

수능완성



수학영역 | 수학 I·수학 II·기하

정답과 풀이

01

지수함수와 로그함수

정답

본문 6~15쪽

(필수 유형 ①) ①	01 ④	02 ③	03 ④
	04 5		
(필수 유형 ②) ①	05 ①	06 ④	07 16
	08 48		
(필수 유형 ③) 2	09 ①	10 ②	11 5
	12 ③		
(필수 유형 ④) ①	13 ①	14 ④	15 37
(필수 유형 ⑤) ②	16 ②	17 8	18 ⑤
(필수 유형 ⑥) ⑤	19 ③	20 ④	21 ③
(필수 유형 ⑦) ③	22 ③	23 ②	24 7
(필수 유형 ⑧) 15	25 4	26 ①	27 6
(필수 유형 ⑨) 192	28 ⑤	29 ①	30 22
(필수 유형 ⑩) ④	31 ①	32 ②	33 23

(필수 유형 ①)

$-n^2+9n-18=-(n^2-9n+18)=-(n-3)(n-6)$ 이므로
 $-n^2+9n-18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수는
 $-n^2+9n-18 < 0$ 일 때, 홀수 n 에 대하여 $\sqrt{-n^2+9n-18}$ 이고
 $-n^2+9n-18 > 0$ 일 때, 짝수 n 에 대하여 $-\sqrt{-n^2+9n-18}$ 이다.
 (i) $-n^2+9n-18 < 0$ 일 때
 $-(n-3)(n-6) < 0$ 에서 $(n-3)(n-6) > 0$ 이므로
 $n < 3$ 또는 $n > 6$
 즉, $2 \leq n < 3$ 또는 $6 < n \leq 11$ 을 만족시키는 홀수는 7, 9, 11이다.
 (ii) $-n^2+9n-18 > 0$ 일 때
 $-(n-3)(n-6) > 0$ 에서 $(n-3)(n-6) < 0$ 이므로 $3 < n < 6$
 즉, 이를 만족시키는 짝수는 4이다.
 (i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은
 $4+7+9+11=31$

답 ①

01

$(\sqrt[3]{5})^3=5, \sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{16}=\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[4]{2^4}=3 \times 2=6,$
 $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$ 이므로
 $(\sqrt[3]{5})^3+\sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{\sqrt{64}}=5+6-2=9$

답 ④

02

$a > 0, b > 0$ 일 때, 지수법칙에 의하여 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}$
 $a^3=\sqrt[4]{5}$ 이므로 $a^{12}=(a^3)^4=(\sqrt[4]{5})^4=5$
 $b^4=\sqrt[3]{3}$ 이므로 $b^{12}=(b^4)^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$
 따라서 $(ab)^{12}=a^{12}b^{12}=5 \times 3=15$

답 ③

03

m^2-4m-5 의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않으려면
 $m^2-4m-5 < 0$ 이어야 한다.
 $m^2-4m-5 < 0$ 에서 $(m+1)(m-5) < 0$ 이므로
 $-1 < m < 5$
 따라서 조건을 만족시키는 자연수 m 의 최댓값은 4이다.

답 ④

04

$x^2-65x+64=0$ 에서 $(x-1)(x-64)=0$
 $x=1$ 또는 $x=64$ 이므로 $A=\{1, 64\}$
 또한 $x^2-7x+10 < 0$ 에서 $(x-2)(x-5) < 0$
 $2 < x < 5$ 이므로 부등식 $x^2-7x+10 < 0$ 을 만족시키는 자연수 x 의 값은 3, 4이다. 즉, $B=\{3, 4\}$
 (i) $a=1, n=3$ 인 경우
 $x^3=1$ 에서 $x^3-1=0$
 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 $x=1$ 또는 $x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 이므로 1의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.
 (ii) $a=1, n=4$ 인 경우
 $x^4=1$ 에서 $x^4-1=0$
 $(x^2-1)(x^2+1)=0$
 $x=\pm 1$ 또는 $x=\pm i$ 이므로 1의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.
 (iii) $a=64, n=3$ 인 경우
 $x^3=64$ 에서 $x^3-64=0$
 $(x-4)(x^2+4x+16)=0$
 $x=4$ 또는 $x=-2 \pm 2\sqrt{3}i$ 이므로 64의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.
 (iv) $a=64, n=4$ 인 경우
 $x^4=64$ 에서 $x^4-64=0$
 $(x^2-8)(x^2+8)=0$
 $x=\pm 2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm 2\sqrt{2}i$ 이므로 64의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.
 (i)~(iv)에서 1은 1의 세제곱근이면서 동시에 1의 네제곱근이므로 집합 C의 원소 중에서 실수인 것의 개수는 $1+2+1+2-1=5$ 이다.

답 5

(필수 유형 ②)

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=3^{-\frac{1}{4}}$ 이므로
 $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}=3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$
 $=3^{-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}}$
 $=3^{-2}=\frac{1}{9}$

답 ①

05

$$(2-\sqrt{2})^{1+\sqrt{3}} \times (2-\sqrt{2})^{1-\sqrt{3}} + 2^{\frac{5}{2}} = (2-\sqrt{2})^{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})} + 4\sqrt{2}$$

$$= (2-\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2}$$

$$= 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2} = 6$$

답 ①

06

$$2^{\frac{4}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times (2 \times 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = (2^6 \times 3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^2}$$

따라서 $p=6, q=2$ 이므로
 $p+q=6+2=8$

답 ④

07

$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ 이므로 $f(f(n)) = (n^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}} = n^{\frac{9}{4}}$
 $n^{\frac{9}{4}}$ 의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면 n 은 1보다 큰 자연수 k 에 대하여 $n=k^4$ 의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n 의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 네제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로 $2^4=16$

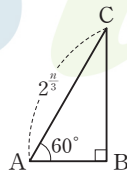
답 16

08

한 내각의 크기가 60° 이고 한 변의 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$ 인 직각삼각형의 세 꼭짓점을 A, B, C라 하면 직각삼각형 ABC는 다음과 같다.

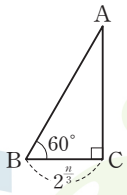
(i) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$ 인 변이 빗변인 직각삼각형일 때

$\angle A = 60^\circ, \overline{AC} = 2^{\frac{n}{3}}$ 이라 하면
 $\overline{AB} = 2^{\frac{n}{3}} \times \cos 60^\circ, \overline{BC} = 2^{\frac{n}{3}} \times \sin 60^\circ$
 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times (2^{\frac{n}{3}} \times \cos 60^\circ) \times (2^{\frac{n}{3}} \times \sin 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8} \times 2^{\frac{2n}{3}}$



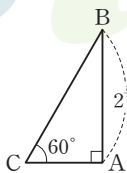
(ii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$ 인 변의 양 끝 각의 크기가 $60^\circ, 90^\circ$ 인 직각삼각형일 때

$\angle B = 60^\circ, \overline{BC} = 2^{\frac{n}{3}}$ 이라 하면
 $\overline{AC} = 2^{\frac{n}{3}} \times \tan 60^\circ$
 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2^{\frac{n}{3}} \times (2^{\frac{n}{3}} \times \tan 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^{\frac{2n}{3}}$



(iii) 그림과 같이 길이가 $2^{\frac{n}{3}}$ 인 변과 마주 보는 각의 크기가 60° 인 직각삼각형일 때

$\angle C = 60^\circ, \overline{AB} = 2^{\frac{n}{3}}$ 이라 하면
 $\overline{AC} \times \tan 60^\circ = 2^{\frac{n}{3}}$ 에서 $\overline{AC} = 2^{\frac{n}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$
 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2^{\frac{n}{3}} \times (2^{\frac{n}{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2^{\frac{2n}{3}}$



(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(n) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^{\frac{2n}{3}}$ 이므로

$$f(3) \times f(6) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^2\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^4\right) = 48$$

답 48

(필수 유형 ③)

$$\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24 = \log_4 \left(\frac{2}{3} \times 24\right) = \log_4 16 = 2$$

답 2

09

로그의 성질에 의하여
 $\log_2(\sqrt{17}+1) + \log_2(\sqrt{17}-1) - \log_2 8$
 $= \log_2\{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)\} - 3$
 $= \log_2 16 - 3 = 4 - 3 = 1$

답 ①

10

$\log_{(x-2)}\{-x^2 + (2a+3)x - a(a+3)\}$ 이 정의되기 위해서는 밑의 조건 $x-2 \neq 1, x-2 > 0$ 과 진수의 조건

$$-x^2 + (2a+3)x - a(a+3) > 0$$

을 모두 만족시켜야 한다.

밑의 조건에 의하여 $x \neq 3, x > 2$ ㉠

진수의 조건에 의하여

$$-x^2 + (2a+3)x - a(a+3) = -(x-a)\{x-(a+3)\} > 0$$

$(x-a)\{x-(a+3)\} < 0$ 에서

$$a < x < a+3$$

..... ㉡

a 가 자연수이므로 ㉡을 만족시키는 자연수 x 의 값은 $a+1, a+2$ 이다.

(i) $a+1=4$ 일 때

$a=3$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $3 < x < 6$ 이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x 의 값은 4, 5이다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+2=4$ 일 때

$a=2$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $2 < x < 5, x \neq 3$ 이므로 주어진 로그의 값이 정의되도록 하는 자연수 x 의 값은 4뿐이다.

즉, 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

답 ②

11

$a=2^m, b=3^{3m+1}$ 이므로

$$\log_2(\log_2 a) + \log_2(\log_3 b) = \log_2(\log_2 2^m) + \log_2(\log_3 3^{3m+1})$$

$$= \log_2 m + \log_2(3m+1)$$

$$= \log_2 m(3m+1)$$

이므로 $\log_2 m(3m+1) = 4$ 에서 $m(3m+1) = 16$

$3m+1$ 이 16의 양의 약수이어야 하므로 자연수 n 의 값은 1 또는 5이다.

$n=1$ 이면 $m=4$ 이고 $n=5$ 이면 $m=1$ 이므로 $m+n$ 의 최솟값은 5이다.

답 5

12

두 물체 A, B의 단면의 넓이를 각각 S_A, S_B 라 하고 두께를 각각 L_A, L_B 라 하자.

물체 A의 열전도율 P_A 는 다음을 만족시킨다.

$$\log_a P_A = k + \log_a \frac{S_A T}{L_A} \quad \cdots \textcircled{1}$$

물체 B는 물체 A에 비하여 단면의 넓이를 25% 확장시키고 두께를 50% 증가시켰으므로

$$S_B = \left(1 + \frac{25}{100}\right) S_A = \frac{5}{4} S_A, \quad L_B = \left(1 + \frac{50}{100}\right) L_A = \frac{3}{2} L_A$$

이고 물체 B의 열전도율 P_B 는 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \log_a P_B &= k + \log_a \frac{S_B T}{L_B} = k + \log_a \frac{\frac{5}{4} S_A T}{\frac{3}{2} L_A} \\ &= k + \log_a \frac{S_A T}{L_A} + \log_a \frac{5}{6} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \log_a P_B - \log_a P_A = \log_a \frac{5}{6}$$

$$\text{즉, } \log_a \frac{P_B}{P_A} = \log_a \frac{5}{6} \text{이므로 } \frac{P_B}{P_A} = \frac{5}{6}$$

답 ③

(필수 유형 4)

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = k \text{라 하면 } k > 0 \text{이고}$$

$$\log_a b = k, \log_b c = 2k, \log_c a = 4k$$

$$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1 \text{에서 } k \times 2k \times 4k = 8k^3 = 1$$

$$k^3 = \frac{1}{8}, k = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = k + 2k + 4k = 7k = \frac{7}{2}$$

답 ①

13

$$\begin{aligned} \log_3 6 \times \log_3 81 - \frac{1}{\log_3 2} &= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{\log 81}{\log 4} - \log_2 3 \\ &= \frac{\log 6}{\log 3} \times \frac{4 \log 3}{2 \log 2} - \log_2 3 \\ &= \frac{2 \log 6}{\log 2} - \log_2 3 \\ &= 2 \log_2 6 - \log_2 3 \\ &= \log_2 36 - \log_2 3 \\ &= \log_2 12 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } k = \log_2 12$$

$$\text{따라서 } 2^k = 12$$

답 ①

14

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2, \log_3 a), (\log_3 54, \log_3 a^2)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{\log_3 a^2 - \log_3 a}{\log_3 54 - \log_3 2} = \frac{\log_3 a}{\log_3 27} = \frac{\log_3 a}{3} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_3 a = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$a = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2 \times \frac{3}{2}} = 3^3 = 27$$

답 ④

15

$$\frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{\log_3 3^3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} \log_b b^5 = \frac{5}{3} \log_b b = \frac{5}{3}$$

$$\log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_a a = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$A = \left\{ \log_a b, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right\}, B = \left\{ 2, \frac{2}{3}, \log_2 a + \log_2 b \right\}$$

$A = B$ 이기 위해서는 $\log_a b = 2, \log_2 a + \log_2 b = \frac{5}{3}$ 이어야 한다.

$$\log_a b = 2 \text{에서 } \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = 2 \text{이므로}$$

$$\log_2 b = 2 \log_2 a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 a + \log_2 b = \frac{5}{3} \text{에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면 } \log_2 a = \frac{5}{9}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \log_2 b = \frac{10}{9}$$

$$\text{이때 } \log_a 2 + \log_a 2 = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_2 b} = \frac{9}{5} + \frac{9}{10} = \frac{27}{10}$$

따라서 $p = 10, q = 27$ 이므로

$$p + q = 10 + 27 = 37$$

답 37

(필수 유형 6)

곡선 $y = 2^{x+2} - 1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 곡선은

$$y = -2^{x+2} + 1 \text{이므로 } f(x) = -2^{x+2} + 1$$

곡선 $y = f(x)$ 와 y 축이 만나는 점의 좌표가 $(0, a)$ 이므로

$$a = -2^{0+2} + 1, a = -3$$

한편, 점근선은 직선 $y = 1$ 이므로 $b = 1$

$$\text{따라서 } a + b = (-3) + 1 = -2$$

답 ②

16

곡선 $y = 2^{x+2} - 3$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $y - 2 = 2^{(x+1)+2} - 3$, 즉 $y = 2^{x+3} - 1$ 이므로

$$f(x) = 2^{x+3} - 1$$

이때 점근선은 직선 $y = -1$ 이므로 $a = -1$

$$\text{따라서 } f(a) = f(-1) = 2^2 - 1 = 3 \text{이므로}$$

$$a + f(a) = -1 + 3 = 2$$

답 ②

17

두 점 B, C의 x 좌표를 각각

b, c ($0 < b < c$)라 하면

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2 \text{이므로}$$

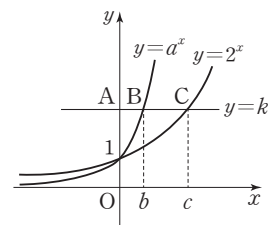
$$c = 3b \quad \cdots \textcircled{1}$$

두 점 B, C의 y 좌표는 서로 같으므로

$$a^b = 2^c \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$a^b = 2^{3b} = 8^b \quad \cdots \textcircled{3}$$

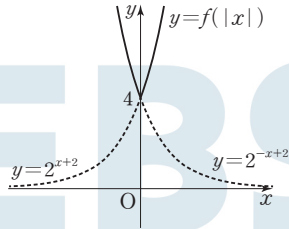


따라서 $a > 2, b > 0$ 이므로 ㉔에서 $a = 8$

답 8

18

ㄱ. $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로 $f(|x|) = f(x) = 2^{x+2}$ 이고
 $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로 $f(|x|) = f(-x) = 2^{-x+2}$ 이다.
 따라서 함수 $y = f(|x|)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y \geq 4\}$ 이다. (참)

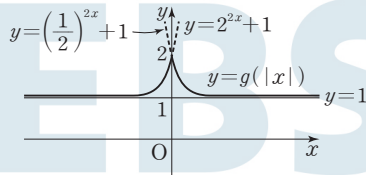
ㄴ. (i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$$g(|x|) = g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 1$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$g(|x|) = g(-x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} + 1 = 2^{2x} + 1$$

$g(0) = 2$ 이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y = g(|x|)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y = g(|x|)$ 의 최솟값은 2이므로 모든 실수 x 에 대하여 $g(|x|) \leq 2$ 이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 $y = f(|x|)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점은 점 $(0, 4)$ 이고, ㄴ에서 함수 $y = g(|x|)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점은 점 $(0, 2)$ 이므로 $g(0) = 2$

이때 두 함수 $y = f(|x|), y = g(|x|) + k$ 의 그래프가 y 축 위의 점에서 만나므로 함수 $y = g(|x|) + k$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나야 한다.

따라서 $4 = g(0) + k$ 에서 $k = 4 - g(0)$ 이므로 $k = 2$ 이다.

함수 $y = g(|x|)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y = 1$ 이고 함수 $y = g(|x|) + 2$ 의 그래프는 함수 $y = g(|x|)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y = 3$ 이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 5

(필수 유형 6)

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = (3^{-2})^x = 3^{-2x}$ 이므로 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$ 에서 $3^{-2x} < 3^{21-4x}$ 이다.

밑 3은 1보다 크므로 $-2x < 21 - 4x$ 에서

$$x < \frac{21}{2} = 10.5$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 값은 1, 2, 3, ..., 10이고 그 개수는 10이다.

