$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = (4n - 1) + (4n + 1) = 8n$

따라서 수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항이  $b_1=8$ 이고 공차가 8인 등차수열이다.

따라서  $S_5 = \frac{5 \times (2 \times 8 + 4 \times 8)}{2} = 120$

답 ③

### 05

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면  $a_n = a + (n-1)d$

또한 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합이  $S_n$ 이므로

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

즉,  $2S_n + a_{n+1} = 3n^2 - 28n - 14 \dots\dots ㉠$

한편,  $S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2 \times \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} + (a + dn) = 3n^2 - 28n - 14$

$n\{2a + (n-1)d\} + (a + dn) = dn^2 + 2an + a$

$dn^2 + 2an + a = 3n^2 - 28n - 14 \dots\dots ㉡$

이 식은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 성립하므로 ㉡은  $n$ 에 대한 항등식이다.

즉,  $d=3, a=-14$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = 3n - 17$ 이므로

$a_6 = 3 \times 6 - 17 = 1$

답 ①

### 다른 풀이

$S_{n+1} + S_n = 3n^2 - 28n - 14$ 에

$n=1$ 을 대입하면  $(a_2 + a_1) + a_1 = -39 \dots\dots ㉠$

$n=2$ 를 대입하면  $(a_3 + a_2 + a_1) + (a_2 + a_1) = -58 \dots\dots ㉡$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$a_2 = a_1 + d$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$3a_1 + d = -39 \dots\dots ㉢$

$a_3 = a_1 + 2d, a_2 = a_1 + d$ 를 ㉡에 대입하면

$5a_1 + 4d = -58 \dots\dots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하면 풀면  $a_1 = -14, d=3$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = 3n - 17$ 이므로

$a_6 = 3 \times 6 - 17 = 1$

### 06

$b_n = \frac{(a_{n+1})^2 - (a_n)^2}{3} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$  ( $a > 0$ ), 공차를  $d$  ( $d > 0$ )이라 하면

$a_n = a + (n-1)d$ 에서  $a_{n+1} - a_n = d$ 이고  $a_{n+1} + a_n = 2a + (2n-1)d$

$b_n = \frac{d}{3}(2dn + 2a - d)$

즉,  $b_1 = \frac{d}{3}(2a + d) = 4 \dots\dots ㉠$

한편,  $b_3 = \frac{d}{3}(2a + 5d)$ 이고  $S_6 = \frac{6(2a + 5d)}{2} = 3(2a + 5d)$ 이므로

$b_3 = \frac{1}{3}S_6$ 에서  $\frac{d}{3}(2a + 5d) = 2a + 5d$

$a > 0, d > 0$ 에서  $2a + 5d \neq 0$ 이므로  $\frac{d}{3} = 1$

$d = 3 \dots\dots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면  $2a + 3 = 4$ 이므로  $a = \frac{1}{2}$

따라서  $a_n = 3n - \frac{5}{2}$ 이므로  $a_4 = 3 \times 4 - \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$

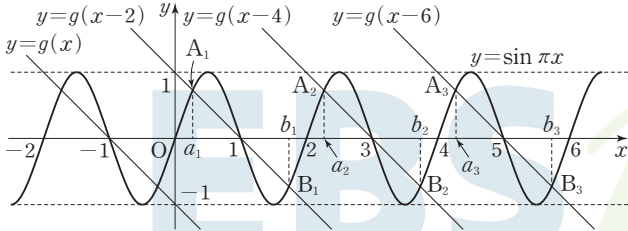
답 ⑤

### 07

직선  $y = -x$ 가 원점에 대하여 대칭인 직선이므로 직선  $y = g(x)$ 는 점  $(-1, 0)$ 에 대하여 대칭인 직선이다.

따라서 직선  $y=g(x-2n)$ 은 점  $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이고 기울기가  $-1$ 인 직선이다.

함수  $y=\sin \pi x$ 의 그래프는 함수  $y=\sin \pi x$ 의 그래프가  $x$ 축과 만나는 모든 점에 대하여 대칭이고 점  $(2n-1, 0)$ 은 함수  $y=\sin \pi x$ 의 그래프 위의 점이므로 함수  $y=\sin \pi x$ 의 그래프는 점  $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 그림과 같이 곡선  $y=\sin \pi x$ 와 직선  $y=g(x-2n)$ 이 모두 점  $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점  $A_n, B_n$ 도 점  $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

즉,  $\frac{a_n+b_n}{2}=2n-1$ 에서  $a_n+b_n=4n-2$

따라서  $c_n=4n-2$

그러므로 수열  $\{c_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

$S_n = \frac{n\{4+4(n-1)\}}{2} = 2n^2$ 이므로  $2n^2 > 100$ 에서  $n^2 > 50$

한편,  $7 < \sqrt{50} < 8$ 이므로  $n^2 > 50$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 최솟값은 8이다.

답 8

**(필수 유형 4)**

주어진 등비수열의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

모든 항이 양수이므로  $a > 0, r > 0$

$a_n = ar^{n-1}$ 에서

$\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = \frac{ar^{15}}{ar^{13}} + \frac{ar^7}{ar^6} = r^2 + r = 12$

$r^2 + r - 12 = 0, (r+4)(r-3) = 0$

$r > 0$ 이므로  $r = 3$

따라서  $\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3} = \frac{ar^2}{a} + \frac{ar^5}{ar^2} = r^2 + r^3 = 3^2 + 3^3 = 36$

답 36

**08**

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면  $\frac{a_4}{a_3} = r = \sqrt{6}$ 이다.

따라서  $a_5 = \frac{1}{9} \times (\sqrt{6})^4 = \frac{1}{9} \times 36 = 4$

**09**

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$a_3 - a_1 = 4$ 에서

$a_1(r^2 - 1) = 4 \dots\dots \textcircled{1}$

$a_7 - a_5 = 36$ 에서

$a_5(r^2 - 1) = 36 \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$\frac{a_5}{a_1} = 9, a_5 = a_1 \times 9$

한편,  $a_5 = a_1 r^4$ 이므로  $r^4 = 9$

$r^2 = 3$ 이므로 이것을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면  $a_1 = 2$

따라서  $a_9 = a_1 \times r^8 = a_1 \times (r^2)^4 = 2 \times 3^4 = 162$

답 ①

**10**

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

$a_1 + a_2 = a_1(1+r), a_4 + a_5 = a_4(1+r)$ 이므로

$\frac{a_1 + a_2}{a_4 + a_5} = \frac{1}{2}$ 에서  $\frac{a_1}{a_4} = \frac{1}{2}$

즉,  $a_4 = 2a_1$ 이므로  $r^3 = 2$

$a_{10} = a_1 \times r^9 = a_1 \times (r^3)^3 = 8a_1$ 이므로

$8a_1 \leq 40, a_1 \leq 5$

따라서 자연수  $a_1$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 15이다.

답 ④

**(필수 유형 4)**

주어진 등비수열의 공비를  $r$ 라 하면

$r = 1$ 일 때,  $a_n = 1$ 이므로  $\frac{S_6}{S_3} = \frac{6}{3} = 2, 2a_4 - 7 = -5$ 가 되어 모순이다.

즉,  $r \neq 1$

$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{r^6-1}{r-1}}{\frac{r^3-1}{r-1}} = \frac{r^6-1}{r^3-1} = \frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1} = r^3+1$ 이고

$\frac{S_6}{S_3} = 2a_4 - 7$ 에서  $2a_4 - 7 = 2r^3 - 7$ 이므로

$r^3 + 1 = 2r^3 - 7$

$r^3 = 8, r = 2$

따라서  $a_7 = a_1 r^6 = 1 \times 2^6 = 64$

답 64

**11**

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

$r = 1$ 이면  $a_n = 3$ 이므로  $S_4 = 3 \times 4 = 12, S_8 = 3 \times 8 = 24$ 가 되어

$S_8 = 10S_4$ 를 만족시키지 않는다.

$r \neq 1$ 이므로

$S_8 = \frac{3(1-r^8)}{1-r}, S_4 = \frac{3(1-r^4)}{1-r}$

$S_8 = 10S_4$ 에서

$\frac{3(1-r^8)}{1-r} = 10 \times \frac{3(1-r^4)}{1-r}$

$\frac{3(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = 10 \times \frac{3(1-r^4)}{1-r}$

$1+r^4 = 10, r^4 = 9$

$r > 0$ 이므로  $r = \sqrt{3}$

따라서  $a_3 = a_1 r^2 = 3 \times (\sqrt{3})^2 = 9$

답 ①

다른 풀이

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

$$S_8 = 10S_4 \text{에서 } S_8 - S_4 = 9S_4 \text{이므로}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 9(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$a_1r^4 + a_1r^5 + a_1r^6 + a_1r^7 = 9(a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3)$$

$$r^4(a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3) = 9(a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3)$$

$$r^4 = 9$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = \sqrt[5]{3}$$

$$\text{따라서 } a_3 = a_1r^2 = 3 \times (\sqrt[5]{3})^2 = 9$$

## 12

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$  ( $a > 0$ ), 공비를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

$$\frac{a_1a_4}{a_3} = \frac{a \times ar^3}{ar^2} = ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_6 = ar + ar^5 = ar(1 + r^4) = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$1 + r^4 = 5, \quad r^4 = 4$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } a = \sqrt{2}$$

$$\text{즉, } a_n = (\sqrt{2})^n \text{이므로}$$

$$b_n = \frac{a_{2n}}{2a_{n+1}} = \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2 \times (\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{n-3}$$

따라서 수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항이  $\frac{1}{2}$ 이고 공비가  $\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{\frac{1}{2} \{(\sqrt{2})^8 - 1\}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{15}{2}(\sqrt{2} + 1)$$

답 ③

## 13

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비  $\sqrt[5]{3}$ 을  $r$ 라 하자.

수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$S_n = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_n + a_{n+1})$$

$$T_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

에서

$$T_5 - S_5$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10}) - \{(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + (a_4 + a_5) + (a_5 + a_6)\}$$

$$= (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$= (a_2 \times r^5 + a_3 \times r^5 + a_4 \times r^5 + a_5 \times r^5) - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$= (r^5 - 1)(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$r^5 = (\sqrt[5]{3})^5 = 3 \text{이므로}$$

$$T_5 - S_5 = 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 8$$

$$\text{따라서 } a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$$

답 ④

다른 풀이

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비  $\sqrt[5]{3}$ 을  $r$ 라 하면

수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$b_n = a_n + a_{n+1} = ar^{n-1} + ar^n = a(1+r)r^{n-1}$$

$$c_n = a_{2n-1} + a_{2n} = ar^{2n-2} + ar^{2n-1} = a(1+r)r^{2n-2}$$

$$T_5 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = \frac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}$$

$$S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$$

$$T_5 - S_5 = \frac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2} - \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r} \left( \frac{1+r^5}{1+r} - 1 \right)$$

$$= \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r} \times \frac{1+r^5-1-r}{1+r}$$

$$= \frac{a(1-r^5)(r^5-r)}{1-r}$$

$$= ar(r^5-1)(r+1)(r^2+1)$$

$$= (r^5-1)(ar+ar^2+ar^3+ar^4)$$

$$= (r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5) = 8$$

$$r^5 = (\sqrt[5]{3})^5 = 3 \text{이므로}$$

$$2(a_2+a_3+a_4+a_5) = 8 \text{에서}$$

$$a_2+a_3+a_4+a_5 = 4$$

필수 유형 ⑥

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0 \text{에서 } (x-4)(x-n+4) = 0$$

$$x = 4 \text{ 또는 } x = n - 4$$

한편, 세 수 1,  $\alpha$ ,  $\beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\alpha = \beta + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i)  $\alpha = 4$ ,  $\beta = n - 4$ 일 때

$$a < \beta \text{이므로 } 4 < n - 4 \text{에서 } n > 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 8 = (n - 4) + 1 \text{이므로 } n = 11$$

(ii)  $\alpha = n - 4$ ,  $\beta = 4$ 일 때

$$a < \beta \text{이므로 } n - 4 < 4 \text{에서 } n < 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2(n - 4) = 4 + 1 \text{이므로 } n = \frac{13}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수  $n$ 의 값은 11이다.

답 ③

## 14

수열  $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로

$$a_2a_4 = (a_3)^2$$

$$a_2a_4 = 256 \text{에서 } (a_3)^2 = 256$$

$$a_3 > 0 \text{이므로 } a_3 = 16$$

$$a_1 + a_3 = 24 \text{에서 } a_1 + 16 = 24$$

$$a_1 = 8$$

$$a_1 \times a_5 = (a_3)^2 \text{에서 } 8 \times a_5 = 16^2$$

$$\text{따라서 } a_5 = 32$$

답 ③

## 15

세 수  $a$ ,  $a+b$ ,  $ab$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(a+b) = a+ab$$

$$a+2b-ab=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수  $a^2, ab, 2b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(ab)^2 = a^2 \times 2b$$

$$a^2b(b-2) = 0$$

$$a \neq 0, b \neq 0 \text{이므로 } b=2$$

$$b=2 \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$a+2 \times 2 - a \times 2 = 0$$

$$a=4$$

$$\text{따라서 } ab=4 \times 2=8$$

## 16

$P(n, \sqrt{n}), Q(n, \sqrt{2n}), R(n, \sqrt{mn})$ 이므로

$$\overline{PA} = \sqrt{n}, \overline{QA} = \sqrt{2n}, \overline{RA} = \sqrt{mn}$$

$\overline{PA}, \overline{QA}, \overline{RA}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\overline{QA}^2 = \overline{PA} \times \overline{RA}$$

즉,  $(\sqrt{2n})^2 = \sqrt{n} \times \sqrt{mn}$ 에서  $n > 0$ 이므로  $2n = n\sqrt{m}$ 이고,

$$\sqrt{m}=2, m=4$$

또  $\overline{OP}^2 = n^2 + n, \overline{OQ}^2 + 4 = n^2 + 2n + 4, \overline{OR}^2 + 5 = n^2 + 4n + 5$

$\overline{OP}^2, \overline{OQ}^2 + 4, \overline{OR}^2 + 5$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(\overline{OQ}^2 + 4) = \overline{OP}^2 + (\overline{OR}^2 + 5)$$

즉,  $2(n^2 + 2n + 4) = (n^2 + n) + (n^2 + 4n + 5)$ 에서  $n=3$

$$\text{따라서 } m+n=4+3=7$$

### (필수 유형 ⑥)

모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1} \text{이 성립하고}$$

$S_{n+3} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ 이므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 13 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이 성립한다.

㉠에  $n=1$ 을 대입하면  $a_2 + a_3 + a_4 = 13$ 이므로

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$$a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 = 13$$

$$a_1r(1+r+r^2) = 13 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

또 ㉠에  $n=2$ 를 대입하면  $a_3 + a_4 + a_5 = 13 \times 3 = 39$ 이므로

$$a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 = 39$$

$$a_1r^2(1+r+r^2) = 39 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡  $\div$  ㉢을 하면

$$\frac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)} = \frac{39}{13} \text{에서 } r=3$$

$r=3$ 을 ㉡에 대입하면

$$a_1 \times 3 \times (1+3+9) = 13 \text{에서 } a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_4 = a_1r^3 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$$

## 17

$$a_4 = S_4 - S_3 = (2 \times 4^2 + 4k) - (2 \times 3^2 + 3k) = 14 + k$$

이때  $a_4 = 20$ 이므로

$$14 + k = 20, k = 6$$

$$\text{따라서 } a_1 = S_1 = 2 + 6 = 8$$

답 ④

## 18

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$  ( $a > 0$ ), 공비를  $r$ 라 하자.

$$S_{10} - S_8 = a_{10} + a_9 = ar^9 + ar^8 = ar^8(r+1)$$

$$S_7 - S_5 = a_7 + a_6 = ar^6 + ar^5 = ar^5(r+1)$$

$$\frac{S_{10} - S_8}{S_7 - S_5} = \frac{ar^8(r+1)}{ar^5(r+1)} = r^3 \text{이므로}$$

$$\frac{S_{10} - S_8}{S_7 - S_5} = 4 \text{에서 } r^3 = 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또  $S_2 - S_1 = a_2 = ar$ 이므로

$$(S_2 - S_1)^3 = 108 \text{에서 } (ar)^3 = 108$$

$$\text{즉, } a^3r^3 = 108 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^3 \times 4 = 108, a^3 = 27$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 3$$

$$\text{따라서 } a_2 \times a_6 = (a_1)^2 = (ar^3)^2 = a^2 \times (r^3)^2 = 3^2 \times 4^2 = 144$$

답 ③

## 19

조건 (가)에 의하여

$$S_{2n-1} = S_1 + (n-1) \times 3$$

조건 (나)에 의하여

$$S_{2n} = S_2 + (n-1) \times 4$$

$$a_{11} = S_{11} - S_{10} = (S_1 + 15) - (S_2 + 16) = S_1 - S_2 - 1$$

$$a_{12} = S_{12} - S_{11} = (S_2 + 20) - (S_1 + 15) = S_2 - S_1 + 5$$

이때  $a_{11} = a_{12}$ 이므로

$$S_1 - S_2 - 1 = S_2 - S_1 + 5$$

$$S_2 - S_1 = -3$$

따라서

$$a_7 = S_7 - S_6 = (S_1 + 9) - (S_2 + 8)$$

$$= 1 - (S_2 - S_1)$$

$$= 1 - (-3) = 4$$

답 ②

### (필수 유형 ⑦)

$$\sum_{k=1}^5 (3a_k + 5) = 55 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k + 25 = 55$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = 32 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 32$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 b_k = 32 - \sum_{k=1}^5 a_k = 32 - 10 = 22$$

답 22

답 ②

답 ③

답 9



20

$$\sum_{k=1}^{15} (2a_k - b_k) = 17 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{15} (2a_k - b_k) = 2 \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{15} b_k = 2 \times 12 - \sum_{k=1}^{15} b_k = 24 - \sum_{k=1}^{15} b_k$$

이므로  $24 - \sum_{k=1}^{15} b_k = 17$

$$\sum_{k=1}^{15} b_k = 24 - 17 = 7$$

따라서  $\sum_{k=1}^{15} (b_k + 1) = \sum_{k=1}^{15} b_k + \sum_{k=1}^{15} 1 = 7 + 15 = 22$

답 ⑤

21

$$\sum_{k=1}^{10} \{ka_{k+1} - (k+1)a_k\} = 70 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \{ka_{k+1} - (k+1)a_k\}$$

$$= (a_2 - 2a_1) + (2a_3 - 3a_2) + (3a_4 - 4a_3) + \dots + (10a_{11} - 11a_{10})$$

$$= 10a_{11} - 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10})$$

$$= 10a_{11} - 2 \sum_{k=1}^{10} a_k$$

이고,  $a_{11} = 15$ 이므로

$$10 \times 15 - 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 70, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = 40$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k(a_k + 6) - \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)^2 = \sum_{k=1}^{10} \{a_k(a_k + 6) - (a_k + 2)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 4) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 4$$

$$= 2 \times 40 - 4 \times 10 = 40$$

답 ①

22

$$a_n + b_n = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

이므로

$$(a_n)^2 - (b_n)^2 = (a_n + b_n)(a_n - b_n) = 2(a_n - b_n)$$

$$\sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 - (b_k)^2\} = 310 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 - (b_k)^2\} = \sum_{k=1}^{10} 2(a_k - b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k)$$

이므로  $2 \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 310$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 155 \quad \dots \textcircled{2}$$

①에서  $b_k = -a_k + 2 \quad \dots \textcircled{3}$

②을 ③에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} \{a_k - (-a_k + 2)\} = \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 2) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - 20 = 155$$

이므로  $\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{175}{2}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 4b_k) = \sum_{k=1}^{10} \{2a_k - 4(-a_k + 2)\} = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 8$$

$$= 6 \times \frac{175}{2} - 80 = 445$$

답 ④

(필수 유형 ⑧)

$a_n = 2n^2 - 3n + 1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^7 (a_n - n^2 + n) = \sum_{n=1}^7 (n^2 - 2n + 1) = \sum_{n=1}^7 (n-1)^2 = \sum_{k=1}^6 k^2$$

$$= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$$

답 91

23

$$\sum_{k=1}^{10} k(k^2 + 16) - \sum_{k=1}^{10} k^2(k+2) = \sum_{k=1}^{10} \{k(k^2 + 16) - k^2(k+2)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (16k - 2k^2)$$

$$= 16 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 880 - 770 = 110$$

답 ③

24

$$\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{3}k + a\right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} a = \frac{1}{3} \times \frac{20 \times 21}{2} + 20a = 70 + 20a$$

$$\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 650$$

$$\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{3}k + a\right) = \sum_{k=1}^{12} k^2 \text{에서 } 70 + 20a = 650$$

따라서  $a = 29$

답 29

25

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n = \frac{n^2 - 12n}{n} = n - 12, \quad b_n = -\frac{8}{n}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{a_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{15} \frac{k-12}{-\frac{8}{k}} = \sum_{k=1}^{15} \left(-\frac{k^2}{8} + \frac{3k}{2}\right) = -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{15} k^2 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{15} k$$

$$= -\frac{1}{8} \times \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + \frac{3}{2} \times \frac{15 \times 16}{2}$$

$$= -155 + 180 = 25$$

답 ⑤

26

부등식  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2n} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-8}$ 에서 밑  $\frac{1}{2}$ 이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$x - 2n \leq -x - 8$$

$$x \leq n - 4$$

(i)  $n \leq 4$ 일 때,  
부등식  $x \leq n - 4$ 를 만족시키는 자연수  $x$ 는 존재하지 않으므로  
 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

(ii)  $n \geq 5$ 일 때,  
부등식  $x \leq n - 4$ 를 만족시키는 자연수  $x$ 의 개수는  $n - 4$ 이므로  
 $a_n = n - 4 \quad (n \geq 5)$

$$(i), (ii) \text{에서 } a_n = \begin{cases} 0 & (n \leq 4) \\ n-4 & (n \geq 5) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=5}^{20} (k-4) = \sum_{k=1}^{16} k = \frac{16 \times 17}{2} = 136$$

답 ②

**필수 유형 ①**

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으므로  $a_1 = a$ 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times a = an$$

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} = \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} \{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}\} \\ &= \frac{1}{a} \{(\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) + (\sqrt{4a} - \sqrt{3a}) + \dots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a})\} \\ &= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a}) = \frac{3\sqrt{a}}{a} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{3}{\sqrt{a}} = 2$$

$$a = \frac{9}{4}$$

$$\text{따라서 } a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

답 ④

**27**

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면  $a_4 = a_2 + 8$ 에서

$$a_4 - a_2 = 8, 2d = 8$$

$$\text{즉, } d = 4 \text{이므로 } a_{n+1} - a_n = 4$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{15} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left( \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{a_{15}} - \frac{1}{a_{16}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{16}} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{a_{16}} \right) \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\text{한편, } a_{16} = a_1 + 15d = 1 + 15 \times 4 = 61 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{a_{16}} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{61} \right) = \frac{15}{61}$$

답 ②

**다른 풀이**

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면  $a_4 = a_2 + 8$ 에서

$$a_4 - a_2 = 8, 2d = 8$$

$$\text{즉, } d = 4$$

$$\text{이때 } a_1 = 1 \text{이므로 } a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left( \frac{1}{57} - \frac{1}{61} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{61} \right) = \frac{15}{61} \end{aligned}$$

**28**

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비가 2이므로

$$a_{n+1} = 2a_n, S_n = \frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1} = a_1(2^n - 1)$$

$$\text{이때 } a_n = \frac{1}{2} a_{n+1} = \frac{1}{2} (S_{n+1} - S_n) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{S_{k+1} S_k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_{k+1} S_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left( \frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left( \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \left( \frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(2^{11} - 1)} \right\} \\ &= \frac{2^{10} - 1}{a_1(2^{11} - 1)} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } p = \frac{2^{10} - 1}{a_1(2^{11} - 1)} \text{에서 } pa_1 = \frac{2^{10} - 1}{2^{11} - 1} \text{이므로}$$

$$1 - pa_1 = \frac{2^{10}}{2^{11} - 1}, (2^{11} - 1)(1 - pa_1) = 2^{10}$$

따라서

$$\begin{aligned} \log_2(2^{11} - 1) + \log_2(1 - pa_1) &= \log_2(2^{11} - 1)(1 - pa_1) \\ &= \log_2 2^{10} = 10 \end{aligned}$$

답 ④

**29**

점 A(0, -1)에서 함수  $y = \frac{1}{n}x^2$ 의 그래프에 그은 접선의 기울기를

$m$  ( $m > 0$ )이라 하면 접선의 방정식은  $y = mx - 1$ 이다.

$$y = \frac{1}{n}x^2, y = mx - 1 \text{을 연립하면}$$

$$\frac{1}{n}x^2 = mx - 1$$

$$\frac{1}{n}x^2 - mx + 1 = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

이차방정식 ㉠의 판별식을  $D$ 라 하면  $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = m^2 - \frac{4}{n} = 0, m^2 = \frac{4}{n}$$

$$m > 0 \text{이므로 } m = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\text{따라서 접선의 방정식은 } y = \frac{2}{\sqrt{n}}x - 1 \text{이고}$$

접점의  $x$ 좌표  $x_n$ 은 ㉠에서

$$\frac{1}{n}x_n^2 - \frac{2}{\sqrt{n}}x_n + 1 = 0$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{n}}x_n - 1 \right)^2 = 0 \text{이므로 } x_n = \sqrt{n}$$

이때  $y_n = 1$ 이므로 접점은  $P(\sqrt{n}, 1)$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15} \frac{y_n}{x_n + x_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{15} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{16} - \sqrt{15})$$

$$= -1 + \sqrt{16} = -1 + 4 = 3$$

답 ①

**(필수 유형 ⑩)**

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n \text{에서 } a_{n+1} = -a_n + (-1)^{n+1} \times n$$

이때  $a_1 = 12$ 이므로

$$a_2 = -a_1 + 1 = -11, a_3 = -a_2 - 2 = 9$$

$$a_4 = -a_3 + 3 = -6, a_5 = -a_4 - 4 = 2$$

$$a_6 = -a_5 + 5 = 3, a_7 = -a_6 - 6 = -9$$

$$a_8 = -a_7 + 7 = 16$$

따라서  $a_k > a_1$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 최솟값은 8이다.

답 ④

**30**

조건 (나)에서  $a_n = -\frac{1}{2}a_{n+1}$ , 즉  $a_{n+1} = -2a_n$ 이므로

수열  $\{a_n\}$ 은 공비가  $-2$ 인 등비수열이다.

조건 (가)에서  $2 \times (-2a_1) + 4 \times 4a_1 = 3$ 이므로  $a_1 = \frac{1}{4}$

$$\text{따라서 } a_7 = \frac{1}{4} \times (-2)^6 = 16$$

답 16

**31**

$$a_1 = 2 \text{이므로 } \log_2 2 \times \log_2 a_2 = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 a_2 = 1, \text{ 즉 } a_2 = 2$$

$$a_2 = 2 \text{이므로 } \log_2 2 \times \log_2 a_3 = 3 \text{에서}$$

$$\log_2 a_3 = 3, \text{ 즉 } a_3 = 8$$

$$a_3 = 2^3 \text{이므로 } \log_2 2^3 \times \log_2 a_4 = 5 \text{에서}$$

$$\log_2 a_4 = \frac{5}{3}, \text{ 즉 } a_4 = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$a_4 = 2^{\frac{5}{3}} \text{이므로 } \log_2 2^{\frac{5}{3}} \times \log_2 a_5 = 7 \text{에서}$$

$$\log_2 a_5 = \frac{21}{5}, \text{ 즉 } a_5 = 2^{\frac{21}{5}}$$

$$\text{따라서 } \log_2 \frac{a_5}{a_2} = \log_2 \frac{2^{\frac{21}{5}}}{2} = \log_2 2^{\frac{16}{5}} = \frac{16}{5}$$

답 ④

**32**

조건 (가)에서  $a_{n+1} = a_n + 4$ , 즉  $a_{n+1} - a_n = 4$ 이므로 수열  $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

$$\text{조건 (나)에서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 \text{이므로 } \sum_{k=3}^{10} a_k = \frac{8(a_3 + a_{10})}{2} = 0$$

$$a_3 + a_{10} = (a_1 + 8) + (a_1 + 36) = 0 \text{에서 } a_1 = -22$$

$$a_2 = -22 + 4 = -18$$

$$\text{따라서 } \frac{a_1 \times a_2}{4} = \frac{(-22) \times (-18)}{4} = 99$$

답 99

**(필수 유형 ⑪)**

(i)  $a_6$ 이 3의 배수인 경우

$$a_7 = 40 \text{이므로 } \frac{a_6}{3} = a_7 \text{에서 } a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$$a_7 = 40 \text{이 3의 배수가 아니므로 } a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$$a_8 = 160 \text{이 3의 배수가 아니므로 } a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii)  $a_6 = 3k - 2$  ( $k$ 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k - 2) = 42 - 3k = 3(14 - k)$$

$a_5$ 는 자연수이므로  $3(14 - k) > 0$ 에서  $k < 14$

한편,  $a_5$ 는 3의 배수이므로  $a_6 = \frac{a_5}{3}$

$$\text{즉, } 3k - 2 = \frac{3(14 - k)}{3} \text{에서}$$

$$4k = 16, k = 4$$

$$\text{따라서 } a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10 \text{이므로 } a_8 = a_6 + a_7 = 10 + 40 = 50$$

$$a_8 = 50 \text{이 3의 배수가 아니므로 } a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 50 = 90$$

(iii)  $a_6 = 3k - 1$  ( $k$ 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k - 1) = 41 - 3k$$

$a_5$ 는 자연수이므로  $41 - 3k > 0$ 에서

$$k < \frac{41}{3} \dots\dots \text{㉠}$$

한편,  $a_5$ 는 3의 배수가 아니므로

$$a_4 + a_5 = a_6 \text{에서}$$

$$a_4 = a_6 - a_5 = (3k - 1) - (41 - 3k) = 6k - 42 = 3(2k - 14)$$

$a_4$ 가 자연수이므로  $3(2k - 14) > 0$ 에서

$$k > 7 \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$7 < k < \frac{41}{3}$$

한편,  $a_4$ 는 3의 배수이므로  $a_5 = \frac{a_4}{3}$

$$\text{즉, } 41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3} \text{에서}$$

$$5k = 55$$

$$k = 11$$

$$\text{따라서 } a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32 \text{이므로}$$

$$a_8 = a_6 + a_7 = 32 + 40 = 72$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(i), (ii), (iii)에서  $a_9$ 의 최댓값  $M = 200$ 이고 최솟값  $m = 24$ 이다.

$$\text{따라서 } M + m = 200 + 24 = 224$$

답 ⑤

**33**

$$a_1 = 1 \text{이므로 } a_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$a_2 = 2 \text{이므로 } a_3 = 2a_2 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_3 = 4 \text{이므로 } a_4 = 2a_3 = 2 \times 4 = 8$$

$$a_4 = 8 \text{이므로 } a_5 = 2a_4 = 2 \times 8 = 16$$

$$a_5=16 \text{이므로 } a_6=a_5-10=16-10=6$$

$$a_6=6 \text{이므로 } a_7=2a_6=2 \times 6=12$$

$$a_7=12 \text{이므로 } a_8=a_7-10=12-10=2$$

⋮

이므로

$$a_n=a_{n+6} \quad (n \geq 2)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = a_1 + 3 \sum_{k=2}^7 a_k + a_{20} = 1 + 3(2+4+8+16+6+12) + 2 = 147$$

답 ⑤

### 34

$$\sum_{k=1}^{24} a_k = \sum_{k=1}^{12} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{12} \left\{ \frac{1}{2}(2k-1) + 2 \right\} = \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} \frac{3}{2}$$

$$= \frac{12 \times 13}{2} + \frac{3}{2} \times 12 = 96 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=2}^{25} a_k = \sum_{k=1}^{12} (a_{2k} + a_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{12} \left( \frac{1}{2} \times 2k + 2 \right) = \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 2$$

$$= \frac{12 \times 13}{2} + 2 \times 12 = 102 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \sum_{k=2}^{25} a_k - \sum_{k=1}^{24} a_k = 102 - 96 = 6$$

$$\text{즉, } a_{25} - a_1 = 6$$

$$\text{따라서 } a_1 = a_{25} - 6 = 20 - 6 = 14$$

### 35

$$(i) a_2 \text{가 홀수일 때, } a_3 = 6a_2 = 4, a_2 = \frac{2}{3}$$

$a_2$ 가 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) a_2 \text{가 짝수일 때, } a_3 = \frac{a_2}{2} + 1 = 4, a_2 = 6$$

$$\textcircled{1} a_1 \text{이 홀수일 때, } a_2 = 6a_1 = 6, a_1 = 1$$

이때  $a_2 > a_1$ 을 만족시킨다.

$$\textcircled{2} a_1 \text{이 짝수일 때, } a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = 6, a_1 = 10$$

이때  $a_2 > a_1$ 을 만족시키지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } a_1 = 1, a_2 = 6$$

$$\text{한편, } a_3 \text{이 짝수이므로 } a_4 = \frac{a_3}{2} + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3$$

$$a_4 \text{가 홀수이므로 } a_5 = 6a_4 = 6 \times 3 = 18$$

$$a_5 \text{가 짝수이므로 } a_6 = \frac{a_5}{2} + 1 = \frac{18}{2} + 1 = 10$$

$$a_6 \text{이 짝수이므로 } a_7 = \frac{a_6}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

이때

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_7 = a_{12} = a_{17} = \dots = 6$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = a_{18} = \dots = 4$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = a_{19} = \dots = 3$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = a_{20} = \dots = 18$$

$$a_6 = a_{11} = a_{16} = a_{21} = \dots = 10$$

따라서  $a_k < a_2$ 를 만족시키는 20 이하의 자연수  $k$ 의 값은

1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19이므로 그 개수는 9이다.

답 ③

### 필수 유형 ⑩

(i)  $n=1$ 일 때, (좌변)=3, (우변)=3이므로 (\*)이 성립한다.

(ii)  $n=m$ 일 때, (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다.  $n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1}$$

$$= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} + \{2^{2(m+1)} - 1\} \times 2^{(m+1)m} + m \times 2^{-(m+1)}$$

$$= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} + (2^{2m+2} - 1) \times 2^{m(m+1)} + m \times 2^{-m-1}$$

$$= 2^{m(m+1)} \times 2^{2m+2} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m}$$

$$= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서  $n=m+1$ 일 때도 (\*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(m) = 2^{m(m+1)}, g(m) = 2^{2m+2} \text{이므로 } \frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$$

답 ④

### 36

(i)  $n=1$ 일 때,

(좌변)=4, (우변)=4이므로 (\*)이 성립한다.

(ii)  $n=k$ 일 때, (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1 \times 2^2}{2k^2-1} + \frac{5 \times 4^2}{2k^2-1} + \frac{9 \times 6^2}{2k^2-1} + \dots + \frac{(4k-3) \times (2k)^2}{2k^2-1}$$

$$= 2k(k+1)$$

이다. 이때

$$1 \times 2^2 + 5 \times 4^2 + 9 \times 6^2 + \dots + (4k-3) \times (2k)^2 + (4k+1) \times (2k+2)^2$$

$$= \boxed{2k(k+1)(2k^2-1)} + (4k+1) \times (2k+2)^2$$

$$= 2(k+1)(2k^2+8k^2+9k+2)$$

$$= 2(k+1) \times (k+2) \times \{2 \times \boxed{k^2+2k} + 1\}$$

$$= 2(k+1)(k+2) \{2(k+1)^2 - 1\}$$

이므로

$$\frac{1 \times 2^2}{2(k+1)^2-1} + \frac{5 \times 4^2}{2(k+1)^2-1} + \frac{9 \times 6^2}{2(k+1)^2-1} + \dots + \frac{(4k+1) \times \{2(k+1)\}^2}{2(k+1)^2-1}$$

$$= 2(k+1)(k+2)$$

이다. 따라서  $n=k+1$ 일 때도 (\*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\frac{1 \times 2^2}{2n^2-1} + \frac{5 \times 4^2}{2n^2-1} + \frac{9 \times 6^2}{2n^2-1} + \dots + \frac{(4n-3) \times (2n)^2}{2n^2-1} = 2n(n+1)$$

이다.

이상에서  $f(k) = 2k(k+1)(2k^2-1)$ ,  $g(k) = k^2+2k$ 이므로

$$\frac{f(5)}{g(3)} = \frac{10 \times 6 \times 49}{15} = 196$$

답 ②

# 04 함수의 극한과 연속

정답

본문 42~49쪽

(필수 유형 ①) ②	01 ②	02 ②	03 ④
(필수 유형 ②) ②	04 ④	05 ③	06 ④
	07 ②		
(필수 유형 ③) 30	08 ④	09 ①	10 4
	11 12		
(필수 유형 ④) ②	12 ④	13 14	14 ⑤
(필수 유형 ⑤) ②	15 ⑤	16 ②	17 ③
	18 ④	19 18	
(필수 유형 ⑥) ⑤	20 ④	21 ②	22 ③
	23 11	24 ③	
(필수 유형 ⑦) ④	25 ④	26 ④	27 38

## (필수 유형 ①)

주어진 그래프에서

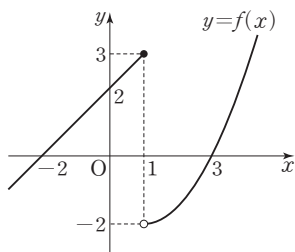
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 + 1 = -1$$

답 ②

## 01

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



위의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 + (-2) = 1$$

답 ②

다른 풀이

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left\{ \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 \right\} = -2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 + (-2) = 1$$

## 02

함수  $y=f(x)-2$ 의 그래프는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로  $-2$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \{f(x)-2\} = 0$$

함수  $y=f(x-1)$ 의 그래프는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $1$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1^+} \{f(x)-2\} + \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x-1) = 0 + (-2) = -2$$

답 ②

## 03

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$$

이므로  $0+1=f(k)+1$ 에서  $f(k)=0$

따라서 그림에서  $f(1)=0$ 이므로  $k=1$ 이다.

답 ④

## (필수 유형 ②)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+9x+8}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+8)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+8) \\ &= -1+8=7 \end{aligned}$$

답 ②

## 04

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x-x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2} \\ &= \frac{10 \times (1+1)}{2} = 10 \end{aligned}$$

답 ④

## 05

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x+3)}{3x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$$

답 ③

## 06

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x(x+k)}-x\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{x(x+k)}-x\} \{\sqrt{x(x+k)}+x\}}{\sqrt{x(x+k)}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx}{\sqrt{x^2+kx}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{x}}+1} = \frac{k}{1+1} = \frac{k}{2} = 2 \end{aligned}$$

에서  $k=4$

답 ④

### 07

$\frac{x^2-2}{6x} \leq f(x) \leq \frac{x^2+2}{6x}$ 에서  $x > 0$ 이므로

$$\frac{x^2-2}{3x^2} \leq \frac{2f(x)}{x} \leq \frac{x^2+2}{3x^2}$$

이때  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{3} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{3} = \frac{1}{3}$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)}{x} = \frac{1}{3}$

답 ②

### (필수 유형 ④)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{2x^2+1}{x+1} \times (x+1)f(x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) \\ &= \frac{2+1}{1+1} \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

에서  $a = \frac{3}{2}$

따라서  $20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$

답 30

### 다른 풀이

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2+1)f(x)}{(x+1)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x+1} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서  $20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$

### 08

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [ \{g(x)-2\} + 2 ]$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)-2\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\{g(x)-2\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)-2f(x)}{f(x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)g(x)-2f(x)\}}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} [ \{g(x)-2\} + 2 ] = \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)-2\} + \lim_{x \rightarrow 0} 2 \\ &= 3+2=5 \end{aligned}$$

답 ④

### 09

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{xf(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2-1}{f(x)} \times \frac{x^3-1}{x(x^2-1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2-1}{f(x)} \times \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2-1}{f(x)} \times \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \times \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

### 10

$f(x) = ax+b$  ( $a, b$ 는 상수,  $a \neq 0$ )이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax+b) = b=2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(ax+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+1)}{ax+2} \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (ax+2)} = \frac{3(1+1)}{a+2} = \frac{6}{a+2} = 2 \end{aligned}$$

에서  $a+2=3$ 이므로  $a=1$

따라서  $f(x) = x+2$ 이므로  $f(2) = 2+2=4$

답 4

### 11

$f(x)$ 가 다항함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} 2f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)g(x) + 2xf(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \{g(x) + 2x\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \{ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2x \} \\ &= 2 \{ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + 2 \} = 10 \end{aligned}$$

이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{3f(x) + 2g(x)\} = 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$$

답 12

### 다른 풀이

$f(x), g(x)$ 가 다항함수이므로  $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

조건 (가)에서  $f(1) + 2f(1) = 6$ 이므로  $f(1) = 2$

조건 (나)에서  $f(1)g(1) + 2f(1) = 10$ 이므로

$$2g(1) + 4 = 10, g(1) = 3$$

따라서  $\lim_{x \rightarrow 1} \{3f(x) + 2g(x)\} = 3f(1) + 2g(1) = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$

### (필수 유형 ④)

조건 (가)에서 다항함수  $f(x)$ 는

$f(x) = 2x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.



즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + ax + b) = b = 0$ 에서

$f(x) = 2x^2 + ax$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = a = 3$$

따라서  $f(x) = 2x^2 + 3x$ 이므로  $f(2) = 14$

답 ②

## 12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-4} = \frac{1}{16} \quad \dots \textcircled{1}$$

에서  $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a}-b) = 0$ 에서  $\sqrt{2+a}-b=0$ 이므로

$$b = \sqrt{2+a} \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x^2-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2+a}} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

에서  $\sqrt{2+a}=2$ 이므로  $a=2$

이것을 ②에 대입하면  $b=2$

따라서  $a+b=2+2=4$

답 ④

## 13

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{4}$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분모)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 1} \{(x+a)(x+b)\} = (1+a)(1+b) = 0$ 에서

$1+a=0$  또는  $1+b=0$ , 즉  $a=-1$  또는  $b=-1$

한편, 다항함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 점  $(1, 4)$ 를 지나므로  $f(1)=4$

$a=-1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{(x-1)(x+b)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+b} = \frac{f(1)}{1+b} = \frac{4}{1+b} = \frac{1}{4}$$
에서

$b=15$

같은 방법으로  $b=-1$ 일 때,  $a=15$

따라서  $a+b=-1+15=14$

답 14

### 참고

$b=-1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+a} = \frac{f(1)}{1+a} = \frac{4}{1+a} = \frac{1}{4}$$
에서

$a=15$

## 14

조건 (가)에서  $f(x) - ax^2$ 은 일차항의 계수가 4인 일차함수이므로

$f(x) - ax^2 = 4x + b$  ( $b$ 는 상수)라 하자.

조건 (나)에서  $x \rightarrow -2$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (ax^2 + 4x + b) = 4a - 8 + b = 0$$

에서  $b = -4a + 8 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + 4x - 4a + 8}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(ax - 2a + 4)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (ax - 2a + 4) = -4a + 4 = 4 \end{aligned}$$

에서  $a=0$

이것을 ①에 대입하면  $b=8$

따라서  $f(x) = 4x + 8$ 이므로

$f(1) = 4 + 8 = 12$

답 ⑤

### (필수 유형 ⑥)

두 점 A, B의 좌표를 각각  $A(a, a^2)$ ,  $B(b, b^2)$ 이라 하면  $x$ 에 대한 이차방정식  $x^2 - x - t = 0$ 의 두 근이  $a, b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=1, ab=-t$$

$$\overline{AH} = a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{1+4t}$$

한편, 점 C의 좌표는  $C(-a, a^2)$ 이므로

$$\overline{CH} = b - (-a) = a + b = 1$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+4t} - 1)(\sqrt{1+4t} + 1)}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4t}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sqrt{1+4t} + 1} \\ &= \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

## 15

사각형 PQCR가 평행사변형이므로

$$\overline{DR} = \overline{PR} - \overline{PD} = \overline{QC} - \overline{PD} = 1 - t$$

즉, 직각삼각형 ABR에서

$$\overline{AB} = 3, \overline{AR} = 3 + (1-t) = 4-t$$

이므로

$$\overline{BR} = \sqrt{3^2 + (4-t)^2} = \sqrt{t^2 - 8t + 25}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{PD}}{5 - \overline{BR}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{5 - \sqrt{t^2 - 8t + 25}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(5 + \sqrt{t^2 - 8t + 25})}{25 - (t^2 - 8t + 25)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(5 + \sqrt{t^2 - 8t + 25})}{t(8 - t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{5 + \sqrt{t^2 - 8t + 25}}{8 - t} \\ &= \frac{5 + 5}{8} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

## 16

두 점  $P(t, t^2)$ ,  $A(4, 0)$ 에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면

점 M의 좌표는  $\left(\frac{t+4}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$

직선 PA의 기울기는  $\frac{t^2}{t-4}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는  $-\frac{t-4}{t^2}$ 이다.

즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은

$$y - \frac{t^2}{2} = -\frac{t-4}{t^2} \left(x - \frac{t+4}{2}\right)$$

이 직선의 x절편이  $f(t)$ 이므로

$$0 - \frac{t^2}{2} = -\frac{t-4}{t^2} \left\{f(t) - \frac{t+4}{2}\right\}$$

$$f(t) - \frac{t+4}{2} = \frac{t^4}{2(t-4)}$$

$$f(t) = \frac{t^4}{2(t-4)} + \frac{t+4}{2} = \frac{t^4 + t^2 - 16}{2(t-4)}$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 + t^2 - 16}{2t^3(t-4)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{t^2} - \frac{16}{t^4}}{2\left(1 - \frac{4}{t}\right)} = \frac{1}{2}$$

답 ②

## 17

$4x^2 = t$  ( $x > 0$ )에서  $x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ 이므로 점 A의 좌표는  $\left(\frac{\sqrt{t}}{2}, t\right)$ 이다.

또  $x^2 = t$  ( $x > 0$ )에서  $x = \sqrt{t}$ 이므로 점 B의 좌표는  $(\sqrt{t}, t)$ 이다.

따라서  $f(t) = \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}$ ,  $g(t) = \sqrt{t + t^2}$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{g(t) - f(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t + t^2} - \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t + t^2) - \left(\frac{t}{4} + t^2\right)}{\sqrt{t + t^2} + \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}t}{\sqrt{t + t^2} + \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}}$$

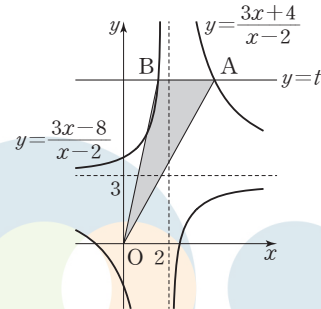
$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{t} + 1} + \sqrt{\frac{1}{4t} + 1}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1 + 1} = \frac{3}{8}$$

답 ③

## 18

두 함수  $y = \frac{3x+4}{x-2}$ ,  $y = \frac{3x-8}{x-2}$ 의 그래프는 그림과 같다.



$\frac{3x+4}{x-2} = t$ 에서  $x = \frac{2t+4}{t-3}$ 이므로 점 A의 좌표는  $\left(\frac{2t+4}{t-3}, t\right)$ 이다.

$\frac{3x-8}{x-2} = t$ 에서  $x = \frac{2t-8}{t-3}$ 이므로 점 B의 좌표는  $\left(\frac{2t-8}{t-3}, t\right)$ 이다.

즉,  $\overline{AB} = \frac{2t+4}{t-3} - \frac{2t-8}{t-3} = \frac{12}{t-3}$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이  $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{1}{2} \times t \times \frac{12}{t-3} = \frac{6t}{t-3}$$

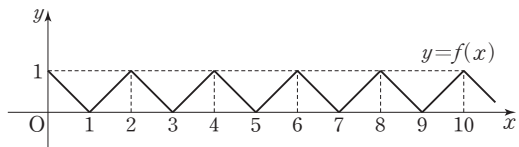
따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3^+} (t^2 - 4t + 3)f(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{6t(t^2 - 4t + 3)}{t-3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{6t(t-1)(t-3)}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3^+} 6t(t-1) \\ &= 6 \times 3 \times 2 = 36 \end{aligned}$$

답 ④

## 19

조건 (가), (나)에 의하여 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선  $y = \frac{x}{t}$ 는 원점을 지나고 기울기가  $\frac{1}{t}$ 인 직선이므로

$0 < t < 2$ 일 때,  $g(t) = 1$

자연수  $n$ 에 대하여  $t = 2n$ 일 때,  $g(t) = 2n$

$2n < t < 2n + 2$ 일 때,  $g(t) = 2n + 1$

즉,  $2 < t < 4$ 일 때  $g(t) = 3$ 이므로  $\lim_{t \rightarrow 4^-} g(t) = 3$

$8 < t < 10$ 일 때  $g(t) = 9$ 이므로  $\lim_{t \rightarrow 8^+} g(t) = 9$

따라서  $\lim_{t \rightarrow 4^-} g(t) + g(6) + \lim_{t \rightarrow 8^+} g(t) = 3 + 6 + 9 = 18$

답 18

### (필수 유형 6)

함수  $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x = -1$ 과  $x = 3$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수  $|f(x)|$ 가  $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1^+} |f(x)| = |f(-1)|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} |x+a| = \lim_{x \rightarrow -1^+} |x| = |-1|$$

$$|-1+a| = |-1| = |-1|$$

$$|-1+a| = 1$$

$$a > 0 \text{ 이므로}$$

$$a = 2$$

(ii) 함수  $|f(x)|$ 가  $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3^+} |f(x)| = |f(3)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 3^+} |bx-2| = |3b-2|$$

$$|3| = |3b-2| = |3b-2|$$

$$|3b-2| = 3$$

$$b > 0 \text{ 이므로}$$

$$b = \frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } a+b = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

답 ⑤

## 20

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x=2$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax+3) = 2a+3$$

$$2-a = 2a+3$$

$$3a = -1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} & (x < 2) \\ -\frac{1}{3}x + 3 & (x \geq 2) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) + (-1 + 3) = \frac{10}{3}$$

답 ④

## 21

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  이어야 한다.

따라서

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

답 ②

## 22

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x=0$ 과  $x=2$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수  $g(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

이때  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = b$  이므로  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = b$  이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+x+a}{x^2-x} = b \text{ 에서 } x \rightarrow 0^- \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이고 극한}$$

값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$  이어야 한다.

그러므로  $a=0$  이고

$$b = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1$$

(ii) 함수  $g(x)$ 가  $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\text{즉, } f(2) = 1$$

한편, 함수  $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차함수이고,  $x \geq 2$ 에서 최솟값이 0이므로

$$f(x) = (x-k)^2 \text{ (단, } k \text{ 는 2보다 큰 상수)}$$

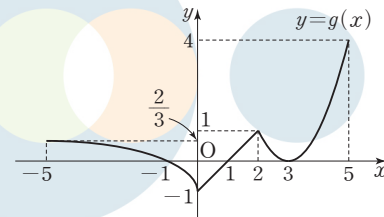
로 놓을 수 있다. 이때  $f(2) = 1$  이므로

$$(2-k)^2 = 1$$

$$k > 2 \text{ 이므로 } k = 3$$

$$\text{그러므로 } g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & (x < 0) \\ x-1 & (0 \leq x < 2) \\ (x-3)^2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고 닫힌구간  $[-5, 5]$ 에서 함수  $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간  $[-5, 5]$ 에서 함수  $g(x)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$$4 + (-1) = 3$$

답 ③

## 23

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $x=1, x=3$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{f(1)}, f(1) = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = g(3) \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{f(3)} = \frac{1}{6}, f(3) = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여

$$f(x) - 2x = a(x-1)(x-3) \text{ (단, } a \text{ 는 0보다 큰 상수)}$$

로 놓을 수 있다. 즉,

$$f(x) = ax^2 - 2(2a-1)x + 3a$$

$$= a \left( x - \frac{2a-1}{a} \right)^2 - \frac{a^2-4a+1}{a} \quad \dots \textcircled{3}$$

이고 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면  $1 \leq x \leq 3$ 에서  $f(x) \neq 0$ 이어야 한다.

(i)  $\frac{2a-1}{a} \leq 1$ 인 경우

$$2a-1 \leq a, a \leq 1$$

즉,  $0 < a \leq 1$ 인 경우  $f(1) = 2 > 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii)  $\frac{2a-1}{a} \geq 3$ 인 경우

$$2a-1 \geq 3a$$

$a \leq -1$ 이므로 조건을 만족시키는 양수  $a$ 는 존재하지 않는다.

(iii)  $1 < \frac{2a-1}{a} < 3$ , 즉  $a > 1$ 인 경우

⊖에서  $-\frac{a^2-4a+1}{a} > 0$ 이어야 하므로

$$a^2-4a+1 < 0, 2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$$

즉,  $1 < a < 2+\sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 양수  $a$ 의 값의 범위는

$$0 < a < 2+\sqrt{3} \text{이고, } k=f(0)=3a \text{이므로}$$

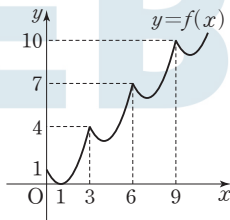
$$0 < k < 6+3\sqrt{3}$$

이때  $11 < 6+3\sqrt{3} < 12$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수  $k$ 의 최댓값은 11이다.

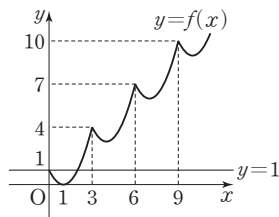
답 11

## 24

조건 (가), (나)에 의하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



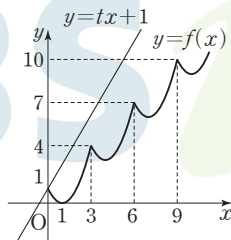
- ㄱ.  $t=0$ 일 때, 직선  $y=1$ 은 그림과 같이 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 두 점에서 만나므로  $g(0)=2$  (참)



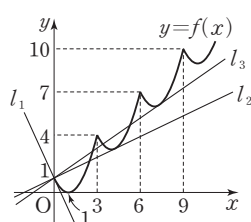
- ㄴ.  $t > 1$ 일 때, 직선  $y=tx+1$ 은 그림과 같이 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 점  $(0, 1)$ 에서만 만난다.

즉,  $t > 1$ 일 때,  $g(t)=1$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = 1 \text{ (거짓)}$$



- ㄷ. 그림과 같이 점  $(0, 1)$ 에서 곡선  $y=(x-1)^2$ 에 접하는 직선을  $l_1$ ,  $3 < x < 6$ 인 점에서 곡선  $y=f(x)$ 에 접하고 점  $(0, 1)$ 을 지나는 직선을  $l_2$ ,  $6 < x < 9$ 인 점에서 곡선  $y=f(x)$ 에 접하고 점  $(0, 1)$ 을 지나는 직선을  $l_3$ ,



...이라 하고, 자연수  $n$ 에 대하여 직선  $l_n$ 의 기울기를  $t_n$ 이라 하자.

$$(x-1)^2=tx+1 \text{에서 } x^2-(t+2)x=0 \text{이므로}$$

$t=-2$ 일 때 직선  $y=-2x+1$ 은 점  $(0, 1)$ 에서 곡선

$y=(x-1)^2$ 에 접한다.

즉,  $t_1=-2$ 이고  $t \leq -2$ 일 때  $g(t)=1$ ,  $-2 < t < t_2$ 일 때  $g(t)=2$ 이므로 함수  $g(t)$ 는  $t=-2$ 에서 불연속이고  $a_1=-2$ 이다.

또  $g(t_2)=3$ 이고  $t_2 < t < t_3$ 일 때  $g(t)=4$ 이므로 함수  $g(t)$ 는  $t=t_2$ 에서 불연속이고  $a_2=t_2$ 이다.

마찬가지 방법으로 하면  $a_3=t_3$ 임을 알 수 있다.

즉, 직선  $y=a_3x+1$ 이  $6 < x < 9$ 인 점에서 곡선  $y=(x-7)^2+6$ 에 접하므로 이차방정식

$(x-7)^2+6=a_3x+1$ , 즉  $x^2-(a_3+14)x+54=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=(a_3+14)^2-4 \times 54=0$$

$$(a_3+14)^2=4 \times 9 \times 6$$

$$a_3 > 0 \text{이므로 } a_3+14=6\sqrt{6}$$

$$\text{그러므로 } a_3=-14+6\sqrt{6} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

### (필수 유형 ①)

$g(x) = \{f(x)\}^2$ 이라 하자.