답 5

19

$3^x = t$ 라 하면 $t > 0$ 이고 $9^x = t^2$ 이므로 방정식 $2 \times 9^x + 63 = (3^x + 6)^2$ 은 $2t^2 + 63 = (t + 6)^2, t^2 - 12t + 27 = 0, (t - 3)(t - 9) = 0$

$t = 3$ 또는 $t = 9$

따라서 $3^x = 3$ 에서 $x = 1$ 이고 $3^x = 9$ 에서 $x = 2$ 이므로 모든 실수 x 의 값의 합은

$$1 + 2 = 3$$

답 3

20

곡선 $y = 2^x$ 과 직선 $x = n$ 이 만나는 점 A_n 의 좌표는 $(n, 2^n)$

곡선 $y = (\sqrt{2})^x$ 과 직선 $x = n$ 이 만나는 점 B_n 의 좌표는 $(n, 2^{\frac{n}{2}})$

$$f(n) = \frac{1}{2} \times \overline{OP}_n \times \overline{A_n P}_n = \frac{1}{2} \times n \times 2^n = \frac{n}{2} \times 2^n$$

$$g(n) = \frac{1}{2} \times \overline{OP}_n \times \overline{B_n P}_n = \frac{1}{2} \times n \times 2^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \times 2^{\frac{n}{2}}$$

부등식 $f(n) - 4 \times g(n) \geq 16n$ 에서

$$\frac{n}{2} \times 2^n - 4 \times \frac{n}{2} \times 2^{\frac{n}{2}} \geq 16n, 2^n - 4 \times 2^{\frac{n}{2}} \geq 32$$

$2^{\frac{n}{2}} = t$ 라 하면 $t > 0$ 이고 $t^2 - 4t - 32 \geq 0$

$(t + 4)(t - 8) \geq 0$ 이므로 $t \geq 8$

즉, $2^{\frac{n}{2}} \geq 8 = 2^3$ 이므로 $\frac{n}{2} \geq 3, n \geq 6$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 4

21

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x+1} \leq 4^{x-3}$ 에서

$2^{x^2-4x-1} \leq 2^{2x-6}$ 이고 밑 2가 1보다 크므로

$$x^2 - 4x - 1 \leq 2x - 6$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0, (x - 1)(x - 5) \leq 0, 1 \leq x \leq 5$$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$a \in A$ 에 대하여

$$x = 3^a \times \left(\frac{1}{3}\right)^{6a-k} = 3^{a(a-6)+k}$$
이므로

$$a = 1 \text{ 일 때, } x = 3^{-5+k}$$

$$a = 2 \text{ 일 때, } x = 3^{-8+k}$$

$$a = 3 \text{ 일 때, } x = 3^{-9+k}$$

$$a = 4 \text{ 일 때, } x = 3^{-8+k}$$

$$a = 5 \text{ 일 때, } x = 3^{-5+k}$$

집합 $B = \{3^{-5+k}, 3^{-8+k}, 3^{-9+k}\}$ 이므로

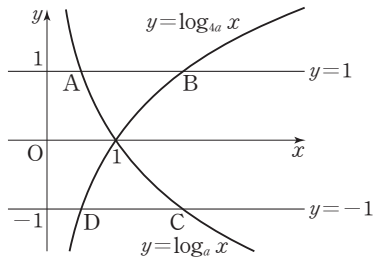
집합 B 의 모든 원소의 곱은

$$3^{-5+k} \times 3^{-8+k} \times 3^{-9+k} = 3^{-22+3k}$$

즉, $3^{-22+3k} = 3^2$ 에서 $-22 + 3k = 2$ 이므로 $k = 8$

답 3

필수 유형 ①



- ㄱ. A(a, 1), B(4a, 1)이므로 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 $(\frac{4a-4a}{1-4}, \frac{1-1}{1-4})$, 즉 (0, 1)이다. (참)
- ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 점 D, 점 B와 점 C는 x축에 대하여 대칭이므로 x좌표가 각각 같다. 한편, 점 D의 좌표는 $(\frac{1}{4a}, -1)$ 이므로 $a = \frac{1}{4a}$ 에서 $4a^2 = 1$ 이고 $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ (참)

ㄷ. 네 점의 좌표가 각각 A(a, 1), B(4a, 1), C($\frac{1}{a}$, -1),

D($\frac{1}{4a}$, -1)이므로 $\overline{AB} = 3a$, $\overline{CD} = \frac{3}{4a}$

$\overline{AB} < \overline{CD}$ 이면 $3a < \frac{3}{4a}$ 에서 $a^2 < \frac{1}{4}$ 이고, $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로

$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

22

곡선 $y = \log_3(ax+b)$ 가 점 (0, 2)를 지나므로 $2 = \log_3 b$ 에서 $b = 9$

곡선 $y = \log_3(ax+9)$ 의 점근선이 직선 $x = -\frac{9}{a}$ 이므로

$-\frac{9}{a} = -3$ 에서 $a = 3$

따라서 주어진 곡선은 $y = \log_3(3x+9)$ 이고 이 곡선이 점 (2, k)를 지나므로

$k = \log_3(3 \times 2 + 9) = \log_3 15 = \log_3(3 \times 5) = 1 + \log_3 5$

답 ③

23

곡선 $y = \log_a x$ 와 직선 $x = n$ 이 만나는 점의 x좌표가 n이므로 점 P_n의 좌표는 (n, log_a n)이고 점 P_{n+1}의 좌표는 (n+1, log_a (n+1))이다. 주어진 직사각형은 선분 P_nP_{n+1}을 대각선으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축과 평행하므로 그 넓이 f(n)은

$$f(n) = \{(n+1) - n\} \times \{\log_a(n+1) - \log_a n\}$$

$$= \log_a(n+1) - \log_a n = \log_a \frac{n+1}{n}$$

따라서

$f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$

$= \log_a \frac{3}{2} + \log_a \frac{4}{3} + \log_a \frac{5}{4} + \log_a \frac{6}{5} = \log_a \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5}\right)$

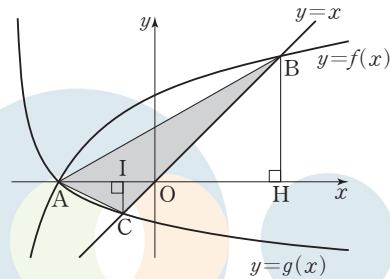
$= \log_a 3 = 3$

이므로 $a^3 = 3$ 에서 $a = \sqrt[3]{3}$

답 ②

24

함수 $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$ 의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 (-3, 0)이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (-3, 0)을 지난다. 즉, $0 = \log_a(-3-m)$ 에서 $m = -4$ 이므로 $f(x) = \log_a(x+4)$



점 B는 직선 $y = x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표를 (k, k) (k > 0)이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 C(-1, -1)에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{CI} = 1$ 이고 $\overline{BH} = k$ 한편, 삼각형 ABC의 넓이는 원점 O에 대하여 두 삼각형 OAC와 OAB의 넓이의 합이므로

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{CI} + \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times k = \frac{3}{2}(1+k)$$

즉, $\frac{3}{2}(1+k) = \frac{15}{2}$ 에서 $k = 4$

점 B가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $4 = \log_a(4+4)$ 에서 $a^4 = 8$

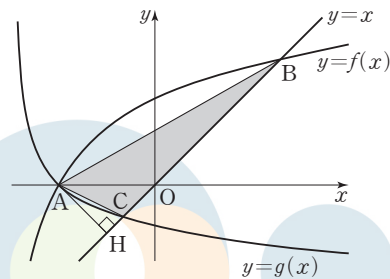
$a > 1$ 이므로 $a = 2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p = 4$, $q = 3$ 이므로 $p + q = 4 + 3 = 7$

답 7

다른 풀이

함수 $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$ 의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 (-3, 0)이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (-3, 0)을 지난다. 즉, $0 = \log_a(-3-m)$ 에서 $m = -4$ 이므로 $f(x) = \log_a(x+4)$



한편, 점 A(-3, 0)에서 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-3-0|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

또한 점 B의 좌표를 (k, k)라 하면 $k > 0$ 이고 C(-1, -1)이므로

$\overline{BC} = \sqrt{2(k+1)^2} = \sqrt{2}(k+1)$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}(k+1) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2}$ 에서 $k = 4$

점 B(4, 4)가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $4 = \log_a(4+4)$ 에서 $a^4 = 8$

$a > 1$ 이므로 $a = 2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p = 4$, $q = 3$ 이므로 $p + q = 4 + 3 = 7$

필수 유형 ⑧

로그의 진수의 조건에 의하여 $f(x) > 0, x > 1$
 $f(x) > 0$ 에서 $0 < x < 7$ 이고, $x > 1$ 이므로 $1 < x < 7$
 $\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0$ 에서
 $\log_3 f(x) - \log_3(x-1) \leq 0$
 $\log_3 f(x) \leq \log_3(x-1)$
 $f(x) \leq x-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $1 < x < 7$ 에서 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $4 \leq x < 7$
 따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값은 4, 5, 6이고 그 합은
 $4+5+6=15$

답 15

25

로그의 진수의 조건에 의하여 $x > \frac{1}{3}, x > 3$ 에서 $x > 3$
 $\log_4(3x-1) + \log_4(x-3) = \log_4 11$ 에서
 $\log_4(3x-1)(x-3) = \log_4 11$ 이므로 $(3x-1)(x-3) = 11$
 $3x^2 - 10x - 8 = 0, (3x+2)(x-4) = 0$
 따라서 $x = -\frac{2}{3}$ 또는 $x = 4$
 $x > 3$ 이므로 구하는 실수 x 의 값은 4이다.

답 4

26

$\log_3 \frac{x}{3} \times \log_3 \frac{x}{9} = (\log_3 x - \log_3 3)(\log_3 x - \log_3 9)$
 $= (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 2)$
 $\log_3 x = t$ 라 하면
 $(t-1)(t-2) < 6$ 에서 $t^2 - 3t - 4 < 0$
 $(t+1)(t-4) < 0$ 이므로 $-1 < t < 4$
 즉, $-1 < \log_3 x < 4, \frac{1}{3} < x < 81$
 따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 최댓값은 80이다.

답 ①

27

사각형 ABDC는 두 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴이다.
 $\overline{AB} = \log_4 n - \log_{\frac{1}{2}} n = \frac{1}{2} \log_2 n + \log_2 n = \frac{3}{2} \log_2 n$
 $\overline{CD} = \log_4 m - \log_{\frac{1}{2}} m = \frac{1}{2} \log_2 m + \log_2 m = \frac{3}{2} \log_2 m$
 사다리꼴 ABDC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} \log_2 m + \frac{3}{2} \log_2 n \right) \times (m-n)$ 이므로
 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} \log_2 m + \frac{3}{2} \log_2 n \right) \times (m-n) = \frac{9}{2}$
 $\frac{3}{4} (m-n) \log_2 mn = \frac{9}{2}$
 $\log_2 mn = \frac{6}{m-n}$
 $mn = 2^{\frac{6}{m-n}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

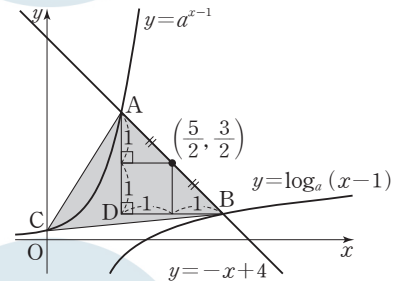
이때 m, n 이 2 이상의 자연수이고 $m > n$ 이므로 $m-n$ 은 자연수이다.
 mn 은 자연수이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키기 위해서는 $m-n$ 이 6의 양의 약수
 이어야 한다.

- (i) $m-n=1$ 일 때, $m=n+1$ 이고
 $mn=64$ 에서 $n(n+1)=64, n^2+n-64=0$
 이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.
 - (ii) $m-n=2$ 일 때, $m=n+2$ 이고
 $mn=8$ 에서 $n(n+2)=8, n^2+2n-8=0, (n+4)(n-2)=0$
 n 은 2 이상의 자연수이므로 $n=2$ 이고 $m=4$
 - (iii) $m-n=3$ 일 때, $m=n+3$ 이고
 $mn=4$ 에서 $n(n+3)=4, n^2+3n-4=0, (n+4)(n-1)=0$
 이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.
 - (iv) $m-n=6$ 일 때, $m=n+6$ 이고
 $mn=2$ 에서 $n(n+6)=2, n^2+6n-2=0$
 이때 이를 만족시키는 2 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.
- (i)~(iv)에 의하여 $m=4, n=2$ 이므로
 $m+n=4+2=6$

답 6

필수 유형 ⑨

두 곡선 $y=a^{x-1}, y=\log_a(x-1)$ 은 두 곡선 $y=a^x, y=\log_a x$ 를 x 축
 의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 것이다. 두 곡선 $y=a^x, y=\log_a x$
 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}, y=\log_a(x-1)$
 의 방향으로 각각 1만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^{x-1}, y=\log_a(x-1)$
 은 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이다.
 따라서 두 점 A, B는 두 직선 $y=x-1$ 과 $y=-x+4$ 의 교점인 점
 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 에 대하여 대칭이다.



$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로 그림의 직각이등변삼각형 ADB에서
 $A(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), B(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ 임을 알 수 있다.
 함수 $y=a^{x-1}$ 의 그래프가 점 $A(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 를 지나므로 $a^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}, a = \frac{25}{4}$
 따라서 점 C의 좌표는 $(0, \frac{4}{25})$ 이다.
 선분 AB를 밑변으로 할 때, 점 C와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|0 + \frac{4}{25} - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{96}{25\sqrt{2}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$
 이므로 삼각형 ABC의 넓이 S 는 $S = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} = \frac{96}{25}$
 따라서 $50 \times S = 50 \times \frac{96}{25} = 192$

답 192

28

함수 $f(x) = 2^{x-1} + a$ 의 역함수는 $y = 2^{x-1} + a$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2^{y-1} + a$ 이고

$$y = \log_2(x - a) + 1 \text{ 이므로 } a = 2$$

한편, 함수 $g(x) = \log_2(x - 2) + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 $g(x - m) = \log_2(x - m - 2) + 1$ 이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 $x = m + 2$ 이므로 $m + 2 = 5$ 에서 $m = 3$

$$\text{따라서 } a + m = 2 + 3 = 5$$

답 ⑤

29

곡선 $y = \log_2(x - 1) - 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면 곡선 $y = \log_2 x$ 가 되고, 점 $(5, 1)$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면 점 $(4, 2)$ 가 되며 이 점은 직선 l 위의 점이다.

곡선 $y = \log_2 x$ 와 곡선 $y = 2^x$ 은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 직선 l 과 곡선 $y = 2^x$ 이 만나는 점의 좌표는 $(2, 4)$ 이다.

$$\text{따라서 } a = 2, b = 4 \text{ 이므로 } \frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

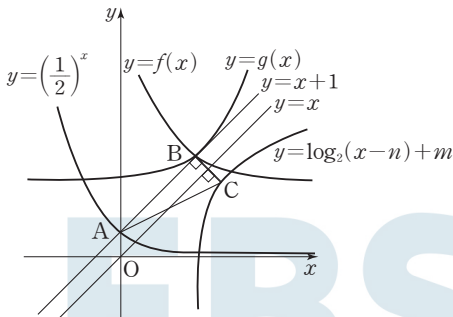
답 ①

30

점 A의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 점 B의 좌표는 $(m, 1 + n)$ 이다.

점 B는 직선 $y = x + 1$ 위의 점이므로 $1 + n = m + 1$ 에서 $m = n$ 이다.

함수 $y = 2^x$ 의 그래프도 y 축과 점 A에서 만나므로 $g(x) = 2^{x-m} + n$ 이라 하면 함수 $y = g(x)$ 의 그래프도 점 B $(m, 1 + n)$ 을 지난다. 또한 함수 $y = g(x)$ 의 역함수가 $y = \log_2(x - n) + m$ 이고 기울기가 -1 인 직선이 두 함수 $y = g(x)$, $y = \log_2(x - n) + m$ 의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m, m + 1)$, $(m + 1, m)$ 이므로 $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1 이므로 삼각형 ABC에서 $\angle B = 90^\circ$ 이다.

$m > 0$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}m \times \sqrt{2} = m = 6$$

따라서 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} + 6$ 이므로

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + 6 = 16 + 6 = 22$$

답 22

(필수 유형 10)

함수 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x + k)$ 는 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작으므로

$x = 0$ 에서 최댓값을 갖고 $x = 12$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$f(0) = 2 \log_{\frac{1}{2}} k = -4 \text{ 에서 } \log_{\frac{1}{2}} k = -2 \text{ 이므로 } k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

한편, $m = f(12) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(12 + 4) = -2 \log_2 16 = -8$

$$\text{따라서 } k + m = 4 + (-8) = -4$$

답 ④

31

함수 $g(x)$ 는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 실수 전체의 집합에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$g(f(x)) = 2^{x^2 - 2x + 3} = 2^{(x-1)^2 + 2} \text{ 이고 } (x-1)^2 + 2 \geq 2 \text{ 이므로 } 2^{(x-1)^2 + 2} \geq 2^2$$

따라서 함수 $y = (g \circ f)(x)$ 는 $x = 1$ 일 때 최솟값 $2^2 = 4$ 를 갖는다.

답 ①

32

$a > 1$ 이므로 두 함수 $y = 2^{x+2}$, $y = \log_a(x + 2)$ 는 모두 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$-1 \leq x_1 < x_2$ 이면 $2^{x_1+2} < 2^{x_2+2}$, $\log_a(x_1 + 2) < \log_a(x_2 + 2)$ 이므로 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다. 즉, 함수 $f(x)$ 도 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값을 갖고, $x = 2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$f(-1) = 2^1 + \log_a 1 = 2, f(2) = 2^4 + \log_a 4 = 16 + \log_a 4$$

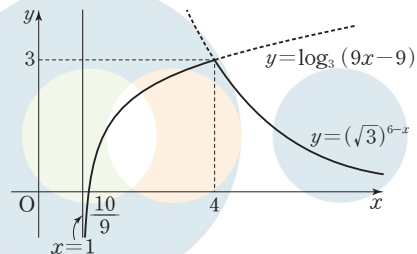
$$\text{이고 } 2 + (16 + \log_a 4) = 19 \text{ 에서 } \log_a 4 = 1$$

따라서 $a = 4$

답 ②

33

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 일 때 최댓값 3을 가지므로 $t \leq x \leq t + 2$ 에 $x = 4$ 가 포함되면 최댓값은 3이다. 즉, $t \leq 4 \leq t + 2$ 에서 $2 \leq t \leq 4$ 이고 이를 만족시키는 자연수 t 의 값은 2, 3, 4로 그 개수는 3이다. 즉, $a = 3$

$s \leq x \leq s + 1$ 에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $s > 1$, $s + 1 < 4$ 일 때, $1 < s < 3$ 이고 함수 $f(x)$ 는 $s \leq x \leq s + 1$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이므로 $x = s$ 일 때 최솟값이다.

$$f(s) = \log_3(9s-9) = 1 \text{에서 } 9s-9=3, s=\frac{4}{3}$$

이는 $1 < s < 3$ 을 만족시킨다.

(ii) $1 < s < 4, s+1 \geq 4$ 일 때, $3 \leq s < 4$ 이고 $f(3) = \log_3 18 > \log_3 3 = 1$
 $f(4) = (\sqrt{3})^2 = 3 > 1$ 이므로 $s \leq x \leq s+1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 1보다 크다.

(iii) $s \geq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $s \leq x \leq s+1$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이므로 $x=s+1$ 일 때 최소이다.

즉, $f(s+1) = (\sqrt{3})^{6-(s+1)} = 1$ 에서 $5-s=0, s=5$

이는 $s \geq 4$ 를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $b = \frac{4}{3} \times 5 = \frac{20}{3}$

따라서 $a+3b = 3 + 3 \times \frac{20}{3} = 23$

답 23

02 삼각함수

정답

본문 18~25쪽

(필수 유형 1) ③	01 ②	02 ④	03 11
(필수 유형 2) ④	04 ⑤	05 ⑤	06 ①
	07 ⑤		
(필수 유형 3) ③	08 24	09 ⑤	
(필수 유형 4) ⑤	10 ①	11 ③	12 ④
(필수 유형 5) ③	13 ④	14 ③	15 64
(필수 유형 6) ②	16 ①	17 ③	18 ②
	19 185		
(필수 유형 7) 21	20 ④	21 ②	22 39
(필수 유형 8) ①	23 9	24 135	

(필수 유형 1)

부채꼴의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)이라 하면

이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{5}{9}\pi$ 이고 호의 길이는 $\frac{10}{3}\pi$ 이므로

$$r \times \frac{5}{9}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

$$r = 6$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5}{9}\pi = 10\pi$$

답 ③

01

중심각과 원주각의 크기 사이의 관계에 의하여

$$\angle AOP = 2\angle ABP = \frac{\pi}{6},$$

$$\angle BOP = 2\angle BAP = \frac{\pi}{4}$$

이므로

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOP + \angle BOP \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)이라 하면

부채꼴 OAB의 넓이가 30π 이므로

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{5}{12}\pi = 30\pi$$

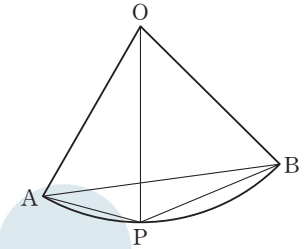
$$r^2 = 144$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 12$$

따라서 호 AB의 길이는

$$12 \times \frac{5}{12}\pi = 5\pi$$

답 ②



02

선분 AB의 중점을 O라 하면

$$\overline{OA} = \overline{OB} = 3$$

$\angle POB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)라 하면 호 BP의

길이가 π 이므로

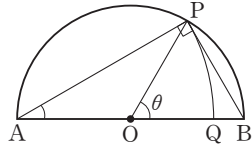
$$\pi = 3 \times \theta, \theta = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 ABP에서 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, $\angle PAB = \frac{1}{2} \angle POB = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{AP} = \overline{AB} \times \cos \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

따라서 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는

$$3\sqrt{3} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$



답 ④

03

부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 $\frac{4}{25}\pi$ 이고 호의 길이는 $\frac{8}{5}\pi$ 이므로

$$\overline{OA} \times \frac{4}{25}\pi = \frac{8}{5}\pi, \overline{OA} = 10$$

부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{4}{25}\pi = 8\pi$

한편, 선분 OB를 3:2로 내분하는 점이 C이므로

$$\overline{OC} = \frac{3}{5} \times 10 = 6$$

부채꼴 OCD에서 $\angle COD = \theta$ 라 하면 부채꼴 OCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 18\theta$$

부채꼴 OAB의 넓이와 부채꼴 OCD의 넓이가 같으므로

$$8\pi = 18\theta \text{에서 } \theta = \frac{4}{9}\pi$$

부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는

$$6 \times \frac{4}{9}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

따라서 $p=3$, $q=8$ 이므로

$$p+q=3+8=11$$

답 11

(필수 유형 ②)

$\cos^2 \theta = \frac{4}{9}$ 이고 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 일 때 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{2}{3}$$

한편, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{따라서 } \sin^2 \theta + \cos \theta = \frac{5}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9}$$

답 ④

04

$\sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ 이고 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 일 때 $\cos \theta > 0$ 이므로 $\cos \theta = \frac{3}{4}$

$$\text{따라서 } \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{6}{7}$$

답 ⑤

05

$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -4$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -4, \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -4$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -4, \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

한편, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 } \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

답 ⑤

06

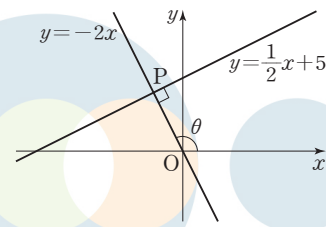
직선 OP의 기울기를 m 이라 하면 직선 $y = \frac{1}{2}x + 5$ 와 직선 OP가 서로 수직이므로

$$m \times \frac{1}{2} = -1, m = -2$$

직선 $y = \frac{1}{2}x + 5$ 와 직선 $y = -2x$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}x + 5 = -2x \text{에서 } x = -2$$

이때 $y = -2 \times (-2) = 4$ 이므로 점 P의 좌표는 $(-2, 4)$ 이다.



$$\overline{OP} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta \times \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

답 ①

07

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP = \alpha$ 라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π 이므로

$$6\alpha = 4\pi, \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

이때 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

(i) $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

이때 $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

이때 $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta = \frac{4}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

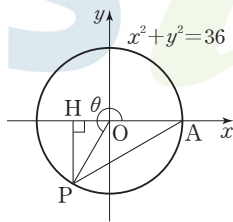
$$\overline{OH} = 3, \overline{PH} = 3\sqrt{3}$$

이므로 점 P의 좌표는 $(-3, -3\sqrt{3})$ 이다.

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\tan \theta = \frac{-3\sqrt{3}}{-3} = \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta + \tan^2 \theta = -\frac{1}{2} + (\sqrt{3})^2 = \frac{5}{2}$$



답 ⑤

다른 풀이

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP = \alpha$ 라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π 이므로

$$6\alpha = 4\pi, \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

이때 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

(i) $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

이때 $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

이때 $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta = \frac{4}{3}\pi$

$$\cos \theta = \cos \frac{4}{3}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \tan \frac{4}{3}\pi = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \cos \theta + \tan^2 \theta = -\frac{1}{2} + (\sqrt{3})^2 = \frac{5}{2}$$

필수 유형 ⑧

함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$

점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다고 하면

$$A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right) \text{ 이므로 } \overline{AB} = \frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

삼각형 OAB의 넓이가 5이므로 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{b} \times a = 5, \frac{a}{b} = 5$

$$a = 5b \quad \dots \text{ ㉠}$$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{\frac{1}{2b}} \times \frac{a}{\frac{5}{2b}} = 2ab \times \frac{2ab}{5} = \frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4}$$

$$a^2b^2 = \frac{25}{16}$$

$$ab > 0 \text{ 이므로 } ab = \frac{5}{4} \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면 } 5b^2 = \frac{5}{4}, b^2 = \frac{1}{4}$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ 을 ㉡에 대입하면 } a = \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

답 ③

08

함수 $f(x) = -a \cos \frac{\pi x}{b}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = 2b$ 이므로

$A\left(\frac{b}{2}, 0\right), B\left(\frac{3b}{2}, 0\right)$ 이고,

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x = b$ 일 때,

최댓값 $f(b) = a$ 를 가지므로 $c = b$ 이고

$C(b, a), D(0, -a)$ 이다.

한편, 직선 AC의 기울기는 $\frac{a}{b - \frac{b}{2}} = \frac{2a}{b}$

이고, 직선 BC의 기울기는 $\frac{a}{b - \frac{3b}{2}} = -\frac{2a}{b}$ 이다.

조건 (가)에 의하여

$$\frac{2a}{b} \times \left(-\frac{2a}{b}\right) = -16, \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 4$$

$$\frac{a}{b} > 0 \text{ 이므로 } \frac{a}{b} = 2$$

$$a = 2b \quad \dots \text{ ㉠}$$

조건 (나)에서

(삼각형 BCD의 넓이)

= (삼각형 ABC의 넓이) + (삼각형 ADB의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times b \times a + \frac{1}{2} \times b \times a$$

$$= ab = 72 \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면 } 2b^2 = 72, b^2 = 36$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = 6$$

$$b = 6 \text{ 을 ㉠에 대입하면 } a = 12$$

한편, $c = b = 6$

$$\text{따라서 } a + b + c = 12 + 6 + 6 = 24$$

답 24

09

함수 $y = f(x)$ 의 주기가 2이므로 $\frac{\pi}{b} = 2, \text{ 즉 } b = \frac{\pi}{2}$

$\overline{OA} = 2$ 이므로 점 A의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라

하면 $\angle BAO = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{AH} = \overline{BH} = k, \overline{OH} = 2 - k$$

직각삼각형 BOH에서

$$\tan \theta = \tan(\angle BOH) = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}} = \frac{k}{2-k} = 3, k = \frac{3}{2}$$

점 B의 좌표가 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 B를 지나므로

$$f(\frac{1}{2}) = a \tan(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}) = a \tan \frac{\pi}{4} = a = \frac{3}{2}$$

이때 점 C의 좌표는 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ 이고 $f(x) = \frac{3}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$ 이다.

$$f(\frac{k}{3}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{OC}^2 = (\frac{5}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{17}{2}$$

$$\text{따라서 } f(\frac{k}{3}) + \overline{OC}^2 = \frac{3}{2} + \frac{17}{2} = 10$$

답 ⑤

필수 유형 ④

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta \text{이므로 } \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{에서 } \sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\tan \theta < 0, \sin \theta < 0$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이고, $\cos \theta > 0$ 이다.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - (-\frac{\sqrt{5}}{5})^2 = \frac{4}{5} \text{에서}$$

$$\cos \theta > 0 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ⑤

10

$$\sin(-\frac{5}{6}\pi) = -\sin \frac{5}{6}\pi = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{8}{3}\pi = \cos(2\pi + \frac{2}{3}\pi) = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \sin(-\frac{5}{6}\pi) + \cos \frac{8}{3}\pi = -\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = -1$$

답 ①

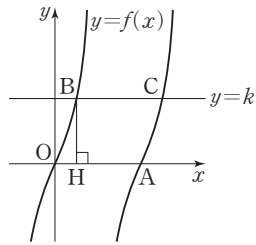
11

$$\cos \theta = -\frac{1}{3} \text{이므로 } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{일 때, } \sin \theta > 0 \text{이므로 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta = -\frac{1}{3}, \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{1}{3}$$



따라서

$$\begin{aligned} & \sin(\pi + \theta) \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \cos(\pi - \theta) \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-\frac{2\sqrt{2}}{3}) + (-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

답 ③

12

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi + \theta) = \cos[\pi + (\frac{\pi}{2} + \theta)] = -\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin \theta$$

$$\text{이므로 } \sin(2\pi - \theta) + \cos(\pi + \theta) + 2 \cos(\frac{3}{2}\pi + \theta) = 3 \sin \theta \text{에서}$$

$$-\sin \theta - \cos \theta + 2 \sin \theta = 3 \sin \theta$$

$$\cos \theta = -2 \sin \theta \quad \dots \text{㉠}$$

$$\text{한편, } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로 } \sin^2 \theta + (-2 \sin \theta)^2 = 1, \sin^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{에서 } \sin \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 ④

필수 유형 ⑤

함수 $f(x) = a - \sqrt{3} \tan 2x$ 의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-\frac{\pi}{6}, b]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4} \text{이다.}$$

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $[-\frac{\pi}{6}, b]$ 에서 x 의 값이 증가할

때, y 의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 7을 갖는다.

$$\text{즉, } f(-\frac{\pi}{6}) = a - \sqrt{3} \tan(-\frac{\pi}{3}) = 7 \text{에서}$$

$$a + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} = 7, a + 3 = 7, a = 4$$

함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 최솟값 3을 가지므로

$$f(b) = 4 - \sqrt{3} \tan 2b = 3 \text{에서 } \tan 2b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{이때 } -\frac{\pi}{3} < 2b < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } 2b = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

답 ③

13

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + b = -1 \quad \dots \text{㉠}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{6} + b = \frac{a}{2} + b \text{이므로}$$

$$\frac{a}{2} + b = 5 \quad \dots \text{㉔}$$

$$\text{㉔} - \text{㉓} \text{을 하면 } \frac{3}{2}a = 6, a = 4$$

$$a = 4 \text{를 } \text{㉓} \text{에 대입하면 } -4 + b = -1, b = 3$$

$$\text{따라서 } a + b = 4 + 3 = 7$$

답 ④

14

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin(\pi + x) \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + 3 \\ &= -2 \sin^2 x - \cos x + 3 = -2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 3 \\ &= 2 \cos^2 x - \cos x + 1 = 2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $\cos x = -1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 최댓값을 갖고 $\cos x = \frac{1}{4}$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.

$$\text{따라서 } M = 2\left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = 4, m = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \text{이므로}$$

$$M + m = 4 + \frac{7}{8} = \frac{39}{8}$$

답 ③

15

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = 3$ 이다.

함수 $g(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{a} = a$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 점근선은

직선 $x = na + \frac{a}{2}$ (n 은 정수)이다.

$$\text{조건 (가)에서 } na + \frac{a}{2} = 3 \text{이므로 } a = \frac{6}{2n+1}$$

a 는 자연수이므로 $2n+1$ 은 6의 양의 약수이어야 한다.

$$2n+1=1 \text{ 또는 } 2n+1=2 \text{ 또는 } 2n+1=3 \text{ 또는 } 2n+1=6$$

$$\text{즉, } n=0 \text{ 또는 } n=\frac{1}{2} \text{ 또는 } n=1 \text{ 또는 } n=\frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$(i) n=0 \text{일 때, } a=6 \text{이므로 } g(x) = \tan \frac{\pi x}{6}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{9} < \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.}$$

$$(ii) n=1 \text{일 때, } a=2 \text{이므로 } g(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1 \text{이므로 조건 (나)를 만족시킨다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } g(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$$

함수 $y = f(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid x > 3 \text{인 실수}\}$ 이고 밑 4가 1보다 크므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$\frac{13}{4} \leq x \leq 19 \text{에서 } f\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{1}{3} \log_4 \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}, f(19) = \frac{1}{3} \log_4 16 = \frac{2}{3}$$

$$\text{이므로 } -\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$$

또 $-1 < x < 1$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{이므로 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq (g \circ f)(x) \leq \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } M = \sqrt{3}, m = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$12(M-m)^2 = 12 \times \left\{ \sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\}^2 = 12 \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 64$$

답 64

필수 유형 ⑥

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \text{이므로 } 4 \sin^2 x - 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0 \text{에서}$$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

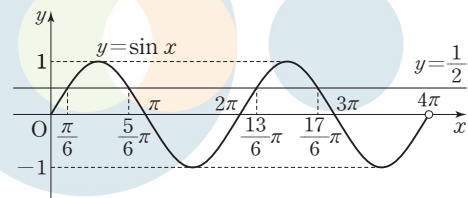
$$(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 3) = 0 \quad \dots \text{㉑}$$

$0 \leq x < 4\pi$ 일 때, $2 \sin x + 3 > 0$ 이므로 ㉑에서

$$2 \sin x - 1 = 0, \sin x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 4\pi$ 일 때, 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{13\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{17\pi}{6}$$



따라서 방정식의 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} = 6\pi$$

답 ②

16

$$\text{부등식 } (2 \sin x - 1)(\sqrt{2} \cos x - 1) > 0 \text{에서}$$

$$2 \sin x - 1 > 0, \sqrt{2} \cos x - 1 > 0 \text{ 또는}$$

$$2 \sin x - 1 < 0, \sqrt{2} \cos x - 1 < 0$$

$$(i) 2 \sin x - 1 > 0, \sqrt{2} \cos x - 1 > 0 \text{일 때}$$

$$\text{부등식 } 2 \sin x - 1 > 0 \text{에서 } \sin x > \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \quad \dots \text{㉑}$$

$$\text{부등식 } \sqrt{2} \cos x - 1 > 0 \text{에서 } \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi \quad \dots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$$

$$(ii) 2 \sin x - 1 < 0, \sqrt{2} \cos x - 1 < 0 \text{일 때}$$

$$\text{부등식 } 2 \sin x - 1 < 0 \text{에서 } \sin x < \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

$$\text{부등식 } \sqrt{2} \cos x - 1 < 0 \text{에서 } \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

$$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕} \text{에서 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{5}{6}\pi, \delta = \frac{7}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sin(\delta - \beta) + \cos(\gamma - \alpha) &= \sin\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\frac{3}{2}\pi + \cos\frac{2}{3}\pi \\ &= -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ①