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면  $x=a$ 에서 연속이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$ 이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^-} (-2x+6)^2 = (-2a+6)^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (2x-a)^2 = a^2,$$

$$g(a) = \{f(a)\}^2 = a^2 \text{이므로}$$

$$(-2a+6)^2 = a^2 \text{에서 } a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$(a-2)(a-6) = 0$$

$$a=2 \text{ 또는 } a=6$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수  $a$ 의 값의 합은

$$2+6=8$$

답 ④

## 25

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ ,  $x=3$ 에서만 불연속이고, 함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수  $h(x)$ 가  $x=1$ ,  $x=3$ 에서 연속이면 닫힌 구간  $[0, 4]$ 에서 연속이다.

함수  $h(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

$$1 \times g(1) = 0 \times g(1) = 1 \times g(1)$$

$$\text{즉, } g(1) = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

또 함수  $h(x)$ 가  $x=3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = h(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)g(x) = f(3)g(3)$$

$$2 \times g(3) = 0 \times g(3) = 2 \times g(3)$$

$$\text{즉, } g(3) = 0 \quad \dots \text{㉔}$$

㉑, ㉔에 의하여

$$g(x) = a(x-1)(x-3) \quad (\text{단, } a \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\text{이때 } h(0) - h(4) = -6 \text{이므로 } 2 \times g(0) - 1 \times g(4) = -6$$

$$6a - 3a = -6$$

$$a = -2$$

즉,

$$g(x) = -2(x-1)(x-3) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$= -2(x-2)^2 + 2$$

이므로 함수  $g(x)$ 는  $x=2$ 에서 최댓값 2를 갖는다.

$$\text{따라서 } k=2, M=2 \text{이므로 } k+M=2+2=4$$

답 ④

## 26

(i)  $x < 0$ 일 때

$$g(x) = x + 3x + 4 = 4x + 4 \text{이므로 } x \neq -1 \text{일 때}$$

$$h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{4x + 4} = \frac{(x+1)(x-2)}{4(x+1)} = \frac{x-2}{4}$$

그러므로  $x < 0$ 에서 함수  $h(x)$ 가 연속하려면

$$h(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{4} = -\frac{3}{4}$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } a = -\frac{3}{4}$$

(ii)  $x \geq 0$ 일 때

$$g(x) = x - 3x + 4 = -2x + 4 \text{이므로 } x \neq 2 \text{일 때}$$

$$h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{-2x + 4} = \frac{(x+1)(x-2)}{-2(x-2)} = -\frac{x+1}{2}$$

그러므로  $x \geq 0$ 에서 함수  $h(x)$ 가 연속하려면

$$h(2) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a \times b = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

답 ④

## 27

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 방정식  $f(x) - g(x) = 0$ 의 실근은 방정식  $h(x) = 0$ 의 실근과 같다.

$$h(x) = x^5 + x^3 + x - k - 1 \text{에서 } h(1) = 2 - k, h(2) = 41 - k \text{이고,}$$

방정식  $h(x) = 0$ 이 열린구간  $(1, 2)$ 에서 오직 하나의 실근을 가지려면

$$h(1)h(2) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(2-k)(41-k) < 0$$

$$2 < k < 41$$

따라서 조건을 만족시키는 정수  $k$ 의 개수는 38이다.

답 38

## 05

### 다항함수의 미분법

정답

본문 52~63쪽

(필수 유형 ①)	11	01 ①	02 ③	03 ④
(필수 유형 ②)	⑤	04 ⑤	05 ①	06 ④
(필수 유형 ③)	③	07 ④	08 ④	09 ②
(필수 유형 ④)	③	10 ④	11 ⑤	12 20
(필수 유형 ⑤)	6	13 ③	14 51	15 ②
(필수 유형 ⑥)	2	16 ③	17 ⑤	18 ①
(필수 유형 ⑦)	③	19 ⑤	20 ①	21 ③
(필수 유형 ⑧)	⑤	22 ③	23 ③	24 ②
		25 ②		
(필수 유형 ⑨)	③	26 ①	27 ②	28 ④
		29 ⑤	30 ③	
(필수 유형 ⑩)	⑤	31 ③	32 ④	33 ④
(필수 유형 ⑪)	22	34 ⑤	35 ⑤	36 13

#### (필수 유형 ①)

함수  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ 에서  $x$ 의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균 변화율은

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{4^3 - 6 \times 4^2 + 5 \times 4}{4} = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5 \text{에서 } f'(a) = 3a^2 - 12a + 5$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = f'(a) \text{에서 } -3 = 3a^2 - 12a + 5$$

$$3a^2 - 12a + 8 = 0$$

$$g(a) = 3a^2 - 12a + 8 \text{이라 하면}$$

$$g(a) = 3(a-2)^2 - 4 \text{에서 } g(2) = -4 < 0 \text{이고,}$$

$$g(0) = 8 > 0, g(4) = 8 > 0$$

이므로 이차방정식  $g(a) = 0$ 은 열린구간  $(0, 4)$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 조건을 만족시키는 모든 실수  $a$ 의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여  $\frac{8}{3}$ 이므로  $p=3, q=8$

$$\text{따라서 } p+q=3+8=11$$

답 11

## 01

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 5$ 에서  $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 1\} = f(2) - 1 = 0 \text{이므로 } f(2) = 1$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \text{이므로}$$

$$f'(2) = 5$$

한편, 함수  $f(x)$ 에서  $x$ 의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{f(4)-1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(4)-1}{2} = \frac{1}{2}f'(2) = \frac{5}{2}$$

따라서  $f(4)=6$

## 02

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(3+h)\}^2 - \{f(3)\}^2}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(3+h)-f(3)\}\{f(3+h)+f(3)\}}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \times \frac{f(3+h)+f(3)}{2} \right\} \\ &= f'(3) \times \frac{f(3)+f(3)}{2} = f'(3) \times f(3) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(3) \times f(3) = 16$$

$$\text{따라서 } f'(3) = \frac{16}{f(3)} = \frac{16}{2} = 8$$

답 ①

## 03

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{x-1} = 4$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+3\} = f(1)+3=0 \text{ 이므로 } f(1)=-3$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{ 이므로 } f'(1)=4$$

한편,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)}{x-1} = 10$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} = f(1)+g(1)=0 \text{ 이므로}$$

$$g(1) = -f(1) = -(-3) = 3$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \right\} \\ &= f'(1) + g'(1) = 10 \end{aligned}$$

이므로

$$g'(1) = 10 - f'(1) = 10 - 4 = 6$$

$$\text{따라서 } g(1) + g'(1) = 3 + 6 = 9$$

답 ③

답 ④

### (필수 유형 2)

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $x=-2$ 에서도 미분가능하다.

함수  $f(x)$ 가  $x=-2$ 에서 미분가능하면  $x=-2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \text{ 이어야 한다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x = -4$$

$$f(-2) = 4 - 2a + b$$

이므로

$$4 - 2a + b = -4 \text{ 에서}$$

$$2a - b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 함수  $f(x)$ 가  $x=-2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x^2 + ax + b) - (4 - 2a + b)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + ax - 4 + 2a}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+a-2) = a-4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x - (4 - 2a + b)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x - (-4)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2 = 2$$

이므로  $a-4=2$ 에서  $a=6$

이것을 ①에 대입하면

$$2 \times 6 - b = 8, \quad b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b = 6 + 4 = 10$$

답 ⑤

## 04

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $x=-1$ 에서도 미분가능하다.

함수  $f(x)$ 가  $x=-1$ 에서 미분가능하면  $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 + x - 3) = a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (bx + 1) = -b + 1$$

$$f(-1) = -b + 1$$

이므로  $a - 4 = -b + 1$ 에서

$$a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 함수  $f(x)$ 가  $x=-1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(ax^2 + x - 3) - (-b + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(ax^2 + x - 3) - (a - 4)}{x + 1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(ax-a+1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax-a+1) = -2a+1 \\
 \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(bx+1)-(-b+1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{b(x+1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} b = b
 \end{aligned}$$

이므로  $-2a+1=b$ 에서

$$2a+b=1 \quad \text{..... ㉔}$$

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$$a=-4, b=9$$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2+x-3 & (x < -1) \\ 9x+1 & (x \geq -1) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 f(2)-f(-2) &= (18+1)-(-16-2-3) \\
 &= 19-(-21)=40
 \end{aligned}$$

답 ⑤

### 05

$$\begin{aligned}
 \neg. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)+1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2-1)+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \quad (\text{좌})
 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x^3) = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

즉, 함수  $f(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이 아니므로  $x=0$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1^-} |1-x^3| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1^+} |3-3x| = 0$$

$$|f(1)| = 0$$

에서  $\lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x)| = |f(1)|$ 이므로 함수  $|f(x)|$ 는

$x=1$ 에서 연속이다.

그런데

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|1-x^3|-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^3}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2-x-1) = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|3-3x|-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3
 \end{aligned}$$

에서  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}$ 이므로

함수  $|f(x)|$ 는  $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

### 06

조건 (나)에 의하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $0 \leq x \leq k$ 에서의 곡선  $y=f(x)$ 를  $x$ 축의 방향으로  $k$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $f(k)$ 만큼 평행이동하거나  $x$ 축의 방향으로  $-k$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-f(k)$ 만큼 평행이동하면서 반복되므로 함수  $f(x)$ 가  $x=k$ 에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$(i) \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (x^3-6x^2+10x) = k^3-6k^2+10k$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+k) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x)+f(k)\} \\
 &= f(0)+f(k) = k^3-6k^2+10k
 \end{aligned}$$

$$f(k) = k^3-6k^2+10k$$

에서  $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k)$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=k$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(k+h)^3-6(k+h)^2+10(k+h)-k^3+6k^2-10k}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3k^2h+3kh^2+h^3-12kh-6h^2+10h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (3k^2+3kh+h^2-12k-6h+10)$$

$$= 3k^2-12k+10$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(k)+f(h)-f(k)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3-6h^2+10h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} (h^2-6h+10) = 10$$

이므로 함수  $f(x)$ 가  $x=k$ 에서 미분가능하려면

$$3k^2-12k+10=10 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 3k(k-4)=0$$

따라서  $k > 0$ 이므로  $k=4$

답 ④

### (필수 유형 ③)

$g(x) = x^2 f(x)$ 에서

$$g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$$

따라서

$$\begin{aligned}
 g'(2) &= 2 \times 2 \times f(2) + 2^2 \times f'(2) \\
 &= 4 \times 1 + 4 \times 3 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

답 ③

### 07

$f(x) = (x^2+1)(x^2+ax-3)$ 에서

$$f'(x) = 2x(x^2+ax-3) + (x^2+1)(2x+a)$$

$$f'(1) = 2(a-2) + 2(a+2) = 4a$$

$$f'(2) = 4(2a+1) + 5(a+4) = 13a+24$$

이때  $f'(2)=f'(1)+60$ 이므로  
 $13a+24=4a+60, 9a=36$   
 따라서  $a=4$

답 ④

### 08

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}=3$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\}=f(1)-2=0$ 이므로  $f(1)=2$

이때  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ 이므로  $f'(1)=3$

한편,  $g(x)=(3x^2+2)f(x)$ 에서

$g'(x)=6xf(x)+(3x^2+2)f'(x)$ 이므로

$g(1)=5f(1)=5 \times 2=10$

$g'(1)=6f(1)+5f'(1)=6 \times 2+5 \times 3=27$

따라서  $g(1)+g'(1)=10+27=37$

답 ④

### 09

$\frac{1}{x}=t$ 라 하면  $x \rightarrow \infty$ 일 때,  $t \rightarrow 0+$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(2+\frac{3}{x}\right) - 21 \right\} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2+3t)-21}{t} = f(2)$  ..... ㉠

㉠에서  $t \rightarrow 0+$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{t \rightarrow 0+} \{f(2+3t)-21\}=f(2)-21=0$ 이므로  $f(2)=21$

이때  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2+3t)-21}{t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2+3t)-f(2)}{3t} = 3f'(2)$

이므로  $3f'(2)=f(2)=21$ 에서  $f'(2)=7$

한편,  $f(x)=2x^3+ax^2-5x+b$ 에서

$f(2)=16+4a-10+b=21$ 이므로

$4a+b=15$  ..... ㉡

$f'(x)=6x^2+2ax-5$ 에서

$f'(2)=24+4a-5=7$ 이므로  $4a=-12, a=-3$

$a=-3$ 을 ㉡에 대입하면

$-12+b=15, b=27$

따라서  $a+b=(-3)+27=24$

답 ②

### (필수 유형 ④)

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간  $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간  $(1, 5)$ 에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여  $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$ 인  $c$ 가 열린구간

$(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여  $f(1)=3$ 이므로  $f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}$ 이고, 조건 (나)

에 의하여  $1 < x < 5$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 5$ 이므로

$$f'(c) = \frac{f(5)-3}{4} \geq 5$$

따라서  $f(5) \geq 23$ 이므로 구하는  $f(5)$ 의 최솟값은 23이다.

답 ③

### 참고

$f(x)=5x-2$ 이면  $f(5)=23$ 이고 주어진 조건을 만족시킨다.

### 10

다항함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간  $[2, 4]$ 에서 연속이고 열린구간  $(2, 4)$ 에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여  $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(c)$ 인  $c$ 가 열린구간

$(2, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여  $f(4)=10$ 이므로  $f'(c)=\frac{10-f(2)}{2}$ 이고, 조건

(나)에 의하여  $2 < x < 4$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $|f'(x)| \leq 6$ 이므로

$$|f'(c)| = \left| \frac{10-f(2)}{2} \right| \leq 6$$

$$|10-f(2)| \leq 12, -12 \leq 10-f(2) \leq 12, -2 \leq f(2) \leq 22$$

따라서  $M=22, m=-2$ 이므로

$$M-m=22-(-2)=24$$

답 ④

### 참고

$f(x)=-6x+34$ 이면  $f(2)=22$ 이면서 조건을 만족시키고,  
 $f(x)=6x-14$ 이면  $f(2)=-2$ 이면서 조건을 만족시킨다.

### 11

$y=x^3-2x-5$ 에서  $y'=3x^2-2$ 이므로 곡선  $y=x^3-2x-5$ 의 접선 중 기울기가 1인 접선의 접점의  $x$ 좌표를  $t$ 라 하면

$$3t^2-2=1$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=-1$$

(i)  $t=1$ 일 때, 접점의 좌표가  $(1, -6)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+6=x-1, \text{ 즉 } y=x-7$$

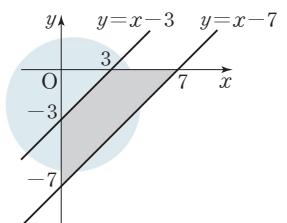
(ii)  $t=-1$ 일 때, 접점의 좌표가  $(-1, -4)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+4=x+1, \text{ 즉 } y=x-3$$

(i), (ii)에 의하여 두 직선  $l_1, l_2$ 와  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 사각형은 그림과 같다.

따라서 구하는 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 7^2 - \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{40}{2} = 20$$



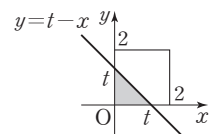
답 ⑤

### 12

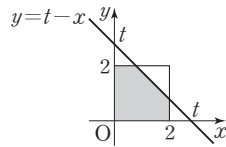
(i)  $t \leq 0$ 일 때,  $f(t)=0$

(ii)  $0 < t \leq 2$ 일 때,

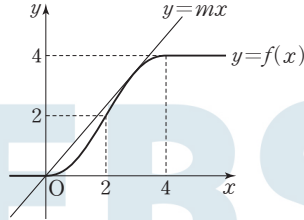
$$f(t) = \frac{1}{2}t^2$$



(iii)  $2 < t < 4$  일 때,  
 $f(t) = 4 - \frac{1}{2}(4-t)^2$



(iv)  $t \geq 4$  일 때,  $f(t) = 4$   
 (i)~(iv)에 의하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선  $y=mx$ 가  $2 < x < 4$ 인 점에서 곡선  $y=f(x)$ 에 접할 때의 기울기  $m$ 의 값을 구해 보자.

$2 < x < 4$ 일 때,  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$ 이므로 접점의  $x$ 좌표를  $s$ 라 하면

$$-\frac{1}{2}s^2 + 4s - 4 = ms \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = -x + 4 \text{이므로}$$

$$-s + 4 = m \quad \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$-\frac{1}{2}s^2 + 4s - 4 = -s^2 + 4s, s^2 = 8$$

$2 < s < 4$ 이므로  $s = 2\sqrt{2}$ 이고  $m = 4 - 2\sqrt{2}$

즉, 함수  $|f(x) - mx|$ 가  $x=0$ 에서만 미분가능하지 않으려면

$$m < 0 \text{ 또는 } m \geq 4 - 2\sqrt{2}$$

이어야 하므로 조건을 만족시키는 양수  $m$ 의 최솟값은  $4 - 2\sqrt{2}$ 이다.

따라서  $a = 4, b = -2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$$

답 20

**(필수 유형 6)**

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$$

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉, 이차방정식  $f'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면  $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 + 3(a^2 - 8a) \leq 0$$

$$4a(a - 6) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq 6$$

따라서 구하는 실수  $a$ 의 최댓값은 6이다.

답 6

**13**

함수  $f(x)$ 가 구간  $(-3, 0)$ 에서 감소하므로 이 구간에서  $f'(x) \leq 0$ 이고, 구간  $(0, \infty)$ 에서 증가하므로 이 구간에서  $f'(x) \geq 0$ 이다. 그러므로  $f'(0) = 0$ 이어야 한다.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이므로 } f'(0) = b = 0$$

$$\text{즉, } f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

이때 구간  $(-3, 0)$ 에서  $f'(x) \leq 0$ 이고  $f(x)$ 는 다항함수이므로  $f'(-3) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{그러므로 } f'(-3) = 27 - 6a \leq 0 \text{에서 } a \geq \frac{9}{2}$$

따라서  $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$ 에서

$$f(1) = 2 + a \geq 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

이므로 구하는  $f(1)$ 의 최솟값은  $\frac{13}{2}$ 이다.

답 ③

**14**

닫힌구간  $[n, n+2]$ 에서 정의된 함수  $f(x)$ 가 일대일함수가 되려면 이 구간에서  $f(x)$ 가 증가하거나 감소해야 한다. 즉, 구간  $[n, n+2]$ 에 속하는 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이거나  $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$= 3(x^2 - 6x + 8)$$

$$= 3(x-2)(x-4)$$

이므로 구간  $(-\infty, 2]$ 에서  $f'(x) \geq 0$ , 구간  $[2, 4]$ 에서  $f'(x) \leq 0$ ,

구간  $[4, \infty)$ 에서  $f'(x) \geq 0$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수  $n$ 의 값은

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

이므로 구하는 합은 51이다.

답 51

**15**

함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로  $x \neq a$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - a + 2 & (x \geq a) \\ x^3 + x^2 - x + a + 2 & (x < a) \end{cases}$$

에서

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & (x > a) \\ 3x^2 + 2x - 1 & (x < a) \end{cases}$$

$x > a$ 일 때,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \text{이고 이차방정식 } 3x^2 + 2x + 1 = 0 \text{의 판별식을 } D$$

라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 3 \times 1 = -2 < 0$$

이므로 실수  $a$ 의 값에 관계없이  $x > a$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f'(x) > 0 \text{이다.}$$

$x < a$ 일 때,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

이므로  $x < a$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이려면  $a \leq -1$ 이어야 한다.

따라서 구하는 실수  $a$ 의 최댓값은  $-1$ 이다.

답 ②

**필수 유형 ⑥**

$$f(x) = x^4 + ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax$$

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$4 + 2a = 0, a = -2$$

이때  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극댓값을 갖고 주어진 조건에 의하여 극댓값이 4이므로

$$f(0) = b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b = (-2) + 4 = 2$$

답 2

**16**

삼차함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 가 주어진 조건을 만족시키려면 함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 극대,  $x=5$ 에서 극소이어야 한다.

$$\text{즉, } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{에서}$$

$$f'(1) = 0 \text{이므로}$$

$$3 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{또 } f'(5) = 0 \text{에서}$$

$$75 + 10a + b = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

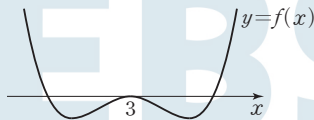
$$a = -9, b = 15$$

$$\text{따라서 } a + b = (-9) + 15 = 6$$

답 ③

**17**

조건 (가), (나)에 의하여 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 방정식  $f(x)=0$ 의 한 실근을  $3+a$ 라 하면 다른 한 실근은  $3-a$ 이므로

$$f(x) = (x-3+a)(x-3-a)(x-3)^2 \text{ (단, } a \text{는 양의 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

$$\text{즉, } f(x) = \{(x-3)^2 - a^2\}(x-3)^2 = (x^2 - 6x + 9 - a^2)(x^2 - 6x + 9)$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-6)(x^2-6x+9) + (x^2-6x+9-a^2)(2x-6) \\ &= 2(x-3)\{2(x^2-6x+9) - a^2\} \\ &= 2(x-3)\{2(x-3)^2 - a^2\} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서  $x=3$  또는  $x=3 \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ 이므로 함수  $f(x)$ 는

$x=3 \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

이때 함수  $f(x)$ 의 극솟값이  $-16$ 이므로

$$f(x) = (x-3)^4 - a^2(x-3)^2 \text{에서}$$

$$f\left(3 + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4 - a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2} = -\frac{a^4}{4} = -16,$$

$$f\left(3 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4 - a^2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2} = -\frac{a^4}{4} = -16$$

즉,  $a^4=64$ 에서  $a^2=8$ 이므로

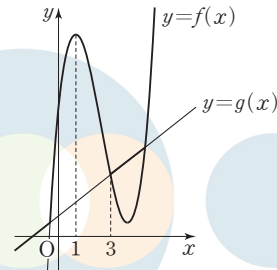
$$f(x) = (x-3)^4 - 8(x-3)^2$$

$$\text{따라서 } f(0) = 3^4 - 8 \times 3^2 = 81 - 72 = 9$$

답 ⑤

**18**

조건 (가)에 의하여 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 극대이고, 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프는  $x=3$ 인 점에서 만나야 한다.



$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 18 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \text{이고}$$

$$f'(1) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$6 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f(3) = g(3) \text{이어야 하므로}$$

$$54 + 9a + 3b + 18 = 9 \text{에서}$$

$$3a + b = -21 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -15, b = 24 \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 18 \text{이고}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 함수  $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은

$$f(1) + f(4) = 29 + 2 = 31$$

답 ①

**필수 유형 ⑦**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 12 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$\text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 극댓값  $f(-1)=-7$ 을 갖고,  $x=3$ 에서 극솟값  $f(3)=-39$ 를 갖는다.

한편, 조건 (가)에서  $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$ 이므로

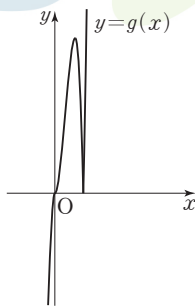
$$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$$

함수  $g(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이므로

$$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$$

즉,  $f(-p)+q=0$

이때 함수  $y=|f(x-p)+q|$ 의 그래프는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $p$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $q$ 만큼 평행이동시킨 후  $y<0$ 인 부분을  $x$ 축에 대하여 대칭이동시킨 것인데, 조건 (나)에서 함수  $g(x)$ 가  $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수  $a$ 의 개수가 1이어야 하므로  $p=1$ ,  $q=7$ 이고, 함수  $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서  $p+q=1+7=8$

### 19

- ㄱ. 실수 전체의 집합에서 도함수  $f'(x)$ 가 정의되어 있으므로 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)
  - ㄴ.  $f'(1)=0$ 이고  $x=1$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 극대이다. (참)
  - ㄷ. (i)  $x\leq 1$ 일 때  $f'(x)\geq 0$ 이고  $x=-1$ 에서만  $f'(x)=0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 증가한다.  
 (ii)  $1<x<3$ 일 때  $f'(x)<0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 감소한다.  
 (iii)  $x\geq 3$ 일 때  $f'(x)\geq 0$ 이고  $x=3$ 에서만  $f'(x)=0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 증가한다.  
 (i), (ii), (iii)에 의하여  $x\geq 1$ 일 때 함수  $f(x)$ 는  $x=3$ 에서 극소이면서 최소이므로  $f(3)>0$ 이면  $x\geq 1$ 일 때 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 만나지 않는다.  
 한편,  $x\leq -1$ 일 때  $f'(x)=-x-1$ 이므로 이 구간에서 함수  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이다.  
 즉,  $\lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=-\infty$ 이므로  $f(c)<0$ 인  $c$ 가 구간  $(-\infty, -1)$ 에 존재한다. 이때  $f(1)>f(3)>0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여  $f(x)=0$ 인  $x$ 가 구간  $(c, 1)$ 에 존재한다. 그런데  $x\leq 1$ 일 때 함수  $f(x)$ 는 증가하므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 오직 한 점에서 서만 만난다. (참)
- 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

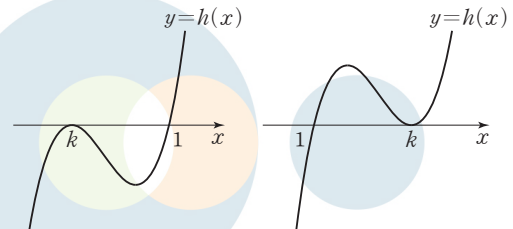
### 20

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 함수  $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여 방정식  $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 또 조건 (나)에 의하여  $h(1)=0$ 이므로

$$h(x)=(x-1)(x-k)^2 \quad (\text{단, } k \text{는 } 1 \text{이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

즉, 함수  $y=h(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1]

[그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수  $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수  $h(x)$ 는  $x=0$ 에서 극솟값을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x-k)^2 + 2(x-1)(x-k) \\ &= (x-k)(3x-k-2) \end{aligned}$$

이고  $h'(x)=0$ 에서

$$x=k \text{ 또는 } x=\frac{k+2}{3} \text{ 이므로 } \frac{k+2}{3}=0$$

$$k=-2$$

따라서  $h(x)=(x-1)(x+2)^2$ 이고

$$f(x)=h(x)+g(x)=(x-1)(x+2)^2+x+3$$

이므로

$$f(2)=1 \times 16 + 5 = 21$$

답 ①

### 21

$$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k \text{ 에서}$$

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$$

$$=12x(x^2-x-2)$$

$$=12x(x+1)(x-2)$$

이므로  $f'(x)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2 \quad \dots \textcircled{1}$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 조건 (가)를 만족시키려면

$$f(-1)=0 \text{ 또는 } f(0)=0 \text{ 또는 } f(2)=0$$

이어야 한다.

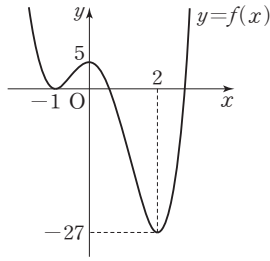
(i)  $f(-1)=0$ 인 경우

$$f(-1)=k-5=0 \text{ 에서 } k=5 \text{ 이므로}$$

$$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5 \text{ 이고, 함수 } y=f(x) \text{ 의 그래프는}$$

[그림 1]과 같다.





[그림 1]

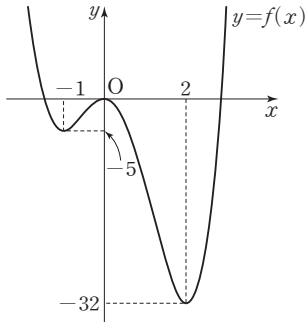
이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii)  $f(0)=0$ 인 경우

$f(0)=k=0$ 이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ 이고, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와

같다.



[그림 2]

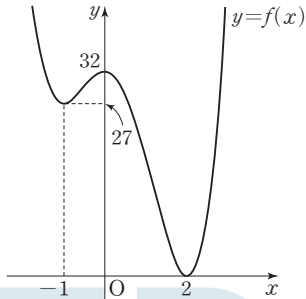
이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(iii)  $f(2)=0$ 인 경우

$f(2)=k-32=0$ 에서  $k=32$ 이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$ 이고, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는

[그림 3]과 같다.



[그림 3]

이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ㄱ. ㉠에서 방정식  $f'(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. (i)에서  $k=5$ 인 경우 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지만 함수  $f(x)$ 의 극댓값은 0이 아니다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든  $k$ 의 값은

$k=5$  또는  $k=0$

이므로 그 합은 5이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

(필수 유형 ⑧)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$ 는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ 이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = c$$

$$g(0) = f(0) = c \text{이므로 } c = \frac{1}{2}$$

한편, 함수  $g(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} \text{ 이어야 한다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = b$$

이므로  $b=0$

그러므로  $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$ ,  $f'(x)=3x^2+2ax$

$$\text{ㄱ. } g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2} \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } f'(x)=x(3x+2a)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}a$$

이때  $-\frac{2}{3}a < 0$ 이면 함수  $g(x)$ 의 최솟값이  $\frac{1}{2}$ 이므로 조건을 만족

시키지 않는다. 즉,  $-\frac{2}{3}a > 0$ 이므로  $a < 0$

$$\text{그러므로 } g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a < \frac{3}{2} \text{ (참)}$$

ㄷ.  $x \geq 0$ 일 때 함수  $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	0	...	$-\frac{2}{3}a$	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수  $g(x)$ 는  $x=-\frac{2}{3}a$ 에서 극소이면서 최소이므로

$$g\left(-\frac{2}{3}a\right)=f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$$

에서

$$a^3=-\frac{27}{8}, a=-\frac{3}{2}$$

따라서  $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 이므로

$$g(2)=f(2)=8-\frac{3}{2} \times 4 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤



## 22

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = -1$  또는  $x = 2$ 이므로 닫힌구간  $[0, 4]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$a$	\	$a-20$	/	$a+32$

그러므로 닫힌구간  $[0, 4]$ 에서 함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 일 때 최솟값  $a-20$ 을 갖고,  $x=4$ 일 때 최댓값  $a+32$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } a-20 = -18 \text{이므로 } a=2$$

$$\text{이때 } M = a+32 = 2+32 = 34$$

$$\text{따라서 } a+M = 2+34 = 36$$

답 ③

## 23

$y = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 4$ 에서  $y' = 8x^3 - 6x - 2$ 이므로  $x$ 좌표가 양수인 점에서 곡선  $C$ 에 접하는 접선의 접점의  $x$ 좌표를  $t$ , 접선의 기울기를  $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = 8t^3 - 6t - 2 \quad (t > 0)$$

이때  $f'(t) = 24t^2 - 6 = 0$ 에서  $t = \frac{1}{2}$ 이므로 함수  $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	$(-2)$	\	$-4$	/

그러므로 함수  $f(t)$ 는  $t > 0$ 에서  $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값  $-4$ 를 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점  $(\frac{1}{2}, \frac{19}{8})$ 이고 기울기는  $-4$ 이

므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{19}{8} = -4(x - \frac{1}{2})$$

$$y = -4x + \frac{35}{8}$$

따라서 구하는 접선의  $y$ 절편은  $\frac{35}{8}$ 이므로

$$p+q = 8 + \frac{35}{8} = 43$$

답 ③

## 24

$g(x) = x^2 - 6x + 10$ 이라 하자.

$$g(t) = g(t+2) \text{에서}$$

$$t^2 - 6t + 10 = (t+2)^2 - 6(t+2) + 10$$

$$4t = 8, \quad t = 2$$

(i)  $0 < t < 2$ 일 때,

$$g(t) > g(t+2) \text{이므로}$$

$$f(t) = t \times g(t+2) = t\{(t+2)^2 - 6(t+2) + 10\} = t^3 - 2t^2 + 2t$$

이때  $f'(t) = 3t^2 - 4t + 2$ 이고 이차방정식  $f'(t) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - 6 = -2 < 0$$

이므로  $f'(t) > 0$ 이다.

즉,  $0 < t < 2$ 에서 함수  $f(t)$ 는 증가한다.

(ii)  $t > 2$ 일 때,

$$g(t) \leq g(t+2) \text{이므로}$$

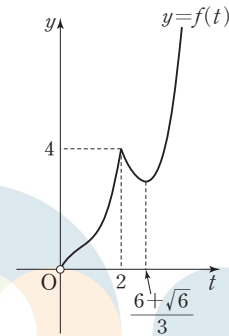
$$f(t) = t \times g(t) = t^3 - 6t^2 + 10t$$

이때  $f'(t) = 3t^2 - 12t + 10$ 이고  $f'(t) = 0$ 에서  $t = \frac{6 + \sqrt{6}}{3}$ 이며,

$t = \frac{6 + \sqrt{6}}{3}$ 의 좌우에서  $f'(t)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수

$f(t)$ 는  $t = \frac{6 + \sqrt{6}}{3}$ 에서 극소이다.

$f(2) = 4$ 이므로 (i), (ii)에 의하여 함수  $y = f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때  $f(2) = 4$ 이고  $t > 2$ 에서  $f(t) = 4$ 이면

$$t^3 - 6t^2 + 10t = 4 \text{에서}$$

$$t^3 - 6t^2 + 10t - 4 = 0$$

$$(t-2)(t^2 - 4t + 2) = 0$$

$$t > 2 \text{이므로 } t = 2 + \sqrt{2}$$

그러므로 구간  $(0, a]$ 에서 함수  $f(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수  $a$ 의 값의 범위는

$$2 \leq a \leq 2 + \sqrt{2}$$

따라서  $M = 2 + \sqrt{2}$ ,  $m = 2$ 이므로

$$M + m = 4 + \sqrt{2}$$

답 ②

## 25

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 13$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2 \text{이므로}$$

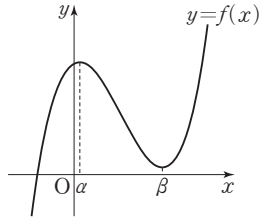
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{3}$$

이때  $\alpha = \frac{5 - \sqrt{19}}{3}$ ,  $\beta = \frac{5 + \sqrt{19}}{3}$ 라 하고, 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를

표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$\alpha$	...	$\beta$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

즉, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$k < \beta, k+2 > \beta$ 일 때,  $f(k)=f(k+2)$ 이면  
 $k^3 - 5k^2 + 2k + 13 = (k+2)^3 - 5(k+2)^2 + 2(k+2) + 13$   
 $6k^2 - 8k - 8 = 0$   
 $2(3k+2)(k-2) = 0$   
 $\beta - 2 < k < \beta$ 이므로  $k=2$

(i)  $t+1 \leq \alpha$ , 즉  $t \leq \alpha-1$ 일 때,

$$g(t) = f(t+1)$$

(ii)  $t-1 \leq \alpha \leq t+1$ , 즉  $\alpha-1 \leq t \leq \alpha+1$ 일 때,

$$g(t) = f(\alpha)$$

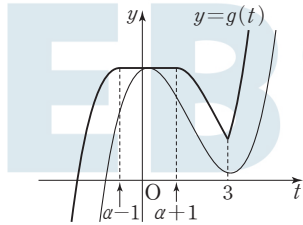
(iii)  $\alpha \leq t-1 \leq 2$ , 즉  $\alpha+1 \leq t \leq 3$ 일 때,

$$g(t) = f(t-1)$$

(iv)  $t-1 \geq 2$ , 즉  $t \geq 3$ 일 때,

$$g(t) = f(t+1)$$

(i)~(iv)에 의하여 함수  $y=g(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수  $g(t)$ 는  $t=3$ 에서 미분가능하지 않으므로  $a=3$

$t=2$ 일 때,  $g(t)=f(t-1)$ 이므로

$$g'(a-1) = g'(2) = f'(1) = 3 - 10 + 2 = -5$$

$t=4$ 일 때,  $g(t)=f(t+1)$ 이므로

$$g'(a+1) = g'(4) = f'(5) = 3 \times 5^2 - 10 \times 5 + 2 = 27$$

$$\text{따라서 } g'(a-1) + g'(a+1) = -5 + 27 = 22$$

**(필수 유형 ①)**

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + k$ 라 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

이므로  $f'(x)=0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 방정식  $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)  $> 0$ 이고 (극솟값)  $< 0$ 이어야 한다.

즉,  $f(-1) = 7+k > 0$ 에서  $k > -7$ 이고

$f(2) = k - 20 < 0$ 에서  $k < 20$ 이므로

$$-7 < k < 20$$

따라서 조건을 만족시키는 정수  $k$ 는

$$-6, -5, -4, \dots, 17, 18, 19$$

이므로 그 개수는 26이다.

답 ③

**26**

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$ 라 하자.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x+1)(x-1)(x-2)$$

이므로  $f'(x)=0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

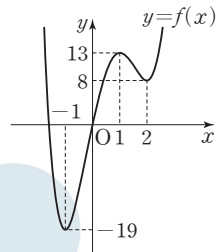
함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

그러므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 방정식  $f(x)-k=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 따라서  $k=8$  또는  $k=13$ 이므로 조건을 만족시키는 모든 상수  $k$ 의 값의 합은

$$8 + 13 = 21$$



답 ①

**27**

$f(x) = x^3 - 3x + n - 2$ 라 하자.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

이므로  $f'(x)=0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$n$	↘	$n-4$	↗

(i)  $n > 0$ 이므로  $n-4 < 0$ 이면 함수  $f(x)$ 의 극댓값이 양수이고 극솟값이 음수이다. 즉, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 그러므로  $n < 4$ 일 때,  $a_n = 3$ 이다.

(ii)  $n-4=0$ 이면 함수  $f(x)$ 의 극솟값이 0이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 접한다. 즉, 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 그러므로  $n=4$ 일 때,  $a_n = 2$ 이다.

(iii)  $n-4 > 0$ 이면 함수  $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값이 모두 양수이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 방정식  $f(x)=0$ 의 실근의 개수는 1이다.

그러므로  $n > 4$ 일 때,  $a_n = 1$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n < 4) \\ 2 & (n = 4) \\ 1 & (n > 4) \end{cases}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 3 \times 3 + 2 + 1 \times 6 = 17$$

답 ②

## 28

방정식  $f(x)=g(x)$ 에서

$$2x^3 + 5x^2 - 7x = 2x^2 + 5x + a$$

$$2x^3 + 3x^2 - 12x = a$$

$$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

이므로  $h'(x)=0$ 에서

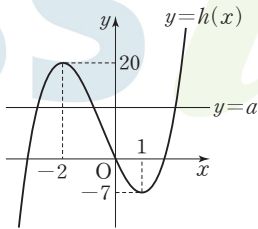
$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-2	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗

그러므로 함수  $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 방정식  $f(x)=g(x)$ 의 실근은 함수  $y=h(x)$ 의 그래프와 직선  $y=a$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표이므로 주어진 조건을 만족시키려면 함수  $y=h(x)$ 의 그래프



가 직선  $y=a$ 와 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 실근이 모두 양수일 수는 없으므로 그림과 같이 음의 실근 두 개와 양의 실근 한 개를 가져야 한다.

따라서  $0 < a < 20$ 이어야 하므로 조건을 만족시키는 모든 정수  $a$ 의 개수는 19이다.

답 ④

## 29

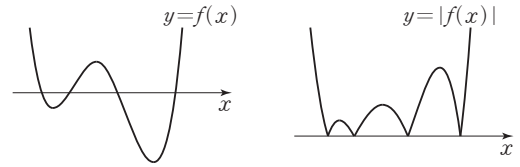
삼차방정식  $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이면 함수  $|f(x)|$ 가 서로 다른 세 점에서 극소일 수 없으므로 방정식  $f'(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 함수  $f(x)$ 의 극솟값 중 양수인 것이 있으면 이 값이 함수  $|f(x)|$ 의 극솟값이기도 하므로 함수  $|f(x)|$ 의 극솟값이 모두 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.

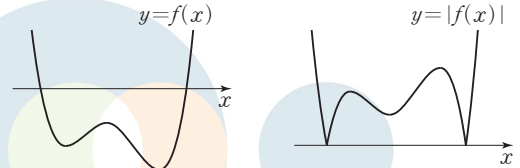
즉, 함수  $f(x)$ 의 극솟값은 모두 0보다 작거나 같아야 한다.

(i) 함수  $f(x)$ 의 극솟값이 모두 음수인 경우

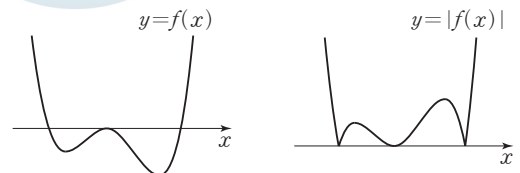
- ㉠ 함수  $f(x)$ 의 극댓값이 양수이면 다음 그림과 같이 함수  $|f(x)|$ 가 극소인 서로 다른  $x$ 의 값이 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



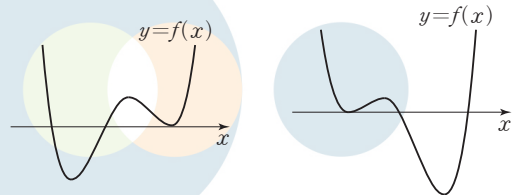
- ㉡ 함수  $f(x)$ 의 극댓값이 음수이면 다음 그림과 같이 함수  $|f(x)|$ 의 0이 아닌 극솟값이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



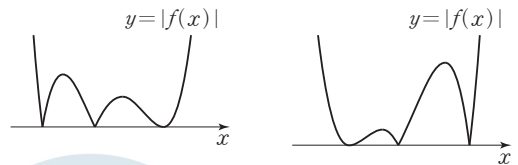
- ㉢ 함수  $f(x)$ 의 극댓값이 0이면 다음 그림과 같이 조건을 모두 만족시킨다.



- (ii) 함수  $f(x)$ 의 극솟값이 하나는 0이고 다른 하나는 음수인 경우 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우 중 하나이다.

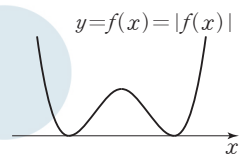


두 경우 모두 함수  $y=|f(x)|$ 의 그래프가 다음과 같으므로 조건을 모두 만족시킨다.



- (iii) 함수  $f(x)$ 의 극솟값이 모두 0인 경우

함수  $y=|f(x)|$ 의 그래프는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 같다. 즉, 함수  $|f(x)|$ 가 극소인 서로 다른  $x$ 의 값이 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



- ㄱ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉡과 (ii)의 경우 모두 함수  $|f(x)|$ 가 극대인 서로 다른  $x$ 의 값이 2개이다. (참)
- ㄴ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉡과 (ii)의 경우 모두 함수  $f(x)$ 의 극댓값은 0보다 크거나 같다. (참)
- ㄷ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉡과 (ii)의 경우 모두 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

# 30

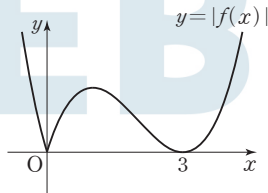
함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수를  $a$  ( $a > 0$ )이라 하면 조건 (가)에 의하여  $f(x) = ax(x-3)^2$  또는  $f(x) = ax^2(x-3)$

으로 놓을 수 있다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선  $y = mx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수  $m$ 의 값이  $\frac{9}{2}$ 뿐이어야 한다.

(i)  $f(x) = ax(x-3)^2$ 인 경우

함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

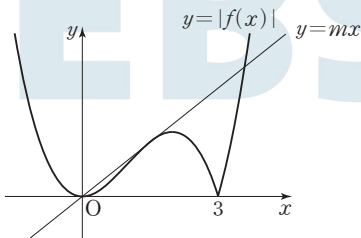
$f(x) = ax(x-3)^2 = ax^3 - 6ax^2 + 9ax$ 에서

$f'(x) = 3ax^2 - 12ax + 9a$ 이고  $f'(0) = 9a > 0$ 이므로 함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선  $y = mx$ 는  $m = 9a$ 일 때 서로 다른 두 점에서 만나고,  $0 < m < 9a$ 일 때 서로 다른 세 점에서 만난다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $f(x) = ax^2(x-3)$ 인 경우

함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 직선  $y = mx$ 가 제1사분면에서 함수  $y = -f(x)$ 의 그래프와 접할 때  $m$ 의 값을  $m_1$ 이라 하면 함수  $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선  $y = mx$ 는  $m = m_1$ 일 때 서로 다른 세 점에서 만나고,  $m > m_1$ 일 때 서로 다른 두 점에서,  $0 < m < m_1$ 일 때 서로 다른 네 점에서,  $m \leq 0$ 일 때 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시킨다. 이때  $m_1 = \frac{9}{2}$ 이어야 한다.

(i), (ii)에 의하여

$f(x) = ax^2(x-3)$  (단,  $a$ 는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있고, 직선  $y = \frac{9}{2}x$ 가 제1사분면에서 곡선  $y = -ax^2(x-3)$ 에 접해야 한다.

$y = -ax^2(x-3) = -ax^3 + 3ax^2$ 에서

$y' = -3ax^2 + 6ax$ 이므로 접점의  $x$ 좌표를  $t$  ( $t > 0$ )이라 하면

$$-at^3 + 3at^2 = \frac{9}{2}t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-3at^2 + 6at = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이어야 한다.  $t > 0$ 이므로  $\textcircled{1}$ 에서

$$-at^2 + 3at = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } -3at^2 + 6at = -at^2 + 3at$$

$$2at^2 - 3at = 0, at(2t - 3) = 0$$

$$a \neq 0, t > 0 \text{이므로 } t = \frac{3}{2}$$

이것을  $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$-\frac{9}{4}a + \frac{9}{2}a = \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{4}a = \frac{9}{2}, a = 2$$

그러므로  $f(x) = 2x^2(x-3)$ 이고

$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$ 이므로  $f'(x) = 0$ 에서

$x = 0$  또는  $x = 2$

따라서 함수  $|f(x)|$ 는  $x = 2$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$|f(2)| = |2 \times 4 \times (-1)| = 8$$

답 ③

## 참고

직선  $y = \frac{9}{2}x$ 가 제1사분면에서 곡선  $y = -ax^2(x-3)$ 에 접하도록 하는 실수  $a$ 의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

조건을 만족시키려면 방정식  $\frac{9}{2}x = -ax^2(x-3)$ , 즉

$$x(ax^2 - 3ax + \frac{9}{2}) = 0 \text{의 실근이 } 0 \text{과 양수인 중근이어야 하므로}$$

이차방정식  $ax^2 - 3ax + \frac{9}{2} = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = 9a^2 - 18a = 9a(a-2) = 0 \text{이어야 한다.}$$

따라서  $a = 2$

## (필수 유형 ⑩)

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^3 - x^2 - x + 6 - a$$

이때  $h'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$ 이므로

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$-\frac{1}{3}$	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉,  $x \geq 0$ 일 때 함수  $h(x)$ 의 최솟값은  $h(1)$ 이다.

이때  $x \geq 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq g(x)$ , 즉  $h(x) \geq 0$ 이려면  $h(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$h(1) = 5 - a \geq 0$$

따라서  $a \leq 5$ 이므로 조건을 만족시키는 실수  $a$ 의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

# 31

$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x - 12 = 2(x-1)(2x^2 + 5x + 6)$$

모든 실수  $x$ 에 대하여  $2x^2 + 5x + 6 > 0$ 이므로  $f'(x) = 0$ 에서  $x = 1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$a-8$	↗

즉, 함수  $f(x)$ 의 최솟값이  $a-8$ 이므로 주어진 부등식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하려면  $a-8 \geq 0$ 이어야 한다.

따라서  $a \geq 8$ 이므로 구하는 실수  $a$ 의 최솟값은 8이다.

답 ③

### 32

$$y=2x^3-9x^2+12x+1 \text{에서}$$

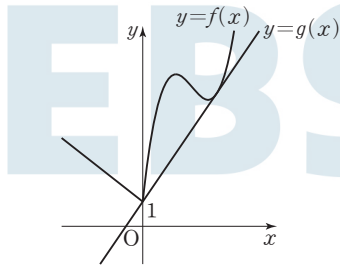
$$y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$$y'=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$x \geq 0$ 에서 함수  $y=2x^3-9x^2+12x+1$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	0	...	1	...	2	...
$y'$		+	0	-	0	+
$y$	1	↗	6	↘	5	↗

그러므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선  $y=g(x)$ 가 제1사분면에서 곡선  $y=f(x)$ 에 접할 때의  $m$ 의 값을 구해 보자.

접점의  $x$ 좌표를  $t$  ( $t > 0$ )이라 하면  $f(t)=g(t)$ 이므로

$$2t^3-9t^2+12t+1=mt+1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(t)=m \text{이므로}$$

$$6t^2-18t+12=m \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2t^3-9t^2+12t+1=6t^3-18t^2+12t+1$$

$$4t^3-9t^2=0$$

$$t^2(4t-9)=0$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = \frac{9}{4}$$

이때 ㉡에서

$$m = 6 \times \frac{81}{16} - 18 \times \frac{9}{4} + 12 = \frac{15}{8}$$

따라서 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식  $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하도록 하는

실수  $m$ 의 최댓값은  $\frac{15}{8}$ 이고, 최솟값은 직선  $y=1-x$ 의 기울기와 같

은  $-1$ 이므로 구하는 합은

$$\frac{15}{8} + (-1) = \frac{7}{8}$$

답 ④

### 33

$g(x)=f(x)-f'(x)$ 에서  $f(0)=g(0)=0$ 이므로  $f'(0)=0$ 이다.

그러므로  $f(x)=x^3+ax^2$  ( $a$ 는 상수)로 놓을 수 있다.

이때

$$g(x)=x^3+ax^2-3x^2-2ax$$

$$=x^3+(a-3)x^2-2ax$$

$$=x\{x^2+(a-3)x-2a\}$$

이차방정식  $x^2+(a-3)x-2a=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D=(a-3)^2+8a=a^2+2a+9=(a+1)^2+8 > 0$$

이므로 이차방정식  $x^2+(a-3)x-2a=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 두 실근을  $\alpha, \beta$ 라 하자.

만약  $\alpha\beta=0$ 이면  $a=0$ 이고 이차방정식  $x^2-3x=0$ 의 두 실근은 0, 3

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서  $\alpha\beta \neq 0$ 이고 조건을 만족시

키려면  $\alpha+\beta > 0, \alpha\beta > 0$ 이어야 한다. 즉,  $-a+3 > 0, -2a > 0$ 이어야

하므로  $a < 0$ 이다.

이때 함수  $f(x)$ 의 모든 항의 계수가 정수이므로  $a \leq -1$ 이어야 한다.

따라서  $f(3)=27+9a \leq 18$ 이므로 구하는  $f(3)$ 의 최댓값은 18이다.

답 ④

### (필수 유형 ⑩)

점 P의 시간  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x$ 가

$$x = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + k$$

이므로 시간  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도를  $v$ , 가속도를  $a$ 라 하면

$$v = -t^2 + 6t$$

$$a = -2t + 6$$

점 P의 가속도가 0일 때

$$-2t + 6 = 0 \text{에서 } t = 3 \text{이고 이때 점 P의 위치가 } 40 \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{3} \times 3^3 + 3 \times 3^2 + k = 40$$

$$\text{따라서 } k = 40 + 9 - 27 = 22$$

답 22

### 34

두 점 P, Q의 시간  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 속도를 각각  $v_1, v_2$ , 가속도를 각각  $a_1, a_2$ 라 하면

$$v_1 = 6t^2 - 6t - 4, v_2 = 2t + 4$$

$$a_1 = 12t - 6, a_2 = 2$$

$v_1 = v_2$ 에서

$$6t^2 - 6t - 4 = 2t + 4$$

$$6t^2 - 8t - 8 = 0$$

$$2(3t+2)(t-2) = 0$$

$$t \geq 0 \text{이므로 } t = 2$$

$t = 2$ 일 때,

$$a_1 = 12 \times 2 - 6 = 18, a_2 = 2$$

이므로 구하는 두 점 P, Q의 가속도의 합은

$$18 + 2 = 20$$

답 ⑤



### 35

점 P의 시각  $t (t \geq 0)$ 에서의 속도를  $v$ , 가속도를  $a$ 라 하면

$$v = t^3 - 12t + 9$$

$$a = 3t^2 - 12$$

ㄱ.  $v = (t-3)(t^2+3t-3) = 0$ 에서  $t \geq 0$ 이므로

$$t = 3 \text{ 또는 } t = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \dots\dots \text{㉠}$$

이고 이 값의 좌우에서  $v$ 의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ.  $a = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$ 이므로  $a=0$ 일 때  $t=2$

$1 \leq t \leq 3$ 에서 함수  $v$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	1	...	2	...	3
$a$		-	0	+	
$v$	-2	↘	-7	↗	0

그러므로 점 P의 속력  $|v|$ 는  $t=2$ 에서 최댓값 7을 갖는다. (참)

ㄷ. ㉠에서  $\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} < 3$ 이므로 점 P는  $t=3$ 에서 마지막으로 운동

방향을 바꾼다. 이때 가속도는

$$a = 3 \times 3^2 - 12 = 15 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

### 36

점 P의 시각  $t (t \geq 0)$ 에서의 속도를  $v$ 라 하면

$$v = 3t^2 - 2at + b = 3\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$$

이때 조건 (가)에 의하여 점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으므로 0 이상의 모든 실수  $t$ 에 대하여  $v \geq 0$ 이어야 한다. 이때  $a > 0$ 이므로

$$b - \frac{a^2}{3} \geq 0, \text{ 즉 } b \geq \frac{a^2}{3}$$

한편,  $t \geq 0$ 일 때  $v \geq 0$ 이므로 점 P의 속력은

$$|v| = v = 3\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$$

이다. 조건 (나)에 의하여  $|v|$ 이  $t = \frac{2}{3}$ 일 때 최소이므로

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 즉 } a = 2$$

$$\text{그러므로 } b \geq \frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}$$

따라서  $x = t^3 - 2t^2 + bt$  ( $b \geq \frac{4}{3}$ )이고 점 P의 시각  $t=3$ 에서의 위치는

$$27 - 2 \times 9 + 3b = 3b + 9 \geq 3 \times \frac{4}{3} + 9 = 13$$

이므로 구하는 최솟값은 13이다.