17

$f(x) = |8 \cos x + 2|$ 라 하면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

방정식 $|8 \cos x + 2| = k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

즉, $k=6$

방정식 $|8 \cos x + 2| = 6$ 에서

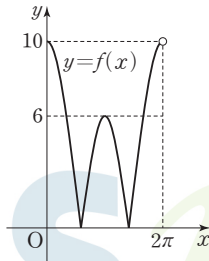
$$8 \cos x + 2 = 6 \text{ 또는 } 8 \cos x + 2 = -6$$

$$(i) 8 \cos x + 2 = 6 \text{일 때, } \cos x = \frac{1}{2} \text{이므로 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$(ii) 8 \cos x + 2 = -6 \text{일 때, } \cos x = -1 \text{이므로 } x = \pi$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \pi, \gamma = \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } \frac{k(\gamma - \alpha)}{\beta} = \frac{6 \times \left(\frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi} = 8$$



답 ③

18

이차방정식 $x^2 + (4 \sin \theta)x - 2 + 10 \cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 이차방정식 $x^2 + (4 \sin \theta)x - 2 + 10 \cos \theta = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2 \sin \theta)^2 - (-2 + 10 \cos \theta) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 4(1 - \cos^2 \theta) + 2 - 10 \cos \theta \geq 0 \text{에서}$$

$$2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 3 \leq 0$$

$$(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 3) \leq 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{이므로 } \cos \theta + 3 > 0$$

$$\text{즉, } 2 \cos \theta - 1 \leq 0 \text{에서 } \cos \theta \leq \frac{1}{2} \text{이므로 } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5}{3}\pi \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

답 ②

19

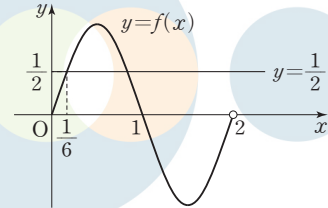
함수 $y = \sin(n\pi x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{n\pi} = \frac{2}{n}$

(i) $0 \leq x < 2$, 즉 $n=1$ 일 때, $f(x) = \sin(\pi x)$ 이다.

$$\text{방정식 } 2f(x) - 1 = 0 \text{에서 } \sin(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2$ 에서 방정식 $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$ 의 실근 중 가장 작은 것이 α 이

$$\text{므로 } \alpha = \frac{1}{6}$$

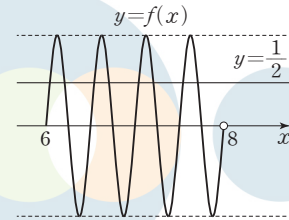


(ii) $6 \leq x < 8$, 즉 $n=4$ 일 때, $f(x) = \sin(4\pi x)$ 이다.

$$\text{방정식 } 2f(x) - 1 = 0 \text{에서 } \sin(4\pi x) = \frac{1}{2}$$

$6 \leq x < 8$ 에서 방정식 $\sin(4\pi x) = \frac{1}{2}$ 의 실근 중 가장 큰 것이 β 이

$$\text{므로 } \beta = 6 + \frac{3}{2} + \frac{5}{24} = \frac{185}{24}$$



$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{4\beta}{\alpha} = \frac{4 \times \frac{185}{24}}{\frac{1}{6}} = 185$$

답 185

(필수 유형 ①)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \times 15 = 30$$

$$\text{따라서 } \overline{AC} = 30 \sin B = 30 \times \frac{7}{10} = 21$$

답 21

20

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

이때 $0 < A < \pi$ 이고 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \frac{3}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 16이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 16$$

따라서 $\overline{BC} = 2 \times 16 \times \sin A = 2 \times 16 \times \frac{3}{4} = 24$

답 ④

21

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} \times \sin(\angle ACD) = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = 2R \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{\overline{AD}}{2 \sin(\angle ABD)} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

답 ②

22

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \text{이므로 } \sin(\angle CAB) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

점 D는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{BD} = \frac{1}{3} \times \overline{AB} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

직각삼각형 DBC에서 $\overline{CD} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{2}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = 2R \text{에서 } \frac{2\sqrt{2}}{\frac{4}{7}} = 2R, R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\pi \times \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{32}{7}\pi$

따라서 $p=7, q=32$ 이므로

$$p+q=7+32=39$$

답 39

(필수 유형 ①)

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 5^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 7^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

$\angle BAC = \angle CAD$ 이므로 $\overline{BC} = \overline{CD}$, 즉 $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$ 이다.

이때 $70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$ 에서

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$$

$$\overline{BC} = \sqrt{10}$$

한편, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

따라서 $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

답 ①

23

$\overline{BC} = a$ ($a > 4\sqrt{2}$)라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC)$$

이므로

$$(2\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2})^2 + a^2 - 2 \times 4\sqrt{2} \times a \times \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$$a^2 - 10a + 24 = 0, (a-6)(a-4) = 0$$

$$a > 4\sqrt{2} \text{이므로 } a = 6$$

한편, $\angle BAD = \angle CAD$ 이므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

즉, $2 : 1 = \overline{BD} : \overline{CD}$ 이므로 $\overline{BD} = 2\overline{CD}$

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 3\overline{CD} = 6 \text{에서 } \overline{CD} = 2$$

이때 $\overline{BD} = 4$

직각삼각형 ABE에서 $\angle BAE = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)라 하면

$$\overline{AE} = 4\sqrt{2} \cos \theta$$

직각삼각형 CAF에서

$$\angle CAF = \theta \text{이므로 } \overline{AF} = 2\sqrt{2} \cos \theta$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos(\angle ABD) \\ &= (4\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \times 4\sqrt{2} \times 4 \times \frac{5\sqrt{2}}{8} = 8 \end{aligned}$$

$$\overline{AD} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 ABD에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AD}} = \frac{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{AF} \times \overline{AE} &= 2\sqrt{2} \cos \theta \times 4\sqrt{2} \cos \theta = 16 \cos^2 \theta \\ &= 16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 9 \end{aligned}$$

답 9

24

삼각형 ABC에서 $\angle CAB = \theta$ ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)라 하면

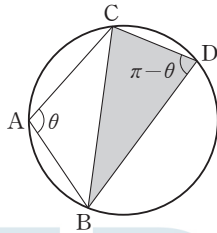
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{10}}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{\sin \theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{10}}{5}, \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{이때 } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{1}{4}$$



삼각형 BDC에서

$\angle BDC = \pi - \theta$ 이므로

$$\cos(\angle BDC) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \frac{1}{4}$$

$\overline{CD} = k$ ($k > 0$)이라 하면

$$\overline{BD} = 2k$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle BDC)$$

$$(2\sqrt{6})^2 = (2k)^2 + k^2 - 2 \times 2k \times k \times \frac{1}{4}$$

$$24 = 4k^2, k^2 = 6$$

$k > 0$ 이므로

$$k = \sqrt{6}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{6}, \overline{BD} = 2\sqrt{6}$$

$$\sin(\angle BDC) = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{이므로}$$

삼각형 BDC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle BDC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{따라서 } 4S^2 = 4 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 = 135$$

답 135

03

수열

정답

본문 28~39쪽

(필수 유형 ①)	①	01 ①	02 ②	03 42
(필수 유형 ②)	7	04 ③	05 ①	06 ⑤
		07 8		
(필수 유형 ③)	36	08 ④	09 ①	10 ④
(필수 유형 ④)	64	11 ①	12 ③	13 ④
(필수 유형 ⑤)	③	14 ③	15 ②	16 ③
(필수 유형 ⑥)	9	17 ④	18 ③	19 ②
(필수 유형 ⑦)	22	20 ⑤	21 ①	22 ④
(필수 유형 ⑧)	91	23 ③	24 29	25 ⑤
		26 ②		
(필수 유형 ⑨)	④	27 ②	28 ④	29 ①
(필수 유형 ⑩)	④	30 16	31 ④	32 99
(필수 유형 ⑪)	⑤	33 ⑤	34 ④	35 ③
(필수 유형 ⑫)	④	36 ②		

(필수 유형 ①)

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_7 = (a_1 + 9d) - (a_1 + 6d) = 3d = 6 \text{이므로 } d = 2$$

따라서 $a_4 = a_1 + 3d = 4 + 6 = 10$

답 ①

01

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_2 = a + d = 3 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_7 - a_5 = (a + 6d) - (a + 4d) = 2d \text{에서}$$

$$2d = 3 - d \text{이므로 } d = 1 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a = 2$

따라서 $a_4 = a + 3d = 2 + 3 = 5$

답 ①

02

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 45이고 공차가 -7 이므로 일반항 a_n 은

$a_n = -7n + 52$ 이다. 또한 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항과 공차가 같고 모든 항이 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 d 는 자연수이다.

$$b_n = b_1 + (n-1)d \text{에서 } b_1 = d \text{이므로 } b_n = dn \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } c_n = (d-7)n + 52$$

$c_n > 100$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 10이므로

$$c_9 \leq 100, c_{10} > 100 \text{이다.}$$

$$c_9 = 9(d-7) + 52 = 9d - 11 \text{에서 } 9d - 11 \leq 100, d \leq \frac{37}{9}$$

$$c_{10} = 10(d-7) + 52 = 10d - 18 \text{에서 } 10d - 18 > 100, d > \frac{59}{10}$$

즉, $\frac{59}{5} < d \leq \frac{37}{3}$ 이고 d 는 자연수이므로 $d=12$

따라서 $b_1=12$

답 ②

03

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수를 나열하면 1, 4, 7, 10, 13, ...이므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉, $a_n=3n-2$

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면

2, 6, 10, 14, 18, ...이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉, $b_n=4n-2$

$a_k=b_m$ 에서 $3k-2=4m-2, 3k=4m$

즉, k 는 4의 배수이고 m 은 3의 배수이므로

$k=4k', m=3m'$ (단, $k' \leq 5, m' \leq 6$ 인 자연수)

이를 대입하면 $3 \times 4k' = 4 \times 3m'$ 에서 $k'=m'$ 이다.

k 와 m 은 20 이하의 자연수이므로 $k+m$ 의 최솟값은 $k'=m'=1$, 즉 $k=4, m=3$ 일 때 7이고, $k+m$ 의 최댓값은 $k'=m'=5$, 즉 $k=20, m=15$ 일 때 35이다.

따라서 $k+m$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$35+7=42$

답 42

(필수 유형 2)

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=4$ 이고 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로

$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4, 2a_1+4k=2$

$a_1=1-2k \dots\dots ㉠$

한편, $S_k=\frac{k\{2a_1+2(k-1)\}}{2}=-16$ 이고 ㉠을 대입하면

$$\frac{k\{2(1-2k)+2(k-1)\}}{2}=-16$$

$-k^2=-16$ 에서 k 는 자연수이므로 $k=4$

이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=-7$

따라서 $a_{2k}=a_8=a_1+7d=-7+7 \times 2=7$

답 7

04

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$a_n=3+2(n-1)=2n+1$ 이므로

$a_{2n-1}=2(2n-1)+1=4n-1, a_{2n}=2 \times 2n+1=4n+1$ 이고

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}=(4n-1)+(4n+1)=8n$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1=8$ 이고 공차가 8인 등차수열이다.

따라서 $S_5=\frac{5 \times (2 \times 8 + 4 \times 8)}{2}=120$

답 ③

05

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_n=a+(n-1)d$

또한 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 이므로

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$

즉, $2S_n+a_{n+1}=3n^2-28n-14 \dots\dots ㉠$

한편, $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$2 \times \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} + (a+dn) = 3n^2 - 28n - 14$$

$n\{2a+(n-1)d\} + (a+dn) = dn^2 + 2an + a$

$dn^2 + 2an + a = 3n^2 - 28n - 14 \dots\dots ㉡$

이 식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립하므로 ㉡은 n 에 대한 항등식이다.

즉, $d=3, a=-14$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=3n-17$ 이므로

$a_6=3 \times 6 - 17 = 1$

답 ①

다른 풀이

$S_{n+1}+S_n=3n^2-28n-14$ 에

$n=1$ 을 대입하면 $(a_2+a_1)+a_1=-39 \dots\dots ㉠$

$n=2$ 를 대입하면 $(a_3+a_2+a_1)+(a_2+a_1)=-58 \dots\dots ㉡$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$a_2=a_1+d$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$3a_1+d=-39 \dots\dots ㉢$$

$a_3=a_1+2d, a_2=a_1+d$ 를 ㉡에 대입하면

$$5a_1+4d=-58 \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하면 풀면 $a_1=-14, d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=3n-17$ 이므로

$a_6=3 \times 6 - 17 = 1$

06

$$b_n = \frac{(a_{n+1})^2 - (a_n)^2}{3} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공차를 d ($d > 0$)이라 하면

$a_n=a+(n-1)d$ 에서 $a_{n+1}-a_n=d$ 이고 $a_{n+1}+a_n=2a+(2n-1)d$

$$b_n = \frac{d}{3}(2dn+2a-d)$$

즉, $b_1 = \frac{d}{3}(2a+d) = 4 \dots\dots ㉠$

한편, $b_3 = \frac{d}{3}(2a+5d)$ 이고 $S_6 = \frac{6(2a+5d)}{2} = 3(2a+5d)$ 이므로

$$b_3 = \frac{1}{3}S_6 \text{에서 } \frac{d}{3}(2a+5d) = 2a+5d$$

$a > 0, d > 0$ 에서 $2a+5d \neq 0$ 이므로 $\frac{d}{3} = 1$

$d=3 \dots\dots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $2a+3=4$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=3n-\frac{5}{2}$ 이므로 $a_4=3 \times 4 - \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$

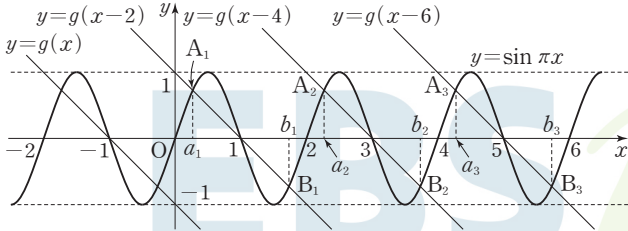
답 ⑤

07

직선 $y=-x$ 가 원점에 대하여 대칭인 직선이므로 직선 $y=g(x)$ 는 점 $(-1, 0)$ 에 대하여 대칭인 직선이다.

따라서 직선 $y=g(x-2n)$ 은 점 $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이고 기울기가 -1 인 직선이다.

함수 $y=\sin \pi x$ 의 그래프는 함수 $y=\sin \pi x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 모든 점에 대하여 대칭이고 점 $(2n-1, 0)$ 은 함수 $y=\sin \pi x$ 의 그래프 위의 점이므로 함수 $y=\sin \pi x$ 의 그래프는 점 $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 그림과 같이 곡선 $y=\sin \pi x$ 와 직선 $y=g(x-2n)$ 이 모두 점 $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점 A_n, B_n 도 점 $(2n-1, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $\frac{a_n+b_n}{2}=2n-1$ 에서 $a_n+b_n=4n-2$

따라서 $c_n=4n-2$

그러므로 수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

$S_n = \frac{n\{4+4(n-1)\}}{2} = 2n^2$ 이므로 $2n^2 > 100$ 에서 $n^2 > 50$

한편, $7 < \sqrt{50} < 8$ 이므로 $n^2 > 50$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

답 8

(필수 유형 4)

주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

모든 항이 양수이므로 $a > 0, r > 0$

$a_n = ar^{n-1}$ 에서

$\frac{a_{16}}{a_{14}} + \frac{a_8}{a_7} = \frac{ar^{15}}{ar^{13}} + \frac{ar^7}{ar^6} = r^2 + r = 12$

$r^2 + r - 12 = 0, (r+4)(r-3) = 0$

$r > 0$ 이므로 $r = 3$

따라서 $\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_6}{a_3} = \frac{ar^2}{a} + \frac{ar^5}{ar^2} = r^2 + r^3 = 3^2 + 3^3 = 36$

답 36

08

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $\frac{a_4}{a_3} = r = \sqrt{6}$ 이다.

따라서 $a_5 = \frac{1}{9} \times (\sqrt{6})^4 = \frac{1}{9} \times 36 = 4$

09

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$a_3 - a_1 = 4$ 에서

$a_1(r^2 - 1) = 4$ ㉠

$a_7 - a_5 = 36$ 에서

$a_5(r^2 - 1) = 36$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면

$\frac{a_5}{a_1} = 9, a_5 = a_1 \times 9$

한편, $a_5 = a_1 r^4$ 이므로 $r^4 = 9$

$r^2 = 3$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면 $a_1 = 2$

따라서 $a_9 = a_1 \times r^8 = a_1 \times (r^2)^4 = 2 \times 3^4 = 162$

답 1

10

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r (r > 0)$ 이라 하면

$a_1 + a_2 = a_1(1+r), a_4 + a_5 = a_4(1+r)$ 이므로

$\frac{a_1 + a_2}{a_4 + a_5} = \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{a_1}{a_4} = \frac{1}{2}$

즉, $a_4 = 2a_1$ 이므로 $r^3 = 2$

$a_{10} = a_1 \times r^9 = a_1 \times (r^3)^3 = 8a_1$ 이므로

$8a_1 \leq 40, a_1 \leq 5$

따라서 자연수 a_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 15이다.

답 4

(필수 유형 4)

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면

$r = 1$ 일 때, $a_n = 1$ 이므로 $\frac{S_6}{S_3} = \frac{6}{3} = 2, 2a_4 - 7 = -5$ 가 되어 모순이다.