답 13

## 06

### 다항함수의 적분법

정답

본문 66~75쪽

(필수 유형 ①) 4      01 ③      02 ③      03 ②

04 ②      05 ②

(필수 유형 ②) ①      06 ①      07 ①      08 ⑤

09 ②      10 80      11 ③

(필수 유형 ③) 14      12 ③      13 ①      14 32

(필수 유형 ④) ①      15 ⑤      16 14      17 ①

18 27      19 ③      20 ②

(필수 유형 ⑤) 5      21 ④      22 ③      23 ④

(필수 유형 ⑥) 36      24 8      25 ②      26 ③

27 ③      28 ④      29 40

(필수 유형 ⑦) ②      30 ④      31 12

(필수 유형 ⑧) ③      32 ②      33 ⑤      34 63

(필수 유형 ①)

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 + C \text{ (C는 적분상수)}$$

$$\text{이고, } f(0) = C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$$

답 4

01

$$f(x) = \int (4x + 3) dx = 2x^2 + 3x + C \text{ (C는 적분상수)}$$

$$f(1) = 2 + 3 + C = 0 \text{에서 } C = -5$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 + 3x - 5 \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 + 6 - 5 = 9$$

답 ③

02

$$f(x) = \int (5x - k) dx - \int (x + k) dx$$

$$= \int \{(5x - k) - (x + k)\} dx$$

$$= \int (4x - 2k) dx = 2x^2 - 2kx + C \text{ (C는 적분상수)}$$

$$\text{에서 } f'(x) = 4x - 2k$$

$$f'(1) = 2 \text{에서 } 4 - 2k = 2 \text{이므로 } k = 1$$

$$f(1) = 0 \text{에서 } 2 - 2k + C = 0 \text{이므로 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 - 2x \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 - 4 = 4$$

답 ③



03

$G(x) = x^2 f(x) - 2x^6 + 3x^5 \dots \textcircled{1}$   
 이때  $2xf(x)$ 의 한 부정적분이  $G(x)$ 이므로  
 $G'(x) = 2xf(x)$   
 $\textcircled{1}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  
 $2xf(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 12x^5 + 15x^4$   
 $x^2 f'(x) = 12x^5 - 15x^4$   
 $f(x)$ 는 다항함수이므로  $f'(x) = 12x^3 - 15x^2$   
 $f(x) = \int (12x^3 - 15x^2) dx$   
 $= 3x^4 - 5x^3 + C$  ( $C$ 는 적분상수)  
 $\textcircled{1}$ 에서  $G(1) = f(1) + 1$ 이고,  $G(1) = 4$ 이므로  
 $4 = f(1) + 1, f(1) = 3$   
 $f(1) = 3 - 5 + C = 3$ 에서  $C = 5$   
 따라서  $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 5$ 이므로  
 $f(2) = 48 - 40 + 5 = 13$

답 ②

04

조건 (가)에서  $f'(x) = kx(x-2)$ 이므로  
 $f(x) = \int f'(x) dx = \int kx(x-2) dx = \int (kx^2 - 2kx) dx$   
 $= \frac{1}{3}kx^3 - kx^2 + C$  ( $C$ 는 적분상수)  
 이고,  $f(0) = 2$ 이므로  $C = 2$   
 함수  $f(x)$ 는  $x=0, x=2$ 에서 극값을 갖고, 조건 (나)에서  
 $f(0) + f(2) = 0$ 이므로  
 $2 + \left(\frac{8}{3}k - 4k + 2\right) = 0$   
 $-\frac{4}{3}k + 4 = 0$ 에서  $k = 3$   
 따라서  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 이므로  
 $f(-1) = -2$

답 ②

05

$f(x) = \int (3x^2 + ax) dx = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + C$  ( $C$ 는 적분상수)  
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.  
 즉,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로  
 $1 + \frac{a}{2} + C = 0 \dots \textcircled{1}$   
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$   
 $= \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2}$   
 에서  $f'(1) = 1$   
 $f'(x) = 3x^2 + ax$ 에서  $f'(1) = 3 + a = 1$ 이므로  $a = -2$

$a = -2$ 를  $\textcircled{1}$ 에 대입하면  $C = 0$   
 따라서  $f(x) = x^3 - x^2$ 이므로  $f(2) = 8 - 4 = 4$

답 ②

(필수 유형 ②)

$\int_0^2 (3x^2 + 6x) dx = [x^3 + 3x^2]_0^2 = (2^3 + 3 \times 2^2) - 0 = 20$

답 ①

06

$\int_0^3 (x^2 + x|1-x|) dx$   
 $= \int_0^1 (x^2 + x|1-x|) dx + \int_1^3 (x^2 + x|1-x|) dx$   
 $= \int_0^1 \{x^2 + x(1-x)\} dx + \int_1^3 \{x^2 - x(1-x)\} dx$   
 $= \int_0^1 x dx + \int_1^3 (2x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3$   
 $= \frac{1}{2} + \frac{40}{3} = \frac{83}{6}$

답 ①

07

$\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx = -\frac{1}{18}$ 의 양변에 18을 곱하면  
 $18 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx = -1$ 이므로  
 $18 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx = \int_0^1 18\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx$   
 $= \int_0^1 (12x^2 + 2x + 3k) dx$   
 $= \left[4x^3 + x^2 + 3kx\right]_0^1 = 5 + 3k = -1$

따라서  $k = -2$

답 ①

08

$\int_0^1 \{f(x) + x^2\} dx = \int_0^1 \{(2x^2 + 6ax + 10) + x^2\} dx$   
 $= \int_0^1 (3x^2 + 6ax + 10) dx$   
 $= \left[x^3 + 3ax^2 + 10x\right]_0^1 = 3a + 11$

$f(1) = 6a + 12$

따라서  $3a + 11 = 6a + 12$ 이므로  $a = -\frac{1}{3}$

답 ⑤

09

$\int_0^a (3x^2 + x + 5) dx = \int_0^a (x + 9) dx$ 에서  
 $\int_0^a (3x^2 + x + 5) dx - \int_0^a (x + 9) dx = 0$

$$\int_0^a \{(3x^2+x+5)-(x+9)\} dx=0$$

$$\int_0^a (3x^2-4) dx=0$$

$$\left[ x^3-4x \right]_0^a = a^3-4a=0, a(a-2)(a+2)=0$$

따라서  $a > 0$ 이므로  $a=2$

## 10

실수  $a$ 의 값에 따라 삼차함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

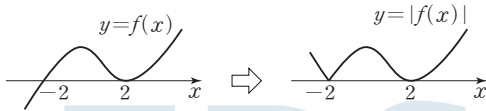
(i)  $a \neq -2$ 이고  $a \neq 2$ 일 때



$$f(x)=(x-2)(x+2)(x+a)$$
이므로

함수  $y=|f(x)|$ 는 세 개의  $x$ 의 값에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii)  $a=-2$ 일 때

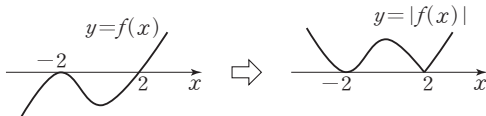


$$f(x)=(x-2)^2(x+2)$$
이므로

함수  $y=|f(x)|$ 는  $x=-2$ 에서만 미분가능하지 않다.

즉, 음수인 한 개의  $x$ 의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii)  $a=2$ 일 때



$$f(x)=(x-2)(x+2)^2$$
이므로

함수  $y=|f(x)|$ 는  $x=2$ 에서만 미분가능하지 않다.

즉, 양수인 한 개의  $x$ 의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

따라서  $a=2$ 이고,  $f(x)=(x-2)(x+2)^2$ 이므로

$$\int_0^{2a} f'(x) dx = \int_0^4 f'(x) dx = \left[ (x-2)(x+2)^2 \right]_0^4 = 72 - (-8) = 80$$

답 ②

## 11

조건 (가)에서  $x \rightarrow 1$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로

(분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

조건 (나)에서  $f(a) - f(0) = f(a) - f(1) = 0$ 이므로

$$f(a) = f(0) = f(1) = 0$$

즉,  $f(x) = x(x-1)(x-a)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x(x-a) = 1-a = -3 \end{aligned}$$

에서  $a=4$

따라서  $f(x) = x(x-1)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 4x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{5}{3} + 2 = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

답 ③

## (필수 유형 ④)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a 3x(x+1)^2 dx &= \int_{-a}^a (3x^3 + 6x^2 + 3x) dx \\ &= \int_{-a}^a 6x^2 dx + \int_{-a}^a (3x^3 + 3x) dx \\ &= 2 \int_0^a 6x^2 dx + 0 = 2 \left[ 2x^3 \right]_0^a \\ &= 2 \times 2a^3 = 56 \end{aligned}$$

따라서  $a^3=14$

답 14

## 12

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (4x^3 + ax^2 + ax) dx &= \int_{-1}^1 ax^2 dx + \int_{-1}^1 (4x^3 + ax) dx \\ &= 2 \int_0^1 ax^2 dx + 0 = 2 \left[ \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 = 2 \times \frac{a}{3} = 2 \end{aligned}$$

따라서  $a=3$

답 ③

## 13

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 ax^2 dx = 2 \left[ \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}a$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = 2 \int_0^1 (x^4 + bx^2) dx = 2 \left[ \frac{1}{5}x^5 + \frac{b}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b$$

이므로 조건 (가)에서

$$4 \int_{-1}^1 f(x) dx + 5 \int_{-1}^1 xf(x) dx = 4 \times \frac{2}{3}a + 5 \times \left( \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b \right) = 0$$

$$4a + 5b + 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로 조건 (나)에서

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면  $a=-2, b=1$

따라서  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ 이므로

$$f(3) = 27 - 18 + 3 = 12$$

답 ①

## 14

$f'(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ 는 상수)라 하면

$$\text{조건 (가)에서 } \int_{-a}^a f'(x) dx = 2 \int_0^a (ax^2 + c) dx = 0$$

즉,  $a=0, c=0$ 이므로  $f'(x) = 4x^3 + bx$

조건 (나)에서  $f(1)=0, f'(1)=0$ 이므로

$$f'(1)=4+b=0 \text{에서 } b=-4$$

$$\text{즉, } f'(x)=4x^3-4x$$

$f(x)=x^4-2x^2+d$  ( $d$ 는 상수)라 하면

$$f(1)=1-2+d=0 \text{에서 } d=1$$

$$\text{즉, } f(x)=x^4-2x^2+1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= 2 \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 2 \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 30 \times \int_{-1}^1 f(x) dx = 30 \times \frac{16}{15} = 32$$

답 32

### 필수 유형 4

$f(x)=4x^3+x \int_0^1 f(t) dt$ 에서

$$\int_0^1 f(t) dt = k \text{ (} k \text{는 상수)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면

$$f(x)=4x^3+kx$$

①에서

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (4t^3+kt) dt = \left[ t^4 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^1 = 1 + \frac{k}{2} = k$$

이므로  $k=2$

따라서  $f(x)=4x^3+2x$ 이므로

$$f(1)=4+2=6$$

답 ①

## 15

$f(x)=4x^2-6x+\int_0^1 tf(t) dt$ 에서

$$\int_0^1 tf(t) dt = k \text{ (} k \text{는 상수)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면

$$f(x)=4x^2-6x+k$$

①에서

$$\begin{aligned} \int_0^1 tf(t) dt &= \int_0^1 t(4t^2-6t+k) dt = \int_0^1 (4t^3-6t^2+kt) dt \\ &= \left[ t^4 - 2t^3 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^1 = -1 + \frac{k}{2} = k \end{aligned}$$

이므로  $k=-2$

따라서  $f(x)=4x^2-6x-2$ 이므로

$$f(-1)=8$$

답 ⑤

## 16

$f(x)=ax^2+\int_1^x (t-1)(t-5) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$

①의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=a+\int_1^1 (t-1)(t-5) dt = a+0=3$$

에서  $a=3$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2ax+(x-1)(x-5) \text{이므로}$$

$$f'(3)=6a+2 \times (-2)=6 \times 3-4=14$$

답 14

## 17

$$f(x)=\int_0^x x(2t+a) dt = x \int_0^x (2t+a) dt$$

의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_0^x (2t+a) dt + x(2x+a)$$

따라서

$$\begin{aligned} f'(1) &= \int_0^1 (2t+a) dt + (2+a) = \left[ t^2 + at \right]_0^1 + (2+a) \\ &= (1+a) + (2+a) = 2a+3=5 \end{aligned}$$

이므로  $a=1$

답 ①

## 18

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} = b$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-3\} = f(1)-3=0 \text{에서 } f(1)=3$$

함수  $f(x)=\int_0^x (3t^2+a) dt$ 의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=\int_0^1 (3t^2+a) dt = \left[ t^3 + at \right]_0^1 = 1+a=3$$

에서  $a=2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x+1} \times \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2} f'(1) \end{aligned}$$

함수  $f(x)=\int_0^x (3t^2+2) dt$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=3x^2+2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times (3+2) = \frac{5}{2}$$

따라서  $b=\frac{5}{2}$ 이므로

$$a+10b=2+10 \times \frac{5}{2}=27$$

답 27

참고

$$f(x)=\int_0^x (3t^2+2) dt = \left[ t^3 + 2t \right]_0^x = x^3 + 2x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x-3}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+3}{x+1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

따라서  $b=\frac{5}{2}$

### 19

$$\int_1^x f(t) dt = (x+1)f(x) + x^3 - 3x \quad \dots \textcircled{1}$$

①의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t) dt = 2f(1) - 2$$

$$0 = 2f(1) - 2 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

한편, ①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+1)f'(x) + 3x^2 - 3$$

$$(x+1)f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$$

이 등식은 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하므로

$$f'(x) = -3x + 3$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-3x + 3) dx$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 3x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

②에서  $f(1) = 1$ 이므로

$$-\frac{3}{2} + 3 + C = 1, C = -\frac{1}{2}$$

따라서  $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(2) = -6 + 6 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

### 20

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + b + 1$$

$$a + b = -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (나)에서  $f'(3) = 0$ 이므로

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 0$$

$$6a + b = -27 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -5, b = 3$$

즉,  $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 f'(x) dx &= \int_1^3 (3x^2 - 10x + 3) dx \\ &= \left[ x^3 - 5x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= (27 - 45 + 9) - (1 - 5 + 3) = -8 \end{aligned}$$

### (필수 유형 ⑥)

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{에서}$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x f(t) dt \right] = f(x)$$

$$= -x^2 - 4x + a$$

$$= -(x+2)^2 + a + 4$$

함수  $g(x)$ 가 닫힌구간  $[0, 1]$ 에서 증가하

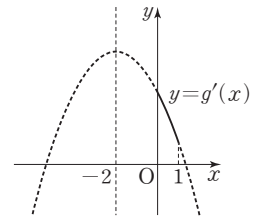
려면 닫힌구간  $[0, 1]$ 에서

$g'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉,  $g'(1) = a - 5 \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \geq 5$$

따라서  $a$ 의 최솟값은 5이다.



답 5

### 21

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (3t^2 - 4) dt = \left[ t^3 - 4t \right]_0^x \\ &= x^3 - 4x = x(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

이때  $g'(x) = 0$ 이면  $f(x) = 0$ 이므로  $x = -2$  또는  $x = 0$  또는  $x = 2$ 이고, 함수  $g(x)$ 는 사차함수이므로  $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$g(x) = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

에서  $g(2) = 0$ 이므로  $C = 4$

따라서 함수  $g(x)$ 의 극댓값은  $g(0) = 4$

답 4

### 22

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

주어진 조건에서 함수  $g(x)$ 가  $x=0$ 에서 극솟값 3을 가지므로

$$g(0) = \int_0^0 f'(t) dt + (0+1)f(0) + 1 = f(0) + 1 = 3$$

즉,  $f(0) = 2$ 이므로  $c = 2$

$$g'(x) = f'(x) + f(x) + (x+1)f'(x) \text{에서}$$

$$g'(0) = f'(0) + f(0) + (0+1)f'(0) = 2f'(0) + 2 = 0$$

이므로  $f'(0) = -1$

즉,  $b = -1$

주어진 조건에서  $g(1) = 8$ 이고  $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 2$ 이므로

$$g(1) = \int_0^1 f'(t) dt + (1+1)f(1) + 1$$

$$= \left[ f(t) \right]_0^1 + 2f(1) + 1$$

$$= f(1) - f(0) + 2f(1) + 1$$

$$= 3f(1) - 1$$

$$= 3(1+a-1+2) - 1$$

$$= 3a + 5 = 8$$

에서  $a = 1$

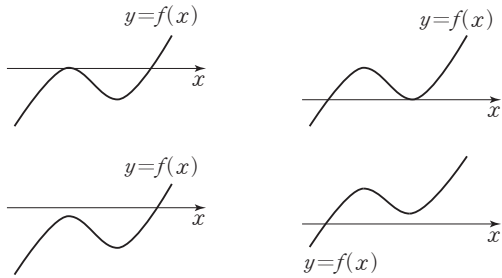
따라서  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ 이므로

$$f(-1) = -1 + 1 + 1 + 2 = 3$$

답 3

### 23

함수  $h(k)$ 의 최댓값이 2가 되려면 사차함수  $g(x)$ 가 극솟값을 갖는  $x$ 의 값이 오직 하나이어야 하므로  $g(x)$ 의 도함수인 삼차함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



즉, 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이어야 한다.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f(0)f(2) \geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a(a-4) \geq 0$$

$$a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 4 \text{ 에서 양수 } a \text{의 최솟값은 } 4 \text{이다.}$$

답 ④

**(필수 유형 ⑥)**

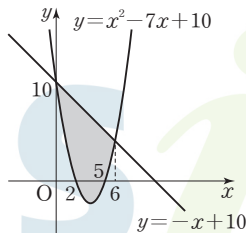
곡선  $y=x^2-7x+10$ 과 직선  $y=-x+10$ 의 교점의  $x$ 좌표는  $x^2-7x+10=-x+10$ 에서  $x^2-6x=0, x(x-6)=0$   
 $x=0$  또는  $x=6$

따라서 곡선  $y=x^2-7x+10$ 과 직선  $y=-x+10$ 은 그림과 같으므로 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \int_0^6 |(-x+10) - (x^2-7x+10)| dx$$

$$= \int_0^6 (-x^2+6x) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6$$

$$= -72 + 108 = 36$$



답 36

**24**

곡선  $y=6x^2-12x$ 와  $x$ 축의 교점의  $x$ 좌표는  $6x^2-12x=0$ 에서  $6x(x-2)=0$   
 $x=0$  또는  $x=2$

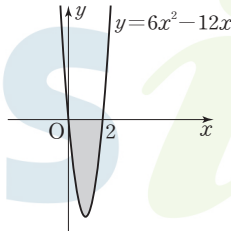
따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \int_0^2 |6x^2-12x| dx$$

$$= \int_0^2 (-6x^2+12x) dx$$

$$= \left[ -2x^3 + 6x^2 \right]_0^2$$

$$= 8$$

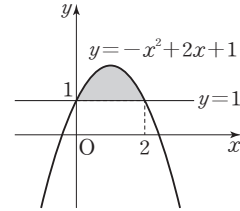


답 8

**25**

곡선  $y=-x^2+2x+1$ 과 직선  $y=1$ 의 교점의  $x$ 좌표는  $-x^2+2x+1=1$ 에서  $x^2-2x=0$   
 $x(x-2)=0$   
 $x=0$  또는  $x=2$

곡선  $y=-x^2+2x+1$ 과 직선  $y=1$ 은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+2x+1) - 1\} dx = \int_0^2 (-x^2+2x) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

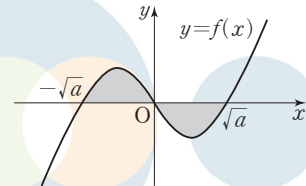
$$= -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

답 ②

**26**

함수  $f(x)=x^3-ax$ 의 그래프와  $x$ 축의 교점의  $x$ 좌표는  $x^3-ax=0$ 에서  $a$ 가 양수이므로  $x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$   
 $x=0$  또는  $x=-\sqrt{a}$  또는  $x=\sqrt{a}$

함수  $f(x)=x^3-ax$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x)=-f(x)$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} |x^3-ax| dx = 2 \int_{-\sqrt{a}}^0 (x^3-ax) dx = 2 \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{a}}^0$$

$$= 2 \left( -\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{1}{2}a^2 = 18$$

$$a^2 = 36$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 6$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 6x \text{ 이므로 } f(-1) = 5$$

답 ③

**27**

$f(x)=x^3-2x^2+k$ 에서  $f'(x)=3x^2-4x$ 이므로  $f'(x)=0$ 에서  $x(3x-4)=0$   
 $x=0$  또는  $x=\frac{4}{3}$

즉,  $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 곡선  $y=x^3-2x^2+k$  위의 점  $(0, k)$ 에서의 접선의 방정식은  $y=k$ 이다.

곡선  $y=x^3-2x^2+k$ 와 직선  $y=k$ 의 교점의  $x$ 좌표는

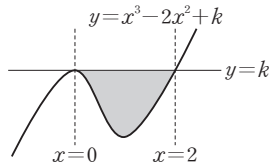
$$x^3-2x^2+k=k \text{ 에서 } x^3-2x^2=0 \text{ 이므로}$$

$$x^2(x-2)=0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 곡선  $y=x^3-2x^2+k$ 와 직선  $y=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 |k - (x^3 - 2x^2 + k)| dx \\
 &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



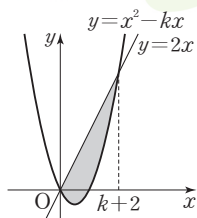
답 ③

## 28

곡선  $y = x^2 - kx$ 와 직선  $y = 2x$ 의 교점의  $x$ 좌표는  $x^2 - kx = 2x$ 에서  $x^2 - (k+2)x = 0$   
 $x\{x - (k+2)\} = 0$   
 $x = 0$  또는  $x = k+2$

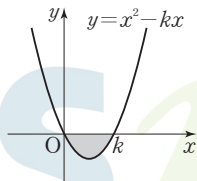
따라서 곡선  $y = x^2 - kx$ 와 직선  $y = 2x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S_1$ 은

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^{k+2} \{2x - (x^2 - kx)\} dx \\
 &= \int_0^{k+2} \{-x^2 + (k+2)x\} dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{k+2}{2}x^2 \right]_0^{k+2} = \frac{(k+2)^3}{6}
 \end{aligned}$$



곡선  $y = x^2 - kx$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이  $S_2$ 는

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_0^k (-x^2 + kx) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^k = \frac{k^3}{6}
 \end{aligned}$$



$S_1 = 8S_2$ 이므로  $(k+2)^3 = (2k)^3$ 에서  $k+2 = 2k$   
 따라서  $k = 2$

답 ④

## 29

조건 (나)에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 1\} = 0$ 에서  $f(0) = 1$

이때  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -1$ 이므로  $a = -1$

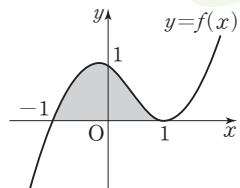
즉,  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 에서

$f(x) = x^3 - x^2 - x + C$  ( $C$ 는 적분상수)이고,  $f(0) = 1$ 이므로  $C = 1$

따라서  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ 이므로 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 는

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + 0 \\
 &= 2 \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



따라서  $30S = 30 \times \frac{4}{3} = 40$

답 40

## 필수 유형 ①

주어진 조건에서  $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$

이므로  $0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 그림과 같다고 하자.

또한 조건 (가)에서

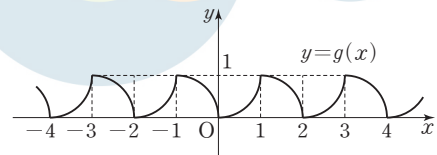
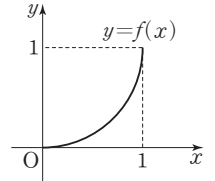
$-1 < x < 0$ 일 때, 함수  $y = g(x)$ 의 그래프는

$0 < x < 1$ 일 때의 함수  $y = f(x)$ 의 그래프를  $x$ 축

에 대하여 대칭이동한 후  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로

$1$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 조건 (나)에서 함수  $g(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이므로 함수  $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같이 나타낼 수 있다.



한편,  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$ 이고

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

이때 함수  $g(x)$ 의 주기는 2이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^2 g(x) dx &= \int_{-3}^{-1} g(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_1^2 g(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_{-1}^0 g(x) dx \\
 &= 1 + 1 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}
 \end{aligned}$$

답 ②

## 30

조건 (가)에서 함수  $f(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

에서  $b = 3$

조건 (나)에서  $x=0$ 일 때,  $f(-3) = f(3)$ 이고

$$f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$0 = 9 + 3a + b$$

$$b = 3 \text{이므로 } a = -4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x+3 & (-3 < x < 0) \\ x^2 - 4x + 3 & (0 \leq x \leq 3) \end{cases} \text{이고}$$

$$f(x-3) = f(x+3) \text{에서 } f(x) = f(x+6)$$

즉,  $f(x)$ 는 주기가 6인 주기함수이므로

$$\int_{-33}^{-29} f(x) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx$$

$$\int_{57}^{60} f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx$$

따라서



$$\begin{aligned} \int_{-33}^{-29} f(x) dx - \int_{57}^{60} f(x) dx &= \int_{-3}^1 f(x) dx - \int_{-3}^0 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ④

## 31

함수  $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax + 10$ 의 도함수는

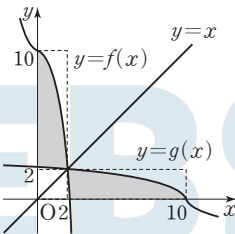
$$f'(x) = -3x^2 + 2ax - 3a$$

이때 삼차함수  $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax + 10$ 의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식  $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식  $f'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9a = a(a-9) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq 9$$

따라서  $a$ 의 최솟값은 0이므로  $f(x) = -x^3 + 10$ 이고, 그 역함수인  $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} \int_2^{10} g(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx - 2 \times 2 = \int_0^2 (-x^3 + 10) dx - 4 \\ &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + 10x \right]_0^2 - 4 = 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

답 12

## 필수 유형 ⑧

 $t \geq 3$ 일 때,  $v(t) = 2t - 6 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_3^k |v(t)| dt &= \int_3^k (2t-6) dt = \left[ t^2 - 6t \right]_3^k = (k^2 - 6k) - (9 - 18) \\ &= k^2 - 6k + 9 = 25 \end{aligned}$$

$$k^2 - 6k - 16 = 0, (k+2)(k-8) = 0$$

따라서  $k > 3$ 이므로  $k = 8$ 

답 ③

## 32

시각  $t=0$ 에서의 위치를  $a$ 라 하면 시각  $t=4$ 에서의 위치는

$$\begin{aligned} a + \int_0^4 v(t) dt &= a + \int_0^4 (-2t + 10) dt = a + \left[ -t^2 + 10t \right]_0^4 \\ &= a + (-16 + 40) = a + 24 \end{aligned}$$

이때 시각  $t=4$ 에서의 위치가 30이므로

$$a + 24 = 30, a = 6$$

따라서 시각  $t=1$ 에서의 위치는

$$\begin{aligned} 6 + \int_0^1 v(t) dt &= 6 + \int_0^1 (-2t + 10) dt = 6 + \left[ -t^2 + 10t \right]_0^1 \\ &= 6 + (-1 + 10) = 15 \end{aligned}$$

답 ②

## 다른 풀이

점 P의 시각  $t=1$ 에서의 위치를  $a$ 라 하면 시각  $t=4$ 에서의 위치는

$$a + \int_1^4 v(t) dt = a + \int_1^4 (-2t + 10) dt = a + \left[ -t^2 + 10t \right]_1^4 = a + 15$$

이므로  $a + 15 = 30$ 에서  $a = 15$ 따라서 점 P의 시각  $t=1$ 에서의 위치는 15이다.

## 33

시각  $t=1$ 에서의 점 P의 위치가  $-5$ 이므로

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^1 v(t) dt &= \int_0^1 (3t^2 - 4t + k) dt = \left[ t^3 - 2t^2 + kt \right]_0^1 \\ &= k - 1 = -5 \end{aligned}$$

에서  $k = -4$ 

$$\text{즉, } v(t) = 3t^2 - 4t - 4$$

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 속도  $v(t) = 0$ 이므로

$$3t^2 - 4t - 4 = 0 \text{에서 } (3t+2)(t-2) = 0$$

 $t > 0$ 이므로  $t = 2$  $0 < t < 2$ 일 때  $v(t) < 0$ 이고  $t > 2$ 일 때  $v(t) > 0$ 이므로시각  $t=2$ 일 때 점 P가 움직이는 방향을 바꾼다.따라서 시각  $t=0$ 에서 시각  $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |v(t)| dt &= \int_0^2 |3t^2 - 4t - 4| dt = \int_0^2 (-3t^2 + 4t + 4) dt \\ &= \left[ -t^3 + 2t^2 + 4t \right]_0^2 = 8 \end{aligned}$$

답 ⑤

## 34

두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치  $x$ 가  $x=k$ 일 때의 시각을  $t=a$  ( $a > 0$ )이라 하면

$$0 + \int_0^a v_1 dt = 0 + \int_0^a v_2 dt$$

$$\int_0^a (3t^2 + t) dt = \int_0^a (2t^2 + 3t) dt$$

$$\left[ t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^a = \left[ \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^a$$

$$a^3 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2$$

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 = \frac{1}{3}a^2(a-3) = 0$$

 $a > 0$ 이므로  $a = 3$ 따라서 시각  $t=3$ 에서의 점 P의 위치(또는 점 Q의 위치)  $x=k$ 에서

$$k = 3^3 + \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{63}{2} \text{이므로}$$

$$2k = 2 \times \frac{63}{2} = 63$$

답 63

정답

본문 78~85쪽

(필수 유형 ①) ③	01 ③	02 ②	03 ②
(필수 유형 ②) ⑤	04 ①	05 ④	06 8
(필수 유형 ③) 15	07 ②	08 ③	09 4
(필수 유형 ④) ⑤	10 ⑤	11 ③	12 ②
(필수 유형 ⑤) 16	13 ①	14 ④	15 ③
(필수 유형 ⑥) ③	16 ④	17 4	18 ④
(필수 유형 ⑦) ②	19 ①	20 ⑤	21 4
(필수 유형 ⑧) ③	22 ①		

(필수 유형 ①)

수열  $\{a_n\}$ 이 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$  ( $k$ 는 실수)라 하자.

$k = -1$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = (-1) + 1 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5$$

이므로 수열  $\left\{ \frac{2a_n - 3}{a_n + 1} \right\}$ 은 발산한다.

즉,  $k \neq -1$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3}{a_n + 1} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1)} \\ &= \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \\ &= \frac{2k - 3}{k + 1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

에서

$$3(k+1) = 4(2k-3), 5k = 15, k = 3$$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

01

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$  ( $k$ 는 실수)라 하면

$$k \neq 1 \text{인 경우 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{a_n - 1} = \frac{2k + 1}{k - 1} \text{이므로}$$

수열  $\left\{ \frac{2a_n + 1}{a_n - 1} \right\}$ 은 수렴하고

$$k = 1 \text{인 경우 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 1 - 1 = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1) = 2 \times 1 + 1 = 3 \text{이므로}$$

수열  $\left\{ \frac{2a_n + 1}{a_n - 1} \right\}$ 은 발산한다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3 - 1}{a_n - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n - 1)(a_n^2 + a_n + 1)}{a_n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + a_n + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1^2 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

답 ③

02

$f(m) = 2$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n + 3) = -\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = -2 + 3 = 1$$

이므로 수열  $\left\{ \frac{-a_n + 3}{a_n - 2} \right\}$ 은 발산한다.

즉,  $f(m) \neq 2$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a_n + 3}{a_n - 2} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n + 3)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2)} \\ &= \frac{-\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2} \\ &= \frac{-f(m) + 3}{f(m) - 2} = m \end{aligned}$$

에서  $m\{f(m) - 2\} = -f(m) + 3$

$$(m+1)f(m) = 2m+3$$

즉,  $f(m) = \frac{2m+3}{m+1}$ 이고  $f(m) < \frac{32}{15}$ 에서

$$\frac{2m+3}{m+1} < \frac{32}{15}$$

$$\frac{2m+3}{m+1} = \frac{2(m+1)+1}{m+1} = 2 + \frac{1}{m+1} < 2 + \frac{2}{15} \text{에서}$$

$$m+1 > \frac{15}{2}, m > \frac{13}{2}$$

따라서 자연수  $m$ 의 최솟값은 7이다.

답 ②

답 ③

03

$a_n + b_n = p_n, c_n + d_n = q_n$ 이라 하면 두 수열  $\{p_n\}, \{q_n\}$ 은 각각 수렴한다.

ㄱ. 수열  $\{b_n\}$ 이 수렴한다고 가정하면  $a_n = p_n - b_n$ 에서 두 수열  $\{p_n\}, \{b_n\}$ 이 각각 수렴하므로 수열  $\{a_n\}$  또한 수렴하고 이는 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 수열  $\{b_n\}$ 은 발산한다. (참)

ㄴ.  $b_n = p_n - a_n, d_n = q_n - c_n$ 에서

$$b_n + d_n = (p_n - a_n) + (q_n - c_n) = p_n + q_n - (a_n + c_n)$$

이때 세 수열  $\{p_n\}, \{q_n\}, \{a_n + c_n\}$ 이 각각 수렴하므로 수열  $\{b_n + d_n\}$ 도 수렴한다. (참)

ㄷ.  $\{a_n\}: 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$\{b_n\}: 1, 3, 1, 3, 1, 3, \dots$

$\{c_n\}: 2, -2, 2, -2, 2, -2, \dots$

$\{d_n\}: 2, 6, 2, 6, 2, 6, \dots$

이면

$$\begin{aligned} \{a_n + b_n\} &: 2, 2, 2, 2, 2, \dots \\ \{c_n + d_n\} &: 4, 4, 4, 4, 4, \dots \\ \{a_n \times c_n\} &: 2, 2, 2, 2, 2, \dots \\ \{b_n \times d_n\} &: 2, 18, 2, 18, 2, 18, \dots \end{aligned}$$

이때 두 수열  $\{a_n\}, \{c_n\}$ 은 각각 발산하고,

두 수열  $\{a_n + b_n\}, \{c_n + d_n\}$ 은 각각 수렴하며,

수열  $\{a_n \times c_n\}$ 이 수렴하지만 수열  $\{b_n \times d_n\}$ 은 발산한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**(필수 유형 ②)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{5+0}{1-0} = 5$$

**04**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + 6n + 5} - \sqrt{bn^2 + 2n + 3})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n^2 + 4n + 2}{\sqrt{an^2 + 6n + 5} + \sqrt{bn^2 + 2n + 3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n + 4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{a + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{b + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}}$$

한편,  $a \neq b$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a-b)n + 4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{a + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{b + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}} \right| = \infty \text{이므로}$$

$a = b$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n + 4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{a + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{b + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{a + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{a + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2}{5}$$

에서  $\sqrt{a} = 5, a = b = 25$ 이므로

$$a + b = 25 + 25 = 50$$

답 ②

답 ⑤

**05**

(i) 다항함수  $f(x)$ 가 상수함수이거나 일차함수인 경우

$f(n) - n^2$ 은 최고차항의 계수가  $-1$ 인  $n$ 에 대한 이차식이고,

$f(n) - 2n^2$ 은 최고차항의 계수가  $-2$ 인  $n$ 에 대한 이차식이므로

$\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}$ 은 최고차항의 계수가  $2$ 인  $n$ 에 대한 사차식이다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}}{n^4 + n^2 + 1} = 2$ 이고

조건 (가)를 만족시킨다.

(ii) 다항함수  $f(x)$ 가 이차함수인 경우

함수  $f(x)$ 의 이차항의 계수를  $p$  ( $p \neq 0$ )이라 하자.

①  $p = 1$ 인 경우

$f(n) - n^2$ 은  $n$ 에 대한 일차 이하의 식이므로

$\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}$ 은  $n$ 에 대한 삼차 이하의 식이다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}}{n^4 + n^2 + 1} = 0$ 이고

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

②  $p = 2$ 인 경우

$f(n) - 2n^2$ 은  $n$ 에 대한 일차 이하의 식이므로

$\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}$ 은  $n$ 에 대한 삼차 이하의 식이다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}}{n^4 + n^2 + 1} = 0$ 이고

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③  $p \neq 1, p \neq 2$ 인 경우

$f(n) - n^2$ 은 최고차항의 계수가  $p - 1$ 인  $n$ 에 대한 이차식이고,

$f(n) - 2n^2$ 은 최고차항의 계수가  $p - 2$ 인  $n$ 에 대한 이차식이고

로  $\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}$ 은 최고차항의 계수가

$(p - 1)(p - 2)$ 인  $n$ 에 대한 사차식이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}}{n^4 + n^2 + 1}$$

$$= (p - 1)(p - 2)$$

$$= p^2 - 3p + 2 = 2$$

에서

$$p^2 - 3p = 0, p(p - 3) = 0$$

$$p \neq 0 \text{이므로 } p = 3$$

(iii) 다항함수  $f(x)$ 의 차수가 삼차 이상인 경우

두 식  $f(n) - n^2, f(n) - 2n^2$ 은 모두  $n$ 에 대한 삼차 이상의 식이

므로  $\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}$ 은  $n$ 에 대한 육차 이상의 식이다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\{f(n) - n^2\} \times \{f(n) - 2n^2\}}{n^4 + n^2 + 1} \right| = \infty$ 이고

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서

$f(x) = ax + b$  또는  $f(x) = 3x^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d$ 는 실수)이고

조건 (나)에서  $f'(0) = 1$ 이다.

$f(x) = ax + b$ 인 경우  $f'(x) = a$ 에서

$f'(0) = a = 1$ 이고  $f(0) = b$ 이므로

$$f(x) = x + b = x + f(0)$$

$f(x) = 3x^2 + cx + d$ 인 경우  $f'(x) = 6x + c$ 에서

$f'(0) = c = 1$ 이고  $f(0) = d$ 이므로

$$f(x) = 3x^2 + x + d = 3x^2 + x + f(0)$$

따라서  $g(x) = f(x) - f(0)$ 에서

$$g(x) = x \text{ 또는 } g(x) = 3x^2 + x \text{이고}$$

서로 다른  $g(3)$ 의 값의 합은

$$3 + (3 \times 3^2 + 3) = 3 + 30 = 33$$

답 ④

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n + \frac{a_n}{n^2}} - \sqrt{a_n - \frac{a_n}{n^2}} &= \frac{\left(a_n + \frac{a_n}{n^2}\right) - \left(a_n - \frac{a_n}{n^2}\right)}{\sqrt{a_n + \frac{a_n}{n^2}} + \sqrt{a_n - \frac{a_n}{n^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{a_n}}{n^2} \times \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} &= \frac{2}{\sqrt{1+1} + \sqrt{1-1}} = 1 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^2} &= 1 \\ n^p \times \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} \right\} \\ &= n^p \times \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 \right\} - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)^2 \right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)^2}} \\ &= \frac{n^p}{(a_n)^2} \times \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)^2}} \\ &= n^{p-8} \times \left(\frac{n^2}{\sqrt{a_n}}\right)^4 \times \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)^2}} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편,  $a_n \geq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^2} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{a_n}}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^2} = 1$ 에서  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+1} + \sqrt{1-1}} = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에서 수열  $\left\{ n^p \times \left( \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} \right) \right\}$ 이 수렴하기

위해서는

$$p - 8 \leq 0, p \leq 8$$

따라서 자연수  $p$ 의 최댓값은 8이다.

답 8

**(필수 유형 ⑥)**

$3n^2 + 2n < a_n < 3n^2 + 3n$ 의 각 변을  $n^2$ 으로 나누면

$$n^2 > 0 \text{이므로 } 3 + \frac{2}{n} < \frac{a_n}{n^2} < 3 + \frac{3}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n}\right) = 3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 3$$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times \frac{a_n}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{5 \times 3}{1 + 0} = 15$

답 15

07

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $n^2 + n + 1 > 0$ 이므로 각 변을  $n^2 + n + 1$ 로 나누면

$$\begin{aligned} \frac{5n^2 + 3n}{n^2 + n + 1} &< a_n < \frac{7n^2 + 4n + 2}{n^2 + n + 1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n}{n^2 + n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{5 + 0}{1 + 0 + 0} = 5 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 4n + 2}{n^2 + n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{7 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 7 \end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$5 \leq a \leq 7$$

$a$ 가 자연수이므로 가능한 모든  $a$ 의 값은 5, 6, 7

따라서 가능한 모든  $a$ 의 값의 합은

$$5 + 6 + 7 = 18$$

답 ②

**▶ 참고**

$a_n = \frac{5n^2 + 3n + 1}{n^2 + n + 1}$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n + 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 5$$

$a_n = \frac{6n^2 + 3n + 1}{n^2 + n + 1}$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n + 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 6$$

$a_n = \frac{7n^2 + 4n + 1}{n^2 + n + 1}$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 4n + 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 7$$

08

조건 (가)에서

$$(5n + 1) \times \left(n + \frac{1}{3}\right) < (5n + 1)a_n < (5n + 1) \times \sqrt{n^2 + 2n + 2} \quad \dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^2 + 4n} < \frac{1}{b_n} < \frac{1}{\sqrt{4n^4 + n^3}} \\ \frac{1}{7(2n^2 + 4n)} < \frac{1}{7b_n} < \frac{1}{7\sqrt{4n^4 + n^3}} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

㉑, ㉒에서

$$\frac{(5n+1) \times \left(n + \frac{1}{3}\right)}{7(2n^2+4n)} < \frac{(5n+1)a_n}{7b_n} < \frac{(5n+1) \times \sqrt{n^2+2n+2}}{7\sqrt{4n^4+n^3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+1) \times \left(n + \frac{1}{3}\right)}{7(2n^2+4n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(5 + \frac{1}{n}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3n}\right)}{7\left(2 + \frac{4}{n}\right)}$$

$$= \frac{5 \times 1}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+1) \times \sqrt{n^2+2n+2}}{7\sqrt{4n^4+n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(5 + \frac{1}{n}\right) \times \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}}{7\sqrt{4 + \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{5 \times 1}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+1)a_n}{7b_n} = \frac{5}{14}$$

답 ③

## 09

$$S_n = \frac{n\{2 \times 1 + (n-1)d_1\}}{2} = \frac{d_1}{2}n^2 + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)n$$

$$T_n = \frac{n\{2 \times 1 + (n-1)d_2\}}{2} = \frac{d_2}{2}n^2 + \left(1 - \frac{d_2}{2}\right)n$$

$$S_n \times T_n = \frac{d_1 d_2}{4}n^4 + \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{2}\right)n^3 + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)\left(1 - \frac{d_2}{2}\right)n^2$$

$S_n \times T_n < n^4 \times a_n < S_n \times T_n + n^3$ 에서

$$\frac{d_1 d_2}{4}n^4 + \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{2}\right)n^3 + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)\left(1 - \frac{d_2}{2}\right)n^2$$

$$< n^4 \times a_n$$

$$< \frac{d_1 d_2}{4}n^4 + \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{2} + 1\right)n^3 + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)\left(1 - \frac{d_2}{2}\right)n^2$$

..... ㉑

부등식 ㉑의 각 변을  $n^4$ 으로 나누면

$$\frac{d_1 d_2}{4} + \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{2}\right) \times \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)\left(1 - \frac{d_2}{2}\right) \times \frac{1}{n^2}$$

$$< a_n$$

$$< \frac{d_1 d_2}{4} + \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{2} + 1\right) \times \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)\left(1 - \frac{d_2}{2}\right) \times \frac{1}{n^2}$$

이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d_1 d_2}{4} + \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{2}\right) \times \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)\left(1 - \frac{d_2}{2}\right) \times \frac{1}{n^2} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d_1 d_2}{4} + \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{d_1 d_2}{2} + 1\right) \times \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{d_1}{2}\right)\left(1 - \frac{d_2}{2}\right) \times \frac{1}{n^2} \right\}$$

$$= \frac{d_1 d_2}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{d_1 d_2}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{ 이므로 } \frac{d_1 d_2}{4} = 1$$

따라서  $d_1 d_2 = 4$

답 4

## (필수 유형 4)

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하자.

$$ar=0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}} = 0$$

즉,  $ar \neq 0$  이고  $a_n = ar^{n-1} = \frac{a}{r} \times r^n$ 이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{r} \times r^n + 1}{3^n + \frac{1}{2} \times 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

(i)  $|r| < 4, r \neq 0$  일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}} = \frac{0+0}{0+\frac{1}{2}} = 0$$

(ii)  $r=4$  일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{a}{4} + 0}{0 + \frac{1}{2}} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 3 \text{ 에서 } a = 6$$

(iii)  $r \leq -4$  일 때

$$\text{수열 } \left\{ \frac{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}} \right\} \text{ 은 진동한다.}$$

(iv)  $r > 4$  일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}} \right| = \infty$$

(i)~(iv)에서  $a=6, r=4$ 이므로

$$a_n = 6 \times 4^{n-1}$$

$$\text{따라서 } a_2 = 6 \times 4^{2-1} = 24$$

답 ⑤

## 10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(4^{n+1}-2^n)}{(2^n+1)(4^n-2^n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 2^n \times 4^n - 2^n \times 2^n}{(2^n)^3 + 1^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times (2 \times 4)^n - (2 \times 2)^n}{(2^3)^n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 8^n - 4^n}{8^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4^n}{8^n}}{1 + \frac{1}{8^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^n} = \frac{4-0}{1+0} = 4$$

답 ⑤

# 11

$0 < a < 1$ 이면  $a^2 < a$ 이므로

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n} - a^n}{a^{2n} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a^2}{a}\right)^n - 1}{\left(\frac{a^2}{a}\right)^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1}$$

$$= \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

$a = 1$ 이면  $a^2 = a = 1$ 이므로  $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n - 1^n}{1^n + 1^n} = 0$

$a > 1$ 이면  $a^2 > a$ 이므로

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n} - a^n}{a^{2n} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{a}{a^2}\right)^n}{1 + \left(\frac{a}{a^2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^n}$$

$$= \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

조건 (가)에서  $f(a_1) \times f(a_2) \times f(a_3) \times f(a_4) = 1$ 이므로

- (i)  $f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)$ 의 값은 모두 1
- (ii)  $f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)$ 의 값은 모두 -1
- (iii)  $f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)$ 의 값 중 두 개의 값은 1, 두 개의 값은 -1의 세 가지 경우로 구분할 수 있다.

(i)의 경우  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 의 값은 모두 1보다 크므로

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 > 1$ 이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)의 경우  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 의 값은 모두 1보다 작은 양수이므로

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 < 1$ 이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii)의 경우  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 의 값 중 두 개의 값은 1보다 크고, 두 개의 값은 1보다 작은 양수이므로 조건 (나)를 만족시키는  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 가 존재한다.

따라서 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 경우는 (iii)의 경우이므로

$$f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4) = 1 \times 2 + (-1) \times 2 = 0$$

답 ③

# 12

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \begin{cases} \frac{1}{a} & (a > b) \\ 1 & (a = b) \\ b & (a < b) \end{cases}$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n + c^{n+1}}{b^{n+1} + c^n} = \begin{cases} \frac{1}{b} & (b > c) \\ 1 & (b = c) \\ c & (b < c) \end{cases}$$

ㄱ.  $a > b, b = c$ 이면  $p = \frac{1}{a}, q = 1$ 이므로  $p \times q = \frac{1}{a} < 1$  (참)

ㄴ.  $p = \frac{1}{a}, q = \frac{1}{b}$ 이면  $p \times q = \frac{1}{ab} < c$

$$p = \frac{1}{a}, q = 1 \text{이면 } p \times q = \frac{1}{a} < c$$

$$p = \frac{1}{a}, q = c \text{ 이면 } p \times q = \frac{c}{a} < c$$

$$p = 1, q = \frac{1}{b} \text{ 이면 } p \times q = \frac{1}{b} < c$$

$$p = 1, q = 1 \text{ 이면 } p \times q = 1 < c$$

$$p = 1, q = c \text{ 이면 } p \times q = c$$

$$p = b, q = \frac{1}{b} \text{ 이면 } p \times q = 1 < c$$

$$p = b, q = 1 \text{ 이면 } p \times q = b = c$$

$$p = b, q = c \text{ 이면 } p \times q = bc > c$$

이므로  $p \times q > c$ 인 경우는  $p = b, q = c$ 인 경우뿐이고, 이때  $a < b < c$ 이다. (참)

ㄷ.  $p \times q = 1$ 인 경우는

(i)  $a > b, b < c$ 인 경우

$$p \times q = \frac{1}{a} \times c = \frac{c}{a} \text{ 이고 } a = c \text{ 이면 } p \times q = 1$$

즉,  $a > b, a = c$

(ii)  $a = b = c$ 인 경우  $p \times q = 1 \times 1 = 1$

(iii)  $a < b, b > c$ 인 경우  $p \times q = b \times \frac{1}{b} = 1$

이때 (iii)에서  $a \neq c$ 인 경우  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 이므로

$$(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

참고

$$a = 2, b = 5, c = 3 \text{ 이면}$$

$$p = 5, q = \frac{1}{5}, p \times q = 5 \times \frac{1}{5} = 1 \text{ 이지만}$$

$$(a - b)(b - c)(c - a) = (2 - 5) \times (5 - 3) \times (3 - 2) \neq 0$$

## (필수 유형 6)

$P_n(4^n, 2^n), P_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$ 이므로

$$L_n = \sqrt{(4^{n+1} - 4^n)^2 + (2^{n+1} - 2^n)^2}$$

$$= \sqrt{(3 \times 4^n)^2 + (2^n)^2} = \sqrt{9 \times 16^n + 4^n}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{L_{n+1}}{L_n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{9 \times 16^{n+1} + 4^{n+1}}}{\sqrt{9 \times 16^n + 4^n}} \right)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times 16^{n+1} + 4^{n+1}}{9 \times 16^n + 4^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times 16 + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}{9 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{9 \times 16 + 4 \times 0}{9 + 0} = 16$$

답 16

# 13

$f(x) = 2x^3 - 9nx^2 + 12n^2x$ 라 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 18nx + 12n^2 = 6(x - n)(x - 2n)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = n \text{ 또는 } x = 2n$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

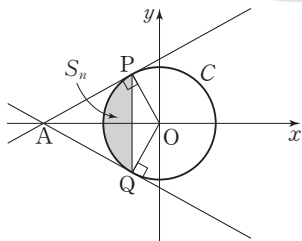
$x$	...	$n$	...	$2n$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$5n^3$	↘	$4n^3$	↗



따라서  $a_1=0$ ,  $n \geq 2$ 일 때  $x$ 에 대한 방정식  $2x^3 - 9nx^2 + 12n^2x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 자연수  $k$ 는  $4n^3+1, 4n^3+2, \dots, 5n^3-2, 5n^3-1$ 이고 그 개수는  $(5n^3-1) - (4n^3+1) + 1 = n^3-1$   $a_n = n^3-1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3+n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-1}{n^3+n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1-0}{1+0+0} = 1$$

14



원  $C: x^2+y^2=4^n$ 의 중심은 원점  $O$ 이고, 반지름의 길이는  $2^n$ 이다. 직각삼각형  $OPA$ 에서  $\overline{OA}=2^{n+1}$ ,  $\overline{OP}=2^n$

$$\cos(\angle AOP) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\angle AOP = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle POQ = 2 \times \angle AOP = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

부채꼴  $OPQ$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^n \times 2^n \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times 4^n \quad \dots \textcircled{1}$$

삼각형  $OPQ$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^n \times 2^n \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^n \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 에서

$$S_n = \frac{\pi}{3} \times 4^n - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^n = \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \times 4^n$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{4^{n+1}+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \times 4^n}{4^{n+1}+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{4 + \frac{1}{4^{n-1}}} = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{4} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}$$

15

(i)  $n=1$ 인 경우

1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 세 개 이상의 수를 택한 후 크기 순으로 나열한 수열이 공차가 1인 등차수열이 되는 경우는

1, 2, 3, 4, 5 / 1, 2, 3, 4 / 2, 3, 4, 5 / 1, 2, 3 / 2, 3, 4 / 3, 4, 5 의 6가지이므로  $a_1=6$

(ii)  $n \geq 2$ 인 경우

1부터  $3n+2$ 까지의 자연수 중 서로 다른 세 개 이상의 수를 택한 후 크기 순으로 나열한 수열이 공차가  $n$ 인 등차수열이 되는 경우는

1,  $n+1$ ,  $2n+1$ ,  $3n+1$  / 2,  $n+2$ ,  $2n+2$ ,  $3n+2$  /

1,  $n+1$ ,  $2n+1$  / 2,  $n+2$ ,  $2n+2$  / ... /  $n+1$ ,  $2n+1$ ,  $3n+1$  /  $n+2$ ,  $2n+2$ ,  $3n+2$

의  $2+(n+2)=n+4$ (가지)이므로

$$a_n = n+4 \quad (n \geq 2)$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(n+4)}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+24}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{24}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{6+0}{1+0} = 6$$

답 ③

(필수 유형 6)

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) = 0$$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_n = 4 + (n-1)d = dn + (4-d) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{dn + (4-d)}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( d + \frac{4-d}{n} \right) - \frac{3 + \frac{7}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( d + \frac{4-d}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\ &= (d+0) - \frac{3+0}{1+0} \\ &= d-3=0 \end{aligned}$$

즉,  $d=3$ 이고  $a_n=3n+1$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( 3 + \frac{1}{n} \right) - \left( 3 + \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ③

# 16

두 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 상수에 수렴하므로

$$f(x) = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} x(a_n + b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

$$= x^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)x + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ 라 하면

$$f(x) = x^2 + (S+T)x + (S-T) \quad \text{..... ㉠}$$

한편, 함수  $f(x)$ 는  $x = -2$ 에서 최솟값  $-2$ 를 가지므로

$$f(x) = (x+2)^2 - 2 = x^2 + 4x + 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서  $S+T=4, S-T=2$ 이므로  $S=3, T=1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2S + T$$

$$= 2 \times 3 + 1 = 7$$

# 17

$$a_{n+p-1} \times a_{n+p+1} = \frac{5}{n+p-1} \times \frac{5}{n+p+1}$$

$$= \frac{25}{2} \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p+1} \right)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+p-1} \times a_{n+p+1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{2} \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p+1} \right)$$

$$= \frac{25}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p+1} \right)$$

$$= \frac{25}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+p-1} - \frac{1}{k+p+1} \right)$$

$$= \frac{25}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} \right) + \left( \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3} \right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p} \right) + \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{25}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \right)$$

$$= \frac{25}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \right) = \frac{25(2p+1)}{2p(p+1)}$$

$$\frac{25(2p+1)}{2p(p+1)} = \frac{45}{8} \text{이므로 } 9p^2 - 31p - 20 = 0$$

$$(9p+5)(p-4) = 0$$

$p$ 는 자연수이므로  $p=4$

# 18

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{k+p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^p a_k \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^p a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^p a_k$$

$$= 2 - \sum_{k=1}^p a_k$$

$$2 - \sum_{k=1}^p a_k = \frac{2}{p+1}, \sum_{k=1}^p a_k = 2 - \frac{2}{p+1} = \frac{2p}{p+1}$$

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면

$$S_p = \frac{2p}{p+1}, S_{p-1} = \frac{2(p-1)}{(p-1)+1} = \frac{2p-2}{p} \quad (p=2, 3, 4, \dots)$$

$$a_p = S_p - S_{p-1} = \frac{2p}{p+1} - \frac{2p-2}{p} = \frac{2}{p(p+1)} \quad (p=2, 3, 4, \dots)$$

$$a_1 = S_1 = \frac{2 \times 1}{1+1} = 1$$

따라서  $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )이므로

$$a_3 + a_5 = \frac{2}{3 \times 4} + \frac{2}{5 \times 6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$$

답 ④

## (필수 유형 ①)

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하자.

수열  $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이  $a^2$ , 공비가  $r^2$ 인 등비수열이고

등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 이 0이 아닌 값에 수렴하므로

$$0 \leq r^2 < 1, -1 < r < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \times \frac{a}{1+r} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{1-r} \times \frac{a}{1+r} = 6 \quad \text{..... ㉠}$$

수열  $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이  $a$ , 공비가  $r^2$ 인 등비수열이고

수열  $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이  $ar$ , 공비가  $r^2$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$$

$$= \frac{a}{1-r^2} - \frac{ar}{1-r^2}$$

$$= \frac{a(1-r)}{1-r^2} = \frac{a}{1+r}$$

$$\text{에서 } \frac{a}{1+r} = 3 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 2$$

답 ②

# 19

두 등비수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비를 각각  $r_1, r_2$  ( $r_1 r_2 \neq 0$ )이라 하면

두 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 수렴하므로

$$-1 < r_1 < 1, -1 < r_2 < 1, -1 < r_1 r_2 < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r_1}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r_2}$$

수열  $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이  $a_1 b_1$ , 공비가  $r_1 r_2$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{에서}$$

$$\frac{a_1 b_1}{1-r_1 r_2} = \frac{a_1}{1-r_1} \times \frac{b_1}{1-r_2}$$

$a_1 b_1 \neq 0$ 이므로

답 4

$$1 - r_1 r_2 = (1 - r_1) \times (1 - r_2)$$

$$r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_1 - \frac{1}{2} r_2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$r_1 = \frac{a_2}{a_1}, r_2 = \frac{b_2}{b_1}$  이고  $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{a_2}{a_1}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{b_2}{b_1}\right) &= \left(\frac{1}{2} - r_1\right) \times \left(\frac{1}{2} - r_2\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} r_1 - \frac{1}{2} r_2 + r_1 r_2 \\ &= \frac{1}{4} + \left(r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_1 - \frac{1}{2} r_2\right) \\ &= \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

## 20

두 등비수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비  $r, r'$ 이

$-1 < r < 1, -1 < r' < 1$ 이므로

두 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 각각 수렴하고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r'}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{a_1}{1-r} + \frac{b_1}{1-r'}$$

조건 (가)에서

$$(1-r) \times \left(\frac{a_1}{1-r} + \frac{b_1}{1-r'}\right) = a_1 + \frac{1-r}{1-r'} \times b_1 = a_1 + b_1$$

$$\frac{1-r}{1-r'} \times b_1 = b_1 \text{에서 } b_1 \neq 0 \text{이므로 } \frac{1-r}{1-r'} = 1$$

즉,  $r = r'$

조건 (나)에서  $r + r' = 1$ 이므로

$$r = r' = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } rr' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

답 ①

## 21

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

수열  $\{|a_n|\}$ 의 첫째항은  $|a|$ , 공비는  $|r|$ 이다.

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로  $-1 < r < 1, r \neq 0$ 이고,

$0 < |r| < 1$ 이므로 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  또한 수렴한다.

$a \neq 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}$ 이므로 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ 의 값은  $a$ ,

$r$ 의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

(i)  $a > 0, 0 < r < 1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{|a|}{1-|r|} = \frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \frac{a}{1-r} + \frac{a}{1-r} = \frac{2a}{1-r} \neq 0$$

(ii)  $a > 0, -1 < r < 0$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{|a|}{1-|r|} = \frac{a}{1+r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \frac{a}{1-r} + \frac{a}{1+r} = \frac{2a}{1-r^2} \neq 0$$

답 ⑤

(iii)  $a < 0, 0 < r < 1$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{|a|}{1-|r|} = -\frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \frac{a}{1-r} + \left(-\frac{a}{1-r}\right) = 0$$

(iv)  $a < 0, -1 < r < 0$ 일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{|a|}{1-|r|} = -\frac{a}{1+r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \frac{a}{1-r} + \left(-\frac{a}{1+r}\right) = \frac{2ar}{1-r^2} \neq 0$$

조건 (나)에서  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = 0$ 이므로

$a < 0, 0 < r < 1$

수열  $\{|a_{2n}|\}$ 의 첫째항은  $|ar|$ , 공비는  $r^2$ 이고

수열  $\{|a_{3n}|\}$ 의 첫째항은  $|ar^2|$ , 공비는  $|r|^3$ 이다.

이때  $a < 0, 0 < r < 1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = \frac{|ar|}{1-r^2} = -\frac{ar}{1-r^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}| = \frac{|ar^2|}{1-|r|^3} = -\frac{ar^2}{1-r^3}$$

$$\text{조건 (다)에서 } 3 \times \left(-\frac{ar}{1-r^2}\right) = 7 \times \left(-\frac{ar^2}{1-r^3}\right)$$

$$(-3) \times \frac{ar}{(1-r)(1+r)} = (-7) \times \frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}$$

$$\frac{3}{1+r} = \frac{7r}{1+r+r^2}$$

$$4r^2 + 4r - 3 = 0, (2r-1)(2r+3) = 0$$

$$0 < r < 1 \text{이므로 } r = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } a < 0, r = \frac{1}{2}$$

따라서

$$\frac{|a_1| + a_2}{a_1} = \frac{|a_1|}{a_1} + \frac{a_2}{a_1}$$

$$= \frac{|a|}{a} + \frac{ar}{a}$$

$$= \left(-\frac{a}{a}\right) + r$$

$$= (-1) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$k = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$16k^2 = 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 16 \times \frac{1}{4} = 4$$

답 4

참고

조건 (나)에서  $a_n + |a_n|$ 의 값은  $a_n > 0$ 이면  $2a_n > 0, a_n < 0$ 이면 0이고

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = 0$ 이므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n < 0$ 이다.

따라서  $a < 0, r > 0$ 임을 알 수 있다.

(필수 유형 ⑧)

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

그림  $R_2$ 에서  $\angle O_1 A_2 O_2 = \frac{\pi}{4}$ 이므로

삼각형  $O_1 A_2 O_2$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{에서 } \overline{O_2A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

그러므로 부채꼴  $O_1A_1O_2$ 와 부채꼴  $O_2A_2O_3$ 은 서로 닮음이고 닮음비는  $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은 첫째항이  $\frac{\pi}{8}$ 이고 공비가  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 인 등비급수의 합과 같으므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

답 ③

## 22

선분  $A_1B_1$ 의 중점을  $O$ 라 하면 점  $O$ 는 선분  $A_1B_1$ 을 지름으로 하는 반원의 중심이므로

$$\overline{OB_1} = \overline{OC_1} = 1$$

중심각과 원주각의 관계에 의하여

$$\angle C_1OB_1 = 2 \times \angle C_1A_1B_1 = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

부채꼴  $C_1OB_1$ 의 넓이는

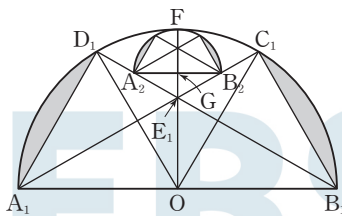
$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

삼각형  $C_1OB_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

두 부채꼴  $C_1OB_1$ ,  $D_1OA_1$ , 두 삼각형  $C_1OB_1$ ,  $D_1OA_1$ 은 각각 서로 합동이므로

$$S_1 = 2 \times \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$



선분  $A_2B_2$ 와 선분  $E_1F$ 의 교점을  $G$ 라 하면  
점  $G$ 는 선분  $A_2B_2$ 를 지름으로 하는 반원의 중심이므로

$$\overline{A_2G} = \overline{B_2G} = \overline{FG}$$

$\overline{A_2G} = \overline{B_2G} = \overline{FG} = x$  ( $x > 0$ )이라 하면

직각삼각형  $B_2GE_1$ 에서  $\angle GE_1B_2 = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{GE_1} = \frac{x}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

직각삼각형  $E_1OB_1$ 에서

$$\overline{E_1O} = \overline{B_1O} \times \tan \frac{\pi}{6} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{FG} + \overline{GE_1} + \overline{E_1O} = 1 \text{이므로}$$

$$x + \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$

$$x = 2 - \sqrt{3}$$

그러므로 선분  $A_nB_n$ 을 지름으로 하는 반원과 선분  $A_{n+1}B_{n+1}$ 을 지름으로 하는 반원은 서로 닮음이고 닮음비가  $1 : 2 - \sqrt{3}$ 이다.

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은 첫째항이  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 공비가  $(2 - \sqrt{3})^2$ 인 등비급수의 합과 같으므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3} - 6} \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3} - 18} \pi - \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 12} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 3}{18} \pi - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

답 ①

08 미분법

정답

본문 89~99쪽

(필수 유형 ①) ④	01 ①	02 ④	03 ②
(필수 유형 ②) 4	04 ⑤	05 ①	06 ③
(필수 유형 ③) ②	07 ③	08 2	09 ⑤
(필수 유형 ④) ③	10 ③	11 ②	12 2
(필수 유형 ⑤) ④	13 ②	14 ⑤	15 ③
(필수 유형 ⑥) ①	16 ④	17 ①	18 3
(필수 유형 ⑦) ⑤	19 ①	20 ④	21 ④
(필수 유형 ⑧) ⑤	22 ②	23 ④	24 ④
(필수 유형 ⑨) ②	25 ④	26 ①	27 ④
(필수 유형 ⑩) ④	28 ④	29 ③	30 ③
(필수 유형 ⑪) 4	31 ②	32 ④	33 ④

(필수 유형 ①)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)} \times (\sqrt{x+4}+2) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times (\sqrt{x+4}+2) \right\}$$

$$= 1 \times (2+2) = 4$$

답 ④

01

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+x^2)}{x(5^x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_5(1+x^2)}{x^2} \times \frac{x}{5^x-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln 5} \times \frac{1}{\ln 5} = \frac{1}{(\ln 5)^2}$$

답 ①

02

두 이차함수  $f(x), g(x)$ 는 각각  $x=2$ 에서 연속이고,  $g(2)=0$ 이므로  
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2) = 0$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{f(x)g(x)} - 1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{e^{f(x)g(x)} - 1}{f(x)g(x)} \times f(x) \right\}$$

$$= 1 \times f(2) = f(2) = 3$$

즉,  $f(2) = 3$

조건 (다)에서  $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\frac{f(x)}{g(x)}} \times \frac{1}{g(x)} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 \text{ 이면 } \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\frac{f(x)}{g(x)}} \times \frac{1}{g(x)} \right\} = \infty \text{ 이므로}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq 0$ 이다.

또한 이차함수  $g(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\frac{f(x)}{g(x)}} \times \frac{1}{g(x)} \right\} = \frac{1}{g(1)} = -\frac{1}{3}$$

즉,  $g(1) = -3$

$f(1) = 0, f(2) = 3$ 이므로  $f(x) = (x-1)(x+a)$  ( $a$ 는 상수)라 하면

$f(2) = 2+a=3$ 에서  $a=1$

$f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$g(1) = -3, g(2) = 0$ 이므로  $g(x) = (x-2)(x+b)$  ( $b$ 는 상수)라 하면  $g(1) = -(1+b) = -3$ 에서  $b=2$

$g(x) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$

따라서

$$f(3) + g(3) = (3^2 - 1) + (3^2 - 4) = 8 + 5 = 13$$

답 ④

03

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} + 1 - e^{mx} - e^{nx}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{e^{6x} - 1}{x} - \frac{e^{mx} - 1}{x} - \frac{e^{nx} - 1}{x} \right) \times \frac{1}{x} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( 6 \times \frac{e^{6x} - 1}{6x} - m \times \frac{e^{mx} - 1}{mx} - n \times \frac{e^{nx} - 1}{nx} \right) \times \frac{1}{x} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 6 \times \frac{e^{6x} - 1}{6x} - m \times \frac{e^{mx} - 1}{mx} - n \times \frac{e^{nx} - 1}{nx} \right) = 6 - m - n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \infty \text{ 이므로}$$

$m+n \neq 6$ 이면 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$m+n = 6$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} + 1 - e^{mx} - e^{nx}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(m+n)x} + 1 - e^{mx} - e^{nx}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{mx} - 1)(e^{nx} - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( m \times \frac{e^{mx} - 1}{mx} \right) \times \left( n \times \frac{e^{nx} - 1}{nx} \right) \right\} = mn$$

$m+n=6$ 을 만족시키는 두 자연수  $m, n$ 의 모든 순서쌍  $(m, n)$ 은

$(1, 5), (2, 4), (3, 3)$ 이므로

$k=mn$ 에서  $k=5$  또는  $k=8$  또는  $k=9$

따라서 모든 실수  $k$ 의 값의 합은

$$5 + 8 + 9 = 22$$

답 ②

**(필수 유형 ②)**

$$f(x) = x^3 \ln x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 \times \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$$

$$f'(e) = 3e^2 \ln e + e^2 = 3e^2 \times 1 + e^2 = 4e^2$$

$$\text{따라서 } \frac{f'(e)}{e^2} = \frac{4e^2}{e^2} = 4$$

**04**

$$f(x) = \ln x^3 = 3 \ln x \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

$$\text{따라서 } f'(2) = \frac{3}{2}$$

**05**

$$f'(x) = e^x, g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\text{조건 (가)에서 } e^t = \log_a t = \frac{\ln t}{\ln a} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{조건 (나)에서 } e^t = \frac{1}{t \ln a} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{\ln t}{\ln a} = \frac{1}{t \ln a}$$

$$\ln a \neq 0 \text{이므로 } \ln t = \frac{1}{t}$$

$$\text{따라서 } t \times \ln t = 1$$

**06**

$$t = t^{\ln e} = e^{\ln t} \text{이고 } y = te^x = e^{\ln t} \times e^x = e^{x + \ln t} \text{이므로}$$

곡선  $y = te^x$ 은 곡선  $y = e^x$ 을  $x$ 축의 방향으로  $-\ln t$ 만큼 평행이동한 곡선이다.

$\overline{AC} = \overline{BD} = \ln t$ 이고 두 직선  $y = t, y = t^2 + t$ 는 서로 평행하므로 사각형  $ABDC$ 는 평행사변형이다.

$$\text{따라서 } S(t) = \ln t \times \{(t^2 + t) - t\} = t^2 \ln t$$

$$S'(t) = 2t \ln t + t^2 \times \frac{1}{t} = 2t \ln t + t$$

$$S'(2) = 4 \ln 2 + 2$$

**(필수 유형 ③)**

$$2 \cos \alpha = 3 \sin \alpha \text{에서 } \cos \alpha \neq 0 \text{이므로}$$

$$\text{양변을 } \cos \alpha \text{로 나누면 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{3}$$

$$\text{즉, } \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$1 = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{2}{3} + \tan \beta}{1 - \frac{2}{3} \times \tan \beta}$$

$$1 - \frac{2}{3} \tan \beta = \frac{2}{3} + \tan \beta$$

$$\frac{5}{3} \tan \beta = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \tan \beta = \frac{1}{5}$$

답 4

**07**

$$\sin \theta = 2 \cos \theta \text{에서}$$

$\cos \theta \neq 0$ 이므로 양변을  $\cos \theta$ 로 나누면

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2$$

$$\text{즉, } \tan \theta = 2$$

$$\text{따라서 } \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 2^2 = 5$$

답 ⑤

답 ②

**08**

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cos y + \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin y \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 2 \sin y + \cos y = \frac{2}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} 10 \sin y + 5 \cos y &= 5(2 \sin y + \cos y) \\ &= 5 \times \frac{2}{5} = 2 \end{aligned}$$

답 ③

답 2

**09**

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{2\sqrt{2}}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\cos(x+y) = \sqrt{1 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{10} - \frac{2\sqrt{2}}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x-y \leq \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

답 ③



$$\cos(x-y) = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin\{(x+y) + (x-y)\} \\ &= \sin(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y)\sin(x-y) \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$

**필수 유형 4**

선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 호 AB 위의 점이므로  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이다.

직각삼각형 PAB에서

$$l(\theta) = \overline{AB} \times \sin \theta = 2 \sin \theta$$

$$\overline{PA} = \overline{AB} \times \cos \theta = 2 \cos \theta$$

삼각형 PAQ에서  $\angle PQA = \pi - \theta - \frac{\theta}{3} = \pi - \frac{4}{3}\theta$ 이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PA}}{\sin(\angle PQA)} = \frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

$$\frac{2 \cos \theta}{\sin\left(\pi - \frac{4}{3}\theta\right)} = \frac{\overline{AQ}}{\sin \frac{\theta}{3}}$$

$$\overline{AQ} = \frac{2 \cos \theta \times \sin \frac{\theta}{3}}{\sin \frac{4}{3}\theta}$$

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{AQ} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \cos \theta \times \frac{2 \cos \theta \times \sin \frac{\theta}{3}}{\sin \frac{4}{3}\theta} \times \sin \theta \\ &= \frac{2 \sin \theta \times \sin \frac{\theta}{3}}{\sin \frac{4}{3}\theta} \times \cos^2 \theta \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{l(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \sin \theta \times \sin \frac{\theta}{3}}{\sin \frac{4}{3}\theta} \times \cos^2 \theta}{2 \sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}} \times \frac{\frac{4}{3}\theta}{\sin \frac{4}{3}\theta} \times \frac{1}{4} \times \cos^2 \theta \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**10**

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서

$\sin x > 0, \cos x > 0, \sin x \cos x > 0$ 이므로

$$f(x) = \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' \\ &= \cos x \cos x + \sin x \times (-\sin x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서

$\sin x > 0, \cos x < 0, \sin x \cos x < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin x \cos x \\ f'(x) &= -\{(\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'\} \\ &= -\{\cos x \cos x + \sin x \times (-\sin x)\} \\ &= -\cos^2 x + \sin^2 x \\ &= -\cos^2 x + (1 - \cos^2 x) = 1 - 2 \cos^2 x \end{aligned}$$

조건 (가)에서

$$f'(a) = 2 \cos^2 a - 1, f'(b) = 1 - 2 \cos^2 b \text{이므로}$$

$$(2 \cos^2 a - 1) + (1 - 2 \cos^2 b) = 2(\cos^2 a - \cos^2 b) = 0$$

$$\cos^2 a - \cos^2 b = 0$$

$$(\cos a + \cos b)(\cos a - \cos b) = 0 \text{에서}$$

$\cos a > 0, \cos b < 0$ 이므로

$$\cos a + \cos b = 0$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a+b = \pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$b-a = \frac{3}{5}\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{\pi}{5}, b = \frac{4}{5}\pi$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{a} = \frac{\frac{4}{5}\pi}{\frac{\pi}{5}} = 4$$

답 ⑤

답 ③

**11**

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ &= 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{2^{n+1}}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - (\cos x)^{2^n}}{x^2} \times \{1 + (\cos x)^{2^n}\} \right] \\ &= a_n \times 2 = 2a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

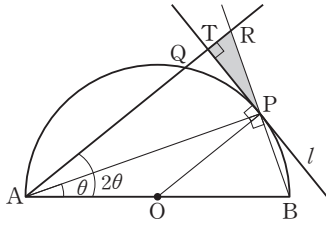
이므로 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열이다.

따라서  $a_3 = 1 \times 2^2 = 4, a_5 = 1 \times 2^4 = 16$ 이므로

$$a_3 + a_5 = 4 + 16 = 20$$

답 ③

답 ②



선분 AB의 중점을 O, 직선 AQ와 직선 BP의 교점을 R, 직선 AQ와 직선 l의 교점을 T라 하자.

두 삼각형 PAB, PAR에서

$$\angle PAB = \theta, \angle PAR = \angle RAB - \angle PAB = 2\theta - \theta = \theta$$

삼각형 PAB에서 선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 반원 위의 점이므로

$$\angle BPA = \frac{\pi}{2}, \angle RPA = \pi - \angle BPA = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

선분 PA는 공통이므로 두 삼각형 PAB, PAR는 서로 합동이다.

$$\overline{PB} = \overline{AB} \times \sin \theta = 2 \sin \theta \text{이므로 } \overline{PR} = 2 \sin \theta$$

$$\angle PBA = \frac{\pi}{2} - \theta \text{이므로 } \angle PRA = \angle PRT = \frac{\pi}{2} - \theta$$

직선 l이 반원 위의 점 P에서의 접선이므로  $\angle OPT = \frac{\pi}{2}$

원주각과 중심각의 관계에 의하여  $\angle POB = 2 \times \angle PAB = 2\theta$ 이므로

두 직선 AQ와 OP는 서로 평행하다.

$\angle OPT$ 와  $\angle RTP$ 는 서로 엇각이므로

$$\angle RTP = \angle OPT = \frac{\pi}{2}$$

즉, 직각삼각형 RTP에서

$$\overline{PT} = \overline{PR} \times \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\overline{RT} = \overline{PR} \times \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2 \sin^2 \theta$$

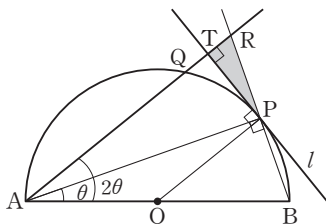
따라서

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PT} \times \overline{RT} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \cos \theta \times 2 \sin^2 \theta = 2 \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^3 \theta \cos \theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left[ 2 \cos \theta \times \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \right] \\ &= 2 \times 1 \times 1^3 = 2 \end{aligned}$$

다른 풀이 ①



선분 AB의 중점을 O, 직선 AQ와 직선 BP의 교점을 R, 직선 AQ와 직선 l의 교점을 T라 하자.

두 삼각형 PAB, PAR에서

$$\angle PAB = \theta, \angle PAR = \angle RAB - \angle PAB = 2\theta - \theta = \theta$$

삼각형 PAB에서 선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 반원 위의 점이므로

$$\angle BPA = \frac{\pi}{2}, \angle RPA = \pi - \angle BPA = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

선분 PA는 공통이므로 두 삼각형 PAB, PAR는 서로 합동이다.

$$\overline{PB} = \overline{AB} \times \sin \theta = 2 \sin \theta \text{이므로 } \overline{PR} = 2 \sin \theta$$

$$\angle PBA = \frac{\pi}{2} - \theta \text{이므로 } \angle PRA = \angle PRT = \frac{\pi}{2} - \theta$$

직선 l이 반원 위의 점 P에서의 접선이므로

$$\angle OPT = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle OPA = \angle OAP = \theta \text{이므로}$$

$$\angle APT = \angle OPT - \angle OPA = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\angle RPT = \angle RPA - \angle APT = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \theta$$

$$\angle RTP = \pi - \angle RPT - \angle PRT = \pi - \theta - \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\pi}{2}$$

즉, 직각삼각형 RTP에서

$$\overline{PT} = \overline{PR} \times \cos \theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \overline{RT} = \overline{PR} \times \sin \theta = 2 \sin^2 \theta$$

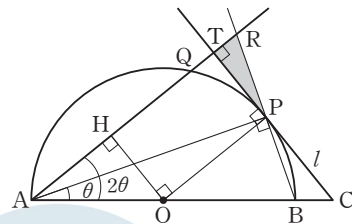
따라서

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PT} \times \overline{RT} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \cos \theta \times 2 \sin^2 \theta = 2 \sin^3 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^3 \theta \cos \theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left[ 2 \cos \theta \times \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \right] = 2 \times 1 \times 1^3 = 2 \end{aligned}$$

다른 풀이 ②



선분 AB의 중점을 O, 직선 AB와 직선 l의 교점을 C, 직선 AQ와 직선 BP의 교점을 R, 직선 AQ와 직선 l의 교점을 T, 점 O에서 직선 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$$\angle POB = 2 \times \angle PAB = 2\theta \text{이므로}$$

$\angle QAB = \angle POB = 2\theta$ 이고 두 직선 AQ와 OP는 서로 평행하다.

$\angle AHO$ 와  $\angle HOP$ 는 서로 엇각이고,

$$\angle AHO = \angle THO = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \angle THO = \angle HOP = \frac{\pi}{2}$$

또한 직선 l이 반원 위의 점 P에서의 접선이므로 두 직선 OP와 l은 서로 수직이다.

그러므로 사각형 OPTH는 직사각형이고

$$\angle PTH = \frac{\pi}{2} \text{에서 } \angle RTP = \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{PT} = \overline{OH} = \overline{OA} \times \sin 2\theta = \sin 2\theta$$

그림 2

삼각형 ABP에서 선분 AB가 반원의 지름이고 점 P가 반원 위의 점이므로  $\angle BPA = \frac{\pi}{2}$ 이고

$$\begin{aligned} \angle TPR = \angle CPB &= \frac{\pi}{2} - \angle BPO = \angle BPA - \angle BPO \\ &= \angle OPA = \angle PAB = \theta \end{aligned}$$

이므로 직각삼각형 RTP에서  $\overline{RT} = \overline{PT} \times \tan \theta = \sin 2\theta \tan \theta$  따라서

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PT} \times \overline{RT} = \frac{1}{2} \times \sin 2\theta \times \sin 2\theta \tan \theta$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2\theta \times \sin 2\theta \tan \theta}{2\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2 \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right) \\ &= 1 \times 1 \times 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

**필수 유형 ⑥**

$f(x^3+x) = e^x$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x^3+x) \times (x^3+x)' = (e^x)'$$

$$f'(x^3+x) \times (3x^2+1) = e^x$$

$x=1$ 을 대입하면  $f'(2) \times 4 = e$

$$\text{따라서 } f'(2) = \frac{e}{4}$$

답 ④

**13**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)' \times \ln x - x \times (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{(\ln e^2)^2} = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

답 ②

**14**

$g'(x) = f'(\sin x) \times (\sin x)' = f'(\sin x) \times \cos x$ 이므로

$g'(x) = 0$ 에서  $f'(\sin x) = 0$  또는  $\cos x = 0$

$0 < x < 2\pi$ 에서  $\cos x = 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은  $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 이고

$f'(x) = x+a$ 이므로  $f'(\sin x) = 0$ 에서  $\sin x = -a$

(i)  $|a| > 1$ 일 때

$0 < x < 2\pi$ 에서  $\sin x = -a$ 를 만족시키는  $x$ 는 존재하지 않으므로

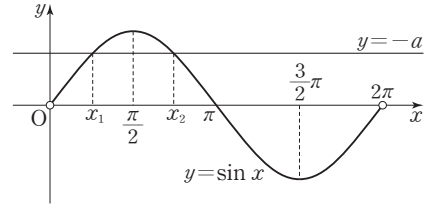
방정식  $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근은  $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 이다.

(ii)  $a = -1$ 일 때

$0 < x < 2\pi$ 에서  $\sin x = 1$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은  $\frac{\pi}{2}$ 이므로

방정식  $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근은  $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 이다.

(iii)  $|a| < 1, a \neq 0$ 일 때



$0 < x < 2\pi$ 에서 곡선  $y = \sin x$ 와 직선  $y = -a$ 가 만나는 두 점의  $x$ 좌표를 각각  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ )라 하면

$0 < x < 2\pi$ 에서  $\sin x = -a$ 를 만족시키는  $x$ 의 값은  $x_1, x_2$ 이므로 방정식  $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근은  $x_1, x_2, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 이다.

(iv)  $a = 0$ 일 때

$0 < x < 2\pi$ 에서  $\sin x = 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은  $\pi$ 이므로

방정식  $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근은  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 이다.

(v)  $a = 1$ 일 때

$0 < x < 2\pi$ 에서  $\sin x = -1$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은  $\frac{3}{2}\pi$ 이므로

방정식  $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근은  $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 이다.

(i)~(v)에서  $0 < x < 2\pi$ 에서 방정식  $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는  $a$ 의 값은 0이고, 이때 모든 실근은  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 이다.

따라서 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$$

답 ⑤

**15**

조건 (가)에서  $f(a) - g(a) = 0$ 이므로  $f(a) = g(a)$ 이고

조건 (나)에서  $f(a) = a$ 이므로  $f(a) = g(a) = a$

함수  $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수  $h(x)$ 는  $x=a$ 에서 미분가능하다.

함수  $h(x)$ 는  $x=a$ 에서 연속이고  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) = f(a)g(a)$ 이므로

$$f(g(a)) = f(a)g(a), f(a) = a \times a, a = a^2$$

$a=0$  또는  $a=1$

$a > 0$ 이므로  $a=1$

또한 함수  $h(x)$ 는  $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(g(1+h)) - f(g(1))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1)}{h}$$

한편, 합성함수의 미분법에 의하여

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(g(1+h)) - f(g(1))}{h} = f'(g(1)) \times g'(1) \text{이고,}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)g(1+h) - f(1)g(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times g(1+h) + f(1) \times \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \right\}$$

$$= f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

이므로

$$f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

$$f(1)=g(1)=1, f'(1)=3 \text{이므로}$$

$$f'(1) \times g'(1) = f'(1) + g'(1), 3g'(1) = 3 + g'(1)$$

$$g'(1) = \frac{3}{2}$$

따라서  $g'(a) = g'(1) = \frac{3}{2}$

답 ③

접고

$f(x)=3x-2, g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}, a=1$ 은 주어진 조건을 만족시키는 한 예이다.

필수 유형 ⑥

$x^2 - y \ln x + x = e$ 에서  $y$ 를  $x$ 에 대한 함수로 보고 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2x - \left( \frac{dy}{dx} \times \ln x + y \times \frac{1}{x} \right) + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \frac{y}{x} + 1}{\ln x} \quad (x \neq 1)$$

따라서 곡선  $x^2 - y \ln x + x = e$  위의 점  $(e, e^2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e - \frac{e^2}{e} + 1}{\ln e} = \frac{2e - e + 1}{1} = e + 1$$

답 ①

16

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t} + 1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t + \frac{4}{t^2} = \frac{2t^3 + 4}{t^2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t^3 + 4}{t^2}}{\frac{2\sqrt{t} + 1}{2\sqrt{t}}} = \frac{4\sqrt{t}(t^3 + 2)}{t^2(2\sqrt{t} + 1)}$$

따라서  $t=1$ 일 때

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \times (1+2)}{2+1} = 4$$

답 ④

17

$e^y \ln x = x$ 에서 진수의 조건에 의하여  $x > 0$ 이고,  $e^y > 0$ 이므로

$\ln x > 0$ 이다. 즉,  $x > 1$

점  $(a, b)$ 가 곡선  $e^y \ln x = x$  위의 점이므로

$$e^b \ln a = a \quad \dots \text{㉠}$$

$e^y \ln x = x$ 에서  $y$ 를  $x$ 에 대한 함수로 보고 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\left( e^y \times \frac{dy}{dx} \right) \times \ln x + e^y \times \frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y \ln x} \times \left( 1 - \frac{e^y}{x} \right)$$

곡선  $e^y \ln x = x$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가 0이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^b \ln a} \times \left( 1 - \frac{e^b}{a} \right) = 0$$

$$a = e^b \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면  $a = e, b = 1$

따라서  $a + b = e + 1$

답 ①

18

$x^2 + xy + \frac{7}{3}y^2 = 1$ 에서  $y$ 를  $x$ 에 대한 함수로 보고 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2x + \left( y + x \times \frac{dy}{dx} \right) + \frac{14}{3}y \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left( x + \frac{14}{3}y \right) \times \frac{dy}{dx} = -(2x + y) \quad \dots \text{㉠}$$

점 P는 곡선 C와 직선  $y = kx$ 가 만나는 점이므로  $y = kx$ 를 ㉠에 대입하면

$$\left( x + \frac{14}{3}kx \right) \times \frac{dy}{dx} = -(2x + kx)$$

$$x > 0, k > 0, x + \frac{14}{3}kx > 0 \text{이므로}$$

양변을  $x + \frac{14}{3}kx$ 로 나누면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + kx}{x + \frac{14}{3}kx} = -\frac{2 + k}{1 + \frac{14}{3}k} = -\frac{6 + 3k}{3 + 14k}$$

한편, 점 O와 직선 l 사이의 거리가 선분 OP의 길이와 같으므로 직선  $y = kx$ 와 직선 l은 서로 수직이다.

$$\text{즉, } k \times \left( -\frac{6 + 3k}{3 + 14k} \right) = -\frac{6k + 3k^2}{3 + 14k} = -1$$

$$3k^2 + 6k = 14k + 3, 3k^2 - 8k - 3 = 0$$

$$(3k + 1)(k - 3) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = 3$$

답 3

필수 유형 ⑦

$$f(x) = \frac{1 \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f(-1) = \frac{1}{1 + e} \text{에서}$$

$$g'\left(\frac{1}{1 + e}\right) = \frac{1}{f'(-1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^{-1}}{(e^{-1} + 1)^2}}$$

$$= e(e^{-1} + 1)^2$$

$$= e\left(\frac{1}{e} + 1\right)^2$$

$$= \frac{(1 + e)^2}{e}$$

$$\text{따라서 } g'(f(-1)) = g'\left(\frac{1}{1 + e}\right) = \frac{(1 + e)^2}{e}$$

답 ⑤

### 19

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고, 역함수가 존재한다.

$$f(g(t)) = \{g(t)\}^3 + g(t) = t \text{이므로}$$

$g(t)$ 는  $f(t)$ 의 역함수이다.

또한 함수  $f(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $f'(t) \neq 0$ 이므로 함수  $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{g(t) + a}{t - 2} = b \text{에서 } t \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{t \rightarrow 2} \{g(t) + a\} = g(2) + a = 0$$

$$g(2) = -a \text{에서 } f(-a) = 2$$

$$f(x) = x^3 + x \text{에서}$$

$$f(-a) = -a^3 - a = 2$$

$$a^3 + a + 2 = 0$$

$$(a+1)(a^2 - a + 2) = 0$$

모든 실수  $a$ 에 대하여  $a^2 - a + 2 > 0$ 이므로

$$a = -1, \text{ 즉 } g(2) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{g(t) + a}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{g(t) - g(2)}{t - 2}$$

$$= g'(2)$$

$$= \frac{1}{f'(g(2))}$$

$$= \frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \text{이므로 } f'(1) = 4$$

$$\text{즉, } b = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{b} = -4$$

답 ①

### 20

두 함수  $f(x), f'(x)$ 는 모두 미분가능하고 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h)}{h} = 0 \text{에서}$$

$h \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(2+h) = 0 \text{이므로}$$

$$f'(2) = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h) - f'(2)}{h} = f''(2)$$

$$\text{이므로 } f''(2) = 0 \quad \dots \text{㉡}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{e^x} = (x^2 + ax + b)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x}$$

$$= -\{x^2 + (a-2)x - a + b\}e^{-x} \quad \dots \text{㉢}$$

$$f''(x) = (-2x - a + 2)e^{-x} + \{x^2 + (a-2)x - a + b\}e^{-x}$$

$$= \{x^2 + (a-4)x - 2a + b + 2\}e^{-x} \quad \dots \text{㉣}$$

㉠, ㉡에서

$$4 + (a-2) \times 2 - a + b = 0$$

$$a + b = 0 \quad \dots \text{㉤}$$

㉢, ㉣에서

$$4 + (a-4) \times 2 - 2a + b + 2 = 0$$

$$b - 2 = 0 \quad \dots \text{㉥}$$

㉤, ㉥에서

$$a = -2, b = 2$$

$$\text{따라서 } ab = -4$$

답 ④

### 21

$$f(x) = ax + \tan \frac{\pi}{4}x$$

$f'(x) = a + \frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi}{4}x$ 이고  $-2 < x < 2$ 에서  $f'(x) > 0$ 이므로 함수

$f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 는 미분가능하다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x - 3} = b \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로}$$

(분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{g(x) - 1\} = 0 \text{에서 } g(3) = 1 \text{이고}$$

$g(x)$ 는  $f(x)$ 의 역함수이므로

$$f(1) = 3$$

$$f(1) = a \times 1 + \tan \frac{\pi}{4} = a + 1$$

$$a + 1 = 3 \text{에서 } a = 2$$

$$f'(1) = 2 + \frac{\pi}{4} \times 2 = 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x - 3} = g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2 + \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{4 + \pi}$$

$$\text{따라서 } ab = 2 \times \frac{2}{4 + \pi} = \frac{4}{4 + \pi}$$

답 ④

### (필수 유형 ⑧)

$y$ 를  $x$ 에 대한 함수로 보고

$e^y \ln x = 2y + 1$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$e^y \times \frac{dy}{dx} \times \ln x + e^y \times \frac{1}{x} = 2 \times \frac{dy}{dx}$$

이 식에  $x = e, y = 0$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{e} = 2 \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$$

그러므로 곡선  $e^y \ln x = 2y + 1$  위의 점  $(e, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{e}(x - e) = \frac{1}{e}x - 1$$

따라서  $a = \frac{1}{e}, b = -1$ 이므로

$$ab = -\frac{1}{e}$$

답 ⑤

## 22

$$f'(x) = \frac{3(x^2+2) - 3x \times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-6}{6^2} = -\frac{1}{6}$$

그러므로 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{6}(x-2) + 1$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

$$0 = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3} \text{에서 } x=8 \text{이므로 } A(8, 0)$$

$$\text{또, } y = -\frac{1}{6} \times 0 + \frac{4}{3} \text{에서 } y = \frac{4}{3} \text{이므로 } B(0, \frac{4}{3})$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

답 ②

## 23

$y$ 를  $x$ 에 대한 함수로 보고  $x^2+2xy-y^2=4$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2x + 2\left(y + x \times \frac{dy}{dx}\right) - 2y \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x-y) \frac{dy}{dx} = -x-y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x-y}{x-y} \quad (\text{단, } x-y \neq 0)$$

$$\frac{-x-y}{x-y} = 3 \text{에서}$$

$$-x-y = 3x - 3y, y = 2x$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = 4 \text{에서 } y = 2x \text{일 때}$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x^2 = 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = -2$$

따라서 접점의 좌표는  $(2, 4)$  또는  $(-2, -4)$

점  $(2, 4)$ 가 접점일 때 접선의 방정식은

$$y = 3(x-2) + 4, y = 3x - 2$$

점  $(-2, -4)$ 가 접점일 때 접선의 방정식은

$$y = 3(x+2) - 4, y = 3x + 2$$

따라서  $a = -2, b = 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$$

답 ④

## 24

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 2t + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+1}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{2t^3+t^2}{t^2+1}$$

원점에서 그은 접선이 곡선과 접하는 점의 좌표를

$(t - \frac{1}{t}, t^2 + t)$  ( $t > 0$ )으로 놓으면 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{2t^3+t^2}{t^2+1} \left(x - t + \frac{1}{t}\right) + t^2 + t$$

$x=0, y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{2t^3+t^2}{t^2+1} \left(0 - t + \frac{1}{t}\right) + t^2 + t$$

$$\frac{2t^3+t^2}{t^2+1} \left(t - \frac{1}{t}\right) = t^2 + t$$

$$\frac{t^2(2t+1)}{t^2+1} \times \frac{(t+1)(t-1)}{t} = t(t+1)$$

$$t > 0 \text{이므로 } \frac{(2t+1)(t-1)}{t^2+1} = 1$$

$$2t^2 - t - 1 = t^2 + 1, t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = 2$$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$\frac{2 \times 2^3 + 2^2}{2^2 + 1} = 4$$

답 ④

### (필수 유형 ④)

$f(x) = (x^2 - 8)e^{-x+1}$ 에서

$$f'(x) = 2xe^{-x+1} - (x^2 - 8)e^{-x+1}$$

$$= -(x^2 - 2x - 8)e^{-x+1}$$

$$= -(x+2)(x-4)e^{-x+1}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

$x$ 의 값에 따른 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		극소		극대	

함수  $f(x)$ 는  $x = -2$ 에서 극솟값  $a$ ,  $x = 4$ 에서 극댓값  $b$ 를 가지므로

$$a = f(-2) = (4 - 8)e^3 = -4e^3$$

$$b = f(4) = (16 - 8)e^{-3} = 8e^{-3}$$

$$\text{따라서 } ab = (-4e^3) \times 8e^{-3} = -32$$

답 ②

## 25

함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이거나  $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f'(x) = (2x+a)e^{-x} - (x^2+ax-a+4)e^{-x}$$

$$= -\{x^2 + (a-2)x - 2a + 4\}e^{-x}$$

이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$x^2 + (a-2)x - 2a + 4 \geq 0$$

이어야 한다.

이차방정식  $x^2 + (a-2)x - 2a + 4 = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면



$$D=(a-2)^2-4(-2a+4)\leq 0$$

$$a^2+4a-12\leq 0, (a+6)(a-2)\leq 0$$

$$-6\leq a\leq 2$$

따라서 조건을 만족시키는 정수  $a$ 는  $-6, -5, \dots, 1, 2$ 이고, 그 개수는 9이다.

답 ④

### 26

$$f'(x)=\sin x+\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)\cos x-\sin x$$

$$=\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)\cos x$$

$$f'(x)=0\text{에서 }x=\frac{\pi}{2}\text{ 또는 }x=\frac{2}{3}\pi$$

$x$ 의 값에 따른 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	( $\pi$ )
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		\	극소	/	극대	\	

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\pi\right)\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)\sin\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 }M=-\frac{1}{2}, m=-\frac{\pi}{6}\text{이므로}$$

$$M\times m=\frac{\pi}{12}$$

답 ①

### 27

$$f(0)=0\text{에서}$$

$$a\ln b=0$$

$a=0$ 이면  $f(x)=x^3$ 이고  $f'(x)=3x^2$ 이므로  $f'(-1)=6$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{즉, }a\neq 0\text{이므로 }b=1$$

$$f(x)=x^3+a\ln(x^2+1)\text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+a\times\frac{2x}{x^2+1}$$

$$f'(-1)=3+a\times\frac{-2}{2}=3-a$$

$$3-a=6\text{에서 }a=-3$$

$$f(x)=x^3-3\ln(x^2+1)$$

$$f'(x)=3x^2-\frac{6x}{x^2+1}=\frac{3x^4+3x^2-6x}{x^2+1}$$

$$=\frac{3x(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1}$$

$$f'(x)=0\text{에서 }x=0\text{ 또는 }x=1$$

$x$ 의 값에 따른 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

$$f(1)=1-3\ln 2$$

따라서 함수  $f(x)$ 의 극솟값은  $1-3\ln 2$ 이다.

답 ④

### (필수 유형 10)

$y'=-2e^{-x}$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$$

$x=0$ 을 대입하면

$$y=2(1+t)e^{-t}\text{이므로}$$

$$B(0, 2(1+t)e^{-t})$$

이때  $A(0, 2e^{-t})$ 이므로

$$\overline{AB}=2te^{-t}$$

삼각형 APB의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2te^{-t}\times t=t^2e^{-t}$$

$$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$$

$t$ 의 값에 따른 함수  $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	(0)	...	2	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		/	극대	\

따라서 함수  $S(t)$ 는  $t=2$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는  $t$ 의 값은 2이다.

답 ④

### 28

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$f''(x)=-e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=(x-2)e^{-x}$$

$$f''(x)=0\text{에서 }x=2$$

$x=2$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

점  $(2, 2e^{-2})$ 은 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점이다.

이때 점  $(2, 2e^{-2})$ 에서의 접선의 기울기는  $f'(2)=e^{-2}-2e^{-2}=-e^{-2}$

이므로 접선의 방정식은

$$y=-e^{-2}(x-2)+2e^{-2}$$

$$y=-e^{-2}x+4e^{-2}$$

따라서  $A(4, 0), B(0, 4e^{-2})$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\times 4e^{-2}=8e^{-2}$$

답 ④

### 29

$$f(x)=2x-\sin x\text{에서}$$

$$f'(x)=2-\cos x$$

$$f''(x)=\sin x$$

$0<x<3\pi$ 이므로  $f''(x)=0$ 에서  $x=\pi$  또는  $x=2\pi$

$x=\pi$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 점  $(\pi, f(\pi))$ 는 변곡점이다.

또한  $x=2\pi$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 점  $(2\pi, f(2\pi))$ 는 변곡점이다.

$$\alpha < \beta \text{이므로 } \alpha = \pi, \beta = 2\pi$$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(f(\pi)) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{2 - \cos \pi} = \frac{1}{3}$$

$$g'(f(2\pi)) = \frac{1}{f'(2\pi)} = \frac{1}{2 - \cos 2\pi} = 1$$

$$\text{따라서 } g'(f(\alpha)) + g'(f(\beta)) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

### 30

$P(t, (\ln t)^2)$ 이므로

$$\overline{OQ} = t, \overline{OR} = (\ln t)^2$$

사각형 OQPR의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = t(\ln t)^2$$

$$S'(t) = (\ln t)^2 + t \times 2 \ln t \times \frac{1}{t}$$

$$= (\ln t)^2 + 2 \ln t = (\ln t) \times (\ln t + 2)$$

$0 < t < 1$ 이므로

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = e^{-2}$$

$t$ 의 값에 따른 함수  $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	(0)	...	$e^{-2}$	...	(1)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	극대	↘	

$t = e^{-2}$ 일 때 함수  $S(t)$ 는 극대이면서 최대이므로 사각형 OQPR의 넓이의 최댓값은

$$S(e^{-2}) = e^{-2} \times (\ln e^{-2})^2 = 4e^{-2}$$

답 ③

### (필수 유형 ⑩)

$x = 1 - \cos 4t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 4 \sin 4t \text{이고 } \frac{d^2x}{dt^2} = 16 \cos 4t$$

$y = \frac{1}{4} \sin 4t$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = \cos 4t \text{이고 } \frac{d^2y}{dt^2} = -4 \sin 4t$$

시간  $t$ 에서의 점 P의 속력을  $f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{(4 \sin 4t)^2 + \cos^2 4t} \\ &= \sqrt{16 \sin^2 4t + \cos^2 4t} \\ &= \sqrt{15 \sin^2 4t + 1} \end{aligned}$$

이므로  $\sin^2 4t = 1$ 일 때, 점 P의 속력이 최대이다.

시간  $t$ 에서의 점 P의 가속도의 크기를  $g(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} g(t) &= \sqrt{(16 \cos 4t)^2 + (-4 \sin 4t)^2} \\ &= \sqrt{256 \cos^2 4t + 16 \sin^2 4t} \\ &= \sqrt{240 \cos^2 4t + 16} \end{aligned}$$

한편,  $\sin^2 4t = 1$ 일 때

$$\cos^2 4t = 1 - \sin^2 4t = 0$$

따라서 점 P의 속력이 최대일 때, 가속도의 크기는  $\sqrt{16} = 4$

답 4

### 31

$x^2 > 0$ 이므로

$$k \geq \frac{\ln x}{x^2}$$

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = \frac{1}{2}, x = \sqrt{e}$$

$x$ 의 값에 따른 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

함수  $f(x)$ 는  $x = \sqrt{e}$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

따라서  $k \geq \frac{1}{2e}$ 이어야 하므로  $k$ 의 최솟값은  $\frac{1}{2e}$ 이다.

답 ②

### 32

$k\sqrt{x} = |\ln x|$ 에서

$$\sqrt{x} > 0 \text{이므로 } \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} = k$$

$h(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$ 라 하면

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} & (0 < x < 1) \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & (x \geq 1) \end{cases}$$

(i)  $0 < x < 1$ 일 때

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} - \ln x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= -\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0 \end{aligned}$$

이므로 함수  $h(x)$ 는 감소한다.

(ii)  $x > 1$ 일 때

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} - \ln x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

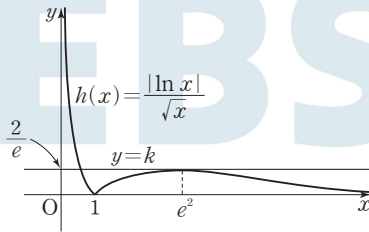
$h'(x) = 0$ 에서  $\ln x = 2$ , 즉  $x = e^2$

(i), (ii)에 의하여  $x$ 의 값에 따른 함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	1	...	$e^2$	...
$h'(x)$		-		+	0	-
$h(x)$		\	0	/	극대	\

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \infty, h(e^2) = \frac{2}{e}$$

이므로 함수  $h(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$ 의 그래프는 그림과 같다.



방정식  $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 곡선  $y = h(x)$ 와 직선  $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 구하는  $k$ 의 값은  $\frac{2}{e}$ 이다.

답 ④

### 33

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t} + (t+1)(-e^{-t}) = -te^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2e^{-t} - 2te^{-t} = 2(1-t)e^{-t}$$

이므로 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(-te^{-t})^2 + \{2(1-t)e^{-t}\}^2} \\ &= \sqrt{t^2e^{-2t} + 4(1-t)^2e^{-2t}} \\ &= \sqrt{(5t^2 - 8t + 4)e^{-2t}} \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } f(t) = (5t^2 - 8t + 4)e^{-2t}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (10t - 8)e^{-2t} + (5t^2 - 8t + 4)(-2e^{-2t}) \\ &= (-10t^2 + 26t - 16)e^{-2t} \\ &= -2(t-1)(5t-8)e^{-2t} \end{aligned}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=1 \text{ 또는 } t = \frac{8}{5}$$

$t$ 의 값에 따른 함수  $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	(0)	...	1	...	$\frac{8}{5}$	...
$f'(t)$		-	0	+	0	-
$f(t)$		\	극소	/	극대	\

따라서 함수  $f(t)$ 가  $t = \frac{8}{5}$ 에서 극대이므로

$$a = \frac{8}{5}$$

답 ④

## 09 적분법

정답

본문 102~111쪽

(필수 유형 ①) ②	01 10	02 ③	03 160
(필수 유형 ②) ④	04 ③	05 ④	06 13
(필수 유형 ③) ⑤	07 6	08 ①	09 16
(필수 유형 ④) ②	10 14	11 ④	12 ②
(필수 유형 ⑤) ⑤	13 ②	14 ④	15 ②
(필수 유형 ⑥) ③	16 12	17 ③	18 ①
(필수 유형 ⑦) ③	19 ①	20 ③	21 ②
(필수 유형 ⑧) ②	22 ①	23 ①	24 ④
(필수 유형 ⑨) ④	25 ②	26 ③	27 ⑤
(필수 유형 ⑩) ①	28 ③	29 ②	30 ⑤

### (필수 유형 ①)

$$x > 0 \text{에서 } f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$$

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x} + C_1 \text{ (단, } C_1 \text{은 적분상수)}$$

이때  $f(1) = 5$ 이므로

$$2 + 3 + C_1 = 5$$

$$C_1 = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

한편,  $x < 0$ 에서  $g'(x) = f'(-x) = 2 - \frac{3}{x^2}$ 이므로

$$g(x) = 2x + \frac{3}{x} + C_2 \text{ (단, } C_2 \text{는 적분상수)}$$

이때  $f(2) + g(-2) = 9$ 이므로

$$\left(4 + \frac{3}{2}\right) + \left(-4 - \frac{3}{2} + C_2\right) = 9$$

$$C_2 = 9$$

따라서  $g(x) = 2x + \frac{3}{x} + 9$ 이므로

$$g(-3) = -6 - 1 + 9 = 2$$

답 ②

### 01

$F(x) = xf(x) - (x-1)e^x$ 을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - \{e^x + (x-1)e^x\}$$

$$xf'(x) = xe^x$$

$x > 0$ 이므로

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = e^x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(\ln 2) = 2 + C = 4 \text{에서 } C = 2$$

따라서  $f(x) = e^x + 2$ 이므로

$$f(3 \ln 2) = 8 + 2 = 10$$

답 10

## 02

(i)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  일 때

$$f'(x) = \sin x$$

$$f(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수})$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} + C_1 = -\frac{1}{2} + C_1$$

$$-\frac{1}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \text{에서 } C_1 = 2$$

$$f(x) = -\cos x + 2$$

(ii)  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  일 때

$$f'(x) = \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$f(x) = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수})$$

$f(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\tan x - x + C_2) = C_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\cos x + 2) = 1$$

$$\text{이므로 } f(0) = 1 = C_2$$

$$f(x) = \tan x - x + 1$$

따라서

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = -1 + \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{4}$$

답 ③

## 03

$e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + 1$ 에  $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) + f'(0) = 1$$

$$f'(0) = -3 \text{이므로 } f(0) = 4$$

$y = e^x f(x)$ 에 대하여  $y' = e^x f(x) + e^x f'(x)$ 이므로

$$e^x f(x) = \int (2x + 1) \, dx = x^2 + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = C = 4$$

따라서  $e^x f(x) = x^2 + x + 4$ ,  $f(x) = (x^2 + x + 4)e^{-x}$

$$f(3) = (9 + 3 + 4)e^{-3} = 16e^{-3}$$

$$f(-3) = (9 - 3 + 4)e^3 = 10e^3$$

$$\text{따라서 } f(3) \times f(-3) = 16e^{-3} \times 10e^3 = 160$$

답 160

### (필수 유형 ②)

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}} \, dt = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} \, dt$$

에서  $1+e^t = s$ 로 놓으면

$$e^t = \frac{ds}{dt}$$

이고,  $t=0$ 일 때  $s=2$ ,  $t=x$ 일 때  $s=1+e^x$ 이므로

$$f(x) = \int_2^{1+e^x} \frac{1}{s} \, ds$$

$$= \left[ \ln |s| \right]_2^{1+e^x} = \ln(1+e^x) - \ln 2 = \ln \frac{1+e^x}{2}$$

$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = \ln 5$ 에서

$$\ln \frac{1+e^{f(a)}}{2} = \ln 5$$

$$\frac{1+e^{f(a)}}{2} = 5$$

$$e^{f(a)} = 9, \quad f(a) = \ln 9$$

$$f(a) = \ln \frac{1+e^a}{2} = \ln 9$$

이므로  $e^a = 17$

따라서  $a = \ln 17$

답 ④

## 04

$1 + \ln x = t$ 라 하면  $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$  이고

$x=e$ 일 때  $t=2$ ,  $x=e^3$ 일 때  $t=4$ 이므로

$$\int_e^{e^3} \frac{\ln(1+\ln x)}{x(1+\ln x)} \, dx = \int_2^4 \frac{\ln t}{t} \, dt$$

$\ln t = s$ 라 하면  $\frac{1}{t} = \frac{ds}{dt}$  이고

$t=2$ 일 때  $s=\ln 2$ ,  $t=4$ 일 때  $s=\ln 4$ 이므로

$$\int_2^4 \frac{\ln t}{t} \, dt = \int_{\ln 2}^{\ln 4} s \, ds = \left[ \frac{1}{2} s^2 \right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\ln 4)^2 - (\ln 2)^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\ln 4 + \ln 2) \times (\ln 4 - \ln 2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \ln 2 \times \ln 2$$

$$= \frac{3}{2} (\ln 2)^2$$

답 ③

## 05

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  이고  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  이므로

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  에서  $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$  이고 열린구간  $(0, \frac{\pi}{2})$  에서  $\sin x > 0$  이

므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} \, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)} \, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x \sin^2 x} \, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

$\cos x = t$ 라 하면  $-\sin x = \frac{dt}{dx}$  이고

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{\frac{4}{5}}^{\frac{3}{5}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) \, dt = \left[ \frac{1}{t} \right]_{\frac{4}{5}}^{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$$

답 ④

06

$f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)라 하면

$f'(x) = 2x + a$

조건 (가)에서

$4 + 2a + b = 4 + a$

$a + b = 0$  ..... ㉠

조건 (나)에서

$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln |f(x)|]_0^1 = [\ln f(x)]_0^1 = \ln f(1) - \ln f(0)$

$\ln f(1) - \ln f(0) = \ln f(1)$

$\ln f(0) = 0$ 이므로

$f(0) = 1$

$f(0) = b = 1$ 이고 ㉠에서  $a = -1$

따라서  $f(x) = x^2 - x + 1$ 이므로

$f(4) = 4^2 - 4 + 1 = 13$

답 13

(필수 유형 ㉡)

$\int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$ 에서

$u(x) = \ln x - 1, v'(x) = \frac{1}{x^2}$ 로 놓으면

$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = -\frac{1}{x}$

따라서

$\int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$

$= \left[ -\frac{\ln x - 1}{x} \right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} dx$

$= \left[ -\frac{\ln x - 1}{x} \right]_e^{e^2} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_e^{e^2}$

$= -\frac{1}{e^2} + \left( -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} \right)$

$= \frac{e-2}{e^2}$

07

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos x \times f'(x)\} dx$

$= \left[ \cos x \times f(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(-\sin x) \times f(x)\} dx$

$= \cos \frac{\pi}{2} \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0 \times f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx$

이므로

$-1 = -f(0) + 5$ 에서

$f(0) = 6$

답 6

다른 풀이

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos x dx = -1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = 5$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x) \cos x - f(x) \sin x\} dx = -6$

$y = f(x) \cos x$ 에 대하여

$y' = f'(x) \cos x - f(x) \sin x$ 이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x) \cos x - f(x) \sin x\} dx$

$= \left[ f(x) \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times 0 - f(0) \times 1$

$= -f(0)$

즉,  $-6 = -f(0)$ 이므로

$f(0) = 6$

08

$f(x) = \int_0^x te^t dt = \left[ te^t \right]_0^x - \int_0^x e^t dt$

$= xe^x - \left[ e^t \right]_0^x = xe^x - e^x + 1$

$= (x-1)e^x + 1$

$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \{(x-1)e^x + 1\} dx$

$= \int_0^1 (x-1)e^x dx + \int_0^1 1 dx$

$= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + \left[ x \right]_0^1$

$= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1 - \left[ e^x \right]_0^1 + \left[ x \right]_0^1$

$= 0 - (-1) - (e-1) + (1-0)$

$= -e + 3$

답 ①

답 ⑤

09

$n$ 이 홀수이면  $\cos n\pi = -1$ 이고,

$n$ 이 짝수이면  $\cos n\pi = 1$ 이다.

$\int_{-n\pi}^{(2n+1)\pi} x \sin x dx$

$= \left[ x(-\cos x) \right]_{-n\pi}^{(2n+1)\pi} - \int_{-n\pi}^{(2n+1)\pi} 1 \times (-\cos x) dx$

$= \left[ x(-\cos x) \right]_{-n\pi}^{(2n+1)\pi} + \left[ \sin x \right]_{-n\pi}^{(2n+1)\pi}$

$= -(2n+1)\pi \times \cos (2n+1)\pi + (-n\pi) \times \cos (-n\pi)$

$= (2n+1)\pi - n\pi \cos n\pi$

(i)  $n$ 이 홀수일 때

$(2n+1)\pi - n\pi \cos n\pi$

$= (2n+1)\pi + n\pi = (3n+1)\pi$

이므로  $(3n+1)\pi \leq 25\pi$ 에서

$3n+1 \leq 25, n \leq 8$

따라서 조건을 만족시키는 홀수  $n$ 은  
1, 3, 5, 7이고, 그 개수는 4이다.

(ii)  $n$ 이 짝수일 때

$$(2n+1)\pi - n\pi \cos n\pi = (2n+1)\pi - n\pi = (n+1)\pi$$

이므로  $(n+1)\pi \leq 25\pi$ 에서

$$n+1 \leq 25, n \leq 24$$

따라서 조건을 만족시키는 짝수  $n$ 은

2, 4, 6, ..., 24이고, 그 개수는 12이다.