즉, $r \neq 1$

$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{r^6-1}{r-1}}{\frac{r^3-1}{r-1}} = \frac{r^6-1}{r^3-1} = \frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1} = r^3+1$ 이고

$\frac{S_6}{S_3} = 2a_4 - 7$ 에서 $2a_4 - 7 = 2r^3 - 7$ 이므로

$r^3 + 1 = 2r^3 - 7$

$r^3 = 8, r = 2$

따라서 $a_7 = a_1 r^6 = 1 \times 2^6 = 64$

답 64

11

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r (r > 0)$ 이라 하면

$r = 1$ 이면 $a_n = 3$ 이므로 $S_4 = 3 \times 4 = 12, S_8 = 3 \times 8 = 24$ 가 되어

$S_8 = 10S_4$ 를 만족시키지 않는다.

$r \neq 1$ 이므로

$S_8 = \frac{3(1-r^8)}{1-r}, S_4 = \frac{3(1-r^4)}{1-r}$

$S_8 = 10S_4$ 에서

$\frac{3(1-r^8)}{1-r} = 10 \times \frac{3(1-r^4)}{1-r}$

$\frac{3(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = 10 \times \frac{3(1-r^4)}{1-r}$

$1+r^4 = 10, r^4 = 9$

$r > 0$ 이므로 $r = \sqrt{3}$

따라서 $a_3 = a_1 r^2 = 3 \times (\sqrt{3})^2 = 9$

답 1

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$S_8 = 10S_4 \text{에서 } S_8 - S_4 = 9S_4 \text{이므로}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 9(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$a_1r^4 + a_1r^5 + a_1r^6 + a_1r^7 = 9(a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3)$$

$$r^4(a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3) = 9(a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3)$$

$$r^4 = 9$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = \sqrt[5]{3}$$

$$\text{따라서 } a_3 = a_1r^2 = 3 \times (\sqrt[5]{3})^2 = 9$$

12

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$\frac{a_1a_4}{a_3} = \frac{a \times ar^3}{ar^2} = ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_6 = ar + ar^5 = ar(1 + r^4) = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$1 + r^4 = 5, r^4 = 4$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } a = \sqrt{2}$$

$$\text{즉, } a_n = (\sqrt{2})^n \text{이므로}$$

$$b_n = \frac{a_{2n}}{2a_{n+1}} = \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2 \times (\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{n-3}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 이고 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{\frac{1}{2} \{(\sqrt{2})^8 - 1\}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{15}{2}(\sqrt{2} + 1)$$

답 ③

13

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비 $\sqrt[5]{3}$ 을 r 라 하자.

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$S_n = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_n + a_{n+1})$$

$$T_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

에서

$$T_5 - S_5$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10}) - \{(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + (a_4 + a_5) + (a_5 + a_6)\}$$

$$= (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$= (a_2 \times r^5 + a_3 \times r^5 + a_4 \times r^5 + a_5 \times r^5) - (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$= (r^5 - 1)(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$r^5 = (\sqrt[5]{3})^5 = 3 \text{이므로}$$

$$T_5 - S_5 = 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 8$$

$$\text{따라서 } a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$$

답 ④

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비 $\sqrt[5]{3}$ 을 r 라 하면

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$b_n = a_n + a_{n+1} = ar^{n-1} + ar^n = a(1+r)r^{n-1}$$

$$c_n = a_{2n-1} + a_{2n} = ar^{2n-2} + ar^{2n-1} = a(1+r)r^{2n-2}$$

$$T_5 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = \frac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2}$$

$$S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$$

$$T_5 - S_5 = \frac{a(1+r)(1-r^{10})}{1-r^2} - \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r} \left(\frac{1+r^5}{1+r} - 1 \right)$$

$$= \frac{a(1+r)(1-r^5)}{1-r} \times \frac{1+r^5-1-r}{1+r}$$

$$= \frac{a(1-r^5)(r^5-r)}{1-r}$$

$$= ar(r^5-1)(r+1)(r^2+1)$$

$$= (r^5-1)(ar+ar^2+ar^3+ar^4)$$

$$= (r^5-1)(a_2+a_3+a_4+a_5) = 8$$

$$r^5 = (\sqrt[5]{3})^5 = 3 \text{이므로}$$

$$2(a_2+a_3+a_4+a_5) = 8 \text{에서}$$

$$a_2+a_3+a_4+a_5 = 4$$

필수 유형 ⑥

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0 \text{에서 } (x-4)(x-n+4) = 0$$

$$x = 4 \text{ 또는 } x = n - 4$$

한편, 세 수 1, α , β 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\alpha = \beta + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $\alpha = 4$, $\beta = n - 4$ 일 때

$$a < \beta \text{이므로 } 4 < n - 4 \text{에서 } n > 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 8 = (n - 4) + 1 \text{이므로 } n = 11$$

(ii) $\alpha = n - 4$, $\beta = 4$ 일 때

$$a < \beta \text{이므로 } n - 4 < 4 \text{에서 } n < 8$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2(n - 4) = 4 + 1 \text{이므로 } n = \frac{13}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n 의 값은 11이다.

답 ③

14

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로

$$a_2a_4 = (a_3)^2$$

$$a_2a_4 = 256 \text{에서 } (a_3)^2 = 256$$

$$a_3 > 0 \text{이므로 } a_3 = 16$$

$$a_1 + a_3 = 24 \text{에서 } a_1 + 16 = 24$$

$$a_1 = 8$$

$$a_1 \times a_5 = (a_3)^2 \text{에서 } 8 \times a_5 = 16^2$$

$$\text{따라서 } a_5 = 32$$

답 ③

15

세 수 a , $a+b$, ab 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(a+b) = a+ab$$

$$a+2b-ab=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 $a^2, ab, 2b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(ab)^2 = a^2 \times 2b$$

$$a^2b(b-2) = 0$$

$$a \neq 0, b \neq 0 \text{이므로 } b=2$$

$$b=2 \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$a+2 \times 2 - a \times 2 = 0$$

$$a=4$$

$$\text{따라서 } ab=4 \times 2=8$$

16

$P(n, \sqrt{n}), Q(n, \sqrt{2n}), R(n, \sqrt{mn})$ 이므로

$$\overline{PA} = \sqrt{n}, \overline{QA} = \sqrt{2n}, \overline{RA} = \sqrt{mn}$$

$\overline{PA}, \overline{QA}, \overline{RA}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\overline{QA}^2 = \overline{PA} \times \overline{RA}$$

즉, $(\sqrt{2n})^2 = \sqrt{n} \times \sqrt{mn}$ 에서 $n > 0$ 이므로 $2n = n\sqrt{m}$ 이고,

$$\sqrt{m}=2, m=4$$

또 $\overline{OP}^2 = n^2 + n, \overline{OQ}^2 + 4 = n^2 + 2n + 4, \overline{OR}^2 + 5 = n^2 + 4n + 5$

$\overline{OP}^2, \overline{OQ}^2 + 4, \overline{OR}^2 + 5$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(\overline{OQ}^2 + 4) = \overline{OP}^2 + (\overline{OR}^2 + 5)$$

즉, $2(n^2 + 2n + 4) = (n^2 + n) + (n^2 + 4n + 5)$ 에서 $n=3$

$$\text{따라서 } m+n=4+3=7$$

(필수 유형 ⑥)

모든 자연수 n 에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1} \text{이 성립하고}$$

$S_{n+3} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 13 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이 성립한다.

㉠에 $n=1$ 을 대입하면 $a_2 + a_3 + a_4 = 13$ 이므로

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 = 13$$

$$a_1r(1+r+r^2) = 13 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

또 ㉠에 $n=2$ 를 대입하면 $a_3 + a_4 + a_5 = 13 \times 3 = 39$ 이므로

$$a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 = 39$$

$$a_1r^2(1+r+r^2) = 39 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡ \div ㉢을 하면

$$\frac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)} = \frac{39}{13} \text{에서 } r=3$$

$r=3$ 을 ㉡에 대입하면

$$a_1 \times 3 \times (1+3+9) = 13 \text{에서 } a_1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_4 = a_1r^3 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$$

17

$$a_4 = S_4 - S_3 = (2 \times 4^2 + 4k) - (2 \times 3^2 + 3k) = 14 + k$$

이때 $a_4 = 20$ 이므로

$$14 + k = 20, k=6$$

$$\text{따라서 } a_1 = S_1 = 2 + 6 = 8$$

답 ④

18

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공비를 r 라 하자.

$$S_{10} - S_8 = a_{10} + a_9 = ar^9 + ar^8 = ar^8(r+1)$$

$$S_7 - S_5 = a_7 + a_6 = ar^6 + ar^5 = ar^5(r+1)$$

$$\frac{S_{10} - S_8}{S_7 - S_5} = \frac{ar^8(r+1)}{ar^5(r+1)} = r^3 \text{이므로}$$

$$\frac{S_{10} - S_8}{S_7 - S_5} = 4 \text{에서 } r^3 = 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 $S_2 - S_1 = a_2 = ar$ 이므로

$$(S_2 - S_1)^3 = 108 \text{에서 } (ar)^3 = 108$$

$$\text{즉, } a^3r^3 = 108 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^3 \times 4 = 108, a^3 = 27$$

$$a > 0 \text{이므로 } a=3$$

$$\text{따라서 } a_2 \times a_6 = (a_1)^2 = (ar^3)^2 = a^2 \times (r^3)^2 = 3^2 \times 4^2 = 144$$

답 ③

19

조건 (가)에 의하여

$$S_{2n-1} = S_1 + (n-1) \times 3$$

조건 (나)에 의하여

$$S_{2n} = S_2 + (n-1) \times 4$$

$$a_{11} = S_{11} - S_{10} = (S_1 + 15) - (S_2 + 16) = S_1 - S_2 - 1$$

$$a_{12} = S_{12} - S_{11} = (S_2 + 20) - (S_1 + 15) = S_2 - S_1 + 5$$

이때 $a_{11} = a_{12}$ 이므로

$$S_1 - S_2 - 1 = S_2 - S_1 + 5$$

$$S_2 - S_1 = -3$$

따라서

$$a_7 = S_7 - S_6 = (S_1 + 9) - (S_2 + 8)$$

$$= 1 - (S_2 - S_1)$$

$$= 1 - (-3) = 4$$

답 ②

(필수 유형 ⑦)

$$\sum_{k=1}^5 (3a_k + 5) = 55 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k + 25 = 55$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = 32 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 32$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 b_k = 32 - \sum_{k=1}^5 a_k = 32 - 10 = 22$$

답 22

20

$$\sum_{k=1}^{15} (2a_k - b_k) = 17 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{15} (2a_k - b_k) = 2 \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{15} b_k = 2 \times 12 - \sum_{k=1}^{15} b_k = 24 - \sum_{k=1}^{15} b_k$$

이므로 $24 - \sum_{k=1}^{15} b_k = 17$

$$\sum_{k=1}^{15} b_k = 24 - 17 = 7$$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} (b_k + 1) = \sum_{k=1}^{15} b_k + \sum_{k=1}^{15} 1 = 7 + 15 = 22$

답 ⑤

21

$$\sum_{k=1}^{10} \{ka_{k+1} - (k+1)a_k\} = 70 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \{ka_{k+1} - (k+1)a_k\}$$

$$= (a_2 - 2a_1) + (2a_3 - 3a_2) + (3a_4 - 4a_3) + \dots + (10a_{11} - 11a_{10})$$

$$= 10a_{11} - 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10})$$

$$= 10a_{11} - 2 \sum_{k=1}^{10} a_k$$

이고, $a_{11} = 15$ 이므로

$$10 \times 15 - 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 70, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = 40$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k(a_k + 6) - \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)^2 = \sum_{k=1}^{10} \{a_k(a_k + 6) - (a_k + 2)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 4) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 4$$

$$= 2 \times 40 - 4 \times 10 = 40$$

답 ①

22

$$a_n + b_n = 2 \quad \dots \text{㉠}$$

이므로

$$(a_n)^2 - (b_n)^2 = (a_n + b_n)(a_n - b_n) = 2(a_n - b_n)$$

$$\sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 - (b_k)^2\} = 310 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 - (b_k)^2\} = \sum_{k=1}^{10} 2(a_k - b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k)$$

이므로 $2 \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 310$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 155 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠에서 $b_k = -a_k + 2 \quad \dots \text{㉢}$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} \{a_k - (-a_k + 2)\} = \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 2) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - 20 = 155$$

이므로 $\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{175}{2}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 4b_k) = \sum_{k=1}^{10} \{2a_k - 4(-a_k + 2)\} = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 8$$

$$= 6 \times \frac{175}{2} - 80 = 445$$

답 ④

(필수 유형 ⑧)

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^7 (a_n - n^2 + n) = \sum_{n=1}^7 (n^2 - 2n + 1) = \sum_{n=1}^7 (n-1)^2 = \sum_{k=1}^6 k^2$$

$$= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$$

답 91

23

$$\sum_{k=1}^{10} k(k^2 + 16) - \sum_{k=1}^{10} k^2(k+2) = \sum_{k=1}^{10} \{k(k^2 + 16) - k^2(k+2)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (16k - 2k^2)$$

$$= 16 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 880 - 770 = 110$$

답 ③

24

$$\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{3}k + a\right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} a = \frac{1}{3} \times \frac{20 \times 21}{2} + 20a = 70 + 20a$$

$$\sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 650$$

$$\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{3}k + a\right) = \sum_{k=1}^{12} k^2 \text{에서 } 70 + 20a = 650$$

따라서 $a = 29$

답 29

25

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n = \frac{n^2 - 12n}{n} = n - 12, \quad b_n = -\frac{8}{n}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{a_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{15} \frac{k-12}{-\frac{8}{k}} = \sum_{k=1}^{15} \left(-\frac{k^2}{8} + \frac{3k}{2}\right) = -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{15} k^2 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{15} k$$

$$= -\frac{1}{8} \times \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + \frac{3}{2} \times \frac{15 \times 16}{2}$$

$$= -155 + 180 = 25$$

답 ⑤

26

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2n} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-8}$ 에서 밑 $\frac{1}{2}$ 이 0보다 크고 1보다 작으므로

$$x - 2n \leq -x - 8$$

$$x \leq n - 4$$

(i) $n \leq 4$ 일 때,
부등식 $x \leq n - 4$ 를 만족시키는 자연수 x 는 존재하지 않으므로
 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

(ii) $n \geq 5$ 일 때,
부등식 $x \leq n - 4$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수는 $n - 4$ 이므로
 $a_n = n - 4 \quad (n \geq 5)$

$$(i), (ii) \text{에서 } a_n = \begin{cases} 0 & (n \leq 4) \\ n-4 & (n \geq 5) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=5}^{20} (k-4) = \sum_{k=1}^{16} k = \frac{16 \times 17}{2} = 136$$

답 ②

필수 유형 ⑨

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1 = a$ 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times a = an$$

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} = \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} \{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}\} \\ &= \frac{1}{a} \{(\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) + (\sqrt{4a} - \sqrt{3a}) + \dots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a})\} \\ &= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a}) = \frac{3\sqrt{a}}{a} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{3}{\sqrt{a}} = 2$$

$$a = \frac{9}{4}$$

$$\text{따라서 } a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

답 ④

27

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_4 = a_2 + 8$ 에서

$$a_4 - a_2 = 8, 2d = 8$$

$$\text{즉, } d = 4 \text{이므로 } a_{n+1} - a_n = 4$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{15}} - \frac{1}{a_{16}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{16}} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a_{16}} \right) \quad \dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

$$\text{한편, } a_{16} = a_1 + 15d = 1 + 15 \times 4 = 61 \quad \dots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a_{16}} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{61} \right) = \frac{15}{61}$$

답 ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_4 = a_2 + 8$ 에서

$$a_4 - a_2 = 8, 2d = 8$$

$$\text{즉, } d = 4$$

$$\text{이때 } a_1 = 1 \text{이므로 } a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{57} - \frac{1}{61} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{61} \right) = \frac{15}{61} \end{aligned}$$

28

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 2이므로

$$a_{n+1} = 2a_n, S_n = \frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1} = a_1(2^n - 1)$$

$$\text{이때 } a_n = \frac{1}{2} a_{n+1} = \frac{1}{2} (S_{n+1} - S_n) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{S_{k+1} S_k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_{k+1} S_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \left(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1(2^{11} - 1)} \right\} \\ &= \frac{2^{10} - 1}{a_1(2^{11} - 1)} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } p = \frac{2^{10} - 1}{a_1(2^{11} - 1)} \text{에서 } pa_1 = \frac{2^{10} - 1}{2^{11} - 1} \text{이므로}$$

$$1 - pa_1 = \frac{2^{10}}{2^{11} - 1}, (2^{11} - 1)(1 - pa_1) = 2^{10}$$

따라서

$$\begin{aligned} \log_2(2^{11} - 1) + \log_2(1 - pa_1) &= \log_2(2^{11} - 1)(1 - pa_1) \\ &= \log_2 2^{10} = 10 \end{aligned}$$

답 ④

29

점 A(0, -1)에서 함수 $y = \frac{1}{n}x^2$ 의 그래프에 그은 접선의 기울기를

m ($m > 0$)이라 하면 접선의 방정식은 $y = mx - 1$ 이다.

$$y = \frac{1}{n}x^2, y = mx - 1 \text{을 연립하면}$$

$$\frac{1}{n}x^2 = mx - 1$$

$$\frac{1}{n}x^2 - mx + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{A}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = m^2 - \frac{4}{n} = 0, m^2 = \frac{4}{n}$$

$$m > 0 \text{이므로 } m = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\text{따라서 접선의 방정식은 } y = \frac{2}{\sqrt{n}}x - 1 \text{이고}$$

접점의 x 좌표 x_n 은 ①에서

$$\frac{1}{n}x_n^2 - \frac{2}{\sqrt{n}}x_n + 1 = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n - 1 \right)^2 = 0 \text{이므로 } x_n = \sqrt{n}$$

이때 $y_n = 1$ 이므로 접점은 $P(\sqrt{n}, 1)$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15} \frac{y_n}{x_n + x_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{15} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{16} - \sqrt{15})$$

$$= -1 + \sqrt{16} = -1 + 4 = 3$$

답 ①

(필수 유형 ⑩)

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n \text{에서 } a_{n+1} = -a_n + (-1)^{n+1} \times n$$

이때 $a_1 = 12$ 이므로

$$a_2 = -a_1 + 1 = -11, a_3 = -a_2 - 2 = 9$$

$$a_4 = -a_3 + 3 = -6, a_5 = -a_4 - 4 = 2$$

$$a_6 = -a_5 + 5 = 3, a_7 = -a_6 - 6 = -9$$

$$a_8 = -a_7 + 7 = 16$$

따라서 $a_k > a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 8이다.