(i), (ii)에서 구하는 모든  $n$ 의 개수는

$$4 + 12 = 16$$

답 16

**필수 유형 4**

$\int_1^x f(t)dt = x^2 - a\sqrt{x}$ 의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 - a \text{에서 } a = 1$$

$$\text{즉, } \int_1^x f(t)dt = x^2 - \sqrt{x} \quad \dots \textcircled{1}$$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{따라서 } f(1) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

답 ②

**10**

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \text{에서}$$

$$g'(x) = f(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 xf'(x)dx &= [xf(x)]_0^3 - \int_0^3 f(x)dx \\ &= 3f(3) - \int_0^3 f(x)dx \\ &= 3g'(3) - g(3) \\ &= 3 \times 8 - 10 = 14 \end{aligned}$$

답 14

**11**

$\int_1^x f(t)dt = xe^{-x} + a \int_0^2 f(t)dt$ 의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{e} + a \int_0^2 f(t)dt$$

$$a \int_0^2 f(t)dt = -\frac{1}{e} \quad \dots \textcircled{1}$$

주어진 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (-x+1)e^{-x} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여

$$a \int_0^2 (-t+1)e^{-t} dt = -\frac{1}{e}$$

$$\int_0^2 (t-1)e^{-t} dt = \frac{1}{ae}$$

$$\left[ (t-1)(-e^{-t}) \right]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-t})dt = \frac{1}{ae}$$

$$-e^{-2} - 1 - \left[ e^{-t} \right]_0^2 = \frac{1}{ae}$$

$$-e^{-2} - 1 - e^{-2} + 1 = \frac{1}{ae}$$

$$-\frac{2}{e^2} = \frac{1}{ae}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{e}{2}$$

답 ④

**12**

$f'(x) = \sin x + k \cos x = 0$ 에서

$$\sin x = -k \cos x$$

$\cos x = 0$ 이면  $x = \frac{\pi}{2}$  또는  $x = \frac{3}{2}\pi$ 인데 이때  $\sin x \neq 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉,

$\cos x \neq 0$ 이므로 양변을  $\cos x$ 로 나누면

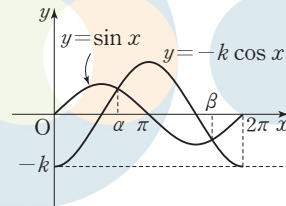
$$\tan x = -k < 0$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.  $f'(a) = 0, f'(\beta) = 0, a < \beta$ 라 하면

$0 < x < a$ 에서  $\sin x > -k \cos x$ , 즉  $f'(x) > 0$ 이고

$a < x < \beta$ 에서  $\sin x < -k \cos x$ , 즉  $f'(x) < 0$ 이고

$\beta < x < 2\pi$ 에서  $\sin x > -k \cos x$ , 즉  $f'(x) > 0$ 이다.



따라서  $0 < x < a$ 에서 함수  $f(x) = \int_0^x (\sin t + k \cos t)dt$ 는 증가하고,

$a < x < \beta$ 에서 함수  $f(x) = \int_0^x (\sin t + k \cos t)dt$ 는 감소하고

$\beta < x < 2\pi$ 에서 함수  $f(x) = \int_0^x (\sin t + k \cos t)dt$ 는 증가한다.

따라서 함수  $f(x) = \int_0^x (\sin t + k \cos t)dt$ 는  $x = a$ 에서 극댓값,

$x = \beta$ 에서 극솟값을 갖는다.

$x$ 의 값에 따른 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	$a$	...	$\beta$	...	$(2\pi)$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

제2사분면의 각  $a$ 에 대하여  $\tan a = -k$ 이면

$$\cos a = -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}, \sin a = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$f(a) = \int_0^a (\sin t + k \cos t)dt$$

$$= \left[ -\cos t + k \sin t \right]_0^a$$

$$= -\cos a + k \sin a - (-\cos 0 + k \sin 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}} + 1$$



$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{k^2+1}+1 \\
 \sqrt{k^2+1}+1=3 &\text{에서 } k^2=3 \\
 k>0 &\text{이므로 } k=\sqrt{3} \\
 \text{제4사분면의 각 } \beta &\text{에 대하여 } \tan \beta = -\sqrt{3} \text{이면} \\
 \cos \beta = \frac{1}{2}, \sin \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \\
 \text{따라서 함수 } f(x) &\text{의 극솟값은} \\
 f(\beta) = \int_0^\beta (\sin t + \sqrt{3} \cos t) dt & \\
 &= \left[ -\cos t + \sqrt{3} \sin t \right]_0^\beta \\
 &= -\cos \beta + \sqrt{3} \sin \beta - (-\cos 0 + \sqrt{3} \sin 0) \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1
 \end{aligned}$$

답 ②

**필수 유형 ⑥**

$f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2+1}{x} \int_1^{x+1} f(t) dt \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2+1}{x} [F(t)]_1^{x+1} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (x^2+1) \times \frac{F(x+1)-F(1)}{x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+1)-F(1)}{x} \\
 &= (0+1) \times F'(1) = 1 \times f(1) \\
 &= f(1) = 3
 \end{aligned}$$

$f(x) = a \cos(\pi x^2)$ 에서  
 $f(1) = a \cos \pi = -a = 3$   
 즉,  $a = -3$ 이므로  $f(x) = -3 \cos(\pi x^2)$   
 따라서  $f(a) = f(-3) = -3 \cos 9\pi = -3 \times (-1) = 3$

답 ⑤

**13**

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} f'(x) dx & \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x)]_{1-h}^{1+h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \\
 &= 2f'(1)
 \end{aligned}$$

$f(x) = (x+1)e^{-x}$ 에서  
 $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$   
 따라서  $2f'(1) = 2 \times (-e^{-1}) = -\frac{2}{e}$

답 ②

**14**

$f(x) = (ax+b) \ln x$ 에서  
 $f'(x) = a \ln x + \frac{ax+b}{x}$

$f'(e) = a + \frac{ae+b}{e} = 2a + \frac{b}{e}$   
 조건 (가)에서  $f'(e) = 2$ 이므로  
 $2a + \frac{b}{e} = 2$   
 $2ae + b = 2e$  ..... ㉠  
 조건 (나)에서  $f(e) = 3e$ 이므로  
 $ae + b = 3e$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면  
 $a = -1, b = 4e$   
 따라서  $ab = -4e$

답 ④

**15**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} \int_1^x f(t) \cos \frac{\pi}{2} x dt & \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x-1} \times \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(t+1)}{t} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t \right)}{t} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi}{2} t}{t} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\
 &= -\frac{\pi}{2} \times f(1) \\
 &= -\frac{\pi}{2} \times \sin a \\
 -\frac{\pi}{2} \times \sin a = \frac{\pi}{4} &\text{에서 } \sin a = -\frac{1}{2} \\
 -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} &\text{이므로 } a = -\frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

$f(x) = \sin ax = \sin \left( -\frac{\pi}{6} x \right) = -\sin \frac{\pi}{6} x$

$f'(x) = -\frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} x$

$f'(2) = -\frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$

답 ②

**필수 유형 ⑥**

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3} & \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2 \times \frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n} \right\} \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+1} dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \ln |x^3 + 3x^2 + 1| \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} (\ln 5 - \ln 1) = \frac{\ln 5}{3}$$

답 ③

16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$$

$\frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = 3$ 에서

$$\int_1^3 f(x) dx = 6$$

$\int_1^5 f\left(\frac{x+1}{2}\right) dx$ 에서  $\frac{x+1}{2} = t$ 라 하면

$$\frac{1}{2} = \frac{dt}{dx}, x=1 \text{ 일 때 } t=1, x=5 \text{ 일 때 } t=3 \text{ 이므로}$$

$$\int_1^5 f\left(\frac{x+1}{2}\right) dx = \int_1^3 2f(t) dt$$

$$= 2 \int_1^3 f(t) dt$$

$$= 2 \times 6 = 12$$

17

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n+3k}{n^3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n+3k}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{3k}{n}}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{3k}{n}}$$

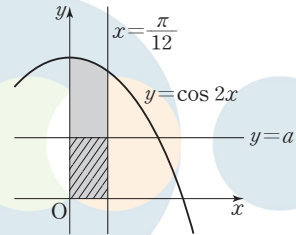
$$= \frac{1}{3} \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \frac{2}{9} \times (8 - 1) = \frac{14}{9}$$

답 12

(필수 유형 7)



함수  $y = \cos 2x$ 의 그래프와  $x$ 축,  $y$ 축 및 직선  $x = \frac{\pi}{12}$ 로 둘러싸인 영

역의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x dx = \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{4}$$

이 영역의 넓이가 직선  $y = a$ 에 의하여 이등분되므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{12} \times a$$

따라서  $a = \frac{3}{2\pi}$

답 ①

답 ③

18

O를 원점이라 하면 선분  $OP_k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ )이  $\angle AOB$  ( $= \frac{\pi}{2}$ )를  $n$

등분하므로

$$\angle AOP_k = \frac{\pi}{2} \times \frac{k}{n}$$

부채꼴  $AOP_k$ 의 넓이는

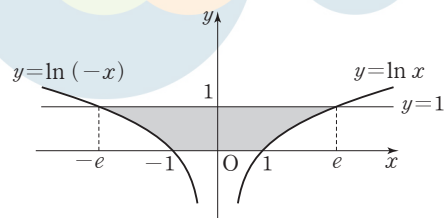
$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{k\pi}{2n}$$

$\angle COP_k = \pi - \frac{k\pi}{2n}$ 이므로

삼각형  $COP_k$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} \times \sin \frac{k\pi}{2n}$$

19



$\ln |x| = 1$ 에서

$|x| = e$

이므로  $x = e$  또는  $x = -e$

곡선  $y = \ln |x|$ 는  $y$ 축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & 2 \times (e \times 1 - \int_1^e \ln x \, dx) \\
 & = 2 \times (e \times 1 - [x \ln x - x]_1^e) \\
 & = 2(e-1)
 \end{aligned}$$

답 ①

## 20

곡선 위의 점점의 좌표를  $(t, \frac{\ln t}{t})$ 라 하면

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

이므로 접선의 방정식은

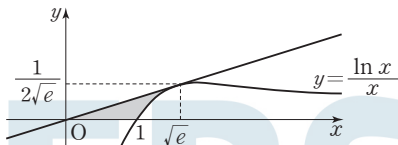
$$y = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x - t) + \frac{\ln t}{t} \quad \dots \textcircled{1}$$

①에  $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1 - \ln t}{t^2}(0 - t) + \frac{\ln t}{t}$$

$$2 \ln t - 1 = 0 \text{에서 } \ln t = \frac{1}{2}, t = \sqrt{e}$$

$$\text{이때 접선의 기울기는 } \frac{1 - \ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$



따라서 접선의 방정식은  $y = \frac{1}{2e}x$ 이고 점점의 좌표는  $(\sqrt{e}, \frac{1}{2\sqrt{e}})$ 이므로

구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{e} \times \frac{1}{2\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} \, dx \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\ln x = t \text{라 하면 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \text{이고}$$

$$x=1 \text{일 때 } t=0, x=\sqrt{e} \text{일 때 } t=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} t \, dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

따라서 구하는 넓이는 ②에서

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

답 ③

## 21

$$f(\pi) = a\pi - \sin \pi = a\pi = 2\pi \text{에서}$$

$$a=2 \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x - \sin x$$

모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하고,  $f(g(t)) = t$ 이므로  $g(x)$ 는  $f(x)$ 의 역함수이다.

$$f(g(t)) = t \text{에서 양변을 } t \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(g(t))g'(t) = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

①에  $t$  대신  $2x$ 를 대입하면

$$f'(g(2x))g'(2x) = 1$$

$$\int_0^\pi \frac{x}{f'(g(2x))} \, dx = \int_0^\pi xg'(2x) \, dx$$

$$2x=s \text{라 하면 } 2 = \frac{ds}{dx}, x = \frac{s}{2} \text{이고}$$

$$x=0 \text{일 때 } s=0, x=\pi \text{일 때 } s=2\pi \text{이므로}$$

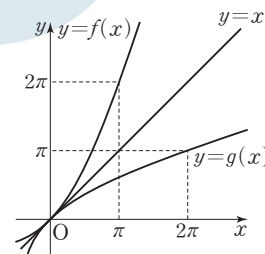
$$\int_0^\pi xg'(2x) \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{s}{2} g'(s) \frac{1}{2} \, ds$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} s g'(s) \, ds$$

$$= \frac{1}{4} \left( [s g(s)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} g(s) \, ds \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

$f(x)$ 의 역함수가  $g(x)$ 이고 두 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같이 정적분의 값을 구할 수 있다.



$$\text{즉, } \int_0^{2\pi} g(s) \, ds = \pi \times 2\pi - \int_0^\pi f(s) \, ds$$

따라서 ②에서

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi xg'(2x) \, dx &= \frac{1}{4} \left\{ 2\pi \times g(2\pi) - \left( \pi \times 2\pi - \int_0^\pi f(s) \, ds \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi (2x - \sin x) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[ x^2 + \cos x \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi^2 - 2}{4}
 \end{aligned}$$

답 ②

### (필수 유형 ⑧)

$0 < x < 1$ 에서  $\sin \frac{\pi}{2}x > 0$ 이고  $\sin \frac{\pi}{2}x > 2^x - 1$ 이므로 두 곡선

$y = 2^x - 1, y = \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right|$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \left| \left| \sin \frac{\pi}{2}x \right| - (2^x - 1) \right| \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[ \sin \frac{\pi}{2}x - (2^x - 1) \right] \, dx$$

$$= \left[ -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{2^x}{\ln 2} + x \right]_0^1$$

$$= \left( 0 - \frac{2}{\ln 2} + 1 \right) - \left( -\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\ln 2} + 0 \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\ln 2} + 1$$

답 ②

## 22

$$e^x = -2e^{-x} + 3 \text{에서}$$

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

$$(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$$

$$e^x = 1 \text{ 또는 } e^x = 2$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \ln 2$$

$$0 \leq x \leq \ln 2 \text{ 에서 } e^x \leq -2e^{-x} + 3 \text{ 이므로}$$

구하는 넓이는

$$\int_0^{\ln 2} (-2e^{-x} + 3 - e^x) dx$$

$$= \left[ 2e^{-x} + 3x - e^x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \left( 2 \times \frac{1}{2} + 3 \ln 2 - 2 \right) - (2 + 0 - 1)$$

$$= 3 \ln 2 - 2$$

## 23

$$f(x) = g(x) \text{ 에서}$$

$$\tan x = 2 \sin x$$

$$\sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 2 \right) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

그러므로  $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$  에서 두 곡선  $y = f(x), y = g(x)$  가 만난다.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  에서  $f(x) \leq g(x)$  이므로 두 곡선  $y = f(x), y = g(x)$  로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin x - \tan x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( 2 \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[ 2 \sin x + \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right] dx$$

$$= \left[ -2 \cos x + \ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2 \cos \frac{\pi}{3} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| - (-2 \cos 0 + \ln |\cos 0|)$$

$$= -2 \times \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} + 2$$

$$= 1 - \ln 2$$

## 24

$$S_1 = S_2 \text{ 이면}$$

$$\int_0^1 \{e^x - 1 - m(x-1)\} dx = 0$$

$$\left[ e^x - x - \frac{m}{2} x^2 + mx \right]_0^1 = \left( e - 1 - \frac{m}{2} + m \right) - (1 - 0 - 0 + 0)$$

$$= \frac{m}{2} + e - 2 = 0$$

$$\frac{m}{2} = 2 - e$$

$$\text{따라서 } m = 4 - 2e$$

## (필수 유형 9)

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$  인 실수  $t$  에 대하여 직선  $x = t$  를 포함하고  $x$  축에 수직인 평

면으로 자른 단면의 넓이를  $S(t)$  라 하면

$$S(t) = (\sqrt{\sec^2 t + \tan t})^2 = \sec^2 t + \tan t$$

이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t + \tan t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \sec^2 x + \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \sec^2 x - \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right\} dx$$

$$= \left[ \tan x - \ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \tan \frac{\pi}{3} - \ln \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3} - \ln \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} + \ln 2$$

답 ④

## 25

$x$  좌표가  $t$  일 때의 단면의 넓이를  $S(t)$  라 하면

$$S(t) = (e^t - t)^2 = e^{2t} - 2te^t + t^2$$

입체도형의 부피를  $V$  라 하면

$$V = \int_0^1 S(t) dt$$

$$= \int_0^1 (e^{2t} - 2te^t + t^2) dt$$

$$= \int_0^1 e^{2t} dt - 2 \int_0^1 te^t dt + \int_0^1 t^2 dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 - 2 \left( \left[ te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) + \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1$$

$$= \left[ \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 - 2 \left( \left[ te^t \right]_0^1 - \left[ e^t \right]_0^1 \right) + \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} (e^2 - 1) - 2 \{ (e - 0) - (e - 1) \} + \frac{1}{3} (1 - 0)$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{13}{6}$$

답 ②

## 26

$$x^2 + \ln(x+1) = \int_0^x S(t) dt \text{ 이므로}$$

양변을  $x$  에 대하여 미분하면

$$2x + \frac{1}{x+1} = S(x)$$

$$S(a) = \{S(1)\}^2 \text{ 이므로}$$

$$2a + \frac{1}{a+1} = \left( 2 + \frac{1}{1+1} \right)^2 = \left( \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\frac{2a^2 + 2a + 1}{a+1} = \frac{25}{4}$$

$$8a^2 - 17a - 21 = 0$$

$$(a-3)(8a+7) = 0$$

$$a \geq 0 \text{ 이므로 } a = 3$$

답 ③

### 27

$x$ 축 위의 점  $(t, 0)$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ )를 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= (\sin t + \cos t + 1)^2 \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t + 1 + 2 \sin t \cos t + 2 \sin t + 2 \cos t \\ &= 2 + 2 \sin t \cos t + 2 \sin t + 2 \cos t \end{aligned}$$

입체도형의 부피를  $V$ 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2 \sin t \cos t + 2 \sin t + 2 \cos t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x dx$ 에서

$\sin x = t$ 라 하면  $\cos x = \frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때  $t=0$

$x=\frac{\pi}{2}$ 일 때  $t=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x dx = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

따라서 구하는 부피는  $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos t dt + [2t - 2 \cos t + 2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 + (\pi + 2) - (-2) \\ &= \pi + 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

#### (필수 유형 ⑩)

곡선  $y=x^2$ 과 직선  $y=t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 두 점의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha$ ,

$\beta$ 라 하면 두 점의 좌표는

$$(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$$

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 두 식  $y=x^2, y=t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 를 연립하면

$$x^2 = t^2x - \frac{\ln t}{8}$$

$$x^2 - t^2x + \frac{\ln t}{8} = 0$$

이 이차방정식의 두 근이  $\alpha, \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = t^2, \quad \alpha\beta = \frac{\ln t}{8}$$

$$\text{따라서 } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = t^4 - \frac{\ln t}{4}$$

이므로  $\textcircled{1}$ 에서 중점의 좌표는  $(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8})$ 이다.

그러므로 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치는

$$x = \frac{1}{2}t^2, \quad y = \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8} \text{이다.}$$

이때  $\frac{dx}{dt} = t, \frac{dy}{dt} = 2t^3 - \frac{1}{8t}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + 4t^6 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}} \\ &= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}} = \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2} \\ &= 2t^3 + \frac{1}{8t} \end{aligned}$$

따라서 시각  $t=1$ 에서  $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8} \ln |t|\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

답 ①

### 28

$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{4}{t}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{t} + \left(1 - \frac{8}{t} + \frac{16}{t^2}\right)} \\ &= \sqrt{1 + \frac{8}{t} + \frac{16}{t^2}} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{4}{t}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{4}{t} \end{aligned}$$

따라서 시각  $t=1$ 에서  $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_1^e \left(1 + \frac{4}{t}\right) dt \\ &= \left[t + 4 \ln |t|\right]_1^e \\ &= e + 4 - 1 = e + 3 \end{aligned}$$

답 ③

### 29

$$\begin{aligned} &\int_0^{\ln a} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^{\ln a} \sqrt{1 + \left(e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln a} \sqrt{\left(e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln a} \left(e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x}\right]_0^{\ln a} \\ &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8} \times \frac{1}{a^2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8a^2} - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8a^2} - \frac{3}{8} = \frac{13}{12} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8a^2} - \frac{35}{24} = 0$$

$$12a^4 - 35a^2 - 3 = 0$$

$$(a^2 - 3)(12a^2 + 1) = 0$$

$$a > 1 \text{이므로 } a = \sqrt{3}$$

답 ②

30

$$f(x) = 2 \ln(4 - x^2) \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{4 - x^2}$$

$$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-4x}{4 - x^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(4 + x^2)^2}{(4 - x^2)^2}} = \frac{4 + x^2}{4 - x^2}$$

$$= -1 + \frac{8}{4 - x^2} = -1 + \frac{2}{2 + x} + \frac{2}{2 - x}$$

따라서  $x = -1$ 에서  $x = 1$ 까지의 곡선  $y = f(x)$ 의 길이는

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{4 + x^2}{4 - x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{4 + x^2}{4 - x^2} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{2 + x} + \frac{2}{2 - x}\right) dx$$

$$= 2 \left[ -x + 2 \ln|2 + x| - 2 \ln|2 - x| \right]_0^1$$

$$= 2 \{ (-1 + 2 \ln 3 - 2 \ln 1) - (-0 + 2 \ln 2 - 2 \ln 2) \}$$

$$= 4 \ln 3 - 2$$

답 ⑤

## 고난도 시크릿X 봉투모의고사

실전보다 더 실전같이! 제대로 어렵게!

상위권 학생을 위한

고난도 특화 프리미엄 모의고사





실전편

실전 모의고사 1회

본문 114~125쪽

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ④	07 ④	08 ①	09 ④	10 ①
11 ②	12 ⑤	13 ⑤	14 ⑤	15 ①
16 97	17 16	18 20	19 3	20 15
21 39	22 320	23 ②	24 ⑤	25 ①
26 ③	27 ④	28 ①	29 4	30 35

01

$2^{\log_5 5} = 5, (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}$ 이므로

$2^{\log_5 5} \times (\sqrt{5})^{-2} = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

답 ①

02

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ 에서

$f'(x) = 6x^2 + 8x - 5$

따라서  $f'(1) = 6 + 8 - 5 = 9$

답 ②

03

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$a_5 - a_2 = 3d = 12$ 에서  $d = 4$

따라서  $a_4 = a_1 + 3d = 3 + 3 \times 4 = 15$

답 ④

다른 풀이

$a_5 - a_2 = a_4 - a_1 = 12$ 이고

$a_1 = 3$ 이므로  $a_4 = 15$

04

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \{xf(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x \times \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \times 2 = 4$

따라서  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} \{xf(x)\} = 3 + 4 = 7$

답 ⑤

05

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 에서  $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 에서  $f(1) = 0$

또한 다항함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 미분가능하므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 3$

한편,  $g(x) = xf(x) + 2$ 에서  $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ 이므로  
 $g'(1) = f(1) + 1 \times f'(1) = 0 + 1 \times 3 = 3$

답 ③

06

$\tan \theta - \frac{4}{1 + \tan \theta} = 2$ 에서

$\tan \theta (1 + \tan \theta) - 4 = 2(1 + \tan \theta)$

$\tan^2 \theta - \tan \theta - 6 = 0, (\tan \theta + 2)(\tan \theta - 3) = 0$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서  $\tan \theta > 0$ 이므로

$\tan \theta = 3$

즉,  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3$ 에서

$\sin \theta = 3 \cos \theta \dots \dots \text{㉠}$

이때  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서  $\cos \theta < 0$ 이므로

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ 을 ㉠에 대입하면

$\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

따라서  $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$

답 ④

07

$t^3 - 12t^2 + 36t = t^2 - 6t$ 에서

$t^3 - 13t^2 + 42t = 0, t(t-6)(t-7) = 0$

$t = 0$  또는  $t = 6$  또는  $t = 7$

두 점 P, Q가 출발한 후 처음으로 속도가 같아지는 시각은  $t = 6$ 이다.

즉,  $a = 6$ 이고  $\frac{a}{2} = 3$

따라서 시각  $t = 3$ 에서  $t = 6$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$\int_3^6 |t^2 - 6t| dt = \int_3^6 (6t - t^2) dt = \left[3t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_3^6$   
 $= (108 - 72) - (27 - 9) = 18$

답 ④

08

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x^2} = -1$ 에서

$f(x) - x^3 = -3x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)

로 놓을 수 있다.

즉,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{9x} = -1$ 에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 에서  $f(0) = b = 0$

이때  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + ax}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + a}{9} = \frac{a}{9}$  이므로

$$\frac{a}{9} = -1 \text{에서 } a = -9$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수  $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

답 ①

## 09

$$\sum_{k=1}^n S_k = T_n = 2n^3 + 4n^2 + 2n \text{이라 하면}$$

$$T_n - T_{n-1} = S_n \quad (n \geq 2) \text{에서}$$

$$S_n = (2n^3 + 4n^2 + 2n) - \{2(n-1)^3 + 4(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ = 6n^2 + 2n \quad (n \geq 2)$$

$$\text{한편, } \sum_{k=1}^n a_k = S_n \text{이므로}$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (6 \times 3^2 + 2 \times 3) - (6 \times 2^2 + 2 \times 2) \\ = 60 - 28 = 32$$

답 ④

## 10

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가  $\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2\sqrt{7}$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{7} \times \sin \frac{2}{3}\pi = 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21}$$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가  $\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BDA)} = 2\sqrt{7}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{7} \sin(\angle BDA) = 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 ABC에서  $\overline{AC} = x \quad (x > 0)$ 이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$(\sqrt{21})^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 9 = 0, \quad (x + 3\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = \sqrt{3}$$

직선 AD가  $\angle BAC$ 를 이등분하므로  $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CE}$

$$\text{즉, } 2\sqrt{3} : \sqrt{3} = \overline{BE} : \overline{CE} \text{에서 } \overline{BE} = 2\overline{CE}$$

$$\text{따라서 } \overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BC} = \frac{2\sqrt{21}}{3}, \quad \overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{\sqrt{21}}{3} \text{이므로}$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = \left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{35}{3}$$

답 ①

## 11

$$f(x) = 3x^2 + ax - (2x-1) \int_0^1 f(t) dt \text{이고}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} \text{이므로 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \text{에서 } a = 2$$

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면 } f(x) = 3x^2 + 2x - (2x-1)k$$

$$f(x) = 3x^2 + 2(1-k)x + k \text{이고}$$

$$\int_0^1 \{3x^2 + 2(1-k)x + k\} dx = k$$

이때

$$\int_0^1 \{3x^2 + 2(1-k)x + k\} dx = \left[ x^3 + (1-k)x^2 + kx \right]_0^1 \\ = 1 + (1-k) + k = 2$$

$$\text{이므로 } k = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 - 2x + 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 3 \times 4 - 2 \times 2 + 2 = 10$$

답 ②

## 12

함수  $f(x) = a \cos \frac{\pi x}{b}$ 의 주기는  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = 2b$ 이고, 최댓값은  $a$ , 최솟값

은  $-a$ 이다.

$$f(x) = -a \text{에서}$$

$$a \cos \frac{\pi x}{b} = -a, \quad \cos \frac{\pi x}{b} = -1$$

$$\frac{\pi x}{b} = \pi, \quad x = b$$

즉, 점 A의 좌표는  $(b, -a)$ 이다.

$$f(x) = \frac{a}{2} \text{에서}$$

$$a \cos \frac{\pi x}{b} = \frac{a}{2}, \quad \cos \frac{\pi x}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{b} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi x}{b} = \frac{5\pi}{3}$$

$$x = \frac{b}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5b}{3}$$

$\overline{OB} < \overline{OC}$ 이므로 두 점 B, C의 좌표는  $B\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{2}\right), C\left(\frac{5b}{3}, \frac{a}{2}\right)$ 이다.

함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 직선  $x = b$ 에 대하여 대칭이므로

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

이때  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \left( \frac{5b}{3} - \frac{b}{3} \right) = \frac{2}{3}b, \quad \overline{AH} = \frac{a}{2} - (-a) = \frac{3}{2}a \text{이므로}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{2}{3}b} = \sqrt{3}, \quad a = \frac{4\sqrt{3}}{9}b$$

따라서 직선 OA의 기울기는  $-\frac{a}{b}$ 이고, 직선 OB의 기울기는  $\frac{3a}{2b}$ 이므

로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은

$$-\frac{a}{b} \times \frac{3a}{2b} = -\frac{3a^2}{2b^2} = -\frac{3}{2b^2} \times \left( \frac{4\sqrt{3}}{9}b \right)^2 = -\frac{8}{9}$$

답 ⑤

### 13

수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1=2, a_n a_{n+1} = (-1)^n$ 을 만족시키므로 각 항을 차례로 구하면

$$a_1 a_2 = -1 \text{에서 } a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 a_3 = 1 \text{에서 } a_3 = -2$$

$$a_3 a_4 = -1 \text{에서 } a_4 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 a_5 = 1 \text{에서 } a_5 = 2$$

⋮

$$a_1 = 2 \text{이므로 } b_1 = 1 - 2$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \text{이므로 } b_2 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = -2 \text{이므로 } b_3 = 3 - (-2) = 3 + 2$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \text{이므로 } b_4 = 4 - \frac{1}{2}$$

$$a_5 = 2 \text{이므로 } b_5 = 5 - 2$$

⋮

따라서

$$b_n = \begin{cases} n-2 & (n=4m-3) \\ n+\frac{1}{2} & (n=4m-2) \\ n+2 & (n=4m-1) \\ n-\frac{1}{2} & (n=4m) \end{cases} \quad (\text{단, } m \text{은 자연수})$$

자연수  $k$ 에 대하여  $b_{2k}$ 는 수열  $\{b_n\}$ 의 짝수번째 항을 의미하므로

$$b_{2k} = \begin{cases} 2k+\frac{1}{2} & (2k=4m-2) \\ 2k-\frac{1}{2} & (2k=4m) \end{cases} \quad (\text{단, } m \text{은 자연수})$$

$$b_{2k} + b_{2k+2} = \left(2k + \frac{1}{2}\right) + \left(2k + 2 - \frac{1}{2}\right) = 4k + 2$$

$$\text{또는 } b_{2k} + b_{2k+2} = \left(2k - \frac{1}{2}\right) + \left(2k + 2 + \frac{1}{2}\right) = 4k + 2$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} (b_{2k} + b_{2k+2}) = \sum_{k=1}^{10} (4k + 2) = 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 = 240$$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가)에 의하여  $a_2 = -\frac{1}{2}$ 이고

자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{2n} a_{2n+1} = (-1)^{2n} = 1, a_{2n+1} a_{2n+2} = (-1)^{2n+1} = -1 \text{이므로}$$

$$a_{2n+2} = \frac{-1}{a_{2n+1}} = -a_{2n} \text{을 만족시킨다.}$$

$$\text{따라서 } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2}$$

조건 (나)에 의하여  $a_{2n} + b_{2n} = 2n$ 에서

$$b_{2n} = 2n - a_{2n} = 2n - \frac{(-1)^n}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (b_{2k} + b_{2k+2}) &= \sum_{k=1}^{10} \left[ 2k - \frac{(-1)^k}{2} + 2k + 2 - \frac{(-1)^{k+1}}{2} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{10} (4k + 2) \\ &= 240 \end{aligned}$$

### 14

ㄱ.  $f(x) + x f'(x) = -4x^3 + 6x$ 에서  $\{x f(x)\}' = -4x^3 + 6x$ 이므로

$$x f(x) = \int (-4x^3 + 6x) dx$$

$$= -x^4 + 3x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉑의 양변에  $x=0$ 을 대입하면

$$0 \times f(0) = C, \text{ 즉 } C=0$$

$C=0$ 을 ㉑에 대입하면

$$x f(x) = -x^4 + 3x^2$$

$$f(x) \text{가 다항함수이므로 } f(x) = -x^3 + 3x$$

따라서  $f(-1) = -2$  (참)

ㄴ.  $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	⋯	-1	⋯	1	⋯
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 극소이고,  $x=1$ 에서 극대이다.

$$f(-1) = -2, f(1) = 2 \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$f(x) = -2 \text{에서}$$

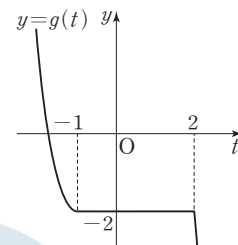
$$-x^3 + 3x = -2$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\text{함수 } g(t) = \begin{cases} f(t) & (t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2) \\ f(-1) & (-1 < t < 2) \end{cases} \text{이므로 함수 } y=g(t)$$

의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수  $g(t)$ 는  $t=2$ 에서만 미분가능하지 않다. (참)

$$\text{ㄷ. } |f(t) - g(t)| = \begin{cases} 0 & (t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2) \\ f(t) + 2 & (-1 < t < 2) \end{cases}$$

따라서  $|f(t) - g(t)|$ 는  $t=1$ 일 때 최댓값  $f(1) + 2 = 2 + 2 = 4$ 를 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

### 15

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = 3n - 1$ 이므로 집합  $A$ 의 원소는 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로만 이루어져 있다.

한편, 수열  $\{b_n\}$ 의 일반항은  $b_n = 2n - 1$ 이므로 수열  $\{b_n\}$ 의 각 항 중에서 3으로 나눈 나머지가 2가 아닌 수가 집합  $B - A$ 의 원소가 된다.

(i)  $n=3k-2$  ( $k$ 는 자연수)일 때

$$b_{3k-2}=2(3k-2)-1$$

$$2(3k-2)-1=6k-5=3(2k-1)-2$$

따라서  $b_{3k-2}$ 는 집합  $B-A$ 의 원소이다.

(ii)  $n=3k-1$  ( $k$ 는 자연수)일 때

$$b_{3k-1}=2(3k-1)-1$$

$$2(3k-1)-1=6k-3=3(2k-1)$$

따라서  $b_{3k-1}$ 는 집합  $B-A$ 의 원소이다.

(iii)  $n=3k$  ( $k$ 는 자연수)일 때

$$b_{3k}=2 \times 3k-1$$

$$2 \times 3k-1=3 \times 2k-1$$

따라서  $b_{3k}$ 는 집합  $B-A$ 의 원소가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서  $B-A = \{b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \dots\}$

이때  $d_n = b_{3n-2} + b_{3n-1}$ 이라 하면  $d_1 = b_1 + b_2 = 4$ 이고

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= (b_{3n+1} + b_{3n+2}) - (b_{3n-2} + b_{3n-1}) \\ &= \{2(3n+1)-1 + 2(3n+2)-1\} \\ &\quad - \{2(3n-2)-1 + 2(3n-1)-1\} \\ &= (12n+4) - (12n-8) = 12 \end{aligned}$$

이므로 수열  $\{d_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공차가 12인 등차수열이다.

이때 수열  $\{d_n\}$ 의 첫째항부터 제  $k$ 항까지의 합을  $S_k$ 라 하면

$$S_k = \frac{k\{2 \times 4 + 12(k-1)\}}{2} > 140$$

$$k(12k-4) > 280, 3k^2 - k - 70 > 0, (3k+14)(k-5) > 0$$

$$k > 0 \text{에서 } k > 5 \text{이므로 부등식을 만족시키는 자연수 } k \text{의 최솟값은 } 6 \text{이다.}$$

이때  $S_6 = (b_1 + b_2) + (b_4 + b_5) + \dots + (b_{16} + b_{17}) = \sum_{k=1}^{12} c_k = 204$

한편,  $b_{17} = 2 \times 17 - 1 = 33$ 에서  $S_6 - b_{17} = 171$ 이다. 집합  $B-A$ 에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터  $n$ 번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는

$$b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} = \sum_{k=1}^{11} c_k \text{인 경우이므로 자연수 } n \text{의 최솟값은 } 11 \text{이다.}$$

답 ①

다른 풀이

조건을 만족시키는 집합  $B-A$ 의 원소는  $b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \dots$ 이다. 수열  $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제  $3n$ 항까지의 합에서 수열  $\{b_{3n}\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을 뺀 것을  $S_n$ 이라 하자.

수열  $\{b_{3n}\}$ 은 첫째항이  $b_3 = 5$ 이고 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n} b_k - \sum_{k=1}^n b_{3k} \\ &= \frac{3n\{2 + 2(3n-1)\}}{2} - \frac{n\{10 + 6(n-1)\}}{2} = \frac{18n^2}{2} - \frac{6n^2 + 4n}{2} \\ &= 6n^2 - 2n = 2n(3n-1) \end{aligned}$$

$2n(3n-1) > 140$ 에서  $3n^2 - n - 70 > 0$ 이고  $(3n+14)(n-5) > 0$ 에서  $n$ 은 자연수이므로  $n > 5$ 이고, 자연수  $n$ 의 최솟값은 6이다.

$$\text{이때 } S_6 = b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} + b_{17} = \sum_{k=1}^{12} c_k = 204 \text{이고}$$

$$b_{17} = 2 \times 17 - 1 = 33 \text{이므로}$$

$$b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} = \sum_{k=1}^{11} c_k = 171 > 140 \text{이 성립한다.}$$

따라서 집합  $B-A$ 에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터  $n$ 번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는  $b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} = \sum_{k=1}^{11} c_k$ 인 경우이므로 자연수  $n$ 의 최솟값은 11이다.

16

$$\sum_{k=1}^{10} (k+2a_k) = \sum_{k=1}^{10} k + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 21 = 97$$

답 97

17

$f(x) = \int (3x^2 + 2x + a) dx = x^3 + x^2 + ax + C$  ( $C$ 는 적분상수)이고, 함수  $f(x)$ 는 삼차함수이므로  $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\text{즉, } C=0 \text{이고 } f(x) = x^3 + x^2 + ax$$

$$\text{또한 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + a \text{에서 } a=2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + x^2 + 2x \text{이므로 } f(2) = 8 + 4 + 4 = 16$$

답 16

18

조건 (가)에서  $\log_8 a + \log_8 b = \log_2 12 - \log_2 3$ 이므로

$$\log_8 ab = \log_2 4, \log_8 ab = 2$$

$$ab = 64 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$\text{조건 (나)에서 } \log_3 16 \times \log_2 9 = \frac{4 \log 2}{\log 3} \times \frac{2 \log 3}{\log 2} = 8 \text{이므로}$$

$$\log_2 a \times \log_2 b = 8 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } b = \frac{64}{a} \text{이므로 이를 } \textcircled{B} \text{에 대입하면}$$

$$\log_2 a \times \log_2 \frac{64}{a} = 8, \log_2 a \times (6 - \log_2 a) = 8$$

$$(\log_2 a)^2 - 6 \log_2 a + 8 = 0, (\log_2 a - 2)(\log_2 a - 4) = 0$$

$$\log_2 a = 2 \text{ 또는 } \log_2 a = 4$$

$$a = 4 \text{ 또는 } a = 16$$

$a=4$ 일 때  $b=16$ 이고,  $a=16$ 일 때  $b=4$ 이다.

$$\text{따라서 } a+b = 4+16 = 20$$

답 20

19

$f'(x) = x^2 - 2ax + 1$ 에서 함수  $f(x)$ 가 극값이 존재하지 않으려면 이차방정식  $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식  $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \leq 0, a^2 \leq 1, -1 \leq a \leq 1$$

따라서 정수  $a$ 의 값은  $-1, 0, 1$ 이고, 그 개수는 3이다.

답 3

20

조건 (가)에서 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=2x$ 가 만나는 두 점의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )라 하자.

또 함수  $|f(x)-2x|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $f(x)-2x=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ , 즉  $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+2x$ 로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x^2} = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = a^2\beta^2 = 0$ 에서  $\alpha=0$  또는  $\beta=0$

(i)  $\alpha=0$ 일 때,  $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-\beta)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-\beta)^2 = \beta^2 = 16$$

$\beta > 0$ 이므로  $\beta=4$ 이고  $f(x)=x^2(x-4)^2+2x$

이때  $f(1)=11 < 15$ 이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii)  $\beta=0$ 일 때,  $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\alpha)^2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-\alpha)^2 = a^2 = 16$$

$\alpha < 0$ 이므로  $\alpha=-4$ 이고  $f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

이때  $f(1)=27 > 15$ 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$$f(x) = x^2(x+4)^2 + 2x = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x + 2$$

$f'(x)=2$ 에서

$$4x^3 + 24x^2 + 32x + 2 = 2$$

$$4x(x+4)(x+2) = 0$$

$$x = -4 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

$f(-2)=12$ 이므로 곡선  $y=f(x)$  위의

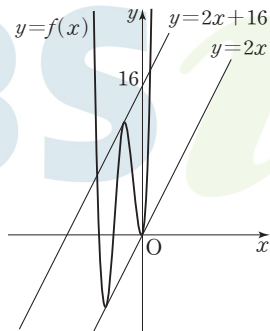
점  $(-2, 12)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-12=2(x+2), \text{ 즉 } y=2x+16$$

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=2x+k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는  $k$ 의 값의 범위는

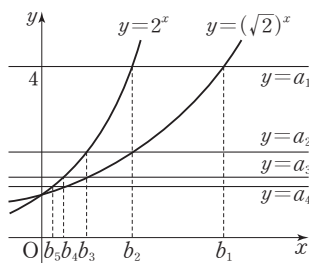
$$0 < k < 16$$

따라서 정수  $k$ 는 1, 2, 3, ..., 15이고, 그 개수는 15이다.



답 15

21



위의 그림에서 두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 각 항을 구하면 다음과 같다.

(i) 직선  $y=a_1=4$ 가 곡선  $y=(\sqrt{2})^x$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $b_1$ 이므로  $4=(\sqrt{2})^x$ 에서  $x=b_1=4$ 이고 곡선  $y=2^x$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $b_2$ 이므로  $4=2^x$ 에서  $x=b_2=2$

직선  $y=a_2$ 가 곡선  $y=(\sqrt{2})^x$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $b_2$ 이므로  $b_2=2$ 에서  $a_2=(\sqrt{2})^2=2$

$$\text{따라서 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{4} = 1, \frac{a_2}{b_2} = \frac{2}{2} = 1$$

(ii) 직선  $y=a_2=2$ 가 곡선  $y=2^x$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $b_3$ 이므로  $2=2^x$ 에서  $x=b_3=1$

$$a_3=(\sqrt{2})^1=\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_3}{b_3} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

(iii) 직선  $y=a_3=\sqrt{2}$ 가 곡선  $y=2^x$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $b_4$ 이므로

$$\sqrt{2}=2^x \text{에서 } x=b_4=\frac{1}{2}=2^{-1}$$

$$a_4=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_4}{b_4} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{-1}} = 2^{\frac{5}{4}}$$

(iv) 직선  $y=a_4=2^{\frac{1}{4}}$ 이 곡선  $y=2^x$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $b_5$ 이므로

$$2^{\frac{1}{4}}=2^x \text{에서 } x=b_5=\frac{1}{4}=2^{-2}$$

$$a_5=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_5}{b_5} = \frac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{-2}} = 2^{\frac{17}{8}}$$

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 \log_2 \frac{a_n}{b_n} &= \log_2 \frac{a_1}{b_1} + \log_2 \frac{a_2}{b_2} + \log_2 \frac{a_3}{b_3} + \log_2 \frac{a_4}{b_4} + \log_2 \frac{a_5}{b_5} \\ &= \log_2 \left( \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} \times \frac{a_4}{b_4} \times \frac{a_5}{b_5} \right) \\ &= \log_2 (1 \times 1 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{17}{8}}) \\ &= \log_2 2^{\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{17}{8}} = \frac{31}{8} \end{aligned}$$

따라서  $p=8, q=31$ 이므로  $p+q=8+31=39$

답 39

다른 풀이

$a_n=(\sqrt{2})^{b_n}=2^{\frac{b_n}{2}}$ 에서  $2^{\frac{b_n}{2}}=2^{b_{n+1}}$ 이므로

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n \text{ 이고}$$

$$a_1=(\sqrt{2})^{b_1}=4 \text{에서 } b_1=4$$

따라서 수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공비가  $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

$$\text{즉, } b_n=4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{3-n}$$

한편,  $2^{b_{n+1}}=a_n$ 에서  $b_{n+1}=2^{2-n}$ 이므로  $a_n=2^{2^n-n}$

$$\text{따라서 } \log_2 \frac{a_n}{b_n} = \log_2 \frac{2^{2^n-n}}{2^{3-n}} = 2^{2-n} + (n-3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 (2^{2-n} + n - 3) &= \frac{2 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{5 \times 6}{2} - 3 \times 5 \\ &= 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 15 - 15 \\ &= 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8} \end{aligned}$$

즉,  $p=8, q=31$ 이므로  $p+q=8+31=39$



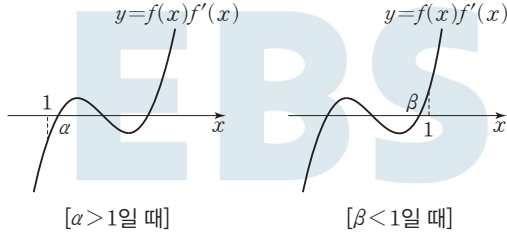
## 22

방정식  $f(x)=0$ 의 두 실근을  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )라 하면  
 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ ,  $f'(x)=2x-\alpha-\beta$ 이므로  
 $f(x)f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

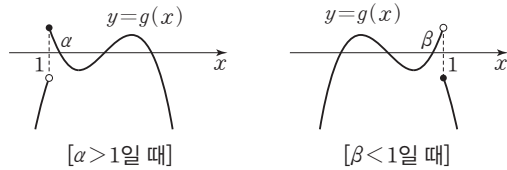
이때  $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ 이다.

(i)  $\alpha > 1$  또는  $\beta < 1$  일 때

함수  $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



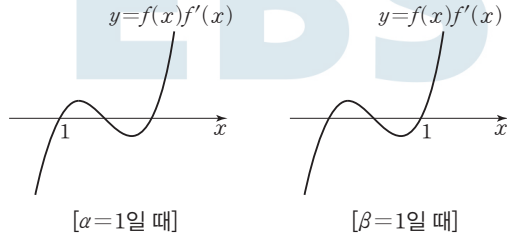
함수  $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



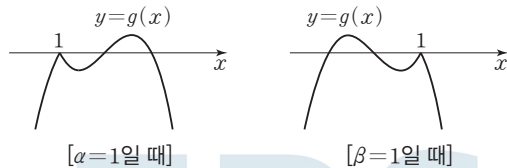
이때 함수  $g(x)$ 는  $x=1$ 에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii)  $\alpha=1$  또는  $\beta=1$  일 때

함수  $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



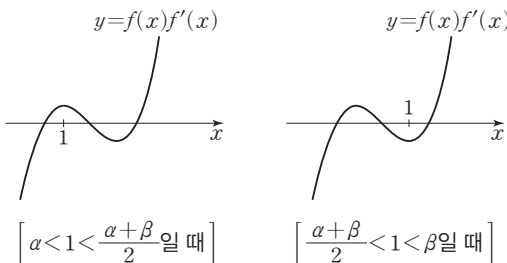
함수  $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



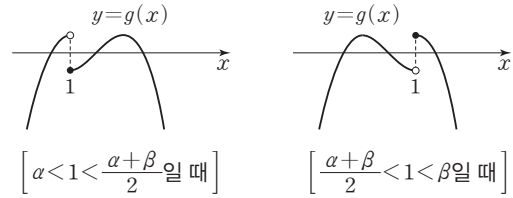
함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시키지만  $h(k)=2$ 이고  $\lim_{t \rightarrow k^-} h(t) > \lim_{t \rightarrow k^+} h(t)$ 를 만족시키는 실수  $k$ 가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(iii)  $\alpha < 1 < \frac{\alpha+\beta}{2}$  또는  $\frac{\alpha+\beta}{2} < 1 < \beta$  일 때

함수  $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



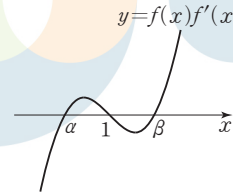
함수  $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수  $g(x)$ 는  $x=1$ 에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iv)  $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$  일 때

함수  $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

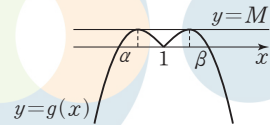


$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$ 이라 하면

$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$ 이므로  $i(-x)=-i(x)$ 이다.

즉, 함수  $y=i(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로  $i(x)$ 의 극댓값을  $M$ 이라 하면  $i(x)$ 의 극솟값은  $-M$ 이다.

따라서 함수  $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프는 점  $(1, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 극댓값은  $M$ , 극솟값은  $-M$ 이므로 함수  $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

또  $h(k)=2$ 이고  $\lim_{t \rightarrow k^-} h(t) > \lim_{t \rightarrow k^+} h(t)$ 를 만족시키는 실수  $k=M$ 이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i)~(iv)에서  $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$ 이므로  $f(x)=x^2-2x+a$  ( $a$ 는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)$ 이므로

$x < 1$  일 때  $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$

$g(-1)=2 \times (-2) \times (3+a)=20$ 에서  $a=-8$ 이므로

$$g(x)=2(x-1)(x^2-2x-8) \\ =2(x+2)(x-1)(x-4)$$

한편,  $x \geq 1$  일 때  $g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases} 2(x+2)(x-1)(x-4) & (x < 1) \\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x \geq 1) \end{cases}$$

따라서

$$g(0)=2 \times 2 \times (-1) \times (-4)=16,$$

$$g(3)=-2 \times 5 \times 2 \times (-1)=20$$

이므로

$$g(0) \times g(3)=16 \times 20 \\ =320$$



## 23

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+8n-2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+8n+2n}}{(\sqrt{4n^2+8n-2n})(\sqrt{4n^2+8n+2n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+8n+2n}}{8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{8}{n}+2}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{4+2}}{8} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

## 24

$\tan \alpha = \sqrt{2}$ 에서  $\sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$ 이므로

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{이때 } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{한편, } \sin \beta = \frac{1}{3} \text{ 이고, } 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

## 25

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t} + 4e^{4t}, \frac{dy}{dt} = 6 \cos t - 3 \sin t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6 \cos t - 3 \sin t}{-2e^{-2t} + 4e^{4t}} \quad (\text{단, } e^{-2t} \neq 2e^{4t})$$

$$\text{따라서 } t=0 \text{ 일 때, } \frac{dy}{dx} \text{ 의 값은 } \frac{6 \cos 0 - 3 \sin 0}{-2e^0 + 4e^0} = \frac{6-0}{-2+4} = 3$$

답 ①

## 26

$0 \leq t \leq \pi$ 인 실수  $t$ 에 대하여 직선  $x=t$ 를 포함하고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가  $\sqrt{t \sin t}$ 인 정삼각형이므로 이 정삼각형의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{t \sin t})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} t \sin t$$

따라서 이 입체도형의 부피는

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{4} t \sin t dt = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} t \sin t dt$$

이때

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} t \sin t dt &= \left[ t \times (-\cos t) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (-\cos t) dt \\ &= \frac{5\pi}{6} \times \left( -\cos \frac{5\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{6} \times \left( -\cos \frac{\pi}{6} \right) + \left[ \sin t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{12} \pi + \frac{\sqrt{3}}{12} \pi = \frac{6\sqrt{3}}{12} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi\end{aligned}$$

$$\text{이므로 구하는 입체도형의 부피는 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \pi = \frac{3}{8} \pi \text{ 이다.}$$

답 ③

## 27

직각삼각형  $A_1B_1E_1$ 에서

$$\overline{A_1E_1} = \sqrt{\overline{A_1B_1}^2 + \overline{B_1E_1}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\angle A_1E_1B_1 = \theta \text{ 라 하면 } \sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}$$

직각삼각형  $F_1E_1B_1$ 에서  $\angle F_1E_1B_1 = \alpha$ 라 하면  $\alpha = \theta - \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\cos \alpha = \cos \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\overline{F_1E_1} = \frac{\overline{B_1E_1}}{\cos \alpha} = \frac{3}{\frac{7\sqrt{2}}{10}} = \frac{15\sqrt{2}}{7}$$

삼각형  $A_1E_1F_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{A_1E_1} \times \overline{F_1E_1} \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{15\sqrt{2}}{7} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{75}{14}$$

삼각형  $A_1E_1F_1$ 과 삼각형  $D_1E_1G_1$ 이 합동이므로

$$S_1 = 2 \times \frac{75}{14} = \frac{75}{7}$$

한편,  $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2E_2} = 4 : 3$ 이므로

$\overline{A_2B_2} = 4k, \overline{B_2E_2} = 3k (k > 0)$ 으로 놓을 수 있다.

$\overline{E_1E_2} = 4 - 4k$ 이고, 직각삼각형  $B_2E_2E_1$ 에서  $\overline{B_2E_2} : \overline{E_1E_2} = 3 : 4$ 이므로

$$3k : (4 - 4k) = 3 : 4, 12k = 3(4 - 4k), k = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } \overline{A_2B_2} = 2, \overline{B_2E_2} = \frac{3}{2}$$

직사각형  $A_1B_1C_1D_1$ 과 직사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 는 서로 닮음이고 닮음비는  $2 : 1$ 이다.

같은 방법으로 직사각형  $A_nB_nC_nD_n$ 과 직사각형  $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 은 서로 닮음이고 닮음비가  $2 : 1$ 이므로 넓이의 비는  $4 : 1$ 이다.

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{75}{7}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{100}{7}$$

답 ④

## 28

선분  $AB$ 와 선분  $PQ$ 가 만나는 점을  $H$ 라 하자.

삼각형  $ABP$ 는  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

각형이므로

$$\overline{AP} = 2 \cos \theta$$

삼각형  $AHP$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{AH} = \overline{AP} \cos \theta = 2 \cos^2 \theta$$

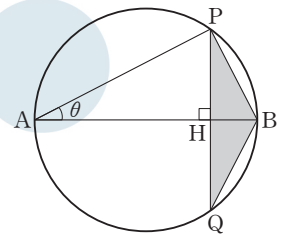
$$\text{그러므로 } \overline{BH} = 2 - 2 \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$$

또한  $\overline{PH} = \overline{AP} \sin \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 이므로

$$\overline{PQ} = 2 \overline{PH} = 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times 4 \sin \theta \cos \theta \times 2 \sin^2 \theta$$

$$= 4 \sin^3 \theta \cos \theta$$



$$\text{이므로 } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \sin^3 \theta \cos \theta d\theta$$

$$\sin \theta = t \text{로 놓으면 } \cos \theta = \frac{dt}{d\theta} \text{이고}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{일 때 } t = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3} \text{일 때 } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4t^3 dt = \left[ t^4 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

답 ①

## 29

$$f(x) = \frac{-x^2 + ax + b}{e^x} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x+a)e^x - (-x^2+ax+b)e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 - (a+2)x + a-b}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^2 - (a+2)x + a-b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (가)에서  $x_1, x_2$ 는 ①의 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 + x_2 = a+2, \quad x_1 x_2 = a-b \text{이므로 } a=0$$

이차방정식 ①의 판별식을  $D_1$ 이라 하면 이차방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D_1 = (a+2)^2 - 4(a-b) = 4+4b > 0 \text{에서 } b > -1$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - b}{e^x} \text{이므로}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)e^x - (x^2-2x-b)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2 + 4x + b - 2}{e^x}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } -x^2 + 4x + b - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

조건 (나)에서  $x_3, x_4$ 는 ②의 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_3 + x_4 = 4, \quad x_3 x_4 = -b+2$$

$$\text{이므로 } (x_3)^2 + (x_4)^2 = 14 \text{에서}$$

$$(x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 14, \quad 4^2 - 2(-b+2) = 14, \quad b=1$$

이차방정식 ②의 판별식을  $D_2$ 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 2^2 - (-1) \times (b-2) = 3 > 0$$

이므로 이차방정식 ②은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\text{그러므로 } f(x) = \frac{-x^2 + 1}{e^x}, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{e^x},$$

$$f''(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{e^x} \text{이다.}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^2 - 2x - 1 = 0 \text{이므로 } x = 1 - \sqrt{2} \text{ 또는 } x = 1 + \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } -x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\text{즉, } x^2 - 4x + 1 = 0 \text{이므로 } x = 2 - \sqrt{3} \text{ 또는 } x = 2 + \sqrt{3}$$

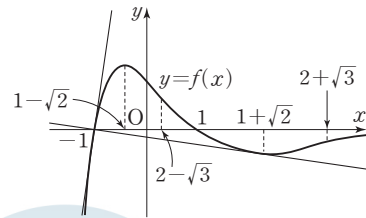
함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 곡선  $y=f(x)$ 의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$1-\sqrt{2}$	...	$2-\sqrt{3}$	...	$1+\sqrt{2}$	...	$2+\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$		↗ 극댓값		↘ 변곡점		↗ 극솟값		↘ 변곡점	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 1}{e^x} = 0 \text{이다.}$$

즉, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은  $x$ 축이다.

한편,  $f(-1)=f(1)=0$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$t > -1$ 일 때,  $g(t) = \frac{f(t)}{t+1}$ 의 값은 두 점  $(-1, 0), (t, f(t))$ 를 지나는 직선의 기울기이고  $g(-1) = f'(-1)$ 이므로 구간  $[-1, \infty)$ 에서 함수  $g(t)$ 의 최댓값은 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기이고, 함수  $g(t)$ 의 최솟값은 두 점  $(-1, 0), (t, f(t))$  ( $t > -1$ )을 지나는 직선이 곡선  $y=f(x)$ 에 접할 때 이 접선의 기울기이다.

곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{-t^2+1}{e^t} = \frac{t^2-2t-1}{e^t}(x-t)$$

이 직선이 점  $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$0 - \frac{-t^2+1}{e^t} = \frac{t^2-2t-1}{e^t}(-1-t), \quad (t+1)^2(t-2) = 0$$

$t > -1$ 이므로  $t=2$

이때  $f'(2) = -\frac{1}{e^2}$ 이므로 구간  $[-1, \infty)$ 에서 함수  $g(t)$ 의 최솟값은  $-\frac{1}{e^2}$ 이다.

한편,  $f(-1)=0$ 이고  $\lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{f(t)}{t+1} = f'(-1) = 2e$ 이므로 구간  $[-1, \infty)$ 에서 함수  $g(t)$ 의 최댓값은  $2e$ 이다.

따라서  $m = -\frac{1}{e^2}, M = 2e$ 이므로

$$(emM)^2 = \left\{ e \times \left( -\frac{1}{e^2} \right) \times 2e \right\}^2 = 4$$

답 4

다른 풀이

$$f(x) = \frac{-x^2+1}{e^x}, \quad f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{e^x} \quad (\text{위의 풀이 참조})$$

한편,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{-t^2+1}{(t+1)e^t} & (t \neq -1) \\ f'(-1) & (t = -1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-t}{e^t} & (t \neq -1) \\ 2e & (t = -1) \end{cases}$$

$$\text{이때 } \lim_{t \rightarrow -1} g(t) = \frac{1-(-1)}{e^{-1}} = 2e, \quad g(-1) = 2e \text{이므로}$$

$$g(t) = \frac{1-t}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{-e^t - (1-t)e^t}{e^{2t}} = \frac{t-2}{e^t}, \quad g''(t) = \frac{e^t - (t-2)e^t}{e^{2t}} = \frac{3-t}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t=2 \text{이고, } g''(t) = 0 \text{에서 } t=3$$

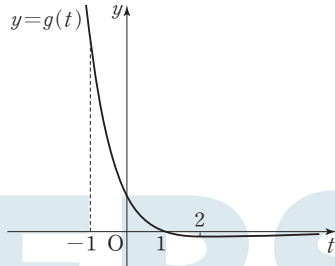
함수  $g(t)$ 의 증가와 감소, 곡선  $y=g(t)$ 의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	...	2	...	3	...
$g'(t)$	-	0	+	+	+
$g''(t)$	+	+	+	0	-
$g(t)$		↘ 극솟값		↗ 변곡점	

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-t}{e^t} = 0 \text{ 이다.}$$

즉, 함수  $y=g(t)$ 의 그래프의 점근선은  $x$ 축이다.

한편,  $g(1)=0$ 이므로 함수  $y=g(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



구간  $[-1, \infty)$ 에서 함수  $g(t)$ 는  $t=-1$ 일 때 최댓값  $g(-1)=2e$ 를 갖고  $t=2$ 일 때 최솟값  $g(2)=-\frac{1}{e^2}$ 을 갖는다.

$$\text{따라서 } M=2e, m=-\frac{1}{e^2} \text{ 이므로 } (emM)^2 = \left[ e \times \left( -\frac{1}{e^2} \right) \times 2e \right]^2 = 4$$

### 30

삼차함수  $g(x)$ 를

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 상수이고 } a < 0 \text{이다.})$$

라 하면 조건 (나)에 의하여

$$g(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d$$

$$-g(x) = -ax^3 - bx^2 - cx - d$$

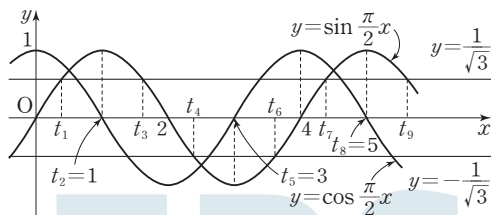
이므로  $g(-x) = -g(x)$ 에서  $b=d=0$ 이고

조건 (가)에서  $g(1)=0$ 이므로  $c=-a$

$$\text{그러므로 } g(x) = ax^3 - ax \quad (a < 0) \text{ 이고 } g'(x) = 3ax^2 - a$$

두 함수  $f(x), g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수  $h(x) = (g \circ f)(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) = (3a \sin^2 \frac{\pi}{2}x - a) \times \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x \\ &= \frac{a}{2} \pi \cos \frac{\pi}{2}x \left( \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{2}x + 1 \right) \left( \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{2}x - 1 \right) \end{aligned}$$



그림과 같이  $h'(t)=0$ 을 만족시키는  $t > 0$ 인 실수  $t$ 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을  $t_1, t_2, t_3, \dots$ 이라 하면 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $h'(t_n)=0$ 에서

$$\cos \frac{\pi}{2}t_n = 0 \text{ 또는 } \sin \frac{\pi}{2}t_n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 이고}$$

$$\sin \frac{\pi}{2}t_1 = \sin \frac{\pi}{2}t_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \frac{\pi}{2}t_2 = \cos \frac{\pi}{2}t_5 = 0,$$

$$\sin \frac{\pi}{2}t_4 = \sin \frac{\pi}{2}t_6 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	$\dots$	$t_1$	$\dots$	$t_2$	$\dots$	$t_3$	$\dots$	$t_4$	$\dots$	$t_5$	$\dots$	$t_6$	$\dots$
$h'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 조건 (다)에서  $a_1=t_1, a_2=t_3, a_3=t_5, \dots, a_n=t_{2n-1}$ 이다.

$$h(a_2) = h(t_3) \text{ 이고 } \sin \frac{\pi}{2}t_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 이므로}$$

$$h(a_2) = h(t_3) = a \sin^3 \frac{\pi}{2}t_3 - a \sin \frac{\pi}{2}t_3 = \frac{a}{3\sqrt{3}} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$-\frac{2a}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}, a = -4$$

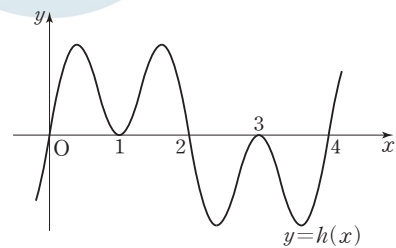
$$\text{그러므로 } h(x) = -4 \sin^3 \frac{\pi}{2}x + 4 \sin \frac{\pi}{2}x$$

$$\cos \frac{\pi}{2}t_2 = \cos \frac{\pi}{2}t_5 = 0 \text{ 에서 } t_2=1, t_5=3$$

$$h(t_1) = h(t_3) = \frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ 이고 } h(t_2) = h(1) = 0$$

$$h(t_4) = h(t_6) = -\frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ 이고 } h(t_5) = h(3) = 0$$

이를 종합하면  $0 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수  $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



한편,  $f(-x) = -f(x)$ 이고 조건 (나)에 의하여

$$f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)), \text{ 즉 } h(-x) = -h(x) \text{ 이다.}$$

그러므로 함수  $y=h(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\text{또한 } \sin \left\{ \frac{\pi}{2}(x+4) \right\} = \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{2}x \right) = \sin \frac{\pi}{2}x \text{ 에서}$$

$h(x+4) = h(x)$ 이므로  $2 \leq x \leq 4$ 에서 함수  $y=h(x)$ 의 그래프는  $-2 \leq x \leq 0$ 에서 함수  $y=h(x)$ 의 그래프와 일치한다.

$$\begin{aligned} \int_0^4 |h(x)| dx &= \int_0^2 h(x) dx + \int_2^4 \{-h(x)\} dx \\ &= \int_0^2 h(x) dx + \int_{-2}^0 \{-h(x)\} dx = 2 \int_0^2 h(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 h(x) dx &= \int_0^2 \left( -4 \sin^3 \frac{\pi}{2}x + 4 \sin \frac{\pi}{2}x \right) dx \\ &= 4 \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2}x \left( 1 - \sin^2 \frac{\pi}{2}x \right) dx \\ &= 4 \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2}x \cos^2 \frac{\pi}{2}x dx \end{aligned}$$

$$\cos \frac{\pi}{2}x = t \text{ 로 놓으면 } -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x = \frac{dt}{dx} \text{ 이고}$$

$$x=0 \text{ 일 때 } t=1, x=2 \text{ 일 때 } t=-1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} 4 \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2}x \cos^2 \frac{\pi}{2}x dx &= -\frac{8}{\pi} \int_1^{-1} t^2 dt = \frac{8}{\pi} \int_{-1}^1 t^2 dt \\ &= \frac{16}{\pi} \int_0^1 t^2 dt = \frac{16}{\pi} \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{16}{\pi} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \int_0^4 |h(x)| dx = 2 \times \frac{16}{3\pi} = \frac{32}{3\pi} \text{ 에서 } p=3, q=32 \text{ 이므로}$$

$$p+q=35$$

01 ④	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ②
06 ③	07 ④	08 ③	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ⑤	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 7	17 127	18 124	19 581	20 42
21 14	22 109	23 ⑤	24 ①	25 ③
26 ③	27 ①	28 ③	29 13	30 17

01

$$9^{\sqrt{2}} \times 3^{1-2\sqrt{2}} = (3^2)^{\sqrt{2}} \times 3^{1-2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}} \times 3^{1-2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})} = 3$$

02

$f(x) = (3x^2 - 2)(x^2 + 2x + 5)$ 에서  
 $f'(x) = 6x(x^2 + 2x + 5) + (3x^2 - 2)(2x + 2)$   
 따라서  $f'(1) = 6 \times 8 + 1 \times 4 = 52$

03

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$   
 따라서  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 3 = 5$

04

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면  
 $a_3 = 8$ 에서  $a + 2d = 8$  ..... ㉠  
 $a_2 + a_6 = \frac{1}{2}a_{15}$ 에서  $(a+d) + (a+5d) = \frac{1}{2}(a+14d)$   
 $4a + 12d = a + 14d, 3a = 2d$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면  $a = 2, d = 3$   
 즉, 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로  
 $a_k = 2 + (k-1) \times 3 = 3k - 1$   
 $a_k = 3k - 1 > 100$ 에서  $k > \frac{101}{3}$   
 따라서 조건을 만족시키는 자연수  $k$ 의 최솟값은 34이다.

05

$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 30$ 에서  
 $\sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k = 30$  ..... ㉠  
 $\sum_{k=1}^{10} (b_k - \frac{1}{2}) = \frac{11}{2}$ 에서  
 $\sum_{k=1}^{10} b_k - \frac{1}{2} \times 10 = \frac{11}{2}, \sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{11}{2} + 5 = \frac{21}{2}$  ..... ㉡  
 ㉠을 ㉡에 대입하면  $\sum_{k=1}^{10} a_k + 21 = 30$   
 따라서  $\sum_{k=1}^{10} a_k = 30 - 21 = 9$

06

시간  $t=1$ 에서  $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은  
 $\int_1^3 v(t) dt = \int_1^3 (2t^2 + at + 2) dt = \left[ \frac{2}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + 2t \right]_1^3$   
 $= \left( 18 + \frac{9}{2}a + 6 \right) - \left( \frac{2}{3} + \frac{a}{2} + 2 \right) = 4a + \frac{64}{3}$   
 이므로  $4a + \frac{64}{3} = \frac{100}{3}$ 에서  $4a = 12$   
 따라서  $a = 3$

07

직각삼각형 AOH에서  $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ 이므로  
 $\angle AOH = \alpha$ 라 하면  $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$   
 직선  $l$ 과  $x$ 축의 교점을 B라 하면 직각삼각형 AOH와 직각삼각형 ABO는 서로 닮음이므로  
 $\angle ABO = \angle AOH = \alpha$   
 이때  $\theta = \pi - \alpha$ 이므로  
 $\sin \theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{4}{5}$   
 $\cos \theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$   
 따라서  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$

08

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ 는 상수)라 하면  
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$   
 곡선  $y=f(x)$ 가 점  $(1, 3)$ 에서 직선  $y=4x-1$ 에 접하므로  
 $f(1) = 3, f'(1) = 4$   
 함수  $f(x)$ 가  $x = \frac{1}{3}$ 에서 극소이므로  $f'(\frac{1}{3}) = 0$   
 $f'(1) = 3 + 2a + b = 4$ 에서  $2a + b = 1$  ..... ㉠  
 $f'(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a + b = 0$ 에서  $2a + 3b = -1$  ..... ㉡  
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면  $a = 1, b = -1$ 이므로  
 $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$   
 $f'(x) = 0$ 에서  $x = \frac{1}{3}$  또는  $x = -1$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = -1$ 에서  
 극대이다.  
 한편,  $f(x) = x^3 + x^2 - x + c$ 이고  $f(1) = 3$ 이므로  
 $1 + 1 - 1 + c = 3$ 에서  $c = 2$   
 따라서  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ 이므로 구하는 함수  $f(x)$ 의 극댓값은  
 $f(-1) = -1 + 1 - (-1) + 2 = 3$

09

$\log_2 f(1) + \log_2 (1-3)^2 = 5$ 에서  $\log_2 f(1) = 3$ 이므로  $f(1) = 8$   
 $f(1) - 8 = 0$  ..... ㉠  
 또한  $\log_2 f(5) + \log_2 (5-3)^2 = 5$ 에서  $\log_2 f(5) = 3$ 이므로  $f(5) = 8$   
 $f(5) - 8 = 0$  ..... ㉡

㉠, ㉡에서

$$f(x) - 8 = a(x-1)(x-5) \quad (a \text{는 양수})$$

$$f(x) = a(x-1)(x-5) + 8 = a(x-3)^2 - 4a + 8$$

이차함수  $f(x)$ 는  $x=3$ 에서 최솟값 4를 가져야 하므로  
 $-4a + 8 = 4$ 에서  $a=1$

$$\text{따라서 } f(x) = (x-1)(x-5) + 8 \text{ 이므로}$$

$$f(0) = (-1) \times (-5) + 8 = 13$$

답 ②

### 10

$$f(0) = 5 \text{ 이므로}$$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 5$  ( $a, b, c$ 는 상수이고  $a \neq 0$ )이라 하면

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-x}^x f(t) dt = \int_{-x}^x (at^3 + bt^2 + ct + 5) dt \\ &= 2 \int_0^x (bt^2 + 5) dt = 2 \left[ \frac{b}{3}t^3 + 5t \right]_0^x = \frac{2b}{3}x^3 + 10x \end{aligned}$$

$$g(1) = 12 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2b}{3} + 10 = 12, \quad b = 3$$

$$\text{따라서 } g(x) = 2x^3 + 10x \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 (2x^3 + 10x) dx = \left[ \frac{1}{2}x^4 + 5x^2 \right]_0^2 = 8 + 20 = 28$$

답 ④

### 11

함수  $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각  $a+c, -a+c$ 이므로  
 조건 (가)에 의하여

$$(a+c) + (-a+c) = 2c = 6 \text{에서 } c=3$$

$$\text{함수 } f(x) \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{b}$$

$$\text{또한 } g(x) = \left| \cos\left(3\pi x - \frac{1}{2}\right) \right| + 1 = \left| \cos 3\pi\left(x - \frac{1}{6\pi}\right) \right| + 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{함수 } g(x) \text{의 주기는 } \frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3}$$

조건 (나)에 의하여 두 함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{3} \text{에서 } b=6$$

$$\text{즉, } f(x) = a \sin(6\pi x) + 3 \text{이고 } f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = a \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 3 = -a + 3 = 1 \text{에서 } a=2$$

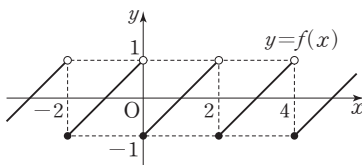
$$\text{따라서 } f(x) = 2 \sin(6\pi x) + 3 \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + 3 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 3 + \sqrt{3}$$

답 ⑤

### 12

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ.  $-2 \leq x < 0$ 일 때,  $f(x) = x+1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$$

$2 \leq x < 4$ 일 때,  $f(x) = x-3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = -1$$

$$\text{그러므로 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + (-1) = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 함수  $f(x)$ 가  $x=2n$  ( $n$ 은 정수)에서만 불연속이므로 함수  $|f(x)|$ 가  $x=2n$  ( $n$ 은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다. 앞의 그림에 의하면 모든 정수  $n$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x) = 1 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2n^-} |f(x)| = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2n^+} f(x) = -1 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2n^+} |f(x)| = 1$$

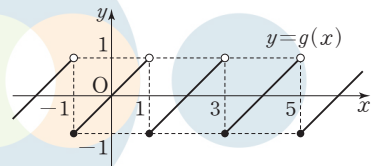
$$|f(2n)| = |-1| = 1$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2n} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2n} |f(x)| = |f(2n)| \text{ 이므로 함수 } |f(x)|$$

는  $x=2n$  ( $n$ 은 정수)에서 연속이다.

그러므로 함수  $|f(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 모든 정수  $n$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 는  $x=2n$ 에서만 불연속이고, 함수  $f(x+1)$ 은  $x=2n-1$ 에서만 불연속이므로 함수  $f(x)f(x+1)$ 이  $x=n$  ( $n$ 은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.  $g(x)=f(x+1)$ 이라 하면  $-1 \leq x < 1$ 일 때  $g(x)=x$ 이고, 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(x)=g(x+2)$ 이므로 함수  $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



정수  $n$ 에 대하여

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2n^+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2n^+} f(x)g(x) = (-1) \times 0 = 0$$

$$f(2n)f(2n+1) = f(2n)g(2n) = (-1) \times 0 = 0$$

즉, 모든 정수  $n$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2n} f(x)f(x+1) &= \lim_{x \rightarrow 2n} f(x)f(x+1) \\ &= f(2n)f(2n+1) \end{aligned}$$

이므로 함수  $f(x)f(x+1)$ 은  $x=2n$  ( $n$ 은 정수)에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow (2n-1)^-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (2n-1)^-} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (2n-1)^+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (2n-1)^+} f(x)g(x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$f(2n-1)f(2n) = f(2n-1)g(2n-1) = 0 \times (-1) = 0$$

즉, 모든 정수  $n$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (2n-1)} f(x)f(x+1) &= \lim_{x \rightarrow (2n-1)} f(x)f(x+1) \\ &= f(2n-1)f(2n) \end{aligned}$$

이므로 함수  $f(x)f(x+1)$ 은  $x=2n-1$  ( $n$ 은 정수)에서 연속이다.

(i), (ii)에 의하여 함수  $f(x)f(x+1)$ 은  $x=n$  ( $n$ 은 정수)에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤



### 13

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A(t, \log_2 t), B(t, \log_2 16t)$$

점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표를 a라 하면

$$\log_2 16a = \log_2 t \text{에서 } 16a = t, \text{ 즉 } a = \frac{t}{16}$$

점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 b라 하면

$$\log_2 b = \log_2 16t \text{에서 } b = 16t$$

즉,  $C\left(\frac{t}{16}, \log_2 t\right), D(16t, \log_2 16t)$ 이므로 삼각형 ABC의 무게

중심  $G_1$ 의 좌표는

$$G_1\left(\frac{t+t+\frac{t}{16}}{3}, \frac{\log_2 t + \log_2 16t + \log_2 t}{3}\right)$$

$$\text{즉, } G_1\left(\frac{11}{16}t, \frac{4}{3} + \log_2 t\right)$$

이고, 삼각형 ADB의 무게중심  $G_2$ 의 좌표는

$$G_2\left(\frac{t+16t+t}{3}, \frac{\log_2 t + \log_2 16t + \log_2 16t}{3}\right)$$

$$\text{즉, } G_2\left(6t, \frac{8}{3} + \log_2 t\right)$$

이므로 직선  $G_1G_2$ 의 기울기는

$$\frac{\left(\frac{8}{3} + \log_2 t\right) - \left(\frac{4}{3} + \log_2 t\right)}{6t - \frac{11}{16}t} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{85}{16}t} = \frac{64}{255t}$$

$$\text{즉, } \frac{64}{255t} = \frac{16}{255} \text{이므로 } t=4$$

따라서 A(4, 2), B(4, 6), D(64, 6)이므로 삼각형 ADB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (64-4) \times (6-2) = \frac{1}{2} \times 60 \times 4 = 120$$

답 ⑤

### 14

삼차함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a라 하면 방정식  $f(x) - x = 0$ 의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$$f(x) - x = ax(x-1)(x-2) \quad (a > 0)$$

으로 놓을 수 있다.

$$\text{즉, } f(x) = ax(x-1)(x-2) + x \text{이고, } f(0) = 0, f(1) = 1,$$

$$f(2) = 2 \text{이다.}$$

한편, 함수  $g(x)$ 는  $0 \leq x \leq 2$ 일 때

$g(x) = f(x)$ 이고, 모든 실수  $x$ 에 대하여

$g(x+2) = g(x) + 2$ 를 만족시키므로

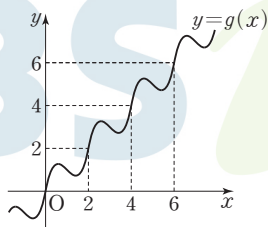
함수  $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과

같이 생각할 수 있다.

이때

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 \{ax(x-1)(x-2) + x\} dx \\ &= \int_0^2 \{ax^3 - 3ax^2 + (2a+1)x\} dx \\ &= \left[ \frac{a}{4}x^4 - ax^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 4a - 8a + 4a + 2 = 2 \end{aligned}$$

이고, 자연수  $k$ 에 대하여



$$\begin{aligned} \int_{2k-2}^{2k} g(x) dx &= 2 \times (2k-2) + \int_0^2 g(x) dx = (4k-4) + \int_0^2 f(x) dx \\ &= (4k-4) + 2 = 4k-2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{2n} g(x) dx &= \int_0^2 g(x) dx + \int_2^4 g(x) dx + \dots + \int_{2n-2}^{2n} g(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n (4k-2) = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = 2n^2 \end{aligned}$$

따라서  $2n^2 = 72$ 에서  $n^2 = 36$

$n$ 은 자연수이므로  $n=6$

답 ①

#### 참고

함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 가 세

점 (0, 0), (1, 1), (2, 2)에서 만나므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$f(x) = ax(x-1)(x-2) + x$ 에서

$$f(x+1) - 1 = ax(x+1)(x-1) + x$$

$$= ax^3 + (1-a)x$$

이므로 함수  $y=f(x+1)-1$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 함수  $y=f(x+1)-1$ 의 그래프를  $x$ 축

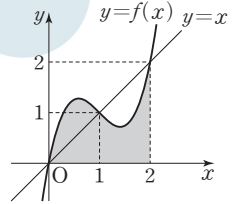
의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 점 (1, 1)에 대하여 대칭이다.

따라서 그림의 색칠된 부분의 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의

넓이의  $\frac{1}{2}$ 이므로 2이다.

$$\text{즉, } \int_0^2 f(x) dx = 2$$



### 15

선분 CD가 원의 지름이므로  $\angle CPD = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PCD에서  $\overline{CD}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ 이므로

$$\overline{PD} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{PC}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$$

삼각형 APD의 넓이가  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로  $\angle APD = \theta$ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{PD} \times \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

선분 AB가 원의 지름이므로  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서  $\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 이므로

$$\overline{PB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3$$

삼각형 BPC에서  $\angle BPC = \pi - \theta$ 이고  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - 2 \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{2}{3} = 9 + 16 - 16 = 9$$

$\overline{BC} > 0$ 이므로  $\overline{BC} = 3$

답 ②



## 16

함수  $f(x)=2x^3-x+1$ 에 대하여  $x$ 의 값이  $-2$ 에서  $2$ 까지 변할 때의 함수  $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{(16-2+1)-(-16+2+1)}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

답 7

## 17

$\log_2 \frac{128}{n} = m$  ( $m$ 은 자연수)로 놓으면

$$\frac{128}{n} = 2^m \text{에서 } 2^{7-m} = n$$

$n$ 이 자연수이므로  $7-m \geq 0$

즉,  $m$ 은  $1 \leq m \leq 7$ 인 자연수이므로 조건을 만족시키는  $n$ 은

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$$

따라서 모든  $n$ 의 값의 합은  $\frac{1 \times (2^7-1)}{2-1} = 2^7-1=127$

답 127

## 18

함수  $f(x)$ 의 차수가 3 이상이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1} = \infty \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1} = -\infty$$

이므로 조건을 만족시키지 않고, 함수  $f(x)$ 의 차수가 1 이하이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1} = 3$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 함수  $f(x)$ 는 이차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$ 는 상수,  $a \neq 0$ )이라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x)+3x^2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4ax^2+2bx+c+3x^2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4a+3+\frac{2b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 4a+3 \end{aligned}$$

이므로  $4a+3=7$ 에서  $a=1$

즉,  $f(x)=x^2+bx+c$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^2+bt+c) = c$$

이므로  $c=4$

그러므로  $f(x)=x^2+bx+4$ 이고

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 4 - \frac{b^2}{4}$$

이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = -\frac{b}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

즉,  $-\frac{b}{2} = -1$ 에서  $b=2$

따라서  $f(x)=x^2+2x+4$ 이므로  $f(10)=100+20+4=124$

답 124

## 19

$\int_0^1 f(t) dt = k$  ( $k$ 는 상수)로 놓으면  $f(x)=x^2+(k-2)x$ 이고

$$\int_0^1 \{t^2+(k-2)t\} dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{k-2}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{k-2}{2} = \frac{k}{2} - \frac{2}{2}$$

이므로  $\frac{k}{2} - \frac{2}{2} = k$ 에서  $k = -\frac{4}{3}$

즉,  $f(x)=x^2-\frac{10}{3}x$ 이고 함수  $y=f(x)$ 의

그래프는 그림과 같다.

따라서 곡선  $y=f(x)$ 와  $x$ 축으로 둘러싸인

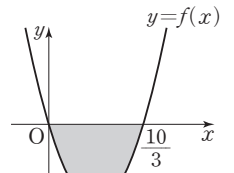
$$\int_0^{\frac{10}{3}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{10}{3}} \{-f(x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{10}{3}} \left(-x^2 + \frac{10}{3}x\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}} = -\frac{1000}{81} + \frac{500}{27} = \frac{500}{81}$$

즉,  $p=81, q=500$ 이므로  $p+q=81+500=581$

답 581



## 20

조건 (다)에서  $n$ 이 홀수이면  $n+2$ 가 홀수이므로  $f(n)$ 의 값에 상관없이  $a_n=1$

$n$ 이 짝수이면  $n+2$ 가 짝수이므로

$f(n) > 0$ 이면  $a_n=2$

$f(n)=0$ 이면  $a_n=1, f(n) < 0$ 이면  $a_n=0$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 \text{에서 } \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^5 a_{2n-1} + \sum_{n=1}^5 a_{2n} = 5 + \sum_{n=1}^5 a_{2n} = 10$$

$$\text{즉, } \sum_{n=1}^5 a_{2n} = 5 \quad \dots \text{㉠}$$

조건 (나)에서  $f(n)=0$ 인 10 이하의 자연수  $n$ 의 값이 2개 이하이므로 ㉠을 만족시키려면  $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$  중에서  $a_n=1$ 인 짝수  $n$ 이 반드시 1개 존재해야 하고  $a_n=2$ 인 짝수  $n$ 이 2개,  $a_n=0$ 인 짝수  $n$ 이 2개 존재해야 한다.

즉, 10 이하의 자연수  $n$  중에서  $f(n)=0$ 인 짝수  $n$ 이 1개,  $f(n) > 0$ 인 짝수  $n$ 이 2개,  $f(n) < 0$ 인 짝수  $n$ 이 2개 존재한다.

이때 이차방정식  $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고 조건 (나)에 의하여  $f(n)=0$ 인 10 이하의 홀수  $n$ 이 하나 존재한다.

(i)  $f(2)=0$ 인 경우

조건 (가)에서  $f(1) > 0$ 이므로  $f(4)$ 와

$f(6)$ 의 값이 모두 음수이고  $f(8)$ 과

$f(10)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.

조건 (나)에 의하여  $f(7)=0$ 이므로

$$f(x) = (x-2)(x-7)$$

(ii)  $f(4)=0$ 인 경우

$f(2) < 0$ 이면 방정식  $f(x)=0$ 의 한 실근이 사잇값의 정리에 의하여 1과 2 사이에 존재해야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉,  $f(2) > 0$ 이므로  $f(6)$ 과  $f(8)$ 의 값이

모두 음수이고  $f(10)$ 의 값이 양수이어야

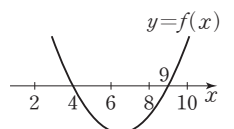
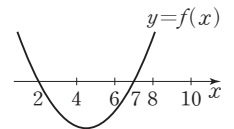
한다.

조건 (나)에 의하여  $f(9)=0$ 이므로

$$f(x) = (x-4)(x-9)$$

(iii)  $f(6)=0$ 인 경우

$f(4) > 0$ 이면  $f(2) > 0$ 이고  $f(8)$ 과  $f(10)$ 의 값이 모두 음수이어야 한다. 즉, 방정식  $f(x)=0$ 의 한 실근이 10보다 커야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



즉,  $f(4) < 0$ 이면  $f(8)$ 과  $f(10)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.  
따라서  $f(2) < 0$ 이고  $f(1) = 0$ 이어야 하는데 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 조건을 만족시키는  $f(x)$ 는 존재하지 않는다.

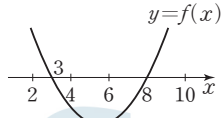
(iv)  $f(8) = 0$ 인 경우

$f(6) > 0$ 이면  $f(2)$ 와  $f(4)$ 의 값도 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉,  $f(6) < 0$ 이므로  $f(4) < 0$ 이고  $f(2)$ 와  $f(10)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.

조건 (나)에 의하여  $f(3) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-3)(x-8)$$



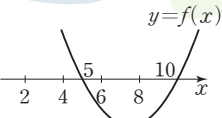
(v)  $f(10) = 0$ 인 경우

$f(8) > 0$ 이면  $f(2)$ ,  $f(4)$ ,  $f(6)$ 의 값이 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉,  $f(8) < 0$ 이므로  $f(6) < 0$ 이고  $f(2)$ 와  $f(4)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.

조건 (나)에 의하여  $f(5) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-5)(x-10)$$



(i)~(v)에서 조건을 만족시키는  $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-2)(x-7) \text{ 또는 } f(x) = (x-4)(x-9)$$

$$\text{또는 } f(x) = (x-3)(x-8) \text{ 또는 } f(x) = (x-5)(x-10)$$

따라서  $f(11)$ 의 값은  $9 \times 4 = 36$ ,  $7 \times 2 = 14$ ,  $8 \times 3 = 24$ ,  $6 \times 1 = 6$ 이므로 최솟값은 6, 최댓값은 36이고, 그 합은 42이다.

답 42

## 21

$p < 0$ 이라 하면 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n \geq 0$ 이면  $a_{n+1} = a_n - p > a_n$ , 즉  $a_{21} \neq a_1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉,  $p$ 는 자연수이다.  
 $a_1, a_2, \dots, a_{20}$  중 음수인 것의 개수를  $k$ 라 하면 0 이상인 것의 개수는  $20 - k$ 이므로

$$a_{21} = a_1 - (20 - k)p + kpq$$

$k = 20$ 이면  $a_1 > 0$ 에 모순이므로  $k$ 는 19 이하인 자연수이다.

$a_{21} = a_1$ 에서

$$(20 - k)p = kpq, kp(q + 1) = 20p$$

$$p \neq 0 \text{이므로 } k(q + 1) = 20$$

$q$ 는 정수이고  $k$ 는 19 이하의 자연수이므로  $k$ 는 19 이하인 20의 양의 약수이다. 즉,  $k$ 는 1, 2, 4, 5, 10

(i)  $k = 1$ 인 경우,  $q = 19$

18 이하의 자연수  $n_1$ 에 대하여

$$a_{n_1+1} = a_1 - n_1 p \geq 0, a_{n_1+2} = a_1 - (n_1 + 1)p < 0$$

$$\text{즉, } \frac{40}{n_1 + 1} < p \leq \frac{40}{n_1} \text{ 일 때}$$

$$a_{n_1+3} = a_1 - (n_1 + 1)p + 19p = a_1 + (18 - n_1)p$$

$$n_1 \geq 14 \text{ 일 때, } 2 < \frac{40}{n_1 + 1} < \frac{40}{n_1} < 3 \text{ 이므로 이를 만족시키는 자연수 } p \text{ 가 존재하지 않는다.}$$

$$n_1 = 13 \text{ 일 때, } \frac{20}{7} < p \leq \frac{40}{13} \text{ 이므로 } p = 3$$

$$n_1 \leq 12 \text{ 일 때, } 3 < \frac{40}{n_1 + 1} < p \text{ 이므로 자연수 } p \text{ 가 존재하면 } p > 3$$

따라서  $p \geq 3$ 이므로 이 경우에  $p + q$ 의 최솟값은  $3 + 19 = 22$

(ii)  $k = 2$ 인 경우,  $q = 9$

8 이하의 자연수  $n_1$ 에 대하여

$$a_{n_1+1} = a_1 - n_1 p \geq 0, a_{n_1+2} = a_1 - (n_1 + 1)p < 0$$

$$\text{즉, } \frac{40}{n_1 + 1} < p \leq \frac{40}{n_1} \text{ 일 때}$$

$$a_{n_1+3} = a_1 - (n_1 + 1)p + 9p = a_1 + (8 - n_1)p \geq 0$$

$$a_{n_1+4} = a_1 + (7 - n_1)p$$

⋮

$$a_{n_1+3+(8-n_1)} = a_1, \text{ 즉 } a_{11} = a_1 \text{ 이고 } a_{n_1+10} = a_n$$

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+10} = a_n$ 을 만족시키므로  $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

$$n_1 = 8 \text{ 일 때, } \frac{40}{9} < p \leq 5 \text{ 이므로 } p = 5$$

$$n_1 \leq 7 \text{ 일 때, } 5 \leq \frac{40}{n_1 + 1} \text{ 이므로 자연수 } p \text{ 가 존재하면 } p > 5$$

따라서  $p \geq 5$ 이므로 이 경우에  $p + q$ 의 최솟값은  $5 + 9 = 14$

(iii)  $k = 4$ 인 경우,  $q = 4$

3 이하의 자연수  $n_1$ 에 대하여

$$a_{n_1+1} = a_1 - n_1 p \geq 0, a_{n_1+2} = a_1 - (n_1 + 1)p < 0$$

$$\text{즉, } \frac{40}{n_1 + 1} < p \leq \frac{40}{n_1} \text{ 일 때}$$

$$a_{n_1+3} = a_1 - (n_1 + 1)p + 4p = a_1 + (3 - n_1)p \geq 0$$

$$a_{n_1+4} = a_1 + (2 - n_1)p$$

⋮

$$a_{n_1+3+(3-n_1)} = a_1, \text{ 즉 } a_6 = a_1 \text{ 이고 } a_{n_1+5} = a_n$$

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+5} = a_n$ 을 만족시키므로  $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

$$n_1 = 3 \text{ 일 때, } 10 < p \leq \frac{40}{3} \text{ 이므로 } p = 11, 12, 13$$

$$n_1 \leq 2 \text{ 일 때, } 13 < \frac{40}{n_1 + 1} \text{ 이므로 자연수 } p \text{ 가 존재하면 } p > 13$$

따라서  $p \geq 11$ 이므로 이 경우에  $p + q$ 의 최솟값은  $11 + 4 = 15$

(iv)  $k = 5$ 인 경우,  $q = 3$

$$a_3 = a_1 - 2p \geq 0, a_4 = a_1 - 3p < 0 \text{ 인 경우}$$

$$\text{즉, } \frac{40}{3} < p \leq 20 \text{ 에서 } p = 14, 15, \dots, 20 \text{ 인 경우}$$

$$a_5 = a_1 - 3p + 3p = a_1$$

$$a_2 = a_1 - p \geq 0, a_3 = a_1 - 2p < 0 \text{ 인 경우}$$

$$\text{즉, } \frac{40}{2} < p \leq 40 \text{ 에서 } p = 21, 22, \dots, 40$$

$$a_4 = a_1 - 2p + 3p = a_1 + p > 0, \text{ 즉 } a_5 = a_1 \text{ 이고 } a_{n_1+4} = a_n$$

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+4} = a_n$ 을 만족시키므로  $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

따라서  $p \geq 14$ 이므로 이 경우에  $p + q$ 의 최솟값은  $14 + 3 = 17$

(v)  $k = 10$ 인 경우,  $q = 1$

$$a_2 = a_1 - p < 0, \text{ 즉 } p > 40 \text{ 을 만족시키고 } a_3 = a_1 - p + p = a_1 \text{ 이므로}$$

주기 가 2이다. 즉, 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_{n+2} = a_n$ 을 만족시키므로  $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

따라서 이 경우에  $p + q$ 의 최솟값은

$$41 + 1 = 42$$

(i)~(v)에서  $p + q$ 의 최솟값은 14이다.

답 14

## 22

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $x=k$ 에서 연속이어야 한다. 즉,  $f(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$ 이어야 하므로

$$f(k) = k^3 - 3k + a = -k^2 + 13k + b$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{(x^3 - 3x + a) - (k^3 - 3k + a)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{(x - k)(x^2 + kx + k^2 - 3)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^-} (x^2 + kx + k^2 - 3) = 3k^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{(-x^2 + 13x + b) - (-k^2 + 13k + b)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{-(x - k)(x + k - 13)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^+} (-x - k + 13) = -2k + 13 \end{aligned}$$

이고, 함수  $f(x)$ 가  $x=k$ 에서 미분가능하므로

$$3k^2 - 3 = -2k + 13, 3k^2 + 2k - 16 = 0, (3k + 8)(k - 2) = 0$$

$$k = -\frac{8}{3} \text{ 또는 } k = 2$$

이때 함수  $y = x^3 - 3x + a$ 에서  $y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$

이므로 함수  $y = x^3 - 3x + a$ 는  $x = 1$  또는  $x = -1$ 에서 극값을 갖는데,

$k = -\frac{8}{3}$ 이면 함수  $y = f(x)$ 의 그래프

가 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

즉,  $k = 2$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + a & (x < 2) \\ -x^2 + 13x + b & (x \geq 2) \end{cases}$$

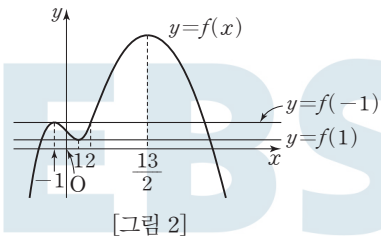
이고, 함수  $f(x)$ 가  $x = 2$ 에서 연속이어

야 하므로  $2 + a = 22 + b$

$$a - b = 20 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편,  $f(-1) = f(2) < f(\frac{13}{2})$ 이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는

[그림 2]와 같다. 즉, 방정식  $f(x) = c$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 경우는  $c = f(-1)$  또는  $c = f(1)$ 인 경우이다.



$f(-1) = 2 + a, f(1) = -2 + a$ 이므로

$$(2 + a) + (-2 + a) = 8 \text{에서 } a = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = a - 20 = -16$$

$$\text{즉, } f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 4 & (x < 2) \\ -x^2 + 13x - 16 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고, 방정식  $f(x) = d$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되는 경우는

$d = f(\frac{13}{2})$ 인 경우이므로 구하는 실수  $d$ 의 값은

$$d = f\left(\frac{13}{2}\right) = -\left(\frac{13}{2}\right)^2 + 13 \times \frac{13}{2} - 16 = \frac{105}{4}$$

따라서  $p = 4, q = 105$ 이므로  $p + q = 4 + 105 = 109$

답 109

## 23

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{-n} + 4}{a^{2-n} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} + 4}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4}{3^{n-2} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{4}{3^{n-2}}}{1 + \frac{1}{3^{n-2}}} = 9 \end{aligned}$$

답 ⑤

## 24

$f(x^2 - 2x) = xe^{2x-5}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x^2 - 2x) \times (2x - 2) = e^{2x-5} + 2xe^{2x-5}$$

이 식의 양변에  $x = 3$ 을 대입하면

$$f'(3) \times 4 = e + 6e$$

$$f'(3) = \frac{7}{4}e$$

또한  $f(x^2 - 2x) = xe^{2x-5}$ 의 양변에  $x = 3$ 을 대입하면

$$f(3) = 3e$$

따라서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점  $(3, f(3))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{7}{4}e(x - 3) + 3e \text{에서 } y = \frac{7}{4}ex - \frac{9}{4}e$$

$$\text{즉, } a = \frac{7}{4}e, b = -\frac{9}{4}e \text{이므로 } a + b = -\frac{1}{2}e$$

답 ①

## 25

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( na_n - \frac{3n^2 - 1}{n + 1} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( na_n - \frac{3n^2 - 1}{n + 1} \right) = 0$$

$$b_n = na_n - \frac{3n^2 - 1}{n + 1} \text{이라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이고, } a_n = \frac{b_n}{n} + \frac{3n^2 - 1}{n^2 + n} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b_n}{n} + \frac{3n^2 - 1}{n^2 + n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b_n}{n} + \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \right) \\ &= 0 + \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 5}{a_n + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \frac{5}{n}}{\frac{a_n}{n} + 3} = \frac{3 + 0}{0 + 3} = 1$$

답 ③

26

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+4 \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x(1+4 \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(2 \sin x+8 \sin^3 x) dx$$

$\sin x=t$ 로 놓으면  $\cos x=\frac{dt}{dx}$ 이고

$x=0$ 일 때  $t=0$ ,  $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때  $t=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(2 \sin x+8 \sin^3 x) dx = \int_0^1 (2t+8t^3) dt$$

$$= \left[ t^2+2t^4 \right]_0^1 = 1+2=3$$

답 ③

27

$g(x)=\ln [1+\{f(x)\}^2]$ 에서

$$g'(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}$$

즉,  $-2 < x < 2$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2} = \frac{\pi}{2} f(x)$$

가 성립하고  $f(1)=1$ 이므로

$$\frac{2f(1)f'(1)}{1+\{f(1)\}^2} = \frac{\pi}{2} f(1)$$
에서
$$f'(1) = \frac{\pi}{4} [1+\{f(1)\}^2] = \frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

답 ①

28

$$f'(x) = \{(4 \cos x+3)(4 \cos x-3)\}'$$

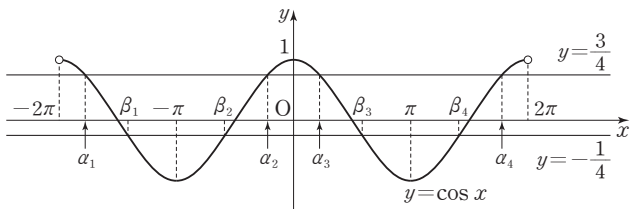
$$= -4 \sin x(4 \cos x-3)^2 - 8 \sin x(4 \cos x+3)(4 \cos x-3)$$

$$= -4 \sin x(4 \cos x-3)(12 \cos x+3)=0$$

에서  $\sin x=0$  또는  $\cos x=\frac{3}{4}$  또는  $\cos x=-\frac{1}{4}$

$-2\pi < x < 2\pi$ 에서  $\sin x=0$ 의 해는  $-\pi, 0, \pi$ 이고  $x=-\pi, x=0, x=\pi$ 의 각각의 좌우에서  $f'(x)$ 의 값이 양에서 음 또는 음에서 양으로 바뀌므로  $x=-\pi, x=0, x=\pi$ 에서 함수  $f(x)$ 는 극값을 갖는다.

$-2\pi < x < 2\pi$ 에서 함수  $y=\cos x$ 의 그래프와 두 직선  $y=\frac{3}{4}$ ,  $y=-\frac{1}{4}$ 은 다음 그림과 같이 각각 네 점에서 만난다.



함수  $y=\cos x$ 의 그래프와 직선  $y=\frac{3}{4}$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표를 작은 것부터 차례대로 나열한 것을  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 라 하면  $x=\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 값이 양에서 음 또는 음에서 양으로 바뀌므로  $x=\alpha_i (i=1, 2, 3, 4)$ 에서 함수  $f(x)$ 는 극값을 갖는다.

함수  $y=\cos x$ 의 그래프와 직선  $y=-\frac{1}{4}$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표를 작은 것부터 차례대로 나열한 것을  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 라 하면  $x=\beta_i (i=1, 2, 3, 4)$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 값이 양에서 음 또는 음에서 양으로 바뀌므로  $x=\beta_i (i=1, 2, 3, 4)$ 에서 함수  $f(x)$ 는 극값을 갖는다.

즉,  $\alpha_1 < \beta_1 < -\pi < \beta_2 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3 < \beta_3 < \pi < \beta_4 < \alpha_4$ 이므로  $n=11$ 이고

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 는 순서대로  $x_1, x_5, x_7, x_{11}$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 는 순서대로  $x_2, x_4, x_8, x_{10}$

$-\pi, 0, \pi$ 는 순서대로  $x_3, x_6, x_9$

따라서

$$\sum_{k=1}^{11} (k \cos x_k)$$

$$= \frac{3}{4}(1+5+7+11) - \frac{1}{4}(2+4+8+10) - 1 \times (3+9) + 1 \times 6$$

$$= \frac{3}{4} \times 24 - \frac{1}{4} \times 24 - 12 + 6 = 6$$

답 ③

29

$OA=2, \angle QAO=2\theta$ 에서  $OQ=2 \tan 2\theta$ 이므로 삼각형 QOA의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times OA \times OQ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \tan 2\theta$$

$$= 2 \tan 2\theta$$

부채꼴 OAP의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta = 2\theta$$

그림과 같이 점 R에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고  $\overline{OH}=x$ 라 하면 삼각형 ROH에서

$$\overline{RH}=x \tan \theta \quad \text{..... ㉠}$$

또 삼각형 RHA에서

$$\overline{HA}=2-x, \angle RAH=2\theta$$
이므로

$$\overline{RH}=(2-x) \tan 2\theta \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서  $x \tan \theta=(2-x) \tan 2\theta$ 이므로

$$x = \frac{2 \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}$$

그러므로 삼각형 ROA의 넓이는

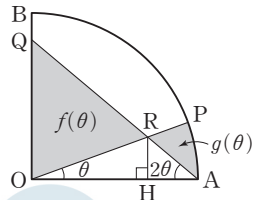
$$\frac{1}{2} \times OA \times RH = \frac{1}{2} \times 2 \times x \tan \theta$$

$$= \frac{2 \tan \theta \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}$$

이때

$$f(\theta)+g(\theta)=(\text{삼각형 QOA의 넓이})+S-2 \times (\text{삼각형 ROA의 넓이})$$

$$= 2 \tan 2\theta + 2\theta - \frac{4 \tan \theta \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}$$



이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan 2\theta + 2\theta - \frac{4 \tan \theta \tan 2\theta}{\tan \theta + \tan 2\theta}}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( 4 \times \frac{\tan 2\theta}{2\theta} + 2 - \frac{8 \times \frac{\tan \theta}{\theta} \times \frac{\tan 2\theta}{2\theta}}{\frac{\tan \theta}{\theta} + 2 \times \frac{\tan 2\theta}{2\theta}} \right) \\ &= 4 \times 1 + 2 - \frac{8 \times 1 \times 1}{1 + 2 \times 1} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

따라서  $p=3, q=10$ 이므로  $p+q=3+10=13$

답 13

### 30

조건 (다)에서 세 점  $(t, f(t)), (t+2, f(t)), (t+2, f(t+2))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (t+2-t) \times |f(t+2) - f(t)| = |f(t+2) - f(t)|$$

조건 (가)에서  $x \geq 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이므로 임의의 두 실수  $x_1, x_2$ 에 대하여  $x_1 < x_2$ 이면  $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

즉,  $t \geq 0$ 인 모든 실수  $t$ 에 대하여  $f(t+2) \geq f(t)$ 이므로  $|f(t+2) - f(t)| = f(t+2) - f(t)$

$$= \{(e^2-1)t + 2e^2\} e^t$$

$$\text{즉, } \int_0^x \{f(t+2) - f(t)\} dt = \int_0^x \{(e^2-1)t + 2e^2\} e^t dt \quad (\text{단, } x \geq 0)$$

..... ㉠

㉠의 좌변을 정리하면

$$\int_0^x \{f(t+2) - f(t)\} dt = \int_0^x f(t+2) dt - \int_0^x f(t) dt$$

$$t+2=s \text{로 놓으면 } 1 = \frac{ds}{dt} \text{이고}$$

$t=0$ 일 때  $s=2, t=x$ 일 때  $s=x+2$ 이므로

$$\int_0^x f(t+2) dt = \int_2^{x+2} f(s) ds = \int_2^{x+2} f(t) dt$$

즉,

$$\int_0^x f(t+2) dt - \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_2^{x+2} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt - e^2 - 3 \quad (\text{단, } x \geq 0)$$

..... ㉡

㉡의 우변을 정리하면

$$\int_0^x \{(e^2-1)t + 2e^2\} e^t dt = (e^2-1) \int_0^x t e^t dt + 2e^2 \int_0^x e^t dt$$

$$= (e^2-1) \int_0^x t e^t dt + 2e^2 \left[ e^t \right]_0^x$$

$$= (e^2-1) \int_0^x t e^t dt + 2e^2(e^x - 1)$$

$$\text{이때 } \int_0^x t e^t dt = \left[ t e^t \right]_0^x - \int_0^x e^t dt = x e^x - \left[ e^t \right]_0^x = x e^x - e^x + 1$$

즉,

$$\int_0^x \{(e^2-1)t + 2e^2\} e^t dt = (e^2-1)(x e^x - e^x + 1) + 2e^2(e^x - 1)$$

$$= (e^2-1)x e^x + (e^2+1)e^x - e^2 - 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = e^2 - 3$$

$$= (e^2-1)x e^x + (e^2+1)e^x - e^2 - 1$$

$$\int_0^{x+2} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + (e^2-1)x e^x + (e^2+1)e^x + 2$$

$g(x) = f(x) + x f'(2x)$ 에서

$$\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_0^4 x f'(2x) dx \quad \dots\dots \text{㉣}$$

$$2x = u \text{로 놓으면 } 2 = \frac{du}{dx} \text{이고}$$

$x=0$ 일 때  $u=0, x=4$ 일 때  $u=8$ 이므로

$$\int_0^4 x f'(2x) dx = \int_0^8 \frac{u}{4} f'(u) du = \frac{1}{4} \int_0^8 u f'(u) du$$

$$\text{이때 } \int_0^8 u f'(u) du = \left[ u f(u) \right]_0^8 - \int_0^8 f(u) du = 8f(8) - \int_0^8 f(u) du$$

$$\text{즉, } \int_0^4 x f'(2x) dx = 2f(8) - \frac{1}{4} \int_0^8 f(u) du \text{이므로 ㉣에서}$$

$$\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + 2f(8) - \frac{1}{4} \int_0^8 f(u) du \quad \dots\dots \text{㉤}$$

$f(t+2) - f(t) = \{(e^2-1)t + 2e^2\} e^t$ 의 양변에  $t=2, t=4, t=6$ 을 각각 대입하면

$$f(4) - f(2) = \{(e^2-1) \times 2 + 2e^2\} e^2 = 4e^4 - 2e^2$$

$$f(6) - f(4) = \{(e^2-1) \times 4 + 2e^2\} e^4 = 6e^6 - 4e^4$$

$$f(8) - f(6) = \{(e^2-1) \times 6 + 2e^2\} e^6 = 8e^8 - 6e^6$$

이고, 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 더하면

$$f(8) - f(2) = 8e^8 - 2e^2 \text{이므로 } f(8) = 8e^8 - 2e^2 + f(2)$$

$$\int_0^{x+2} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + (e^2-1)x e^x + (e^2+1)e^x + 2 \text{의 양변에}$$

$x=2, x=4, x=6$ 을 각각 대입하면

$$\int_0^4 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + (e^2-1) \times 2e^2 + (e^2+1)e^2 + 2 = 3e^4 + 5$$

$$\int_0^6 f(t) dt = \int_0^4 f(t) dt + (e^2-1) \times 4e^4 + (e^2+1)e^4 + 2 = 5e^6 + 7$$

$$\int_0^8 f(t) dt = \int_0^6 f(t) dt + (e^2-1) \times 6e^6 + (e^2+1)e^6 + 2 = 7e^8 + 9$$

따라서 ㉤에서

$$\begin{aligned} \int_0^4 g(x) dx &= \int_0^4 f(x) dx + 2f(8) - \frac{1}{4} \int_0^8 f(u) du \\ &= 3e^4 + 5 + 2\{8e^8 - 2e^2 + f(2)\} - \frac{1}{4}(7e^8 + 9) \end{aligned}$$

$$= \frac{57}{4}e^8 + 3e^4 - 4e^2 + \frac{11}{4} + 2f(2)$$

이므로

$$\int_0^4 g(x) dx - 2f(2) = \frac{57}{4}e^8 + 3e^4 - 4e^2 + \frac{11}{4}$$

$$= p e^8 + 3e^4 - 4e^2 + q$$

$$\text{즉, } p = \frac{57}{4}, q = \frac{11}{4} \text{이므로 } p+q = \frac{57}{4} + \frac{11}{4} = 17$$

답 17



01 ②	02 ③	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ④	07 ②	08 ②	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ②	13 ③	14 ②	15 ③
16 6	17 31	18 22	19 2	20 4
21 8	22 45	23 ①	24 ⑤	25 ④
26 ②	27 ③	28 ②	29 9	30 2

01

$$8^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} = (2^3)^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times (2^{-1})^{\sqrt{3}+1} = 2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

답 ②

02

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2 \text{에서 } f'(x) = 9x^2 - 12x$$

$$\text{따라서 } f'(1) = 9 - 12 = -3$$

답 ③

03

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$$a_4 = 4a_2 \text{에서 } a_1 r^3 = 4a_1 r, r^2 = 4$$

모든 항이 양수이므로  $r = 2$

$$\text{따라서 } a_1 = a_3 \times \frac{1}{r^2} = 4 \times \frac{1}{2^2} = 1$$

다른 풀이

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$$a_4 = a_3 \times r = 4r \text{이므로}$$

$$a_4 = 4a_2 \text{에서 } 4r = 4a_1 \times r$$

$$\text{따라서 } a_1 = 1$$

답 ①

04

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2, f(1) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + f(1) = 1 + 2 + (-1) = 2$$

답 ⑤

05

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}, \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서  $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로  $\sin \theta + \cos \theta > 0$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

답 ⑤

06

두 곡선  $y = x^3 - 2x^2$ 과  $y = x^2 - 4$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표를 구하면

$$x^3 - 2x^2 = x^2 - 4 \text{에서}$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0, (x+1)(x-2)^2 = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

두 곡선  $y = x^3 - 2x^2$ 과  $y = x^2 - 4$ 는

그림과 같다.

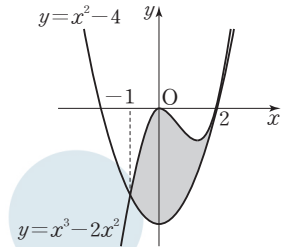
따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \int_{-1}^2 |(x^3 - 2x^2) - (x^2 - 4)| dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2$$

$$= (4 - 8 + 8) - \left( \frac{1}{4} + 1 - 4 \right) = \frac{27}{4}$$



답 ④

07

$9^{x-1} - k \times 3^x + 9 = 0$ 의 양변에 9를 곱하면

$$9^x - 9k \times 3^x + 81 = 0$$

$3^x = X (X > 0)$ 이라 하면

$$X^2 - 9kX + 81 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이  $81 > 0$ 이므로

두 근의 부호는 같다. 따라서 이차방정식이 오직 하나의 양의 실근을

가지려면 ㉠의 판별식을  $D$ 라 할 때,  $D = 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } D = (-9k)^2 - 4 \times 81 = 0 \text{에서}$$

$$k^2 - 4 = 0, k^2 = 4$$

이때 이 중근이 양수이어야 하므로 이차방정식이 두 근의 합이 양수이다.