답 ④

30

$$\text{조건 (나)에서 } a_n = -\frac{1}{2}a_{n+1}, \text{ 즉 } a_{n+1} = -2a_n \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 -2 인 등비수열이다.

$$\text{조건 (가)에서 } 2 \times (-2a_1) + 4 \times 4a_1 = 3 \text{이므로 } a_1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } a_7 = \frac{1}{4} \times (-2)^6 = 16$$

답 16

31

$$a_1 = 2 \text{이므로 } \log_2 2 \times \log_2 a_2 = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 a_2 = 1, \text{ 즉 } a_2 = 2$$

$$a_2 = 2 \text{이므로 } \log_2 2 \times \log_2 a_3 = 3 \text{에서}$$

$$\log_2 a_3 = 3, \text{ 즉 } a_3 = 8$$

$$a_3 = 2^3 \text{이므로 } \log_2 2^3 \times \log_2 a_4 = 5 \text{에서}$$

$$\log_2 a_4 = \frac{5}{3}, \text{ 즉 } a_4 = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$a_4 = 2^{\frac{5}{3}} \text{이므로 } \log_2 2^{\frac{5}{3}} \times \log_2 a_5 = 7 \text{에서}$$

$$\log_2 a_5 = \frac{21}{5}, \text{ 즉 } a_5 = 2^{\frac{21}{5}}$$

$$\text{따라서 } \log_2 \frac{a_5}{a_2} = \log_2 \frac{2^{\frac{21}{5}}}{2} = \log_2 2^{\frac{16}{5}} = \frac{16}{5}$$

답 ④

32

조건 (가)에서 $a_{n+1} = a_n + 4$, 즉 $a_{n+1} - a_n = 4$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

$$\text{조건 (나)에서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 \text{이므로 } \sum_{k=3}^{10} a_k = \frac{8(a_3 + a_{10})}{2} = 0$$

$$a_3 + a_{10} = (a_1 + 8) + (a_1 + 36) = 0 \text{에서 } a_1 = -22$$

$$a_2 = -22 + 4 = -18$$

$$\text{따라서 } \frac{a_1 \times a_2}{4} = \frac{(-22) \times (-18)}{4} = 99$$

답 99

(필수 유형 ⑪)

(i) a_6 이 3의 배수인 경우

$$a_7 = 40 \text{이므로 } \frac{a_6}{3} = a_7 \text{에서 } a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$$a_7 = 40 \text{이 3의 배수가 아니므로 } a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$$a_8 = 160 \text{이 3의 배수가 아니므로 } a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii) $a_6 = 3k - 2$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k - 2) = 42 - 3k = 3(14 - k)$$

a_5 는 자연수이므로 $3(14 - k) > 0$ 에서 $k < 14$

한편, a_5 는 3의 배수이므로 $a_6 = \frac{a_5}{3}$

$$\text{즉, } 3k - 2 = \frac{3(14 - k)}{3} \text{에서}$$

$$4k = 16, k = 4$$

$$\text{따라서 } a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10 \text{이므로 } a_8 = a_6 + a_7 = 10 + 40 = 50$$

$$a_8 = 50 \text{이 3의 배수가 아니므로 } a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 50 = 90$$

(iii) $a_6 = 3k - 1$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k - 1) = 41 - 3k$$

a_5 는 자연수이므로 $41 - 3k > 0$ 에서

$$k < \frac{41}{3} \dots\dots \text{㉠}$$

한편, a_5 는 3의 배수가 아니므로

$$a_4 + a_5 = a_6 \text{에서}$$

$$a_4 = a_6 - a_5 = (3k - 1) - (41 - 3k) = 6k - 42 = 3(2k - 14)$$

a_4 가 자연수이므로 $3(2k - 14) > 0$ 에서

$$k > 7 \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$7 < k < \frac{41}{3}$$

한편, a_4 는 3의 배수이므로 $a_5 = \frac{a_4}{3}$

$$\text{즉, } 41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3} \text{에서}$$

$$5k = 55$$

$$k = 11$$

$$\text{따라서 } a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32 \text{이므로}$$

$$a_8 = a_6 + a_7 = 32 + 40 = 72$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 a_9 의 최댓값 $M = 200$ 이고 최솟값 $m = 24$ 이다.

$$\text{따라서 } M + m = 200 + 24 = 224$$

답 ⑤

33

$$a_1 = 1 \text{이므로 } a_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$a_2 = 2 \text{이므로 } a_3 = 2a_2 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_3 = 4 \text{이므로 } a_4 = 2a_3 = 2 \times 4 = 8$$

$$a_4 = 8 \text{이므로 } a_5 = 2a_4 = 2 \times 8 = 16$$

$$a_5=16 \text{이므로 } a_6=a_5-10=16-10=6$$

$$a_6=6 \text{이므로 } a_7=2a_6=2 \times 6=12$$

$$a_7=12 \text{이므로 } a_8=a_7-10=12-10=2$$

⋮

이므로

$$a_n=a_{n+6} \quad (n \geq 2)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = a_1 + 3 \sum_{k=2}^7 a_k + a_{20} = 1 + 3(2+4+8+16+6+12) + 2 = 147$$

답 ⑤

34

$$\sum_{k=1}^{24} a_k = \sum_{k=1}^{12} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{12} \left\{ \frac{1}{2}(2k-1) + 2 \right\} = \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} \frac{3}{2}$$

$$= \frac{12 \times 13}{2} + \frac{3}{2} \times 12 = 96 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=2}^{25} a_k = \sum_{k=1}^{12} (a_{2k} + a_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2} \times 2k + 2 \right) = \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 2$$

$$= \frac{12 \times 13}{2} + 2 \times 12 = 102 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \sum_{k=2}^{25} a_k - \sum_{k=1}^{24} a_k = 102 - 96 = 6$$

$$\text{즉, } a_{25} - a_1 = 6$$

$$\text{따라서 } a_1 = a_{25} - 6 = 20 - 6 = 14$$

35

$$(i) a_2 \text{가 홀수일 때, } a_3 = 6a_2 = 4, a_2 = \frac{2}{3}$$

a_2 가 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) a_2 \text{가 짝수일 때, } a_3 = \frac{a_2}{2} + 1 = 4, a_2 = 6$$

$$\textcircled{1} a_1 \text{이 홀수일 때, } a_2 = 6a_1 = 6, a_1 = 1$$

이때 $a_2 > a_1$ 을 만족시킨다.

$$\textcircled{2} a_1 \text{이 짝수일 때, } a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = 6, a_1 = 10$$

이때 $a_2 > a_1$ 을 만족시키지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } a_1 = 1, a_2 = 6$$

$$\text{한편, } a_3 \text{이 짝수이므로 } a_4 = \frac{a_3}{2} + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3$$

$$a_4 \text{가 홀수이므로 } a_5 = 6a_4 = 6 \times 3 = 18$$

$$a_5 \text{가 짝수이므로 } a_6 = \frac{a_5}{2} + 1 = \frac{18}{2} + 1 = 10$$

$$a_6 \text{이 짝수이므로 } a_7 = \frac{a_6}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

이때

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_7 = a_{12} = a_{17} = \dots = 6$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = a_{18} = \dots = 4$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = a_{19} = \dots = 3$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = a_{20} = \dots = 18$$

$$a_6 = a_{11} = a_{16} = a_{21} = \dots = 10$$

따라서 $a_k < a_2$ 를 만족시키는 20 이하의 자연수 k 의 값은

1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19이므로 그 개수는 9이다.

답 ③

필수 유형 ⑩

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)=3, (우변)=3이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + \{2^{2(m+1)} - 1\} \times 2^{(m+1)m} + m \times 2^{-(m+1)} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2} - 1) \times 2^{m(m+1)} + m \times 2^{-m-1} \\ &= 2^{m(m+1)} \times 2^{2m+2} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(m) = 2^{m(m+1)}, g(m) = 2^{2m+2} \text{이므로 } \frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$$

답 ④

36

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변)=4, (우변)=4이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1 \times 2^2}{2k^2-1} + \frac{5 \times 4^2}{2k^2-1} + \frac{9 \times 6^2}{2k^2-1} + \dots + \frac{(4k-3) \times (2k)^2}{2k^2-1}$$

$$= 2k(k+1)$$

이다. 이때

$$1 \times 2^2 + 5 \times 4^2 + 9 \times 6^2 +$$

$$\dots + (4k-3) \times (2k)^2 + (4k+1) \times (2k+2)^2$$

$$= \boxed{2k(k+1)(2k^2-1)} + (4k+1) \times (2k+2)^2$$

$$= 2(k+1)(2k^2+8k^2+9k+2)$$

$$= 2(k+1) \times (k+2) \times \{2 \times \boxed{k^2+2k} + 1\}$$

$$= 2(k+1)(k+2) \{2(k+1)^2 - 1\}$$

이므로

$$\frac{1 \times 2^2}{2(k+1)^2-1} + \frac{5 \times 4^2}{2(k+1)^2-1} + \frac{9 \times 6^2}{2(k+1)^2-1} +$$

$$\dots + \frac{(4k+1) \times \{2(k+1)\}^2}{2(k+1)^2-1}$$

$$= 2(k+1)(k+2)$$

이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1 \times 2^2}{2n^2-1} + \frac{5 \times 4^2}{2n^2-1} + \frac{9 \times 6^2}{2n^2-1} + \dots + \frac{(4n-3) \times (2n)^2}{2n^2-1} = 2n(n+1)$$

이다.

이상에서 $f(k) = 2k(k+1)(2k^2-1)$, $g(k) = k^2+2k$ 이므로

$$\frac{f(5)}{g(3)} = \frac{10 \times 6 \times 49}{15} = 196$$

답 ②

04 함수의 극한과 연속

정답

본문 42~49쪽

(필수 유형 ①) ②	01 ②	02 ②	03 ④
(필수 유형 ②) ②	04 ④	05 ③	06 ④
	07 ②		
(필수 유형 ③) 30	08 ④	09 ①	10 4
	11 12		
(필수 유형 ④) ②	12 ④	13 14	14 ⑤
(필수 유형 ⑤) ②	15 ⑤	16 ②	17 ③
	18 ④	19 18	
(필수 유형 ⑥) ⑤	20 ④	21 ②	22 ③
	23 11	24 ③	
(필수 유형 ⑦) ④	25 ④	26 ④	27 38

(필수 유형 ①)

주어진 그래프에서

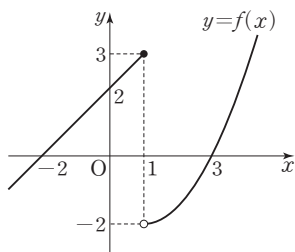
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 + 1 = -1$$

답 ②

01

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



위의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 + (-2) = 1$$

답 ②

다른 풀이

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left\{ \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 \right\} = -2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 + (-2) = 1$$

02

함수 $y=f(x)-2$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \{f(x)-2\} = 0$$

함수 $y=f(x-1)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1^+} \{f(x)-2\} + \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x-1) = 0 + (-2) = -2$$

답 ②

03

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 1$$

이므로 $0+1=f(k)+1$ 에서 $f(k)=0$

따라서 그림에서 $f(1)=0$ 이므로 $k=1$ 이다.

답 ④

(필수 유형 ②)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+9x+8}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+8)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+8) \\ &= -1+8=7 \end{aligned}$$

답 ②

04

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x-x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(10-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2} \\ &= \frac{10 \times (1+1)}{2} = 10 \end{aligned}$$

답 ④

05

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x+3)}{3x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$$

답 ③

06

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x(x+k)}-x\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{x(x+k)}-x\} \{\sqrt{x(x+k)}+x\}}{\sqrt{x(x+k)}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx}{\sqrt{x^2+kx}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{x}}+1} = \frac{k}{1+1} = \frac{k}{2} = 2 \end{aligned}$$

에서 $k=4$

답 ④

07

$\frac{x^2-2}{6x} \leq f(x) \leq \frac{x^2+2}{6x}$ 에서 $x > 0$ 이므로

$$\frac{x^2-2}{3x^2} \leq \frac{2f(x)}{x} \leq \frac{x^2+2}{3x^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{3} = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{3} = \frac{1}{3}$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)}{x} = \frac{1}{3}$

답 ②

(필수 유형 ④)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{2x^2+1}{x+1} \times (x+1)f(x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) \\ &= \frac{2+1}{1+1} \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

에서 $a = \frac{3}{2}$

따라서 $20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$

답 30

다른 풀이

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+1)f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2+1)f(x)}{(x+1)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x+1} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 $20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$

08

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [\{g(x)-2\} + 2]$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)-2\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\{g(x)-2\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)-2f(x)}{f(x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)g(x)-2f(x)\}}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} [\{g(x)-2\} + 2] = \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)-2\} + \lim_{x \rightarrow 0} 2 \\ &= 3+2=5 \end{aligned}$$

답 ④

09

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{xf(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2-1}{f(x)} \times \frac{x^3-1}{x(x^2-1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2-1}{f(x)} \times \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+1)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2-1}{f(x)} \times \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \times \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

10

$f(x) = ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (ax+b) = b=2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-1)}{(x-1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(ax+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+1)}{ax+2} \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (ax+2)} = \frac{3(1+1)}{a+2} = \frac{6}{a+2} = 2 \end{aligned}$$

에서 $a+2=3$ 이므로 $a=1$

따라서 $f(x) = x+2$ 이므로 $f(2) = 2+2=4$

답 4

11

$f(x)$ 가 다항함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} 2f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)g(x) + 2xf(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \{g(x) + 2x\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \{ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2x \} \\ &= 2 \{ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + 2 \} = 10 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{3f(x) + 2g(x)\} = 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$$

답 12

다른 풀이

$f(x), g(x)$ 가 다항함수이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

조건 (가)에서 $f(1) + 2f(1) = 6$ 이므로 $f(1) = 2$

조건 (나)에서 $f(1)g(1) + 2f(1) = 10$ 이므로

$$2g(1) + 4 = 10, g(1) = 3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{3f(x) + 2g(x)\} = 3f(1) + 2g(1) = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$

(필수 유형 ④)

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)$ 는

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + ax + b) = b = 0$ 에서

$f(x) = 2x^2 + ax$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x+a) = a = 3$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 3x$ 이므로 $f(2) = 14$

답 ②

12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x^2-4} = \frac{1}{16} \quad \dots \textcircled{1}$$

에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a}-b) = 0$ 에서 $\sqrt{2+a}-b=0$ 이므로

$$b = \sqrt{2+a} \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a}}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{2+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})}{(x^2-4)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+a})} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2+a}} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

에서 $\sqrt{2+a}=2$ 이므로 $a=2$

이것을 ②에 대입하면 $b=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

답 ④

13

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{4}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{(x+a)(x+b)\} = (1+a)(1+b) = 0$ 에서

$1+a=0$ 또는 $1+b=0$, 즉 $a=-1$ 또는 $b=-1$

한편, 다항함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로 $f(1)=4$

$a=-1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{(x-1)(x+b)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+b} = \frac{f(1)}{1+b} = \frac{4}{1+b} = \frac{1}{4}$$
에서

$b=15$

같은 방법으로 $b=-1$ 일 때, $a=15$

따라서 $a+b=-1+15=14$

답 14

참고

$b=-1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{(x+a)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+a} = \frac{f(1)}{1+a} = \frac{4}{1+a} = \frac{1}{4}$$
에서

$a=15$

14

조건 (가)에서 $f(x) - ax^2$ 은 일차항의 계수가 4인 일차함수이므로

$f(x) - ax^2 = 4x + b$ (b 는 상수)라 하자.

조건 (나)에서 $x \rightarrow -2$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (ax^2 + 4x + b) = 4a - 8 + b = 0$$

에서 $b = -4a + 8 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + 4x - 4a + 8}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(ax - 2a + 4)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (ax - 2a + 4) = -4a + 4 = 4 \end{aligned}$$

에서 $a=0$

이것을 ①에 대입하면 $b=8$

따라서 $f(x) = 4x + 8$ 이므로

$f(1) = 4 + 8 = 12$

답 ⑤

(필수 유형 ⑥)

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ 이라 하면 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - x - t = 0$ 의 두 근이 a, b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=1, ab=-t$$

$$\overline{AH} = a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = \sqrt{1+4t}$$

한편, 점 C의 좌표는 $C(-a, a^2)$ 이므로

$$\overline{CH} = b - (-a) = a + b = 1$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+4t} - 1)(\sqrt{1+4t} + 1)}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4t}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sqrt{1+4t} + 1} \\ &= \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

15

사각형 PQCR가 평행사변형이므로

$$\overline{DR} = \overline{PR} - \overline{PD} = \overline{QC} - \overline{PD} = 1 - t$$

즉, 직각삼각형 ABR에서

$$\overline{AB} = 3, \overline{AR} = 3 + (1-t) = 4-t$$

이므로

$$\overline{BR} = \sqrt{3^2 + (4-t)^2} = \sqrt{t^2 - 8t + 25}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{PD}}{5 - \overline{BR}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{5 - \sqrt{t^2 - 8t + 25}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(5 + \sqrt{t^2 - 8t + 25})}{25 - (t^2 - 8t + 25)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(5 + \sqrt{t^2 - 8t + 25})}{t(8 - t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{5 + \sqrt{t^2 - 8t + 25}}{8 - t} \\ &= \frac{5 + 5}{8 - 4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

16

두 점 $P(t, t^2)$, $A(4, 0)$ 에 대하여 선분 PA의 중점을 M이라 하면

점 M의 좌표는 $\left(\frac{t+4}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$

직선 PA의 기울기는 $\frac{t^2}{t-4}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{t-4}{t^2}$ 이다.

즉, 선분 PA의 수직이등분선의 방정식은

$$y - \frac{t^2}{2} = -\frac{t-4}{t^2} \left(x - \frac{t+4}{2}\right)$$

이 직선의 x절편이 $f(t)$ 이므로

$$0 - \frac{t^2}{2} = -\frac{t-4}{t^2} \left\{f(t) - \frac{t+4}{2}\right\}$$

$$f(t) - \frac{t+4}{2} = \frac{t^4}{2(t-4)}$$

$$f(t) = \frac{t^4}{2(t-4)} + \frac{t+4}{2} = \frac{t^4 + t^2 - 16}{2(t-4)}$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 + t^2 - 16}{2t^3(t-4)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{t^2} - \frac{16}{t^4}}{2\left(1 - \frac{4}{t}\right)} = \frac{1}{2}$$

답 ②

17

$4x^2 = t$ ($x > 0$)에서 $x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ 이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{t}}{2}, t\right)$ 이다.

또 $x^2 = t$ ($x > 0$)에서 $x = \sqrt{t}$ 이므로 점 B의 좌표는 (\sqrt{t}, t) 이다.

따라서 $f(t) = \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}$, $g(t) = \sqrt{t + t^2}$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{g(t) - f(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sqrt{t + t^2} - \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t + t^2) - \left(\frac{t}{4} + t^2\right)}{\sqrt{t + t^2} + \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}t}{\sqrt{t + t^2} + \sqrt{\frac{t}{4} + t^2}}$$

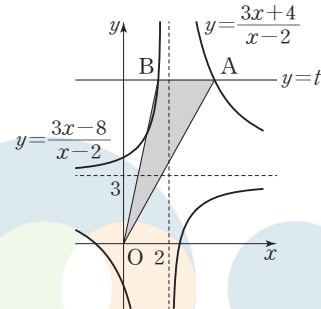
$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{t} + 1} + \sqrt{\frac{1}{4t} + 1}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1 + 1} = \frac{3}{8}$$

답 ③

18

두 함수 $y = \frac{3x+4}{x-2}$, $y = \frac{3x-8}{x-2}$ 의 그래프는 그림과 같다.



$\frac{3x+4}{x-2} = t$ 에서 $x = \frac{2t+4}{t-3}$ 이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2t+4}{t-3}, t\right)$ 이다.

$\frac{3x-8}{x-2} = t$ 에서 $x = \frac{2t-8}{t-3}$ 이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{2t-8}{t-3}, t\right)$ 이다.

즉, $\overline{AB} = \frac{2t+4}{t-3} - \frac{2t-8}{t-3} = \frac{12}{t-3}$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이 $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{1}{2} \times t \times \frac{12}{t-3} = \frac{6t}{t-3}$$

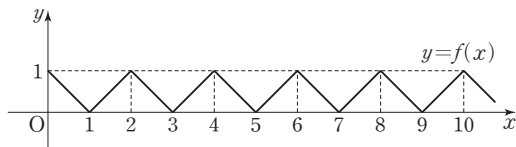
따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3^+} (t^2 - 4t + 3)f(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{6t(t^2 - 4t + 3)}{t-3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{6t(t-1)(t-3)}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3^+} 6t(t-1) \\ &= 6 \times 3 \times 2 = 36 \end{aligned}$$

답 ④

19

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $y = \frac{x}{t}$ 는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{t}$ 인 직선이므로

$0 < t < 2$ 일 때, $g(t) = 1$

자연수 n 에 대하여 $t = 2n$ 일 때, $g(t) = 2n$

$2n < t < 2n + 2$ 일 때, $g(t) = 2n + 1$

즉, $2 < t < 4$ 일 때 $g(t) = 3$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow 4^-} g(t) = 3$

$8 < t < 10$ 일 때 $g(t) = 9$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow 8^+} g(t) = 9$

따라서 $\lim_{t \rightarrow 4^-} g(t) + g(6) + \lim_{t \rightarrow 8^+} g(t) = 3 + 6 + 9 = 18$

답 18

(필수 유형 6)

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = -1$ 과 $x = 3$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1^+} |f(x)| = |f(-1)|$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} |x+a| = \lim_{x \rightarrow -1^+} |x| = |-1|$$

$$|-1+a| = |-1| = |-1|$$

$$|-1+a| = 1$$

$$a > 0 \text{ 이므로}$$

$$a = 2$$

(ii) 함수 $|f(x)|$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3^+} |f(x)| = |f(3)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 3^+} |bx-2| = |3b-2|$$

$$|3| = |3b-2| = |3b-2|$$

$$|3b-2| = 3$$

$$b > 0 \text{ 이므로}$$

$$b = \frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } a+b = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

답 ⑤

20

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax+3) = 2a+3$$

$$2-a = 2a+3$$

$$3a = -1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} & (x < 2) \\ -\frac{1}{3}x + 3 & (x \geq 2) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) + (-1 + 3) = \frac{10}{3}$$

답 ④

21

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.

따라서

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

답 ②

22

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 과 $x=2$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = b$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = b$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+x+a}{x^2-x} = b \text{ 에서 } x \rightarrow 0^- \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이고 극한}$$

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

그러므로 $a=0$ 이고

$$b = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1$$

(ii) 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\text{즉, } f(2) = 1$$

한편, 함수 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차함수이고, $x \geq 2$ 에서 최솟값이 0이므로

$$f(x) = (x-k)^2 \text{ (단, } k \text{는 2보다 큰 상수)}$$

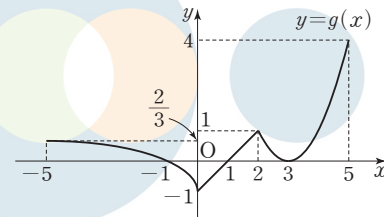
로 놓을 수 있다. 이때 $f(2) = 1$ 이므로

$$(2-k)^2 = 1$$

$$k > 2 \text{ 이므로 } k = 3$$

$$\text{그러므로 } g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & (x < 0) \\ x-1 & (0 \leq x < 2) \\ (x-3)^2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고 닫힌구간 $[-5, 5]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-5, 5]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$$4 + (-1) = 3$$

답 ③

23

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1, x=3$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{f(1)}, f(1) = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = g(3) \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{f(3)} = \frac{1}{6}, f(3) = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여

$$f(x) - 2x = a(x-1)(x-3) \text{ (단, } a \text{는 0보다 큰 상수)}$$

로 놓을 수 있다. 즉,

$$f(x) = ax^2 - 2(2a-1)x + 3a$$

$$= a \left(x - \frac{2a-1}{a} \right)^2 - \frac{a^2-4a+1}{a} \quad \dots \textcircled{3}$$

이고 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \neq 0$ 이어야 한다.

(i) $\frac{2a-1}{a} \leq 1$ 인 경우

$$2a-1 \leq a, a \leq 1$$

즉, $0 < a \leq 1$ 인 경우 $f(1) = 2 > 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $\frac{2a-1}{a} \geq 3$ 인 경우

$$2a-1 \geq 3a$$

$a \leq -1$ 이므로 조건을 만족시키는 양수 a 는 존재하지 않는다.

(iii) $1 < \frac{2a-1}{a} < 3$, 즉 $a > 1$ 인 경우

ⓐ에서 $-\frac{a^2-4a+1}{a} > 0$ 이어야 하므로

$$a^2-4a+1 < 0, 2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3}$$

즉, $1 < a < 2+\sqrt{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키는 양수 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 2+\sqrt{3} \text{이고, } k=f(0)=3a \text{이므로}$$

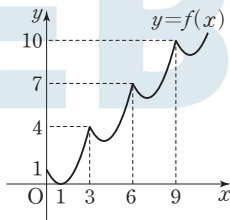
$$0 < k < 6+3\sqrt{3}$$

이때 $11 < 6+3\sqrt{3} < 12$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최댓값은 11이다.

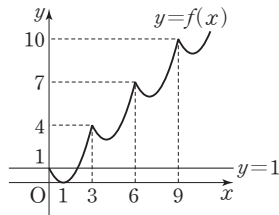
답 11

24

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



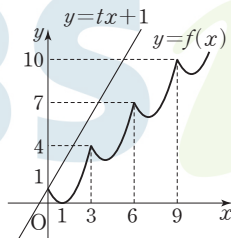
ㄱ. $t=0$ 일 때, 직선 $y=1$ 은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 점에서 만나므로 $g(0)=2$ (참)



ㄴ. $t > 1$ 일 때, 직선 $y=tx+1$ 은 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 점 $(0, 1)$ 에서만 만난다.

즉, $t > 1$ 일 때, $g(t)=1$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = 1 \text{ (거짓)}$$

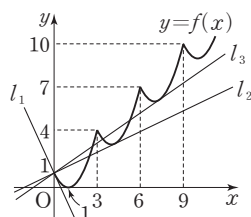


ㄷ. 그림과 같이 점 $(0, 1)$ 에서 곡선 $y=(x-1)^2$ 에 접하는 직선을 l_1 ,

$3 < x < 6$ 인 점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하고 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선을 l_2 ,

$6 < x < 9$ 인 점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하고 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선을 l_3 ,

...이라 하고, 자연수 n 에 대하여 직선 l_n 의 기울기를 t_n 이라 하자.



$$(x-1)^2=tx+1 \text{에서 } x^2-(t+2)x=0 \text{이므로}$$

$t=-2$ 일 때 직선 $y=-2x+1$ 은 점 $(0, 1)$ 에서 곡선

$y=(x-1)^2$ 에 접한다.

즉, $t_1=-2$ 이고 $t \leq -2$ 일 때 $g(t)=1$, $-2 < t < t_2$ 일 때 $g(t)=2$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=-2$ 에서 불연속이고 $a_1=-2$ 이다.

또 $g(t_2)=3$ 이고 $t_2 < t < t_3$ 일 때 $g(t)=4$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=t_2$ 에서 불연속이고 $a_2=t_2$ 이다.

마찬가지 방법으로 하면 $a_3=t_3$ 임을 알 수 있다.

즉, 직선 $y=a_3x+1$ 이 $6 < x < 9$ 인 점에서 곡선 $y=(x-7)^2+6$ 에 접하므로 이차방정식

$$(x-7)^2+6=a_3x+1, \text{ 즉 } x^2-(a_3+14)x+54=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D=(a_3+14)^2-4 \times 54=0$$

$$(a_3+14)^2=4 \times 9 \times 6$$

$$a_3 > 0 \text{이므로 } a_3+14=6\sqrt{6}$$

$$\text{그러므로 } a_3=-14+6\sqrt{6} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

(필수 유형 ①)

$g(x) = \{f(x)\}^2$ 이라 하자.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$ 에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a) \text{이어야 한다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a^-} (-2x+6)^2 = (-2a+6)^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (2x-a)^2 = a^2,$$

$$g(a) = \{f(a)\}^2 = a^2 \text{이므로}$$

$$(-2a+6)^2 = a^2 \text{에서 } a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$(a-2)(a-6) = 0$$

$$a=2 \text{ 또는 } a=6$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a 의 값의 합은 $2+6=8$

답 ④

25

함수 $f(x)$ 가 $x=1, x=3$ 에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$ 가 $x=1, x=3$ 에서 연속이면 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 연속이다.

함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

$$1 \times g(1) = 0 \times g(1) = 1 \times g(1)$$

$$\text{즉, } g(1) = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

또 함수 $h(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = h(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)g(x) = f(3)g(3)$$

$$2 \times g(3) = 0 \times g(3) = 2 \times g(3)$$

$$\text{즉, } g(3) = 0 \quad \dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$g(x) = a(x-1)(x-3) \quad (\text{단, } a \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\text{이때 } h(0) - h(4) = -6 \text{이므로 } 2 \times g(0) - 1 \times g(4) = -6$$

$$6a - 3a = -6$$

$$a = -2$$

즉,

$$g(x) = -2(x-1)(x-3) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$= -2(x-2)^2 + 2$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $k=2, M=2$ 이므로 $k+M=2+2=4$

답 ④

26

(i) $x < 0$ 일 때

$$g(x) = x + 3x + 4 = 4x + 4 \text{이므로 } x \neq -1 \text{일 때}$$

$$h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{4x + 4} = \frac{(x+1)(x-2)}{4(x+1)} = \frac{x-2}{4}$$

그러므로 $x < 0$ 에서 함수 $h(x)$ 가 연속하려면

$$h(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{4} = -\frac{3}{4}$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } a = -\frac{3}{4}$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$g(x) = x - 3x + 4 = -2x + 4 \text{이므로 } x \neq 2 \text{일 때}$$

$$h(x) = \frac{x^2 - x - 2}{-2x + 4} = \frac{(x+1)(x-2)}{-2(x-2)} = -\frac{x+1}{2}$$

그러므로 $x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 가 연속하려면

$$h(2) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } b = -\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a \times b = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

답 ④

27

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 실근은 방정식 $h(x) = 0$ 의 실근과 같다.

$$h(x) = x^5 + x^3 + x - k - 1 \text{에서 } h(1) = 2 - k, h(2) = 41 - k \text{이고,}$$

방정식 $h(x) = 0$ 이 열린구간 $(1, 2)$ 에서 오직 하나의 실근을 가지려면

$$h(1)h(2) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(2-k)(41-k) < 0$$

$$2 < k < 41$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 38이다.

답 38

05

다항함수의 미분법

정답

본문 52~63쪽

(필수 유형 ①)	11	01 ①	02 ③	03 ④
(필수 유형 ②)	⑤	04 ⑤	05 ①	06 ④
(필수 유형 ③)	③	07 ④	08 ④	09 ②
(필수 유형 ④)	③	10 ④	11 ⑤	12 20
(필수 유형 ⑤)	6	13 ③	14 51	15 ②
(필수 유형 ⑥)	2	16 ③	17 ⑤	18 ①
(필수 유형 ⑦)	③	19 ⑤	20 ①	21 ③
(필수 유형 ⑧)	⑤	22 ③	23 ③	24 ②
		25 ②		
(필수 유형 ⑨)	③	26 ①	27 ②	28 ④
		29 ⑤	30 ③	
(필수 유형 ⑩)	⑤	31 ③	32 ④	33 ④
(필수 유형 ⑪)	22	34 ⑤	35 ⑤	36 13

(필수 유형 ①)

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ 에서 x 의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균 변화율은

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{4^3 - 6 \times 4^2 + 5 \times 4}{4} = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5 \text{에서 } f'(a) = 3a^2 - 12a + 5$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = f'(a) \text{에서 } -3 = 3a^2 - 12a + 5$$

$$3a^2 - 12a + 8 = 0$$

$$g(a) = 3a^2 - 12a + 8 \text{이라 하면}$$

$$g(a) = 3(a-2)^2 - 4 \text{에서 } g(2) = -4 < 0 \text{이고,}$$

$$g(0) = 8 > 0, g(4) = 8 > 0$$

이므로 이차방정식 $g(a) = 0$ 은 열린구간 $(0, 4)$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이므로 $p=3, q=8$

$$\text{따라서 } p+q=3+8=11$$

답 11

01

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 1\} = f(2) - 1 = 0 \text{이므로 } f(2) = 1$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \text{이므로}$$

$$f'(2) = 5$$

한편, 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 2에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{f(4)-1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(4)-1}{2} = \frac{1}{2}f'(2) = \frac{5}{2}$$

따라서 $f(4)=6$

02

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(3+h)\}^2 - \{f(3)\}^2}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(3+h)-f(3)\}\{f(3+h)+f(3)\}}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \times \frac{f(3+h)+f(3)}{2} \right\} \\ &= f'(3) \times \frac{f(3)+f(3)}{2} = f'(3) \times f(3) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(3) \times f(3) = 16$$

$$\text{따라서 } f'(3) = \frac{16}{f(3)} = \frac{16}{2} = 8$$

답 ①

03

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{x-1} = 4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+3\} = f(1)+3=0 \text{ 이므로 } f(1)=-3$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{ 이므로 } f'(1)=4$$

한편, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)}{x-1} = 10$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} = f(1)+g(1)=0 \text{ 이므로}$$

$$g(1) = -f(1) = -(-3) = 3$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+g(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \right\} \\ &= f'(1) + g'(1) = 10 \end{aligned}$$

이므로

$$g'(1) = 10 - f'(1) = 10 - 4 = 6$$

$$\text{따라서 } g(1) + g'(1) = 3 + 6 = 9$$

답 ③

답 ④

(필수 유형 2)

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$ 에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 미분가능하면 $x=-2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \text{ 이어야 한다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x = -4$$

$$f(-2) = 4 - 2a + b$$

이므로

$$4 - 2a + b = -4 \text{ 에서}$$

$$2a - b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x^2+ax+b)-(4-2a+b)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+ax-4+2a}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+a-2) = a-4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-(4-2a+b)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-(-4)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2 = 2$$

이므로 $a-4=2$ 에서 $a=6$

이것을 ①에 대입하면

$$2 \times 6 - b = 8, \quad b = 4$$

$$\text{따라서 } a+b = 6+4 = 10$$

답 ⑤

04

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-1$ 에서도 미분가능하다.