즉,  $9k > 0$ 에서  $k > 0$ 이므로

$$k = 2$$

$$X^2 - 18X + 81 = 0 \text{에서}$$

$$(X - 9)^2 = 0, X = 9, 3^x = 9, x = 2$$

$$\text{즉, } a = 2$$

$$\text{따라서 } k + a = 2 + 2 = 4$$

답 ②

08

두 함수  $f(x)$ 와  $f(x) + 5$ 는  $x = a$ 에서만 불연속이므로 함수

$f(x)\{f(x) + 5\}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면  $x = a$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)\{f(x) + 5\} = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)\{f(x) + 5\} = f(a)\{f(a) + 5\}$$

$\dots\dots \text{㉠}$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)\{f(x) + 5\} = (a+1)(a+6)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)\{f(x) + 5\} = (a-5)a$$

$$f(a)\{f(a) + 5\} = (a+1)(a+6)$$

이므로 ㉠에서  $(a+1)(a+6) = (a-5)a$

답 ⑤



$$a^2+7a+6=a^2-5a, 12a=-6$$

$$\text{따라서 } a=-\frac{1}{2}$$

답 ②

### 09

$$a_3=\frac{1}{6}\text{에서}$$

$$a_3=\frac{1}{4-8a_2}\text{이므로 } \frac{1}{6}=\frac{1}{4-8a_2}, a_2=-\frac{1}{4}$$

$$a_2=\frac{1}{4-8a_1}\text{이므로 } -\frac{1}{4}=\frac{1}{4-8a_1}, a_1=1$$

$$\text{또한 } a_3=\frac{1}{6}\text{에서}$$

$$a_4=\frac{1}{4-8a_3}=\frac{1}{4-8\times\frac{1}{6}}=\frac{3}{8}$$

$$a_5=\frac{1}{4-8a_4}=\frac{1}{4-8\times\frac{3}{8}}=1$$

즉, 수열  $\{a_n\}$ 은  $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \dots$ 으로 첫째항부터

네 개의 수  $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}$ 이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{25} a_n &= \sum_{n=1}^{24} a_n + a_{25} = 6(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_1 \\ &= 6\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) + 1 = 6 \times \frac{31}{24} + 1 = \frac{35}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

### 10

$$y=x^3-x-1\text{에서 } y'=3x^2-1$$

점 A(-1, -1)에서의 접선의 기울기는  $3 \times (-1)^2 - 1 = 2$ 이므로

곡선  $y=x^3-x-1$  위의 점 A(-1, -1)에서의 접선의 방정식은

$$y+1=2(x+1), \text{ 즉 } y=2x+1$$

곡선  $y=x^3-x-1$ 과 직선  $y=2x+1$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표는

$$x^3-x-1=2x+1\text{에서 } (x+1)^2(x-2)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 A(-1, -1), B(2, 5)이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(5+1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

삼각형 APB의 넓이는

그림과 같이 점 P에서의 접선의

기울기가 직선 AB의 기울기 2와

같을 때 최대가 된다.

$$y'=3x^2-1\text{에서}$$

점 P의  $x$ 좌표를  $t$ 라 하면

$$3t^2-1=2$$

$$3(t+1)(t-1)=0$$

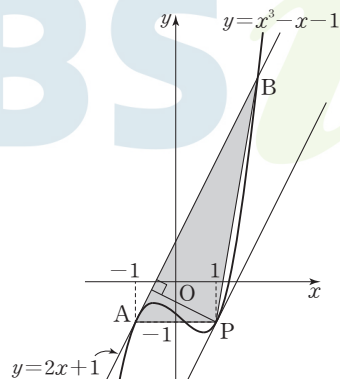
이때  $t \neq -1$ 이므로

$$t=1$$

점 P는 곡선  $y=x^3-x-1$  ( $-1 < x < 2$ ) 위의 점이므로  $y$ 좌표는

$$y=1^3-1-1=-1$$

즉, P(1, -1)



점 P(1, -1)과 직선  $y=2x+1$ , 즉  $2x-y+1=0$  사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 1 - (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은  $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = 6$

답 ③

### 11

조건 (가)에서 직선 OC의 기울기가

2이므로 점 C의 좌표를  $(t, 2t)$ 라

하면 점 B의 좌표는  $(2t, t)$ 이다.

점 B가 곡선  $y=f(x)$  위의 점이

므로

$$a^{2t}+4=t \quad \dots\dots \text{㉠}$$

점 B가 곡선  $y=g(x)$  위의 점이므로

$$\frac{1}{4} \log_a 2t=t, a^{4t}=2t \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡에서  $t=\frac{1}{2}a^{4t}$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$a^{2t}+4=\frac{1}{2}a^{4t}$$

$a^{2t}=k$  ( $k>0$ )이라 하면

$$k+4=\frac{1}{2}k^2, k^2-2k-8=0, (k+2)(k-4)=0$$

$k>0$ 이므로  $k=4$

$a^{2t}=4$ 이므로 ㉡에서  $t=8$ 이고,  $a^{16}=4$ 에서  $a=4^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{8}}$ 이다.

즉, 점 B의 좌표는 (16, 8), 점 C의 좌표는 (8, 16)이다.

$f(x)=2^{\frac{1}{8}x}+4$ 이고, 조건 (나)에서 두 점 A, C의  $x$ 좌표가 같으므로

$$f(8)=2^1+4=6$$

에서 점 A의 좌표는 (8, 6)이다.

$\overline{AC}=16-6=10$ 이고, 점 B와 직선 AC 사이의 거리는  $16-8=8$ 이

므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40$$

답 ④

### 12

$$f(x)=x^4-\frac{4}{3}kx^3-4k^2x^2\text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3-4kx^2-8k^2x=4x(x^2-kx-2k^2)$$

$$f'(x)=0\text{에서 } 4x(x+k)(x-2k)=0$$

$$x=-k \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2k$$

$k>0$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

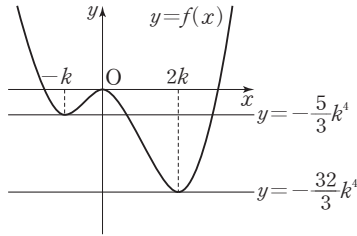
$x$	$\dots$	$-k$	$\dots$	0	$\dots$	$2k$	$\dots$
$f'(x)$		-	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소

함수  $f(x)$ 는  $x=-k$ 와  $x=2k$ 에서 극소이고  $x=0$ 에서 극대이다.

$$f(-k)=k^4+\frac{4}{3}k^4-4k^4=-\frac{5}{3}k^4, f(0)=0,$$

$$f(2k)=16k^4-\frac{32}{3}k^4-16k^4=-\frac{32}{3}k^4$$

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=-\frac{32}{3}k^4$ 은 오직 한 점에서만 만나므로

조건 (가)에서

$$a = -\frac{32}{3}k^4$$

직선  $y=0$ 과 직선  $y=-\frac{5}{3}k^4$ 은 곡선  $y=f(x)$ 와 각각 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (나)에서

$$b = -\frac{5}{3}k^4 \text{ 또는 } b=0$$

$$(i) a = -\frac{32}{3}k^4, b=0 \text{ 일 때, } b-a = 0 - \left(-\frac{32}{3}k^4\right) = \frac{32}{3}k^4$$

$$(ii) a = -\frac{32}{3}k^4, b = -\frac{5}{3}k^4 \text{ 일 때, } b-a = -\frac{5}{3}k^4 - \left(-\frac{32}{3}k^4\right) = 9k^4$$

따라서  $b-a$ 의 모든 값의 합은

$$\frac{32}{3}k^4 + 9k^4 = \frac{59}{3}k^4 = 236$$

이므로  $k^4=12$

### 13

선분 AD의 길이를  $k(k>0)$ 이라 하자.

$$\angle ABD = \angle BDA = \frac{\pi}{6} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} = 2 \times \overline{AB} \times \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}k$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin(\angle ABD)} = 2R_1 \text{ 이므로}$$

$$R_1 = \frac{k}{2 \sin \frac{\pi}{6}} = k$$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} \text{ 이므로}$$

$$\frac{k}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\overline{CD}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{6}}{3}k$$

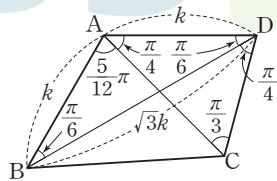
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle CDB)$$

$$= (\sqrt{3}k)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}k\right)^2 - 2 \times \sqrt{3}k \times \frac{\sqrt{6}}{3}k \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3k^2 + \frac{2}{3}k^2 - 2k^2 = \frac{5}{3}k^2$$

$$\overline{BC} = \frac{\sqrt{15}}{3}k$$



답 ②

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)} = 2R_2, R_2 = \frac{\sqrt{30}}{6}k$$

이므로  $R_1 : R_2 = k : \frac{\sqrt{30}}{6}k$  이다.

따라서  $f(k) = \frac{\sqrt{6}}{3}k, g(k) = \frac{\sqrt{15}}{3}k, h(k) = \frac{\sqrt{30}}{6}k$  이므로

$$\frac{f(3) \times g(3)}{h(6)} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{15}}{\sqrt{30}} = \sqrt{3}$$

답 ③

### 14

$$\begin{aligned} \neg. f(x)g(x) &= \begin{cases} (-x^2+x)g(x) & (x<0) \\ (x^2-2x)g(x) & (x\geq 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x(x-1)g(x) & (x<0) \\ x(x-2)g(x) & (x\geq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(0)=0 \text{ 이므로 } f(0)g(0)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{- (x-1)g(x)\} = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{(x-2)g(x)\} = -2g(0)$$

함수  $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $x=0$ 에서도 미분가능하다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{x} \text{ 에서}$$

$$g(0) = -2g(0), g(0) = 0 \text{ (참)}$$

나. ㄱ에서  $g(0)=0$ 이므로 일차함수  $g(x)$ 는

$$g(x) = mx \text{ (} m \text{은 0이 아닌 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x)g(x) dx \text{ 에서}$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-x^2+x) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0$$

$$= 0 - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^0 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^0 mx(-x^2+x) dx = m \int_{-1}^0 (-x^3+x^2) dx$$

$$= m \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0$$

$$= m \times \left\{ 0 - \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right\} = \frac{7}{12}m$$

$$-\frac{5}{6} = \frac{7}{12}m \text{ 에서 } m = -\frac{10}{7}$$

$$\text{따라서 } g(x) = -\frac{10}{7}x \text{ 이므로 } g(-1) = \frac{10}{7} \text{ (참)}$$

다.  $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = 0$ 인 일차함수  $g(x) = mx$  ( $m$ 은 0이 아닌 상수)

가 존재한다고 하자.

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^0 mx(-x^2+x) dx + \int_0^1 mx(x^2-2x) dx$$

이때 ㄴ에서

$$\int_{-1}^0 mx(-x^2+x) dx = \frac{7}{12}m$$

$$\int_0^1 mx(x^2-2x)dx = m \int_0^1 (x^3-2x^2)dx = m \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= m \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{5}{12}m$$

따라서

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \frac{7}{12}m + \left( -\frac{5}{12}m \right) = \frac{m}{6} = 0$$

이므로  $m=0$ 이 되어 모순이다.

즉,  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx=0$ 을 만족시키는 일차함수  $g(x)$ 가 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

### 15

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$  ( $d>0$ )이라 하자.

$$a_n a_{n+5} \leq 0 \text{에서 } a_n(a_n+5d) \leq 0$$

$$-5d \leq a_n \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_n = \frac{n(a+a_n)}{2}$$

$$S_{n+5} = \frac{(n+5)(a+a_{n+5})}{2} = \frac{(n+5)(a+a_n+5d)}{2}$$

$n$ 은 자연수이므로  $S_n S_{n+5} \leq 0$ 에서

$$(a+a_n)(a+5d+a_n) \leq 0$$

$$d>0 \text{이므로 } -a-5d \leq a_n \leq -a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편,  $a \geq 0$ 이면  $a_n \geq 0$ 에서  $n(A) \leq 1$ 이므로  $n(A \cap B) = 3$ 을 만족시킬 수 없다. 즉,  $a < 0$

$$n(A \cap B) = 3 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } -a-5d < 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서  $A \cap B = \{n \mid -a-5d \leq a_n \leq 0, n \text{은 자연수}\}$ 이다.

한편,  $S_m = a_m$ 인 짝수인 자연수  $m$ 이 존재하므로

$$a_m = S_m - S_{m-1} \text{에서 } S_m = S_{m-1} + a_m, S_{m-1} = 0$$

$$\frac{(m-1)(a+a_{m-1})}{2} = 0, a+a_{m-1} = 0$$

$$a + \{a + (m-2)d\} = 0$$

$$m = 2k \text{ (} k \text{는 자연수)라 하면 } 2a + (2k-2)d = 0$$

즉,  $-a = (k-1)d$ 인 자연수  $k$ 가 존재한다.

$\textcircled{3}$ 에서  $-a-5d = (k-1)d-5d = (k-6)d < 0$ 이므로  $k$ 는 5 이하의 자연수이다.

$$-a = (k-1)d \text{에서}$$

$$a_n = a + (n-1)d = -(k-1)d + (n-1)d = (n-k)d$$

이므로

$$A \cap B = \{n \mid (k-6)d \leq (n-k)d \leq 0, n \text{은 자연수}\}$$

$$= \{n \mid k-6 \leq n-k \leq 0, n \text{은 자연수}\}$$

$$= \{n \mid 2k-6 \leq n \leq k, n \text{은 자연수}\}$$

$k$ 의 값에 따라 집합  $A \cap B$ 를 구하면 다음과 같다.

$$k=1 \text{이면 } A \cap B = \{1\}$$

$$k=2 \text{이면 } A \cap B = \{1, 2\}$$

$$k=3 \text{이면 } A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

$$k=4 \text{이면 } A \cap B = \{2, 3, 4\}$$

$$k=5 \text{이면 } A \cap B = \{4, 5\}$$

이때  $n(A \cap B) = 3$ 이므로  $k=3$  또는  $k=4$

(i)  $k=3$ 일 때,  $a = -2d$ 이고

$$a_n = (n-k)d = (n-3)d$$

$\textcircled{1}$ 에서  $-5d \leq (n-3)d \leq 0, -5 \leq n-3 \leq 0, -2 \leq n \leq 3$ 이므로

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$\textcircled{2}$ 에서  $2d-5d \leq (n-3)d \leq 2d, -3 \leq n-3 \leq 2, 0 \leq n \leq 5$ 이므로

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

이때  $A-B = \emptyset$ 이다.

(ii)  $k=4$ 일 때,  $a = -3d$ 이고

$$a_n = (n-k)d = (n-4)d$$

$\textcircled{1}$ 에서  $-5d \leq (n-4)d \leq 0, -5 \leq n-4 \leq 0, -1 \leq n \leq 4$ 이므로

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$\textcircled{2}$ 에서  $3d-5d \leq (n-4)d \leq 3d, -2 \leq n-4 \leq 3, 2 \leq n \leq 7$ 이므로

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

이때  $A-B = \{1\} \neq \emptyset$ 이다.

(i), (ii)에서  $k=4$ 이고  $m=2k=8$ 이다.

$$a = -3d \text{이므로}$$

$$a_m = a_8 = a + 7d = -3d + 7d = 4d,$$

$$a_{m+10} = a_{18} = a + 17d = -3d + 17d = 14d$$

$$\text{따라서 } \frac{a_{m+10}}{a_m} = \frac{14d}{4d} = \frac{7}{2}$$

답 ③

### 16

$t=0$ 에서  $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리를  $s$ 라 하면

$$s = \int_0^2 |v(t)| dt = \int_0^2 |6t^2 - 6t| dt$$

$$= \int_0^1 (6t - 6t^2) dt + \int_1^2 (6t^2 - 6t) dt$$

$$= \left[ 3t^2 - 2t^3 \right]_0^1 + \left[ 2t^3 - 3t^2 \right]_1^2$$

$$= (3-2) - 0 + (16-12) - (2-3) = 1+5=6$$

답 6

### 17

선분 AB의 중점의  $x$ 좌표가 1이므로

$$\frac{\log_2 a + \log_2 \frac{2}{3}}{2} = 1, \log_2 \frac{2}{3} a = 2$$

$$\frac{2}{3} a = 4, a = 6$$

선분 AB의 중점의  $y$ 좌표가 0이므로

$$\frac{-2 + \log_5 b}{2} = 0, \log_5 b = 2$$

$$b = 25$$

$$\text{따라서 } a+b = 6+25 = 31$$

답 31

### 18

$$\int_2^x (t^3 + 2t - 1) dt = ax^3 + 3x - f(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$x^3 + 2x - 1 = 3ax^2 + 3 - f'(x)$$

$$f'(x) = -x^3 + 3ax^2 - 2x + 4$$

$$f'(2) = 16 \text{에서}$$

$$-8 + 12a - 4 + 4 = 16$$

$$12a = 24, a = 2$$

㉠의 양변에  $x=2$ 를 대입하면

$$\int_2^2 (t^3 + 2t - 1) dt = 8a + 6 - f(2)$$

$$0 = 16 + 6 - f(2)$$

$$\text{따라서 } f(2) = 22$$

## 19

$$\sum_{k=1}^5 (k+a)^2 = 50 + \sum_{k=1}^5 k(k+a) \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 (k^2 + 2ak + a^2) = 50 + \sum_{k=1}^5 (k^2 + ak), \sum_{k=1}^5 (ak + a^2) = 50$$

$$a \times \frac{5 \times 6}{2} + 5a^2 = 50, 5a^2 + 15a - 50 = 0$$

$$a^2 + 3a - 10 = 0, (a+5)(a-2) = 0$$

$a$ 는 양수이므로  $a=2$

## 20

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & (x \leq 0) \\ 2 & (0 < x \leq 2) \\ 2x-2 & (x > 2) \end{cases} \text{에서}$$

(i) 직선  $y=2x-2$ 와 곡선  $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$ 가 접하는 경우

이차방정식  $2x-2 = \frac{1}{2}x^2-x+k$ , 즉  $\frac{1}{2}x^2-3x+k+2=0$ 의 판별식을  $D_1$ 이라 하면

$$D_1 = (-3)^2 - 2(k+2) = 0, k = \frac{5}{2}$$

이고, 이때 접점의 좌표는  $(3, 4)$ 이다.

직선  $y=-2x+2$ 와 곡선  $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$ 가 접하는 경우

이차방정식  $-2x+2 = \frac{1}{2}x^2-x+k$ , 즉  $\frac{1}{2}x^2+x+k-2=0$ 의 판별식을  $D_2$ 라 하면

$$D_2 = 1^2 - 2(k-2) = 0, k = \frac{5}{2}$$

이고, 이때 접점의 좌표는  $(-1, 4)$ 이다.

직선  $y=2$ 와 곡선  $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$ 가 접하는 경우

이차방정식  $\frac{1}{2}x^2-x+k=2$ , 즉  $\frac{1}{2}x^2-x+k-2=0$ 의 판별식을  $D_3$ 이라 하면

$$D_3 = (-1)^2 - 2(k-2) = 0, k = \frac{5}{2}$$

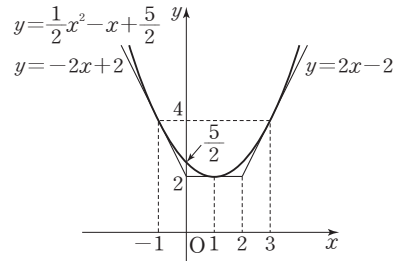
이고, 이때 접점의 좌표는  $(1, 2)$ 이다.

따라서  $k=\frac{5}{2}$ 일 때 두 함수  $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 세 점

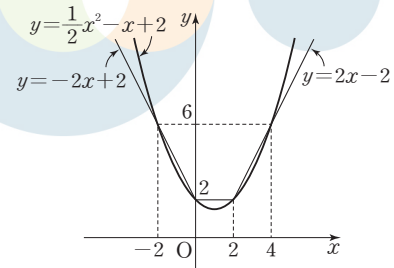
$(3, 4), (-1, 4), (1, 2)$ 에서 접하므로

$$h\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$

답 22

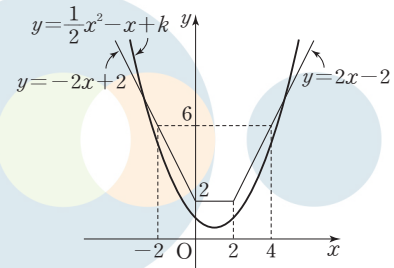


(ii) 함수  $y=g(x)$ 의 그래프가 함수  $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점  $(0, 2), (2, 2)$ 를 지나면, 즉  $k=2$ 이면 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점  $(-2, 6), (4, 6)$ 에서도 만나므로  $h(2) = 4$



답 2

(iii)  $k < 2$ 이면 두 함수  $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



(i), (ii), (iii)에서 함수  $h(k)$ 는 다음과 같다.

$$h(k) = \begin{cases} 2 & (k < 2) \\ 4 & (k = 2) \\ 6 & (2 < k < \frac{5}{2}) \\ 3 & (k = \frac{5}{2}) \\ 0 & (k > \frac{5}{2}) \end{cases}$$

$$h\left(\frac{5}{2}\right) + \lim_{k \rightarrow a^+} h(k) = 9 \text{에서}$$

$$\lim_{k \rightarrow a^+} h(k) = 9 - h\left(\frac{5}{2}\right) = 9 - 3 = 6$$

$2 \leq a < \frac{5}{2}$ 이므로 구하는 실수  $a$ 의 최솟값은  $p=2$

따라서  $h(2) = 4$

답 4

## 21

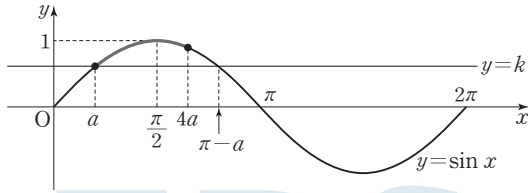
$0 < a < \frac{\pi}{2}$ 에서  $0 < 4a < 2\pi$ 이고,

$a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식  $\sin x = 1$ 의 해가 존재하므로  $4a \geq \frac{\pi}{2}$ 이다.

즉,  $\frac{\pi}{2} \leq 4a < 2\pi$

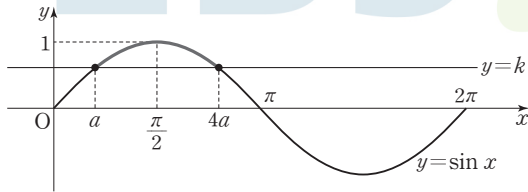
$\sin a = \sin(\pi - a)$ 이므로  $4a$ 의 값과  $\pi - a$ 의 값의 대소 관계에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i)  $\frac{\pi}{2} \leq 4a < \pi - a$ 인 경우



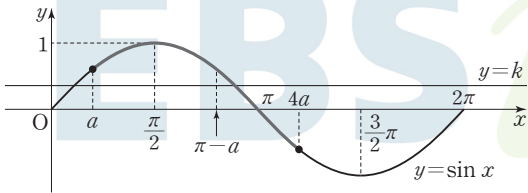
$\sin a \leq k < \sin 4a$  또는  $k=1$ 이면  $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식  $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii)  $4a = \pi - a$ 인 경우



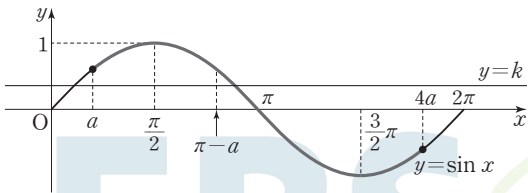
$k=1$ 이면  $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식  $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다.  $k \neq 1$ 이면  $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식  $\sin x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 2이다.

(iii)  $\pi - a < 4a \leq \frac{3}{2}\pi$ 인 경우



$\sin 4a \leq k < \sin a$  또는  $k=1$ 이면  $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식  $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

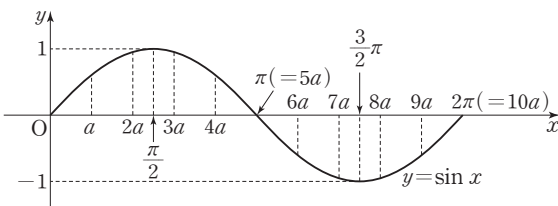
(iv)  $\frac{3}{2}\pi < 4a < 2\pi$ 인 경우



$\sin 4a < k < \sin a$  또는  $k=1$  또는  $k=-1$ 이면  $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식  $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(i)~(iv)에서 방정식  $\sin x = k$ 가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수  $k$ 의 값이 1뿐인 경우는 (ii)이다.

즉,  $4a = \pi - a$ 이므로  $a = \frac{\pi}{5}$



한편,  $m, n$  ( $m < n$ )이 10 이하의 두 자연수일 때, 닫힌구간  $[ma, na]$ 에서 함수  $y = \sin x$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 0인 경우는

㉠  $0 < ma \leq \frac{\pi}{2}$ 이고  $\frac{3}{2}\pi \leq na \leq 2\pi$ 인 경우

(최댓값 1, 최솟값 -1)

㉡  $\frac{\pi}{2} < ma < \pi < na < \frac{3}{2}\pi$ 이고  $ma + na = 2\pi$ 인 경우

(최댓값  $\sin ma$ , 최솟값  $\sin na = \sin(2\pi - ma) = -\sin ma$ )

이다.

㉠에서  $m$ 의 값은 1 또는 2이고  $n$ 의 값은 8 또는 9 또는 10이므로 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수는  $2 \times 3 = 6$

㉡에서 가능한 순서쌍  $(m, n)$ 은  $(3, 7), (4, 6)$ 으로 그 개수는 2

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수는

$6 + 2 = 8$

답 8

## 22

조건 (가)의  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 6$ 에서  $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이고  $f(x)$ 는 다항함수이므로  $f(2) = 0$

조건 (나)에서 모든 실수  $x$ 에 대하여  $|f(x)| \leq |xg(x)|$ 인 연속함수  $g(x)$ 가 존재하므로  $0 \leq |f(0)| \leq |0 \times g(0)| = 0$ 에서  $f(0) = 0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 를

$f(x) = x(x-2)(x^2+ax+b)$  ( $a, b$ 는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$6 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x^2+ax+b)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x(x^2+ax+b) = 2(4+2a+b)$$

에서  $2a + b = -1$

$b = -1 - 2a$  ..... ㉠

또한  $x \neq 0$ 일 때  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |g(x)|$ 에서  $-|g(x)| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |g(x)|$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$-\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} |g(x)|$$

이고 함수  $g(x)$ 는 연속함수이므로

$$-|g(0)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq |g(0)|$$

$-6 \leq f'(0) \leq 6$  ..... ㉡

$f(x) = (x^2-2x)(x^2+ax+b)$ 에서

$f'(x) = (2x-2)(x^2+ax+b) + (x^2-2x)(2x+a)$ 이므로

$f'(0) = -2b$  ..... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면  $-6 \leq -2b \leq 6, -3 \leq b \leq 3$

㉠에서  $-3 \leq -2a - 1 \leq 3, -2 \leq a \leq 1$

$f(3) = 3(9+3a+b) = 3(9+3a-1-2a) = 3(a+8)$

따라서  $f(3) = 3(a+8)$ 은

$a = -2$ 일 때 최소이고 최솟값은  $3 \times 6 = 18,$

$a = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은  $3 \times 9 = 27$ 이므로 구하는 합은

$18 + 27 = 45$

답 45

23

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}}{\frac{3}{2^n} + \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1 + 2 \times 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}$$

답 ①

24

$f(\sqrt{x}) = e^{x^2+x}$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = (2x+1)e^{x^2+x}$$

$x=4$ 를 대입하면

$$f'(2) \times \frac{1}{4} = (2 \times 4 + 1) \times e^{4+4} = 9e^{20}$$

따라서  $f'(2) = 36e^{20}$

답 ⑤

25

곡선  $y = \cos \pi x$  ( $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ )과  $x$ 축 및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx = \left[ \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

이므로 곡선  $y = \cos \pi x$ 와  $x$ 축,  $y$ 축 및 직선  $x=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는  $\frac{1}{2\pi}$ 이다.

$$\frac{1}{2\pi} = \int_0^a \cos \pi x dx = \left[ \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^a = \frac{1}{\pi} \sin a\pi$$

$\sin a\pi = \frac{1}{2}$ 에서  $0 < a < \frac{1}{2}$ 이므로  $a = \frac{1}{6}$

답 ④

26

선분 CD와 선분 ED는 직선 AD에 대하여 대칭이고  $\overline{DP} = \overline{DQ}$ 이므로 두 점 P, Q는 직선 AD에 대하여 대칭이다.

즉, 삼각형 APD와 삼각형 AQD는 서로 합동이고  $\angle PAD = \angle QAD$ ,  $\overline{AD} \perp \overline{PQ}$ 이다.

선분 AD와 선분 PQ가 만나는 점을 H라 하자.

$\overline{HD} = t$ 라 하면 삼각형 PDH에서  $\angle PDH = \frac{\pi}{3}$ 이므로  $\overline{PH} = \sqrt{3}t$ 이다.

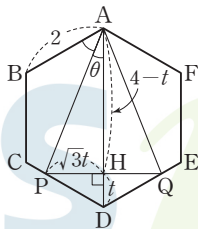
사각형 APDQ의 넓이는

$$2 \times \left( \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{PH} \right) = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{3}t \right) = 4\sqrt{3}t$$

이므로  $4\sqrt{3}t = 3\sqrt{3}$ 에서  $t = \frac{3}{4}$

$\angle PAH = \theta$ 라 하면 삼각형 APH에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{AH}} = \frac{\sqrt{3}t}{4-t} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{4-\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{13}$$



따라서

$$\begin{aligned} \tan(\angle BAP) &= \tan(\angle BAD - \angle PAD) \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \theta}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \times \tan \theta} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{13}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{13}} = \frac{5\sqrt{3}}{11} \end{aligned}$$

답 ②

27

직각삼각형  $A_1B_1C_1$ 에서  $\overline{A_1B_1} = 2\sqrt{3}$ ,  $\overline{B_1C_1} = 2$ 이므로

$$\angle C_1A_1B_1 = \frac{\pi}{6}, \angle B_1C_1A_1 = \frac{\pi}{3}$$

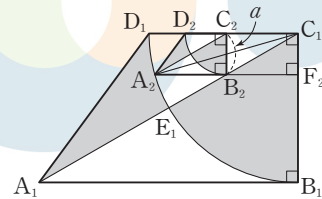
$$\angle A_1C_1D_1 = \angle C_1A_1B_1 = \frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\text{삼각형 } A_1C_1D_1 \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{C_1D_1} \times \overline{B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$\text{부채꼴 } C_1D_1E_1 \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{부채꼴 } C_1E_1B_1 \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{따라서 } S_1 = \left(2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} = 2 + \frac{\pi}{3}$$



한편, 그림에서  $\overline{B_2C_2} = a$ , 직선  $A_2B_2$ 가 선분  $B_1C_1$ 과 만나는 점을  $F_2$

라 하면  $\overline{F_2C_1} = \overline{B_2C_2} = a$ ,  $\overline{A_2B_2} = \sqrt{3}a$ ,  $\overline{A_2C_1} = 2$ 이고

삼각형  $C_2B_2C_1$ 에서  $\overline{C_1C_2} = \sqrt{3}a$ 이므로  $\overline{B_2F_2} = \sqrt{3}a$

따라서 삼각형  $C_1A_2F_2$ 에서

$$2^2 = (\sqrt{3}a + \sqrt{3}a)^2 + a^2, 4 = 13a^2, a = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

사각형  $A_1B_1C_1D_1$ 과 사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 의 닮음비는  $2 : a = 1 : \frac{1}{\sqrt{13}}$

이므로 그림  $R_1$ 에서 색칠된 도형과 그림  $R_2$ 에서 새로 색칠된 도형의 닮음비가  $1 : \frac{1}{\sqrt{13}}$ 이다.

같은 방법으로 그림  $R_n$ 에서 새로 색칠된 도형과 그림  $R_{n+1}$ 에서 새로 색칠된 도형의 닮음비도  $1 : \frac{1}{\sqrt{13}}$ 이고 넓이의 비는  $1 : \frac{1}{13}$ 이다.

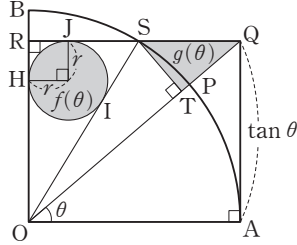
따라서  $S_n$ 은 첫째항이  $2 + \frac{\pi}{3}$ 이고 공비가  $\frac{1}{13}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2 + \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{13}} = \frac{13}{36}(6 + \pi)$$

답 ③



## 28



$\overline{OR} = \overline{AQ} = \tan \theta$ ,  $\overline{OS} = 1$ 이므로 삼각형 OSR에서

$$\overline{RS} = \sqrt{1 - \tan^2 \theta}$$

삼각형 OSR에 내접하는 원의 반지름의 길이를  $r$ 라 하고, 원이 선분 OR와 접하는 점을 H, 선분 OS와 접하는 점을 I, 선분 RS와 접하는 점을 J라 하면  $\overline{RH} = \overline{RJ} = r$ ,

$$\overline{OI} = \overline{OH} = \overline{OR} - r, \quad \overline{IS} = \overline{SJ} = \overline{RS} - r$$

이므로  $\overline{OI} + \overline{IS} = \overline{OS}$ 에서

$$\tan \theta - r + \sqrt{1 - \tan^2 \theta} - r = 1$$

$$r = \frac{\tan \theta - 1 + \sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{2}$$

$$f(\theta) = \pi \times \left( \frac{\tan \theta - 1 + \sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \times \{ \tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 1 + 2(\tan \theta - 1)\sqrt{1 - \tan^2 \theta} + 1 - \tan^2 \theta \}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \{ 1 - \tan \theta + (\tan \theta - 1)\sqrt{1 - \tan^2 \theta} \}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times (1 - \tan \theta)(1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta})$$

한편,  $\overline{QS} = \overline{QR} - \overline{RS} = 1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta}$ 이고

$\angle SQT = \angle POA = \theta$ 이므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{QT} \times \overline{ST}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\overline{QS} \times \cos \theta) \times (\overline{QS} \times \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta})^2 \times \cos \theta \sin \theta$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^3 \times f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \times (1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta})^2 \times \cos \theta \sin \theta}{\theta^3 \times \frac{\pi}{2} \times (1 - \tan \theta)(1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\cos \theta}{\pi \times (1 - \tan \theta)} \times \frac{(1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta}) \times \sin \theta}{\theta^3} \right\}$$

이때

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta})(1 + \sqrt{1 - \tan^2 \theta})}{\theta^2(1 + \sqrt{1 - \tan^2 \theta})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 \theta}{\theta^2(1 + \sqrt{1 - \tan^2 \theta})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{\tan \theta}{\theta} \right)^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \tan^2 \theta}}$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^3 \times f(\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\cos \theta}{\pi \times (1 - \tan \theta)} \times \frac{(1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta}) \times \sin \theta}{\theta^3} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{\theta^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

답 ②

## 29

조건 (가)에서  $f(1) = 1$ 이므로  $\frac{1}{2} \ln a + b + c = 1$  ..... ㉠

$$f'(x) = \frac{1}{2x} + 2bx + c = \frac{4bx^2 + 2cx + 1}{2x}$$

조건 (나)에서 함수  $f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 가 존재하려면 모든 양수  $x$ 에 대하여 항상  $f'(x) \geq 0$ 이거나 항상  $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$ 이므로 모든 양수  $x$ 에 대하여

$f'(x) \geq 0$ , 즉  $4bx^2 + 2cx + 1 \geq 0$ 이어야 한다.

$$4bx^2 + 2cx + 1 = 4b \left( x + \frac{c}{4b} \right)^2 + 1 - \frac{c^2}{4b}$$

$b > 0$ ,  $c < 0$ 에서  $-\frac{c}{4b} > 0$ 이므로 모든 양수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이려면

$$1 - \frac{c^2}{4b} \geq 0, \quad \text{즉 } c^2 - 4b \leq 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

한편, 함수  $h(x)$ 를  $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면  $f(1) = 1$ 에서  $g(1) = 1$ 이므로  $h(1) = 0$ 이다.

이때 조건 (나)에서 함수  $|h(x)|$ 가  $x = 1$ 에서 미분가능하므로  $h'(1) = 0$ 이어야 한다.

$$g'(1) = \frac{1}{f'(1)} \text{에서}$$

$$h'(1) = f'(1) - g'(1) = f'(1) - \frac{1}{f'(1)}$$

$$h'(1) = 0 \text{에서 } f'(1) > 0 \text{이므로 } f'(1) = 1$$

$$f'(1) = \frac{4b + 2c + 1}{2} = 1 \text{에서}$$

$$b = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}c \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{2} \ln a + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2}c \right) + c = 1$$

$$\ln a = \frac{3}{2} - c \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢을 ㉣에 대입하면

$$c^2 - 4 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2}c \right) \leq 0, \quad c^2 + 2c - 1 \leq 0, \quad -1 - \sqrt{2} \leq c \leq -1 + \sqrt{2}$$

$c < 0$ 이므로  $-1 - \sqrt{2} \leq c < 0$

㉢, ㉣에서

$$f(2) = \frac{1}{2} \ln 2a + 4b + 2c = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln a + 4b + 2c$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - c \right) + 4 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2}c \right) + 2c$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}c$$

따라서  $f(2)$ 의 값은  $c = -1 - \sqrt{2}$ 일 때 최댓값

$\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7}{4} - \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 갖는다.

즉,  $p = \frac{9}{4}$ ,  $q = \frac{1}{2}$ 이므로  $8pq = 8 \times \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = 9$

답 9

### 30

조건 (가)에서 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다. .... ㉠

조건 (나)의 식의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$\{f'(1)\}^2 + 3 \int_0^1 f(2t) dt = 9 \text{이므로}$$

$$\{f'(1)\}^2 = -3 \int_0^1 f(2t) dt + 9$$

이때  $2t = u$ 로 놓으면  $2 = \frac{du}{dt}$ 이고

$t=0$ 일 때  $u=0$ ,  $t=1$ 일 때  $u=2$ 이므로

$$\int_0^1 f(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) du = -\frac{3}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right)^2$$

$$\{f'(1)\}^2 = -3 \times \left[ -\frac{3}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right)^2 \right] + 9 \text{ ..... ㉡}$$

$$= \frac{9}{4} \left( e^2 - 2 + \frac{1}{e^2} \right) + 9 = \frac{9}{4} \left( e^2 + 2 + \frac{1}{e^2} \right)$$

$$= \left[ \frac{3}{2} \left( e + \frac{1}{e} \right) \right]^2$$

에서  $f'(1) < 0$ 이므로  $f'(1) = -\frac{3}{2} \left( e + \frac{1}{e} \right)$

조건 (나)의 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2f'(x)f''(x) + 3f(2x) = 0$$

$x=0$ 을 대입하면  $2f'(0)f''(0) + 3f(0) = 0$

$f''(0) = 0$ 이므로  $f(0) = 0$

이때 ㉠에서  $f(0) > f(1)$ 이므로  $f(1) < 0$ 이다.

조건 (나)의 식의 양변에  $x=0$ 을 대입하면  $\{f'(0)\}^2 = 9$

$\{f'(1)\}^2 = \{f(1)\}^2 + 9$ 이므로 ㉡에서

$$\{f(1)\}^2 = \frac{9}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right)^2$$

$f(1) < 0$ 이므로  $f(1) = -\frac{3}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right)$

$\left\{ \frac{1}{f'(x)} \right\}' = -\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}$ 이므로 부분적분법에 의하여

$$\int_0^1 \frac{f''(x) \times f(x)}{\{f'(x)\}^2} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{f'(x)} \times f(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{f'(x)} \times f'(x) \right\} dx$$

$$= -\frac{f(1)}{f'(1)} + 1 = -\frac{-\frac{3}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right)}{-\frac{3}{2} \left( e + \frac{1}{e} \right)} + 1$$

$$= -\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} + 1 = \frac{2}{e^2 + 1}$$

따라서  $k = 2$

답 2

#### 심고

문제의 조건을 만족시키는 함수로는  $f(x) = -\frac{3}{2}(e^x - e^{-x})$ 이 있다.

#### 실전 모의고사 4회

본문 150~161쪽

01 ①	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ②	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ②
16 6	17 8	18 62	19 10	20 54
21 135	22 52	23 ③	24 ④	25 ②
26 ④	27 ③	28 ③	29 210	30 5

### 01

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{2}-1} \times \left( \frac{1}{4} \right)^{\frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{1}{2}} &= 2^{\sqrt{2}-1} \times (2^{-2})^{\frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{1}{2}} = 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-2 \times \left( \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{1}{2} \right)} \\ &= 2^{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ①

### 02

$f(x) = (x+1)(x^2+2)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (x^2+2) + (x+1) \times 2x \\ &= x^2+2+2x^2+2x \\ &= 3x^2+2x+2 \end{aligned}$$

따라서  $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 2 = 18$

답 ④

### 03

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하자.

$a_2 = 10$ 에서  $ar = 10$  ..... ㉠

$$\frac{a_4}{a_1} = 8 \text{에서 } \frac{ar^3}{a} = r^3 = 8$$

등비수열  $\{a_n\}$ 의 모든 항이 실수이므로

$$r = 2 \text{ ..... ㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$2a = 10, a = 5$$

따라서  $a_5 = ar^4 = 5 \times 2^4 = 80$

답 ②

### 04

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + 2 \times 2 = 5$$

답 ⑤

### 05

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}
 |\sin \theta + \cos \theta|^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\
 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\
 &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

$|\sin \theta + \cos \theta| \geq 0$ 이므로

$$|\sin \theta + \cos \theta| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

### 06

방정식  $x^3 + x^2 + 4 = x^2 + 3x + k$ , 즉  $x^3 - 3x + 4 = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$$h(x) = x^3 - 3x + 4 \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

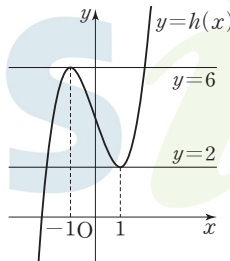
$$h(-1) = 6, h(1) = 2$$

함수  $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

곡선  $y = h(x)$ 와 직선  $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2이려면  $k = 2$  또는  $k = 6$ 이어야 한다.

따라서 모든 실수  $k$ 의 값의 합은

$$2 + 6 = 8$$



답 ③

### 07

$$a_1 = 10 \text{이고 } 10 \text{은 짝수이므로 } a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$a_2 = 5 \text{이고 } 5 \text{는 홀수이므로 } a_3 = a_2 + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$a_3 = 6 \text{이고 } 6 \text{은 짝수이므로 } a_4 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$a_4 = 3 \text{이고 } 3 \text{은 홀수이므로 } a_5 = a_4 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_5 = 4 \text{이고 } 4 \text{는 짝수이므로 } a_6 = \frac{1}{2}a_5 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$a_6 = 2 \text{이고 } 2 \text{는 짝수이므로 } a_7 = \frac{1}{2}a_6 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$a_7 = 1 \text{이고 } 1 \text{은 홀수이므로 } a_8 = a_7 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_8 = 2 \text{이고 } 2 \text{는 짝수이므로 } a_9 = \frac{1}{2}a_8 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

이와 같은 과정을 반복하면

$$a_6 = a_8 = a_{10} = \dots = 2$$

$$a_7 = a_9 = a_{11} = \dots = 1$$

따라서 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n \geq 1$ 이고,  $n \leq 5$ 이면  $a_n \geq 3$ ,

$a_6 + a_7 = 2 + 1 = 3$ 이므로  $a_k + a_{k+1} = 3$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 최솟값은 6이다.

답 ④

### 08

직사각형 ABCD의 넓이가 6이므로 선분 AB와 곡선  $y = kx^2$  및 두 직선  $x = -1, x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이다.

$$\int_{-1}^1 (2 - kx^2) dx = 2 \int_0^1 (2 - kx^2) dx = 2 \left[ 2x - \frac{kx^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left( 2 - \frac{k}{3} \right)$$

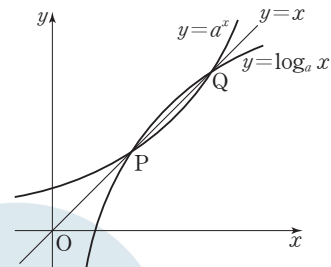
$$2 \left( 2 - \frac{k}{3} \right) = 3 \text{에서 } 2 - \frac{k}{3} = \frac{3}{2}, \frac{k}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{3}{2}$$

답 ③

### 09

$f(x) = a^x, g(x) = \log_a x$ 라 하면 두 함수  $f(x), g(x)$ 는 서로 역함수 관계이고, 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선  $y = a^x, y = \log_a x$ 의 교점은 곡선  $y = a^x$ 과 직선  $y = x$ 의 교점과 같다. 즉, 두 점 P, Q는 직선  $y = x$  위의 점이다.



$\overline{OP} = \overline{PQ}$ 이므로 양수  $k$ 에 대하여 점 P의 좌표를  $(k, k)$ 라 하면 점 Q의 좌표는  $(2k, 2k)$ 이다.

두 점 P, Q는 곡선  $y = a^x$  위의 점이므로

$$a^k = k \quad \dots \text{㉠}$$

$$a^{2k} = 2k \quad \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡에서 } a^{2k} = (a^k)^2 \text{이므로 ㉠을 대입하면 } k^2 = 2k, k(k-2) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = 2 \quad \dots \text{㉢}$$

$$\text{㉢을 ㉠에 대입하면 } a^2 = 2$$

$$a > 1 \text{이므로 } a = \sqrt{2}$$

답 ⑤

### 10

$g(x) = 2x + 4$ 라 하면  $f'(1) = g'(1), f(1) = g(1)$ 이므로 함수

$f(x) - g(x)$ 는  $(x-1)^2$ 을 인수로 갖는다.

또  $f'(2) = g'(2), f(2) = g(2)$ 이므로 함수  $f(x) - g(x)$ 는  $(x-2)^2$

을 인수로 갖는다. 즉,  $f(x) - g(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ 이므로

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)^2 + 2x + 4$$

$$\text{따라서 } f(3) = (3-1)^2 \times (3-2)^2 + 2 \times 3 + 4 = 14$$

답 ②

### 11

점 C의  $y$ 좌표를  $t$ 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times (1-t), S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times t \text{이므로}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\overline{OD} \times t}{\overline{AB} \times (1-t)}$$

$$\frac{\overline{OD} \times t}{\overline{AB} \times (1-t)} = \frac{\overline{OD}}{\overline{AB}} \text{에서 } 1-t=t, \text{ 즉 } t = \frac{1}{2}$$

곡선  $y=f(x-a)$ 는 곡선  $y=f(x)$ 를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B의  $x$ 좌표는 각각  $\frac{1}{2}$ ,  $a+\frac{1}{2}$ 이고,

$$\text{점 C의 } x\text{좌표는 } \frac{\frac{1}{2} + (a + \frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

즉,  $C(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 이고 점 C는 곡선  $y=f(x)$  위의 점이므로

$$\frac{1}{2} = \sin\left[\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

한편,  $0 < a < 1$ 에서  $\frac{\pi}{2} < (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2})\pi < \pi$ 이고

$$\sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2} \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{이므로 } a = \frac{2}{3}$$

답 ②

## 12

$$\lim_{x \rightarrow -1} |g(x)| = \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{x^3 + x + 1}{f(x)} \right|$$

$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x + 1) = -1$ 이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$$\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| = 0$$

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x+1$ 을 인수로 갖는다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x + 1}{f(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x + 1) = 31$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ 이고 함수  $f(x)$ 는  $x-3$ 을 인수로 갖는다.

$f(x) = (x+1)(x-3)(x-a)$  ( $a$ 는 상수)라 하자.

$a > 3$ 이면 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형

은 그림과 같다.

$x \rightarrow 3+$ 일 때  $f(x) \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = -\infty \text{이고}$$

$x \rightarrow 3-$ 일 때  $f(x) \rightarrow 0+$ 이므로  $\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \infty$ 이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

마찬가지로  $a < 3$ 인 경우도 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

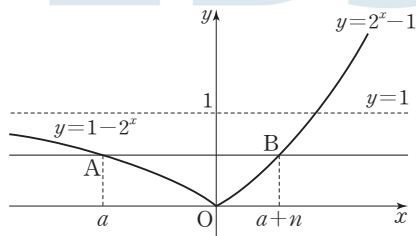
$$a = 3 \text{이면 } f(x) = (x+1)(x-3)^2, g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x+1)(x-3)^2} \text{이므로}$$

조건 (나)를 만족시킨다.

$$\text{따라서 } f(5) = 6 \times 4 = 24$$

답 ①

## 13



$$f(x) = |2^x - 1| = \begin{cases} 1 - 2^x & (x < 0) \\ 2^x - 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고, 곡선  $y=f(x)$ 의 점근선은  $y=1$ 이다.

곡선  $y=1-2^x$  ( $x < 0$ ) 위의 점 A, 곡선  $y=2^x-1$  ( $x > 0$ ) 위의 점 B를 직선 AB가  $x$ 축과 평행하고  $\overline{AB}=n$ 이 되도록 잡는다.

점 A의  $x$ 좌표를  $a$ 라 하면 점 B의  $x$ 좌표는  $a+n$ 이므로

$$1 - 2^a = 2^{a+n} - 1, (2^n + 1) \times 2^a = 2, 2^a = \frac{2}{2^n + 1}$$

$$\text{즉, } a = \log_2 \frac{2}{2^n + 1}$$

(i)  $t < a$ 일 때

닫힌구간  $[t, t+n]$ 에서 함수  $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값은  $f(t)$

(ii)  $t = a$ 일 때

닫힌구간  $[t, t+n]$ 에서 함수  $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값은  $f(t) = f(t+n)$

(iii)  $t > a$ 일 때

닫힌구간  $[t, t+n]$ 에서 함수  $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값은  $f(t+n)$

(i), (ii), (iii)에서  $t \geq a$ 일 때, 닫힌구간  $[t, t+n]$ 에서 함수

$f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값이  $f(t+n)$ 이므로 닫힌구간  $[t, t+n]$ 에서

함수  $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값이  $f(t+n)$ 이 되도록 하는 실수  $t$ 의

최솟값은  $a = \log_2 \frac{2}{2^n + 1}$ 이고  $g(n) = \log_2 \frac{2}{2^n + 1}$ 이다.

$$2^{g(n)} = \frac{2}{2^n + 1}, \frac{1}{2^{g(n)}} = \frac{2^n + 1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2^{g(3)}} = \frac{2^3 + 1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{2^{g(4)}} = \frac{2^4 + 1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\frac{1}{2^{g(5)}} = \frac{2^5 + 1}{2} = \frac{33}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2^{g(3)}} + \frac{1}{2^{g(4)}} + \frac{1}{2^{g(5)}} = \frac{9}{2} + \frac{17}{2} + \frac{33}{2} = \frac{59}{2}$$

답 ①

## 14

ㄱ.  $a=0$ 이면  $v(t) = t^2(t-2) = t^3 - 2t^2$ 이므로

$$\begin{aligned} x(1) &= \int_0^1 (t^3 - 2t^2) dt = \left[ \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12} < 0 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄴ.  $x(2) = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 t(t-2)(t-a) dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \{t^3 - (a+2)t^2 + 2at\} dt = \left[ \frac{1}{4}t^4 - \frac{a+2}{3}t^3 + at^2 \right]_0^2 \\ &= 4 - \frac{8(a+2)}{3} + 4a = \frac{4a-4}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{4a-4}{3} = a \text{에서 } a = 4 \text{ (참)}$$

ㄷ.  $x(a) = \int_0^a v(t) dt = \int_0^a t(t-2)(t-a) dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \{t^3 - (a+2)t^2 + 2at\} dt = \left[ \frac{1}{4}t^4 - \frac{a+2}{3}t^3 + at^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}a^4 - \frac{a+2}{3} \times a^3 + a^3 = -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 = -a^2 \text{에서}$$

$$a > 0 \text{이므로 } -\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{3}a = -1$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0, (a+2)(a-6) = 0$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 6, \text{ 즉 } x(6) = -6^2$$

$0 \leq t \leq 2$ 에서  $v(t) \geq 0$ 이고,  $2 \leq t \leq 6$ 에서  $v(t) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^6 |v(t)| dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^6 \{-v(t)\} dt \\ &= \int_0^2 v(t) dt - \int_2^6 v(t) dt \\ &= \int_0^2 v(t) dt - \left( \int_0^6 v(t) dt - \int_0^2 v(t) dt \right) \\ &= 2 \int_0^2 v(t) dt - \int_0^6 v(t) dt \\ &= 2 \times x(2) - x(6) = 2 \times x(2) - (-6^2) \\ &= 2 \times x(2) + 36 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

### 15

$x$ 에 대한 방정식  $\sin x - |\sin t| = 0$ 에서

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \text{일 때, } x = t \text{ 또는 } x = \pi - t$$

$$\frac{\pi}{2} < t < \pi \text{일 때, } x = \pi - t \text{ 또는 } x = t$$

$$\pi < t < \frac{3}{2}\pi \text{일 때, } x = t - \pi \text{ 또는 } x = 2\pi - t$$

$$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi \text{일 때, } x = 2\pi - t \text{ 또는 } x = t - \pi$$

$x$ 에 대한 방정식  $|\sin x| - \sin t = 0$ 에서

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \text{일 때, } x = t \text{ 또는 } x = \pi - t \text{ 또는 } x = \pi + t \text{ 또는 } x = 2\pi - t$$

$$\frac{\pi}{2} < t < \pi \text{일 때, } x = \pi - t \text{ 또는 } x = t \text{ 또는 } x = 2\pi - t \text{ 또는 } x = \pi + t$$

$$\pi < t < \frac{3}{2}\pi \text{일 때, 실근은 존재하지 않는다.}$$

$$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi \text{일 때, 실근은 존재하지 않는다.}$$

그러므로 각 경우의  $0 < x < 2\pi$ 에서  $x$ 에 대한 방정식

$(\sin x - |\sin t|)(|\sin x| - \sin t) = 0$ 의 실근을 크기순으로 나열하고 서로 다른 모든 실근의 합을 구하면

(i)  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 일 때

$x = t$  또는  $x = \pi - t$  또는  $x = \pi + t$  또는  $x = 2\pi - t$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$t + (\pi - t) + (\pi + t) + (2\pi - t) = 4\pi$$

(ii)  $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 일 때

$x = \pi - t$  또는  $x = t$  또는  $x = 2\pi - t$  또는  $x = \pi + t$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$(\pi - t) + t + (2\pi - t) + (\pi + t) = 4\pi$$

(iii)  $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$ 일 때

$x = t - \pi$  또는  $x = 2\pi - t$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$(t - \pi) + (2\pi - t) = \pi$$

(iv)  $\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$ 일 때

$x = 2\pi - t$  또는  $x = t - \pi$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$(2\pi - t) + (t - \pi) = \pi$$

즉,

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ \pi - t & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ t - \pi & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ 2\pi - t & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}, g(t) = \begin{cases} 2\pi - t & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ \pi + t & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ t - \pi & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

$$g(t) - f(t) = \begin{cases} 2\pi - 2t & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ 2t & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ 3\pi - 2t & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ 2t - 3\pi & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}, h(t) = \begin{cases} 4\pi & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ 4\pi & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ \pi & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ \pi & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

$0 < t < \pi$  ( $t \neq \frac{\pi}{2}$ )에서  $\pi < kh(t) < 2\pi$ 일 때

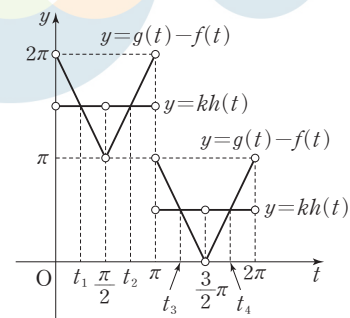
방정식  $g(t) - f(t) = kh(t)$ 의 두 실근을  $t_1, t_2$ 라 하면

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{에서 } t_1 + t_2 = \pi$$

$\pi < t < 2\pi$  ( $t \neq \frac{3}{2}\pi$ )에서  $0 < kh(t) < \pi$ 일 때

방정식  $g(t) - f(t) = kh(t)$ 의 두 실근을  $t_3, t_4$ 라 하면

$$\frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{에서 } t_3 + t_4 = 3\pi$$



$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = (t_1 + t_2) + (t_3 + t_4) = \pi + 3\pi = 4\pi \text{이므로}$$

$0 < t < \pi$  ( $t \neq \frac{\pi}{2}$ )에서  $\pi < kh(t) < 2\pi$ 이고

$\pi < t < 2\pi$  ( $t \neq \frac{3}{2}\pi$ )에서  $0 < kh(t) < \pi$ 인 경우에만

방정식  $g(t) - f(t) = kh(t)$ 의 모든 실근의 합이  $4\pi$ 이다.

$0 < t < \pi$  ( $t \neq \frac{\pi}{2}$ )에서  $h(t) = 4\pi$ 이므로  $\pi < 4\pi k < 2\pi$

$$\frac{1}{4} < k < \frac{1}{2} \quad \dots \text{㉠}$$

$\pi < t < 2\pi$  ( $t \neq \frac{3}{2}\pi$ )에서  $h(t) = \pi$ 이므로  $0 < \pi k < \pi$

$$0 < k < 1 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 모든 실수  $k$ 의 값의 범위는  $\frac{1}{4} < k < \frac{1}{2}$

따라서  $a = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{2}$ 이므로  $a\beta = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

답 ②



### 16

$$\begin{aligned} \log_2 9 \times \frac{1}{\log_8 3} &= \log_2 9 \times \log_3 8 = \frac{\log 9}{\log 2} \times \frac{\log 8}{\log 3} \\ &= \frac{2 \log 3}{\log 2} \times \frac{3 \log 2}{\log 3} = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

답 6

### 17

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3x^2 + 4x + 1) dx \\ &= x^3 + 2x^2 + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\ \text{한편, } f(0) &= 4 \text{이므로 } C = 4 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 4 \text{이므로} \\ f(1) &= 1^3 + 2 \times 1^2 + 1 + 4 = 8 \end{aligned}$$

답 8

### 18

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)(b_k + 2) &= \sum_{k=1}^{10} (a_k b_k + 2a_k + 2b_k + 4) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k b_k + 2 \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) + 40 \end{aligned}$$

$$150 = \sum_{k=1}^{10} a_k b_k + 2 \times 24 + 40 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k b_k = 150 - (48 + 40) = 62$$

답 62

### 19

이차함수  $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(1+x) = f(1-x)$ 이므로  $f(x) = (x-1)^2 + k = x^2 - 2x + (k+1)$  (단,  $k$ 는 실수) 조건 (가)에서 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $A(a, f(a))$ 에서의 접선  $l_1$ 은  $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이고, 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $B(b, f(b))$ 에서의 접선  $l_2$ 는  $y=f'(b)(x-b)+f(b)$ 이므로  $x$ 에 대한 방정식  $f'(a)(x-a)+f(a)=f'(b)(x-b)+f(b)$ 의 근은 두 직선  $l_1, l_2$ 의 교점의  $x$ 좌표와 같다.

$$\frac{a+b}{2} = 1 \text{인 경우에만 두 직선 } l_1, l_2$$

의 교점의  $x$ 좌표가 1이므로

$$a+b=2 \quad \dots \text{㉠}$$

$$\frac{a+b}{2} = 1 \text{에서 } f(a)=f(b) \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$\sqrt{(b-a)^2 + \{f(b)-f(a)\}^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2}$$

$$= b-a=6 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=4$$

따라서  $f'(x) = 2x - 2$ ,  $a + 2b = (-2) + 2 \times 4 = 6$ 이므로

$$f'(a+2b) = f'(6) = 2 \times 6 - 2 = 10$$

답 10

### 20

조건 (가)에서

$$\int_0^6 xf(x) dx - 6 \int_0^6 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^6 xf(x) dx = 6 \int_0^6 f(x) dx \quad \dots \text{㉠}$$

조건 (나)에서

$$2 \int_0^6 xf(x) dx + 3 \int_0^6 f(x) dx = 90 \quad \dots \text{㉡}$$

$$\int_0^6 f(x) dx = A, \int_0^6 xf(x) dx = B \text{라 하면}$$

$$\text{㉠에서 } B=6A, \text{㉡에서 } 2B+3A=90$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A = \int_0^6 f(x) dx = 6, B = \int_0^6 xf(x) dx = 36 \quad \dots \text{㉢}$$

$f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^6 (x^2 + ax + b) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^6 \\ &= 72 + 18a + 6b = 6(12 + 3a + b) \end{aligned}$$

$$\text{㉢에 의하여 } 12 + 3a + b = 1, 3a + b = -11 \quad \dots \text{㉣}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 xf(x) dx &= \int_0^6 (x^3 + ax^2 + bx) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^6 \\ &= \frac{1}{4} \times 6^4 + \frac{a}{3} \times 6^3 + \frac{b}{2} \times 6^2 = 36 \left( 9 + 2a + \frac{b}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{㉣에 의하여 } 9 + 2a + \frac{b}{2} = 1, 4a + b = -16 \quad \dots \text{㉤}$$

$$\text{㉣, ㉤을 연립하여 풀면 } a = -5, b = 4$$

따라서  $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 이므로

$$f(10) = 10^2 - 5 \times 10 + 4 = 54$$

답 54

### 21

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항이  $\frac{4}{3}$ 이고, 공차가  $\frac{1}{3}$ 이므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n < a_{n+1}$ 이고, 2와 3의 최소공배수는 6이다.

$$m=6 \text{일 때, } A_6 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{12}\}, B_6 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{18}\}$$

$$A_6 \cap B_6 = \{a_6, a_{12}\}, b_6 = a_{12}$$

$$m=7 \text{일 때, } A_7 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{14}\}, B_7 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{21}\}$$

$$A_7 \cap B_7 = \{a_6, a_{12}\}, b_7 = a_{12}$$

$$m=8 \text{일 때, } A_8 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{16}\}, B_8 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{24}\}$$

$$A_8 \cap B_8 = \{a_6, a_{12}\}, b_8 = a_{12}$$

$$m=9 \text{일 때, } A_9 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{18}\}, B_9 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{27}\}$$

$$A_9 \cap B_9 = \{a_6, a_{12}, a_{18}\}, b_9 = a_{18}$$

$$m=10 \text{일 때, } A_{10} = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}\}, B_{10} = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{30}\}$$

$$A_{10} \cap B_{10} = \{a_6, a_{12}, a_{18}\}, b_{10} = a_{18}$$

$$m=11 \text{일 때, } A_{11} = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{22}\}, B_{11} = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{33}\}$$

$$A_{11} \cap B_{11} = \{a_6, a_{12}, a_{18}\}, b_{11} = a_{18}$$

⋮

이와 같은 과정을 반복하면

$$b_{3k+3} = b_{3k+4} = b_{3k+5} = a_{6k+6} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n = \frac{4}{3} + (n-1) \times \frac{1}{3} \text{이므로}$$



$$a_{6k+6} = \frac{4}{3} + \{(6k+6) - 1\} \times \frac{1}{3} = 2k + 3$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{m=6}^{20} b_m &= \sum_{k=1}^5 (b_{3k+3} + b_{3k+4} + b_{3k+5}) = \sum_{k=1}^5 3a_{6k+6} \\ &= 3 \sum_{k=1}^5 a_{6k+6} = 3 \sum_{k=1}^5 (2k+3) = 3 \times \left( 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 3 \times 5 \right) = 135 \end{aligned}$$

답 135

## 22

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(i) 함수  $g(x)$ 는  $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f'(x+2) - f'(x-2)}{x-2}$$

$$g(2) = 2 \times f(2) \quad \dots \text{㉠}$$

$x \rightarrow 2$ -일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \{f'(x+2) - f'(x-2)\} = 0$ 이고  $f'(x)$ 가 연속이므로

$$f'(4) = f'(0)$$

$$3 \times 4^2 + 2 \times a \times 4 + b = b$$

$$a = -6$$

또한  $f'(x) = 3x^2 - 12x + b$ 에서

$$f'(x+2) - f'(x-2)$$

$$= 3(x+2)^2 - 12(x+2) + b - 3(x-2)^2 + 12(x-2) - b$$

$$= 3x^2 + 12x + 12 - 12x - 24 - 3x^2 + 12x - 12 + 12x - 24$$

$$= 24(x-2)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{24(x-2)}{x-2} = 24$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx + c \text{에서 } f(2) = 2b + c - 16$$

$$\text{㉠에 의하여 } 2(2b + c - 16) = 24$$

$$2b + c = 28 \quad \dots \text{㉡}$$

(ii) 함수  $g(x)$ 는  $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$x < 2 \text{일 때, } g(x) = 24 \text{이고 } g'(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 0 \quad \dots \text{㉢}$$

$x \geq 2$ 일 때,  $g(x) = xf(x)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)f(x) + 2\{f(x) - f(2)\}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= f(2) + 2f'(2) \quad \dots \text{㉣}$$

이때  $f'(2) = 12 - 24 + b = b - 12$ 이고 ㉣에서  $f(2) = 12$ 이므로

$$f(2) + 2f'(2) = 12 + 2(b - 12) = 2b - 12$$

$g(x)$ 가  $x=2$ 에서 미분가능하므로 ㉢=㉣

$$2b - 12 = 0 \text{에서 } b = 6$$

$b = 6$ 을 ㉡에 대입하면

$$12 + c = 28 \text{에서 } c = 16$$

(i), (ii)에 의하여  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 16$ 이므로

$$f(6) = 6^3 - 6 \times 6^2 + 6 \times 6 + 16 = 52$$

답 52

## 23

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}}{\frac{n+2}{n+1} - \frac{n+3}{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}}{1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{1 \times \left(1 + \frac{3}{n}\right)} \\ &= \frac{3 \times 1 \times 1}{1 \times 1} = 3 \end{aligned}$$

답 ③

## 24

$f(x) = t$ 로 놓으면  $f'(x) = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x=0$ 일 때  $t = \frac{\pi}{6}$ ,  $x=1$ 일 때  $t = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{f'(x) \times \cos f(x)\} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \left[ \sin t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ④

## 25

$a_n = r \times r^{n-1} = r^n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n - a_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n (r^n - r^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} (1 - r) \\ &= \frac{r^2(1-r)}{1-r^2} = \frac{r^2}{1+r} \quad (\text{단, } -1 < r < 1) \end{aligned}$$

즉,  $\frac{r^2}{1+r} = \frac{1}{2}$ 에서

$$2r^2 - r - 1 = 0, (2r+1)(r-1) = 0$$

$$-1 < r < 1 \text{이므로 } r = -\frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, S_n = \frac{-\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

이므로

$$a_n S_n = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

답 ②

## 26

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로  $\tan \alpha > 0$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 이므로  $\tan \beta < 0$

$\left| \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \right| = \frac{1}{4}$ 이므로 양의 실수  $k$ 에 대하여  $\tan \alpha = 4k$ ,  $\tan \beta = -k$ 로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4k + (-k)}{1 - 4k \times (-k)} \\
 &= \frac{3k}{1 + 4k^2} = \frac{3}{\frac{1}{k} + 4k}
 \end{aligned}$$

한편,  $k > 0$ 이므로

$$\frac{1}{k} + 4k \geq 2\sqrt{\frac{1}{k} \times 4k} = 4 \quad (\text{단, 등호는 } k = \frac{1}{2} \text{일 때 성립})$$

따라서  $\frac{1}{k} + 4k$ 는  $k = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 4를 가지므로  $\tan(\alpha + \beta)$ 는

$k = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값  $\frac{3}{4}$ 을 갖는다.

답 ④

## 27

$g(x) = \int_1^x (t-1)f(x-t+1) dt$ 에서

$x-t+1=s$ 로 놓으면  $-1 = \frac{ds}{dt}$ 이고  $t-1 = x-s$

$t=1$ 일 때  $s=x$ ,  $t=x$ 일 때  $s=1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_1^x (t-1)f(x-t+1) dt \\
 &= \int_x^1 (x-s)f(s)(-ds) = \int_1^x (x-s)f(s) ds \\
 &= x \int_1^x f(s) ds - \int_1^x sf(s) ds
 \end{aligned}$$

양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \int_1^x f(s) ds + xf(x) - xf(x) \\
 &= \int_1^x f(s) ds = \int_1^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2s^2}\right) ds \\
 &= \left[\frac{1}{2}s - \frac{1}{2s}\right]_1^x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}
 \end{aligned}$$

따라서  $x=2$ 에서  $x=4$ 까지의 곡선  $y=g(x)$ 의 길이는

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 \sqrt{1 + \{g'(x)\}^2} dx &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\
 &= \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_2^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \ln|x|\right]_2^4 \\
 &= 4 + \frac{1}{2} \ln 4 - \left(1 + \frac{1}{2} \ln 2\right) = 3 + \frac{1}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

답 ③

## 28

방정식  $a^2 - 5a + 2 = 3a - 5$ 의 해는

$$a^2 - 8a + 7 = (a-1)(a-7) = 0 \text{에서}$$

$a=1$  또는  $a=7$  ..... ㉠

방정식  $a^2 - 5a + 2 = 5 - 3a$ 의 해는

$$a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3) = 0 \text{에서}$$

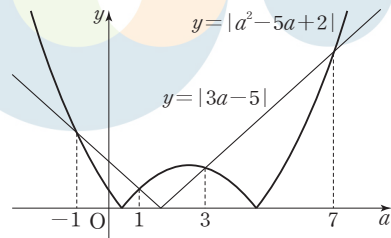
$a=-1$  또는  $a=3$  ..... ㉡

㉠, ㉡에서 부등식  $|a^2 - 5a + 2| > |3a - 5|$ 의 해는

$a < -1$  또는  $1 < a < 3$  또는  $a > 7$  ..... ㉢

㉠, ㉡에서 부등식  $|a^2 - 5a + 2| < |3a - 5|$ 의 해는

$-1 < a < 1$  또는  $3 < a < 7$  ..... ㉣



(i)  $|a^2 - 5a + 2| > |3a - 5|$ 인 경우

㉢에서  $a < -1$  또는  $1 < a < 3$  또는  $a > 7$ 일 때

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a^2 - 5a + 2|^n - |3a - 5|^n}{|a^2 - 5a + 2|^n + |3a - 5|^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left|\frac{3a-5}{a^2-5a+2}\right|^n}{1 + \left|\frac{3a-5}{a^2-5a+2}\right|^n} = 1
 \end{aligned}$$

(ii)  $|a^2 - 5a + 2| = |3a - 5|$ 인 경우

㉠, ㉡에서  $a = -1$  또는  $a = 1$  또는  $a = 3$  또는  $a = 7$ 일 때

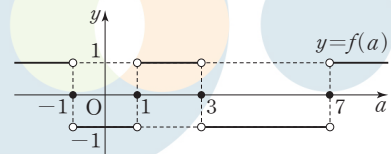
$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a^2 - 5a + 2|^n - |3a - 5|^n}{|a^2 - 5a + 2|^n + |3a - 5|^n} = 0$$

(iii)  $|a^2 - 5a + 2| < |3a - 5|$ 인 경우

㉣에서  $-1 < a < 1$  또는  $3 < a < 7$ 일 때

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a^2 - 5a + 2|^n - |3a - 5|^n}{|a^2 - 5a + 2|^n + |3a - 5|^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left|\frac{a^2-5a+2}{3a-5}\right|^n - 1}{\left|\frac{a^2-5a+2}{3a-5}\right|^n + 1} = -1
 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 함수  $y=f(a)$ 의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 함수  $f(a)$ 가  $a=t$ 에서 불연속이 되도록 하는 모든 실수  $t$ 의 값은  $-1, 1, 3, 7$ 이고

$$t = -1 \text{일 때, } \lim_{a \rightarrow -1^+} f(a) = -1, \lim_{a \rightarrow -1^-} f(a) = 1$$

$$t = 1 \text{일 때, } \lim_{a \rightarrow 1^+} f(a) = 1, \lim_{a \rightarrow 1^-} f(a) = -1$$

$$t = 3 \text{일 때, } \lim_{a \rightarrow 3^+} f(a) = -1, \lim_{a \rightarrow 3^-} f(a) = 1$$

$$t = 7 \text{일 때, } \lim_{a \rightarrow 7^+} f(a) = 1, \lim_{a \rightarrow 7^-} f(a) = -1 \text{이다.}$$

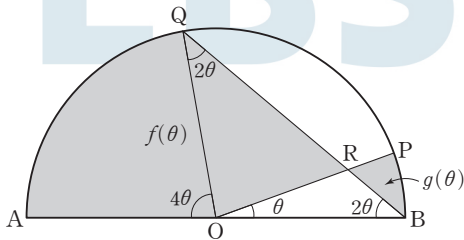
따라서 부등식  $\lim_{a \rightarrow k^+} f(a) > \lim_{a \rightarrow k^-} f(a)$ 를 만족시키는 모든 실수  $k$ 의 값은 1, 7이고, 그 합은  $1+7=8$

답 ③

참고

$a^2 - 5a + 2 = 0$ 에서  $a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ ,  $3a - 5 = 0$ 에서  $a = \frac{5}{3}$ 이므로  $a^2 - 5a + 2$ 의 값과  $3a - 5$ 의 값이 동시에 0이 되는 실수  $a$ 는 존재하지 않는다.

29



$\angle OBQ = \angle OQB = 2\theta$ 이므로  
 $\angle AOQ = 4\theta$   
 삼각형 ORQ의 넓이에서  $g(\theta)$ 를 뺀 값은 삼각형 OBQ의 넓이에서 부채꼴 OBP의 넓이를 뺀 값과 같다.

$$\begin{aligned} f(\theta) - g(\theta) &= (\text{부채꼴 OQA의 넓이}) + (\text{삼각형 ORQ의 넓이}) - g(\theta) \\ &= (\text{부채꼴 OQA의 넓이}) + (\text{삼각형 OBQ의 넓이}) - (\text{부채꼴 OBP의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 4\theta + \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 4\theta) - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta \\ &= \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 60 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta} &= 60 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta}{\theta} \\ &= 60 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2} + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta} \right) \\ &= 60 \times \left( \frac{3}{2} + 2 \right) = 210 \end{aligned}$$

답 210

30

$f(x) = \frac{x}{e^x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = 1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

조건 (가)의  $f(g(x)) = k$ 에서 상수  $k$ 는  $k \leq \frac{1}{e}$ 이고 함수  $g(x)$ 는 상수  $k$ 의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i)  $k \leq 0$  또는  $k = \frac{1}{e}$ 일 때

$x$ 에 대한 방정식  $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 함수  $g(x)$ 는 상수함수이고 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $0 < k < \frac{1}{e}$ 일 때

$x$ 에 대한 방정식  $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 두 실근을 각각  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )라 하면  $g(x) = \alpha$  또는  $g(x) = \beta$ 이다. 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(x) = \alpha$ 이면 함수  $g(x)$ 는 상수함수이고 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(x) = \beta$ 이면 함수  $g(x)$ 는 상수함수이고 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$g(x_1) = \alpha$ 인 어떤  $x_1$ 과  $g(x_2) = \beta$ 인 어떤  $x_2$ 가 모두 존재하면

$$M = \beta, m = \alpha, M - m = \beta - \alpha$$

즉, 함수  $g(x)$ 는  $g(x_1) = \alpha$ 인 어떤  $x_1$ 과  $g(x_2) = \beta$ 인 어떤  $x_2$ 가 모두 존재하고  $\beta - \alpha = \ln 2$ 이다.

$$\beta = \alpha + \ln 2, f(\alpha) = f(\beta) \text{에서 } \frac{\alpha}{e^\alpha} = \frac{\alpha + \ln 2}{e^{\alpha + \ln 2}}$$

$$\frac{\alpha}{e^\alpha} = \frac{\alpha + \ln 2}{2e^\alpha}, \alpha = \frac{\alpha + \ln 2}{2}, \alpha = \ln 2$$

$$\beta = \alpha + \ln 2 = \ln 2 + \ln 2 = 2 \ln 2 = \ln 4$$

$$k = f(\alpha) = f(\ln 2) = \frac{\ln 2}{e^{\ln 2}} = \frac{\ln 2}{2}$$

즉,  $\alpha = \ln 2, \beta = \ln 4, k = \frac{\ln 2}{2}$  이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \left( \frac{x}{e^x} - \frac{\ln 2}{2} \right) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x} dx - \frac{\ln 2}{2} \times (\ln 4 - \ln 2) \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x} dx - \frac{(\ln 2)^2}{2} \end{aligned}$$

한편,  $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} x e^{-x} dx$ 이고

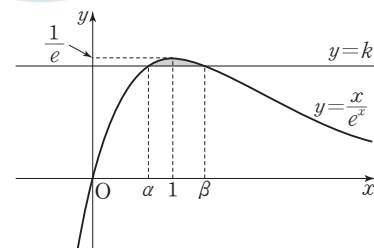
$u(x) = x, v'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면  $u'(x) = 1, v(x) = -e^{-x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{x}{e^x} dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} x e^{-x} dx = \left[ -x e^{-x} \right]_{\ln 2}^{\ln 4} + \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{-x} dx \\ &= \left( -\frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 2}{2} \right) + \left[ -e^{-x} \right]_{\ln 2}^{\ln 4} \\ &= \left( -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } S = \frac{1}{4} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

따라서  $S + \frac{(\ln 2)^2}{2} = \frac{1}{4}$ 이고  $p = 4, q = 1$ 이므로

$$p + q = 4 + 1 = 5$$



답 5

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ⑤	08 ①	09 ②	10 ⑤
11 ③	12 ③	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 114	17 8	18 81	19 17	20 32
21 21	22 426	23 ①	24 ③	25 ④
26 ④	27 ②	28 ⑤	29 25	30 150

01

$$4^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} = 2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$$

답 ①

02

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$ 에서  $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$ 이므로

$$f'(1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

답 ②

03

$a_1 = a, a_{99} = l$ 이라 하면  $\sum_{k=1}^{99} a_k = 297$ 에서

$$\frac{99(a+l)}{2} = 297, \frac{a+l}{2} = \frac{297}{99} = 3$$

수열  $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 수열  $\{a_{2n-1}\}$ 도 등차수열이다.

$$a_{2 \times 1 - 1} = a_1 = a, a_{2 \times 50 - 1} = a_{99} = l$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} = \frac{50(a+l)}{2} = 50 \times 3 = 150$$

답 ④

04

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

$x+1=t$ 라 하면  $x \rightarrow 0^-$ 일 때  $t \rightarrow 1^-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) = 1 + 1 = 2$$

답 ⑤

05

$a_{2n-1} = 2^n, a_{2n} = 3^n$ 이므로 짝수번째 항과 홀수번째 항을 나누어 생각하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \log_6 a_n &= \sum_{k=1}^5 \log_6 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 \log_6 a_{2k} = \sum_{k=1}^5 \log_6 2^k + \sum_{k=1}^5 \log_6 3^k \\ &= \sum_{k=1}^5 k \log_6 2 + \sum_{k=1}^5 k \log_6 3 = \log_6 2 \times \sum_{k=1}^5 k + \log_6 3 \times \sum_{k=1}^5 k \\ &= (\log_6 2 + \log_6 3) \times \frac{5 \times (5+1)}{2} \\ &= \log_6 6 \times 15 = 15 \end{aligned}$$

답 ③

06

함수  $f(x)$ 는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수  $g(x)$ 는  $x = -1$ 과  $x = 1$ 에서만 불연속이다.

그러므로 함수  $f(x)g(x)$ 가  $x = -1$ 과  $x = 1$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

함수  $f(x)g(x)$ 가  $x = -1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x) = f(-1)g(-1) \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) = (1-a+b) \times (-2-1) = -3(1-a+b)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x) = (1-a+b) \times 1 = 1-a+b$$

$$f(-1)g(-1) = (1-a+b) \times (-2-1) = -3(1-a+b)$$

$$\text{이므로 } -3(1-a+b) = 1-a+b$$

$$a-b=1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

함수  $f(x)g(x)$ 가  $x = 1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = f(1)g(1) \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = (1+a+b) \times (-1) = -(1+a+b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = (1+a+b) \times 2 = 2(1+a+b)$$

$$f(1)g(1) = (1+a+b) \times (-1) = -(1+a+b)$$

$$\text{이므로 } -(1+a+b) = 2(1+a+b)$$

$$a+b=-1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=0, b=-1 \text{이므로 } f(x) = x^2 - 1$$

$$\text{따라서 } f(2) = 4 - 1 = 3$$

답 ③

07

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x - 2$$

$$= -\sin x \times \sin x + \cos x - 2 = -\sin^2 x + \cos x - 2$$

$$= \cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = \cos^2 x + \cos x - 3$$

$$= \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서  $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\text{함수 } y = \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \text{은 } \cos x = -\frac{1}{2} \text{일 때 최솟값 } -\frac{13}{4},$$

$\cos x = 1$ 일 때 최댓값  $-1$ 을 갖는다.

$$\text{따라서 } M = -1, m = -\frac{13}{4} \text{이므로 } M - m = -1 - \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

답 ⑤

08

$$2 \times 3^x + a \times 3^{-x} \leq 1 \text{에서 } 2 \times 3^x + \frac{a}{3^x} \leq 1, 2(3^x)^2 + a \leq 3^x$$

$$3^x - 2(3^x)^2 \geq a$$

$$t = 3^x \text{이라 하면 } t > 0 \text{이고 } t - 2t^2 \geq a$$

$$f(t) = t - 2t^2 (t > 0) \text{이라 하면 } f(t) = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} (t > 0)$$

부등식  $f(t) \geq a$ 의 실수인 해가 존재하려면  $a$ 는 함수  $f(t)$ 의 최댓값보다 작은 작거나 같아야 한다.

$$t > 0 \text{일 때 함수 } f(t) \text{의 최댓값은 } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \text{이므로 } a \leq \frac{1}{8} \text{이다.}$$

이때  $a = \frac{1}{8}$  이면  $t = \frac{1}{4} = 3^x$  이므로 이를 만족시키는 실수인  $x$ 가 존재한다.  
따라서  $a$ 의 최댓값은  $\frac{1}{8}$ 이다.

답 ①

### 09

$y = -x^3 - 3x^2 + 6$ 에서  $y' = -3x^2 - 6x$   
곡선 위의 점  $(t, -t^3 - 3t^2 + 6)$ 에서의 접선의 방정식은  
 $y - (-t^3 - 3t^2 + 6) = (-3t^2 - 6t)(x - t)$   
이 직선이 점  $(1, a)$ 를 지나므로  
 $a - (-t^3 - 3t^2 + 6) = (-3t^2 - 6t)(1 - t)$   
 $2t^3 - 6t + 6 - a = 0 \dots\dots ㉠$   
삼차함수의 그래프에서 두 개 이상의 점에 동시에 접하는 직선은 존재하지 않으므로 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지면 그을 수 있는 접선의 개수가 3이 된다.  
 $f(t) = 2t^3 - 6t + 6 - a$ 라 하면  
 $f'(t) = 6t^2 - 6 = 6(t+1)(t-1)$   
 $f'(t) = 0$ 에서  $t = -1$  또는  $t = 1$   
함수  $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	...	-1	...	1	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1) = -2 + 6 + 6 - a = -a + 10$   
 $f(1) = 2 - 6 + 6 - a = -a + 2$   
방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면  
 $-a + 10 > 0, -a + 2 < 0$ 에서  $2 < a < 10$   
따라서 정수  $a$ 의 개수는  
 $10 - 2 - 1 = 7$

### 10

$2 \int_p^x f(t) dt - \int_p^x \{f'(t)\}^2 dt = 2 - 3x \dots\dots ㉠$   
㉠의 양변에  $x = p$ 를 대입하면  
 $0 = 2 - 3p, p = \frac{2}{3}$   
㉠의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  
 $2f(x) - \{f'(x)\}^2 = -3 \dots\dots ㉡$   
 $f'(1) = -2$ 에서  $f(x)$ 는 상수함수가 아니므로  
 $f(x)$ 의 차수를  $n (n \geq 1)$ 이라 하면  $f'(x)$ 의 차수는  $n-1$ ,  
 $\{f'(x)\}^2$ 의 차수는  $2(n-1)$ 이다.  
㉡의 양변의 차수를 비교하면  $n = 2(n-1)$ 에서  $n = 2$   
 $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ 는 상수,  $a \neq 0$ )이라 하면  
 $f'(x) = 2ax + b \dots\dots ㉢$   
이므로 ㉡에서  $2(ax^2 + bx + c) - (2ax + b)^2 = -3$   
 $(2a - 4a^2)x^2 + (2b - 4ab)x + 2c - b^2 = -3$   
위의 등식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하므로  
 $2a - 4a^2 = 0, 2b - 4ab = 0, 2c - b^2 = -3 \dots\dots ㉣$

에서  $a = \frac{1}{2}$   
 $f'(1) = -2$ 이므로 ㉢에서  
 $f'(1) = 2a + b = 1 + b = -2$   
 $b = -3$   
㉣에서  $2c - (-3)^2 = -3$   
 $c = 3$   
이므로  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3$ 이고  $f(2) = 2 - 6 + 3 = -1$   
따라서  $p + f(2) = \frac{2}{3} + (-1) = -\frac{1}{3}$

답 ⑤

### 11

$y = 3 \tan \pi x$ 에  $x = \frac{1}{3}$ 을 대입하면  
 $3 \tan \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$ 이므로  $P(\frac{1}{3}, 3\sqrt{3})$   
 $0 < x \leq 1$ 이고  $y = 3 \tan \pi x = 0$ 에서  $\pi x = \pi, x = 1$ 이므로  $R(1, 0)$   
주어진 그래프에서  $y = a \sin \frac{\pi}{b}x$ 의 주기가 1이므로  
 $\frac{2\pi}{b} = 2b = 1$ 에서  $b = \frac{1}{2}$

함수  $y = a \sin 2\pi x$ 의 그래프가 점  $P(\frac{1}{3}, 3\sqrt{3})$ 을 지나므로  
 $a \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{3}$ 에서  $a = 6$   
이때 두 곡선  $y = 3 \tan \pi x, y = 6 \sin 2\pi x$ 는 점  $(\frac{1}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 사각형 OQRP는 평행사변형이다.  
사각형 OQRP의 넓이는 삼각형 ORP의 넓이의 2배이므로  
 $S = 2 \times (\frac{1}{2} \times 1 \times 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$   
따라서  $abS = 6 \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

답 ③

### 12

$f(x) = x^3 - 4x, g(x) = x^2 + ax$ 라 하고, 점 P의 x좌표를  $t$ 라 하면  
 $f(t) = g(t)$ 이고  $f'(t) = g'(t)$ 이다.  
 $f'(x) = 3x^2 - 4, g'(x) = 2x + a$ 이므로  
 $t^3 - 4t = t^2 + at \dots\dots ㉠$   
 $3t^2 - 4 = 2t + a \dots\dots ㉡$   
㉡에서  $a = 3t^2 - 2t - 4$ 이고, 이를 ㉠에 대입하면  
 $t^3 - 4t = t^2 + (3t^2 - 2t - 4)t, t^2(2t - 1) = 0$ 에서  $t = 0$  또는  $t = \frac{1}{2}$   
 $t = 0$ 이면  $a = -4$   
 $t = \frac{1}{2}$ 이면  $a = -\frac{17}{4}$   
(i)  $a = -4$ 일 때  
 $f(x) - g(x) = (x^3 - 4x) - (x^2 - 4x)$   
 $= x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$   
이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는  
 $-\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = -[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = -(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$

(ii)  $a = -\frac{17}{4}$ 일 때

$$f(x) - g(x) = (x^3 - 4x) - \left(x^2 - \frac{17}{4}x\right)$$

$$= x^3 - x^2 + \frac{17}{4}x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - x^2 + \frac{17}{4}x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{8}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{64} - \frac{1}{24} + \frac{17}{32} = \frac{1}{192}$$

따라서  $S_1 = \frac{1}{12}$ ,  $S_2 = \frac{1}{192}$ 이므로  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{192}} = \frac{192}{12} = 16$

답 ③

### 13

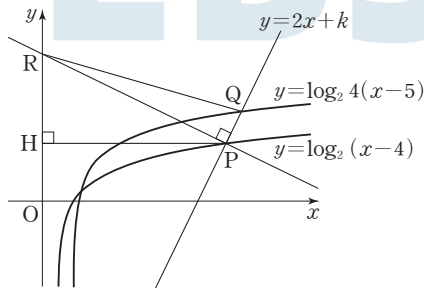
$y = \log_2 4(x-5) = \log_2(x-5) + \log_2 4 = \log_2(x-5) + 2$   
 이므로 함수  $y = \log_2 4(x-5)$ 의 그래프는 함수  $y = \log_2(x-4)$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.  
 직선  $y = 2x + k$ 의 기울기가 2이므로 점 P를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{PR} = 15, \overline{PR} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$$

점 P에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PR의 기울기가  $-\frac{1}{2}$

이므로  $\overline{RH} : \overline{PH} : \overline{PR} = 1 : 2 : \sqrt{5}$ 이다.



$\overline{PR} = 6\sqrt{5}$ 이므로  $\overline{PH} = 12$

점 P의  $x$ 좌표를  $p$ 라 하면  $p = 12$

점 P( $p, 2p+k$ ), 즉 P( $12, 24+k$ )는 곡선  $y = \log_2(x-4)$  위의 점  
 이므로

$$24+k = \log_2 8 = 3$$

따라서  $k = 3 - 24 = -21$

▶ 다른 풀이

$y = \log_2 4(x-5) = \log_2(x-5) + \log_2 4 = \log_2(x-5) + 2$   
 이므로 함수  $y = \log_2 4(x-5)$ 의 그래프는 함수  $y = \log_2(x-4)$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.  
 직선  $y = 2x + k$ 의 기울기가 2이므로 점 P를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{PR} = 15, \overline{PR} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

점 P의  $x$ 좌표를  $p$  ( $p > 0$ )이라 하면 점 P는 직선  $y = 2x + k$  위의 점  
 이므로

$$P(p, 2p+k)$$

점 P를 지나고 직선  $y = 2x + k$ 에 수직인 직선의 기울기는  $-\frac{1}{2}$ 이므로

직선 PR의 방정식은

$$y - (2p+k) = -\frac{1}{2}(x-p), x + 2y - 5p - 2k = 0$$

$$x=0 \text{ 이면 } y = \frac{5p+2k}{2} \text{ 이므로 } R\left(0, \frac{5p+2k}{2}\right)$$

$\overline{PR}$ 는 점 R과 직선  $y = 2x + k$ , 즉  $2x - y + k = 0$  사이의 거리이므로

$$\overline{PR} = \frac{\left|0 - \frac{5p+2k}{2} + k\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{5p}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}p \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } \frac{\sqrt{5}}{2}p = 6\sqrt{5}, p = 12$$

점 P( $12, 24+k$ )는 곡선  $y = \log_2(x-4)$  위의 점이므로

$$24+k = \log_2 8 = 3$$

따라서  $k = 3 - 24 = -21$

### 14

$h(x) = x^3 - 3a^2x$ 라 하면

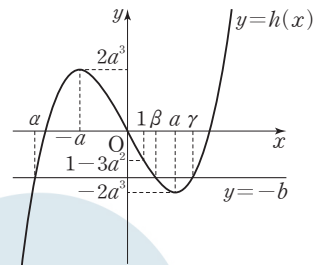
$$h'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$$h'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -a \text{ 또는 } x = a$$

함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$-a$	...	$a$	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$h(-a) = -a^3 + 3a^3 = 2a^3, h(a) = a^3 - 3a^3 = -2a^3$$



삼차방정식  $x^3 - 3a^2x + b = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면  
 $x^3 - 3a^2x = -b$ 에서 함수  $y = h(x)$ 의 그래프와 직선  $y = -b$ 가 서로  
 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 근  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ )에 대하여

$$\beta > 1 \text{ 이 성립하려면 } h(1) = 1 - 3a^2 \text{ 이므로}$$

$$-2a^3 < -b < 1 - 3a^2, \text{ 즉 } 3a^2 - 1 < b < 2a^3$$

따라서  $f(a) = 3a^2 - 1, g(a) = 2a^3$ 이므로

$$f(3) + g(2) = 26 + 16 = 42$$

답 ③

### 15

$$\neg, a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 1 \times \sin \frac{\pi}{2} = a_1 + 1 = 2$$



$$a_3 = a_2 + 2 \times \sin \pi = a_2 = 2$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times \sin \frac{3\pi}{2} = a_3 - 3 = -1$$

$$\text{이므로 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 2 + (-1) = 4 \text{ (참)}$$

ㄴ. 자연수  $k$ 에 대하여

$$a_{4k+1} = a_{4k} + 4k \sin \frac{4k\pi}{2} = a_{4k}$$

$$a_{4k+2} = a_{4k+1} + (4k+1) \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} = a_{4k} + 4k + 1$$

$$a_{4k+3} = a_{4k+2} + (4k+2) \sin \frac{(4k+2)\pi}{2} = a_{4k+2} = a_{4k} + 4k + 1$$

$$\begin{aligned} a_{4k+4} &= a_{4k+3} + (4k+3) \sin \frac{(4k+3)\pi}{2} \\ &= (a_{4k} + 4k + 1) - (4k+3) = a_{4k} - 2 \end{aligned}$$

$$a_{4k+5} = a_{4k+4} = a_{4k} - 2 = a_{4k+1} - 2$$

$$\begin{aligned} a_{4k+6} &= a_{4k+5} + (4k+5) = a_{4k} - 2 + (4k+5) \\ &= a_{4k} + 4k + 3 = a_{4k+2} + 2 \end{aligned}$$

$$a_{4k+7} = a_{4k+6} = a_{4k+2} + 2 = a_{4k+3} + 2$$

이므로 수열  $\{a_{4k-3}\}, \{a_{4k-2}\}, \{a_{4k-1}\}, \{a_{4k}\}$ 는 각각 공차가  $-2, 2, 2, -2$ 인 등차수열이다.

$$a_4 = -1 \text{ 이므로}$$

$$a_{4k} = -1 + (k-1) \times (-2) = -2k + 1 \text{ (참)}$$

ㄷ.  $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$

이고

$$\begin{aligned} a_{4k+1} + a_{4k+2} &= a_{4k} + (a_{4k} + 4k + 1) = 2a_{4k} + 4k + 1 \\ &= 2(-2k + 1) + 4k + 1 = 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{48} a_k + a_{49} + a_{50} = 4 \times 12 + 3 = 48 + 3 = 51 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

### 16

$$\int_{-3}^3 (6x^2 + 5x + 1) dx = 2 \int_0^3 (6x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[ 2x^3 + x \right]_0^3$$

$$= 2(54 + 3) = 114$$

답 114

### 17

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

$$a_3 a_5 = 2a_7 \text{에서 } ar^2 \times ar^4 = 2ar^6$$

$$a^2 r^6 = 2ar^6$$

$$a \neq 0, r \neq 0 \text{ 이므로 } a = 2$$

$$a_8 + a_9 = 6a_7 \text{에서}$$

$$2r^7 + 2r^8 = 6 \times 2r^6$$

$$r + r^2 = 6, r^2 + r - 6 = 0, (r+3)(r-2) = 0$$

$$r > 0 \text{ 이므로 } r = 2$$

$$\text{즉, } a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \text{ 이므로}$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$

답 8

### 18

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 + 3ax - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4ax + 3a$$

함수  $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식

$$f'(x) = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 9a \leq 0, a(4a - 9) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq \frac{9}{4}$$

따라서  $a$ 의 최댓값은  $\frac{9}{4}$ , 최솟값은 0이므로

$$36(M+m) = 36\left(\frac{9}{4} + 0\right) = 81$$

답 81

### 19

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 4} = -\frac{1}{5} \text{ 이므로}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로 마주보는 각의 크기의 합은  $\pi$ 이다.

즉,  $B + D = \pi$ 이므로

$$\sin D = \sin(\pi - B) = \sin B = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{..... ㉠}$$

$$\cos D = \cos(\pi - B) = -\cos B = \frac{1}{5}$$

$\overline{AD} = a$ 라 하면  $\overline{CD} = 2a$ 이므로

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = a^2 + (2a)^2 - 4a^2 \cos D \text{ 이므로}$$

$$49 = 5a^2 - 4a^2 \times \frac{1}{5} = \frac{21}{5}a^2$$

$$a^2 = \frac{5}{21} \times 49 = \frac{35}{3} \quad \text{..... ㉡}$$

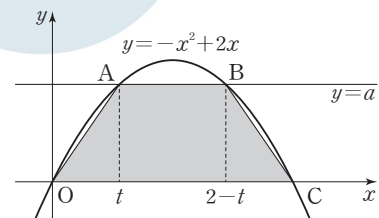
㉠, ㉡에서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times a \times 2a \times \sin D = a^2 \sin D = \frac{35}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{14\sqrt{6}}{3}$$

따라서  $p = 3, q = 14$ 이므로  $p + q = 3 + 14 = 17$

답 17

### 20



점 C의 좌표는  $(2, 0)$ 이고, 곡선  $y = -x^2 + 2x$ 는 직선  $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로 점 A의  $x$ 좌표를  $t$  ( $0 < t < 1$ )이라 하면 점 B의  $x$ 좌표는  $2 - t$ 이다.

점 A의 y좌표가  $-t^2+2t$ 이므로 사각형 OCBA의 넓이를  $f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \times \{2 + (2-2t)\} \times (-t^2+2t) \\ &= t(t-2)^2 = t(t^2-4t+4) \\ f'(t) &= (t-2)^2 + 2t(t-2) \\ &= (t-2)(3t-2) \end{aligned}$$

$$0 < t < 1 \text{이므로 } f'(t)=0 \text{에서 } t = \frac{2}{3}$$

이때  $f(t)$ 는  $t = \frac{2}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 S는

$$S = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

따라서  $27S = 32$

답 32

## 21

집합  $S_n$ 의 원소는

$$\begin{aligned} &(-2)^0 a_1 + (-2)^1 a_2 + (-2)^2 a_3 + \dots + (-2)^{n-1} a_n \\ &= a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{n-1} a_n \end{aligned}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

집합  $S_3$ 의 원소는  $a_1 - 2a_2 + 4a_3$ 의 꼴로 나타나고  $a_k$  ( $k=1, 2, 3$ )의 값은 0 또는 1이다.

따라서  $a_1 + 4a_3$ 의 값은 0, 1, 4, 5로 4가지

$-2a_2$ 의 값은 -2, 0으로 2가지

경우가 될 수 있으므로

$$S_3 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

즉,  $p=8$

집합  $S_n$ 에 속하는 원소  $a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{n-1} a_n$ 의 값은  $a_{2i-1}=1, a_{2i}=0$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ )

일 때 최대이다.

자연수  $j$ 에 대하여  $n=2j$ 라 하면 집합  $S_n$ 에 속하는 원소의 최댓값은

$$\begin{aligned} &a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{2j-1} a_{2j} \\ &= 1 - 0 + 2^2 - 0 + \dots + (-2)^{2j-2} - 0 \\ &= 1 + 2^2 + \dots + 2^{2j-2} = \frac{2^{2j} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{2j} - 1}{3} \end{aligned}$$

$n=2j+1$ 이라 하면

$$\begin{aligned} &a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{(2j+1)-1} a_{2j+1} \\ &= 1 - 0 + 2^2 - 0 + \dots + (-2)^{2j-2} - 0 + (-2)^{2j} \\ &= 1 + 2^2 + \dots + 2^{2j-2} + 2^{2j} = \frac{2^{2j+2} - 1}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{2^{2j} - 1}{3} \leq 5453 \leq \frac{2^{2j+2} - 1}{3} \text{에서}$$

$$\frac{2^{12} - 1}{3} = \frac{4095}{3} = 1365, \quad \frac{2^{14} - 1}{3} = \frac{16383}{3} = 5461 \text{이고}$$

$5453 = 5461 - 8$ 이므로

$$5453 = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{12} - 2^3$$

따라서 5453을 원소로 갖는  $S_n$  중  $n$ 의 값이 최소인 경우는

$$n = 2 \times 6 + 1 = 13 \text{일 때이다.}$$

그러므로  $q=13$

따라서  $p+q=8+13=21$

답 21

## 22

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 3(t^2 - 1) \\ &= 3x^2 + 6x - 3(t+1)(t-1) \\ &= 3\{x - (t-1)\}\{x + (t+1)\} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서  $x=t-1$  또는  $x=-t-1$

$t > 0$ 이므로  $-t-1 < -1 < t-1$ 이고, 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$-t-1$	...	$t-1$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$\begin{aligned} f(t-1) &= (t-1)^3 + 3(t-1)^2 - 3(t^2-1)(t-1) + 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ &= (t-1)^3 + 3(t-1)^2 - 3(t-1)^2(t+1) + (t-1)^2(2t+1) \\ &= (t-1)^2\{(t-1) + 3 - 3(t+1) + (2t+1)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 3 + 3(t^2-1) + 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ &= 2t^3 \end{aligned}$$

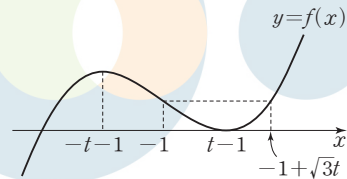
$$\begin{aligned} f(2) &= 8 + 12 - 6(t^2-1) + 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ &= 2t^3 - 9t^2 + 27 \end{aligned}$$

$f(x) = f(-1)$ 에서

$$f(x) - 2t^3 = (x+1)(x^2+2x+1-3t^2) = 0 \text{이므로}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}t$$

에서  $f(-1) = f(-1 + \sqrt{3}t) = 2t^3$



이때  $-1 + \sqrt{3}t \geq 2$ , 즉  $t \geq \sqrt{3}$ 이면  $g(t) = f(-1) = 2t^3$

$0 < t < \sqrt{3}$ 이면  $g(t) = f(2) = 2t^3 - 9t^2 + 27$

한편,  $t-1 \geq 2$ , 즉  $t \geq 3$ 이면  $h(t) = f(2) = 2t^3 - 9t^2 + 27$

$0 < t < 3$ 이면  $h(t) = f(t-1) = 0$

그러므로 두 함수  $g(t), h(t)$ 는 다음과 같다.

$$g(t) = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 27 & (0 < t < \sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \geq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < 3) \\ 2t^3 - 9t^2 + 27 & (t \geq 3) \end{cases}$$

이때 함수  $g(t)$ 는  $t = \sqrt{3}$ 에서 미분가능하지 않으므로  $a = \sqrt{3}$ 이다.

$$\begin{aligned} g(2a) &= g(2\sqrt{3}) = 2 \times (2\sqrt{3})^3 \\ &= 48\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(3a) &= h(3\sqrt{3}) = 2(3\sqrt{3})^3 - 9(3\sqrt{3})^2 + 27 \\ &= 162\sqrt{3} - 216 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} g(2a) + h(3a) &= 48\sqrt{3} + (162\sqrt{3} - 216) \\ &= 210\sqrt{3} - 216 \end{aligned}$$

즉,  $p=210, q=-216$ 이므로

$$p - q = 210 - (-216) = 426$$

답 426

### 23

$f'(x) = 2e^{2x+1}$ 이므로  
 $f'(\ln 2) = 2e^{2\ln 2+1} = 2 \times e^{\ln 4} \times e = 2 \times 4^{\ln e} \times e = 8e$

답 ①

### 24

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{e^{2k}}}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n} \right)$   
 $x_k = \frac{2k}{n}$ 로 놓으면  $\Delta x = \frac{2}{n}$ 이므로  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt[n]{e^{2k}}}{n} = \frac{1}{2} \int_0^2 e^x dx = \frac{1}{2} [e^x]_0^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$

답 ③

### 25

$f(g(x)) = x$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  
 $f'(g(x))g'(x) = 1$ , 즉  $\frac{1}{f'(g(x))} = g'(x)$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = a$ ,  $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ 로 놓으면

$f(a) = \sin a = \frac{1}{2}$ 에서  $a = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$f(b) = \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에서  $b = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{f'(g(x))} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} g'(x) dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [g(x)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 0 - (-1) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{\pi}{6}$$

답 ④

### 26

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r > 2$ )라 하면

$a_n = r^{n-1}$ ,  $S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + S_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}}{r^{n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r - 1} \left( r + r^2 - \frac{2}{r^{n-1}} \right) = \frac{r(r+1)}{r-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)b_n = 15$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n+1)b_n \times \frac{n}{2n+1} \right\} = 15 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n+1)b_n \times \frac{n+1}{2n+1} \right\} = 15 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + S_{n+1}}{a_n} = \frac{15}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{r(r+1)}{r-1} = \frac{15}{2} \text{에서 } 2r^2 + 2r = 15r - 15$$

$$2r^2 - 13r + 15 = 0, (2r-3)(r-5) = 0$$

$r > 2$ 에서  $r = 5$ 이므로  $a_2 = r = 5$

답 ④

### 27

그림  $R_n$ 에서 새로 색칠된 부분의 넓이를  $a_n$ 이라 하자.

그림  $R_1$ 에서  $\overline{G_1C_1} = \frac{3}{\tan \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$ 이므로 삼각형  $D_1G_1F_1$ 은 한 변의 길

이가  $3 - \sqrt{3}$ 인 정삼각형이고, 삼각형  $G_1B_1C_1$ 은 직각을 낀 두 변의 길

$$이가  $\sqrt{3}$ , 3인 직각삼각형이므로$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3 - \sqrt{3})^2 + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 = \frac{6\sqrt{3} - 9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3} - 9}{2}$$

그림  $R_{n+1}$ 에서  $\overline{AB_n} = b_n$ 으로 놓으면

$$\overline{AB_{n+1}} = \overline{C_{n+1}B_{n+1}} = b_{n+1}$$

$$\overline{B_{n+1}B_n} = \overline{C_{n+1}B_{n+1}} \times \tan \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} b_{n+1}$$

$$\overline{AB_n} = \overline{AB_{n+1}} + \overline{B_{n+1}B_n}$$

$$b_n = b_{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} b_{n+1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} b_{n+1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

따라서 그림  $R_n$ 에서 새로 색칠한 부분과 그림  $R_{n+1}$ 에서 새로 색칠한

$$부분의 넓이의 비는$$

$$1 : \left( \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \right)^2, \text{ 즉 } 1 : \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이  $a_1 = \frac{9\sqrt{3} - 9}{2}$ 이고 공비가  $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}$ 인

등비수열이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{\frac{9\sqrt{3} - 9}{2}}{1 - \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}} = \frac{9(\sqrt{3} - 1)}{3\sqrt{3} - 4}$$

$$= \frac{9(\sqrt{3} - 1)(3\sqrt{3} + 4)}{(3\sqrt{3} - 4)(3\sqrt{3} + 4)} = \frac{9(5 + \sqrt{3})}{11}$$

답 ②

### 28

$f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$ 는 상수이고,  $a \neq 0, b > 0$ )으로 놓자.

$$g'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$$= \{-ax^2 + (2a - b)x + b - c\}e^{-x}$$

조건 (가)에서  $g'(0) = 0$ 이므로

$$g'(0) = b - c = 0, b = c$$

조건 (나)에서 함수  $\ln|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 모든

실수  $x$ 에 대하여  $g(x) \neq 0$ , 즉  $f(x) \neq 0$ 이다.

이차방정식  $ax^2 + bx + b = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면  $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = b^2 - 4ab < 0, b(b - 4a) < 0$$

$$b > 0 \text{이므로 } a > 0 \text{이고 } 0 < b < 4a, \text{ 즉 } 0 < \frac{b}{a} < 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$g'(x) = 0$ 에서

$$-ax^2 + (2a - b)x = 0, x(ax - 2a + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2a - b}{a} = 2 - \frac{b}{a}$$

조건 (다)에서  $p, q$ 가 정수이므로  $\frac{b}{a}$ 의 값도 정수이어야 한다.

①에서  $\frac{b}{a}$ 의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

(i)  $\frac{b}{a}=1$ 일 때,  $2-\frac{b}{a}=1$

함수  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 극소이고,  $x=1$ 에서 극대이므로  
조건 (다)에서  $p=0, q=1$

$\frac{b}{a}=1$ 에서  $b=a$

즉,  $f(x)=a(x^2+x+1)$ 이므로

$f(0)=a, f(1)=3a, f(2)=7a$

따라서  $f(p)+4f(q)=f(0)+4f(1)=f(2)$ 를 만족시키지 않는다.

(ii)  $\frac{b}{a}=2$ 일 때, 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g'(x)=-ax^2e^{-x} \leq 0$ 이므로

함수  $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

(iii)  $\frac{b}{a}=3$ 일 때,  $2-\frac{b}{a}=-1$

함수  $g(x)$ 는  $x=-1$ 에서 극소이고,  $x=0$ 에서 극대이므로

조건 (다)에서  $p=-1, q=0$

$\frac{b}{a}=3$ 에서  $b=3a$

즉,  $f(x)=a(x^2+3x+3)$ 이므로

$f(-1)=a, f(0)=3a, f(2)=13a$

따라서  $f(p)+4f(q)=f(-1)+4f(0)=f(2)$ 를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서  $f(x)=a(x^2+3x+3)$ 이므로

$\frac{f(3)}{f(1)} = \frac{21a}{7a} = 3$

## 29

원  $C$ 의 중심을  $C$ 라 하고 반지름의 길이를  $r$ 라 하자.

$\angle COR = \frac{\theta}{2}$ 이므로  $\overline{OR} = \frac{r}{\tan \frac{\theta}{2}}$

$\overline{OM} = 1, \overline{MR} = r$ 이므로

$\frac{r}{\tan \frac{\theta}{2}} + r = 1, r = \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\theta}{2}}$

$\overline{OR} = \frac{1}{1 + \tan \frac{\theta}{2}}$

$\angle ROH = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 삼각형  $ORH$ 의 넓이는

$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OR} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times \overline{OR} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2} \overline{OR}^2 \sin \theta \cos \theta$

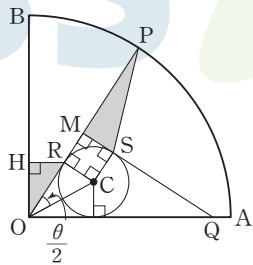
$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \overline{OR} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \tan \frac{\theta}{2}} = 1$ 이므로

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{\overline{OR}^2}{2} \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \cos \theta \right)$   
 $= \frac{1^2}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

$\overline{MS} = r, \overline{MP} = 1$ 이므로 삼각형  $MSP$ 의 넓이는

$g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{MS} \times \overline{MP} = \frac{1}{2} r$ 이므로

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{2\theta(1 + \tan \frac{\theta}{2})}$



답 ⑤

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{4(1 + \tan \frac{\theta}{2})} \right\}$$
  

$$= 1 \times \frac{1}{4(1+0)} = \frac{1}{4}$$

따라서

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta} - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

즉,  $a = \frac{1}{4}$ 이므로  $100a = 25$

답 25

## 30

$g(x) = \int_a^x f(t) dt$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  $g'(x) = f(x)$

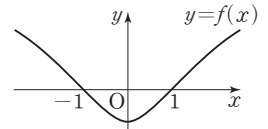
조건 (가)에서  $g'(1) = 0$ 이므로  $f(1) = \ln 2 - \ln(a^2 + 1) = 0$

$a^2 + 1 = 2$ 에서  $a = 1$  또는  $a = -1$

$f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln 2$ 에서  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

이므로 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗



이때  $f(-1) = 0, f(1) = 0$ 이므로  $g'(-1) = 0, g'(1) = 0$

(i)  $a = -1$ 일 때,

$g'(-1) = 0, g(-1) = 0$ 이므로

어떤 양의 실수  $a$ 에 대하여

$\int_{-1}^a g(t) dt = 0$ 이라 하면 방정식

$\int_{-1}^x g(t) dt = 0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은  $a-1$ 이고,  $a > 1$ 에

서  $a + (-1) > 0$ 이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii)  $a = 1$ 일 때,

$g'(1) = 0, g(1) = 0$ 이므로

어떤 음의 실수  $\beta$ 에 대하여

$\int_1^\beta g(t) dt = 0$ 이라 하면 방정식

$\int_1^x g(t) dt = 0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은  $\beta+1$ 이고,  $\beta < -1$

에서  $\beta+1 < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서  $a = 1$ 이므로  $x^2 + 1 = t$ 로 놓으면  $2x = \frac{dt}{dx}$

$x = 1$ 일 때  $t = 2, x = 2$ 일 때  $t = 5$ 이므로

$\int_1^2 xg'(x) dx = \int_1^2 xf(x) dx = \int_1^2 x \{ \ln(x^2 + 1) - \ln 2 \} dx$

$= \frac{1}{2} \int_2^5 (\ln t - \ln 2) dt = \frac{1}{2} [ t \ln t - t - t \ln 2 ]_2^5$

$= \frac{1}{2} \{ (5 \ln 5 - 5 - 5 \ln 2) - (2 \ln 2 - 2 - 2 \ln 2) \}$

$= \frac{1}{2} (5 \ln \frac{5}{2} - 3) = \frac{5}{2} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$

즉,  $p = \frac{5}{2}, q = \frac{3}{2}$ 이므로  $40pq = 40 \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = 150$

답 150