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2+x-3) = a-4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (bx+1) = -b+1$$

$$f(-1) = -b+1$$

이므로 $a-4 = -b+1$ 에서

$$a+b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(ax^2+x-3)-(-b+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(ax^2+x-3)-(a-4)}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(ax-a+1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax-a+1) = -2a+1 \\
 \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(bx+1)-(-b+1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{b(x+1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} b = b
 \end{aligned}$$

이므로 $-2a+1=b$ 에서

$$2a+b=1 \quad \text{..... ㉔}$$

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$$a=-4, b=9$$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2+x-3 & (x < -1) \\ 9x+1 & (x \geq -1) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 f(2)-f(-2) &= (18+1)-(-16-2-3) \\
 &= 19-(-21)=40
 \end{aligned}$$

답 ⑤

05

$$\begin{aligned}
 \neg. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)+1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2-1)+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \text{ (좌)}
 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x^3) = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

즉, 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이 아니므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1^-} |1-x^3| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1^+} |3-3x| = 0$$

$$|f(1)| = 0$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x)| = |f(1)|$ 이므로 함수 $|f(x)|$ 는

$x=1$ 에서 연속이다.

그런데

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|1-x^3|-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^3}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2-x-1) = -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|3-3x|-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3
 \end{aligned}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|f(x)|-|f(1)|}{x-1}$ 이므로

함수 $|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

06

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $0 \leq x \leq k$ 에서의 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 $f(k)$ 만큼 평행이동하거나 x 축의 방향으로 $-k$ 만큼, y 축의 방향으로 $-f(k)$ 만큼 평행이동하면서 반복되므로 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$(i) \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (x^3-6x^2+10x) = k^3-6k^2+10k$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+k) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x)+f(k)\} \\
 &= f(0)+f(k) = k^3-6k^2+10k
 \end{aligned}$$

$$f(k) = k^3-6k^2+10k$$

에서 $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=k$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(k+h)^3-6(k+h)^2+10(k+h)-k^3+6k^2-10k}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3k^2h+3kh^2+h^3-12kh-6h^2+10h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (3k^2+3kh+h^2-12k-6h+10)$$

$$= 3k^2-12k+10$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(k+h)-f(k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(k)+f(h)-f(k)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3-6h^2+10h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} (h^2-6h+10) = 10$$

이므로 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하려면

$$3k^2-12k+10=10 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 3k(k-4)=0$$

따라서 $k > 0$ 이므로 $k=4$

답 ④

(필수 유형 ③)

$g(x) = x^2 f(x)$ 에서

$$g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$$

따라서

$$\begin{aligned}
 g'(2) &= 2 \times 2 \times f(2) + 2^2 \times f'(2) \\
 &= 4 \times 1 + 4 \times 3 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

답 ③

07

$f(x) = (x^2+1)(x^2+ax-3)$ 에서

$$f'(x) = 2x(x^2+ax-3) + (x^2+1)(2x+a)$$

$$f'(1) = 2(a-2) + 2(a+2) = 4a$$

$$f'(2) = 4(2a+1) + 5(a+4) = 13a+24$$

이때 $f'(2)=f'(1)+60$ 이므로
 $13a+24=4a+60, 9a=36$
 따라서 $a=4$

답 ④

08

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}=3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\}=f(1)-2=0$ 이므로 $f(1)=2$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ 이므로 $f'(1)=3$

한편, $g(x)=(3x^2+2)f(x)$ 에서

$g'(x)=6xf(x)+(3x^2+2)f'(x)$ 이므로

$g(1)=5f(1)=5 \times 2=10$

$g'(1)=6f(1)+5f'(1)=6 \times 2+5 \times 3=27$

따라서 $g(1)+g'(1)=10+27=37$

답 ④

09

$\frac{1}{x}=t$ 라 하면 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow 0+$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(2+\frac{3}{x}\right) - 21 \right\} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2+3t) - 21}{t} = f(2)$ ㉠

㉠에서 $t \rightarrow 0+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{t \rightarrow 0+} \{f(2+3t) - 21\} = f(2) - 21 = 0$ 이므로 $f(2) = 21$

이때 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2+3t) - 21}{t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2+3t) - f(2)}{3t} = 3f'(2)$

이므로 $3f'(2) = f(2) = 21$ 에서 $f'(2) = 7$

한편, $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ 에서

$f(2) = 16 + 4a - 10 + b = 21$ 이므로

$4a + b = 15$ ㉡

$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 5$ 에서

$f'(2) = 24 + 4a - 5 = 7$ 이므로 $4a = -12, a = -3$

$a = -3$ 을 ㉡에 대입하면

$-12 + b = 15, b = 27$

따라서 $a + b = (-3) + 27 = 24$

답 ②

필수 유형 ④

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간

$(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(1)=3$ 이므로 $f'(c)=\frac{f(5)-3}{4}$ 이고, 조건 (나)

에 의하여 $1 < x < 5$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 5$ 이므로

$$f'(c) = \frac{f(5)-3}{4} \geq 5$$

따라서 $f(5) \geq 23$ 이므로 구하는 $f(5)$ 의 최솟값은 23이다.

답 ③

참고

$f(x) = 5x - 2$ 이면 $f(5) = 23$ 이고 주어진 조건을 만족시킨다.

10

다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$ 에서 미분가능하다.

그러므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간

$(2, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에 의하여 $f(4) = 10$ 이므로 $f'(c) = \frac{10-f(2)}{2}$ 이고, 조건

(나)에 의하여 $2 < x < 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| \leq 6$ 이므로

$$|f'(c)| = \left| \frac{10-f(2)}{2} \right| \leq 6$$

$$|10-f(2)| \leq 12, -12 \leq 10-f(2) \leq 12, -2 \leq f(2) \leq 22$$

따라서 $M = 22, m = -2$ 이므로

$$M - m = 22 - (-2) = 24$$

답 ④

참고

$f(x) = -6x + 34$ 이면 $f(2) = 22$ 이면서 조건을 만족시키고,

$f(x) = 6x - 14$ 이면 $f(2) = -2$ 이면서 조건을 만족시킨다.

11

$y = x^3 - 2x - 5$ 에서 $y' = 3x^2 - 2$ 이므로 곡선 $y = x^3 - 2x - 5$ 의 접선 중 기울기가 1인 접선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$3t^2 - 2 = 1$$

$$t = 1 \text{ 또는 } t = -1$$

(i) $t = 1$ 일 때, 접점의 좌표가 $(1, -6)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + 6 = x - 1, \text{ 즉 } y = x - 7$$

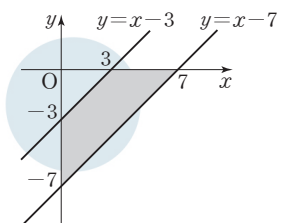
(ii) $t = -1$ 일 때, 접점의 좌표가 $(-1, -4)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + 4 = x + 1, \text{ 즉 } y = x - 3$$

(i), (ii)에 의하여 두 직선 l_1, l_2 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 사각형은 그림과 같다.

따라서 구하는 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 7^2 - \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{40}{2} = 20$$



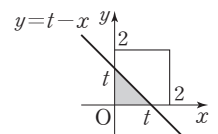
답 ⑤

12

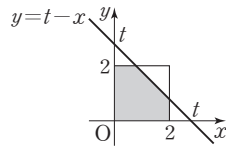
(i) $t \leq 0$ 일 때, $f(t) = 0$

(ii) $0 < t \leq 2$ 일 때,

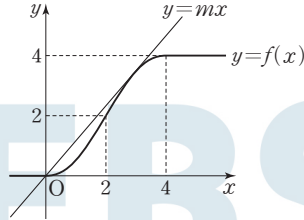
$$f(t) = \frac{1}{2}t^2$$



(iii) $2 < t < 4$ 일 때,
 $f(t) = 4 - \frac{1}{2}(4-t)^2$



(iv) $t \geq 4$ 일 때, $f(t) = 4$
 (i)~(iv)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=mx$ 가 $2 < x < 4$ 인 점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때의 기울기 m 의 값을 구해 보자.

$2 < x < 4$ 일 때, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$ 이므로 접점의 x 좌표를 s 라 하면

$$-\frac{1}{2}s^2 + 4s - 4 = ms \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = -x + 4 \text{이므로}$$

$$-s + 4 = m \quad \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$-\frac{1}{2}s^2 + 4s - 4 = -s^2 + 4s, s^2 = 8$$

$2 < s < 4$ 이므로 $s = 2\sqrt{2}$ 이고 $m = 4 - 2\sqrt{2}$

즉, 함수 $|f(x) - mx|$ 가 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않으려면

$$m < 0 \text{ 또는 } m \geq 4 - 2\sqrt{2}$$

이어야 하므로 조건을 만족시키는 양수 m 의 최솟값은 $4 - 2\sqrt{2}$ 이다.

따라서 $a = 4, b = -2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$$

답 20

(필수 유형 6)

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 + 3(a^2 - 8a) \leq 0$$

$$4a(a - 6) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq 6$$

따라서 구하는 실수 a 의 최댓값은 6이다.

답 6

13

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-3, 0)$ 에서 감소하므로 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$ 이고, 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가하므로 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 이다.

그러므로 $f'(0) = 0$ 이어야 한다.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이므로 } f'(0) = b = 0$$

$$\text{즉, } f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

이때 구간 $(-3, 0)$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이고 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $f'(-3) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{그러므로 } f'(-3) = 27 - 6a \leq 0 \text{에서 } a \geq \frac{9}{2}$$

따라서 $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$ 에서

$$f(1) = 2 + a \geq 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

이므로 구하는 $f(1)$ 의 최솟값은 $\frac{13}{2}$ 이다.

답 ③

14

닫힌구간 $[n, n+2]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 일대일함수가 되려면 이 구간에서 $f(x)$ 가 증가하거나 감소해야 한다. 즉, 구간 $[n, n+2]$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이거나 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$= 3(x^2 - 6x + 8)$$

$$= 3(x-2)(x-4)$$

이므로 구간 $(-\infty, 2]$ 에서 $f'(x) \geq 0$, 구간 $[2, 4]$ 에서 $f'(x) \leq 0$,

구간 $[4, \infty)$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n 의 값은

2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

이므로 구하는 합은 51이다.

답 51

15

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x \neq a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x - a + 2 & (x \geq a) \\ x^3 + x^2 - x + a + 2 & (x < a) \end{cases}$$

에서

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & (x > a) \\ 3x^2 + 2x - 1 & (x < a) \end{cases}$$

$x > a$ 일 때,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \text{이고 이차방정식 } 3x^2 + 2x + 1 = 0 \text{의 판별식을 } D$$

라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 3 \times 1 = -2 < 0$$

이므로 실수 a 의 값에 관계없이 $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) > 0 \text{이다.}$$

$x < a$ 일 때,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

이므로 $x < a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이려면 $a \leq -1$ 이어야 한다.

따라서 구하는 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.

답 ②

필수 유형 6

$$f(x) = x^4 + ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$4 + 2a = 0, a = -2$$

이때 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖고 주어진 조건에 의하여 극댓값이 4이므로

$$f(0) = b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b = (-2) + 4 = 2$$

답 2

16

삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 가 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대, $x=5$ 에서 극소이어야 한다.

$$\text{즉, } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{에서}$$

$$f'(1) = 0 \text{이므로}$$

$$3 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } f'(5) = 0 \text{에서}$$

$$75 + 10a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

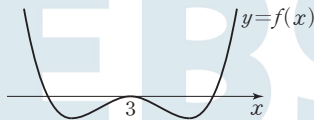
$$a = -9, b = 15$$

$$\text{따라서 } a + b = (-9) + 15 = 6$$

답 ③

17

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 의 한 실근을 $3+a$ 라 하면 다른 한 실근은 $3-a$ 이므로

$$f(x) = (x-3+a)(x-3-a)(x-3)^2 \text{ (단, } a \text{는 양의 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

$$\text{즉, } f(x) = \{(x-3)^2 - a^2\}(x-3)^2 = (x^2 - 6x + 9 - a^2)(x^2 - 6x + 9)$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-6)(x^2-6x+9) + (x^2-6x+9-a^2)(2x-6) \\ &= 2(x-3)\{2(x^2-6x+9) - a^2\} \\ &= 2(x-3)\{2(x-3)^2 - a^2\} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=3$ 또는 $x=3 \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=3 \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ 에서 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -16 이므로

$$f(x) = (x-3)^4 - a^2(x-3)^2 \text{에서}$$

$$f\left(3 + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4 - a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2} = -\frac{a^4}{4} = -16,$$

$$f\left(3 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4 - a^2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2} = -\frac{a^4}{4} = -16$$

즉, $a^4=64$ 에서 $a^2=8$ 이므로

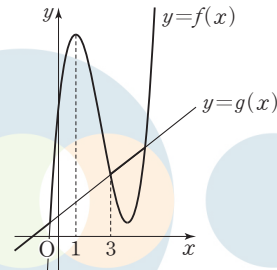
$$f(x) = (x-3)^4 - 8(x-3)^2$$

$$\text{따라서 } f(0) = 3^4 - 8 \times 3^2 = 81 - 72 = 9$$

답 ⑤

18

조건 (가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 또 조건 (나)를 만족시키려면 그림과 같이 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=3$ 인 점에서 만나야 한다.



$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 18 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \text{이고}$$

$$f'(1) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$6 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3) = g(3) \text{이어야 하므로}$$

$$54 + 9a + 3b + 18 = 9 \text{에서}$$

$$3a + b = -21 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -15, b = 24 \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 18 \text{이고}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은

$$f(1) + f(4) = 29 + 2 = 31$$

답 ①

필수 유형 7

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 12 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 $f(-1)=-7$ 을 갖고, $x=3$ 에서 극솟값 $f(3)=-39$ 를 갖는다.

한편, 조건 (가)에서 $xg(x) = |xf(x-p) + qx|$ 이므로

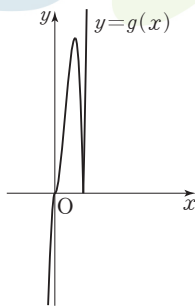
$$g(x) = \begin{cases} |f(x-p) + q| & (x > 0) \\ -|f(x-p) + q| & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$|f(-p) + q| = -|f(-p) + q|$$

즉, $f(-p) + q = 0$

이때 함수 $y = |f(x-p) + q|$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동시킨 후 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 것인데, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 실수 a 의 개수가 1이어야 하므로 $p=1$, $q=7$ 이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $p+q=1+7=8$

19

- ㄱ. 실수 전체의 집합에서 도함수 $f'(x)$ 가 정의되어 있으므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)
 - ㄴ. $f'(1)=0$ 이고 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이다. (참)
 - ㄷ. (i) $x \leq 1$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이고 $x=-1$ 에서만 $f'(x)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.
 (ii) $1 < x < 3$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다.
 (iii) $x \geq 3$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이고 $x=3$ 에서만 $f'(x)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.
 (i), (ii), (iii)에 의하여 $x \geq 1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(3) > 0$ 이면 $x \geq 1$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않는다.
 한편, $x \leq -1$ 일 때 $f'(x) = -x-1$ 이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 $f(c) < 0$ 인 c 가 구간 $(-\infty, -1)$ 에 존재한다. 이때 $f(1) > f(3) > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=0$ 인 x 가 구간 $(c, 1)$ 에 존재한다. 그런데 $x \leq 1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점에서 서만 만난다. (참)
- 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

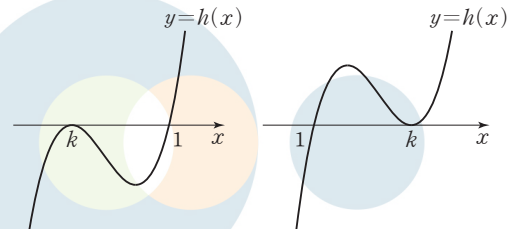
20

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 또 조건 (나)에 의하여 $h(1)=0$ 이므로

$$h(x) = (x-1)(x-k)^2 \quad (\text{단, } k \text{는 } 1 \text{이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

즉, 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1]

[그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x-k)^2 + 2(x-1)(x-k) \\ &= (x-k)(3x-k-2) \end{aligned}$$

이고 $h'(x)=0$ 에서

$$x=k \text{ 또는 } x = \frac{k+2}{3} \text{ 이므로 } \frac{k+2}{3} = 0$$

$$k = -2$$

따라서 $h(x) = (x-1)(x+2)^2$ 이고

$$f(x) = h(x) + g(x) = (x-1)(x+2)^2 + x + 3$$

이므로

$$f(2) = 1 \times 16 + 5 = 21$$

답 ①

21

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x^2 - x - 2)$$

$$= 12x(x+1)(x-2)$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때 조건 (가)를 만족시키려면

$$f(-1) = 0 \text{ 또는 } f(0) = 0 \text{ 또는 } f(2) = 0$$

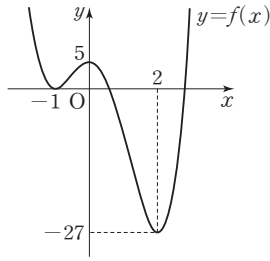
이어야 한다.

(i) $f(-1)=0$ 인 경우

$$f(-1) = k - 5 = 0 \text{ 에서 } k = 5 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5 \text{ 이고, 함수 } y=f(x) \text{ 의 그래프는}$$

[그림 1]과 같다.



[그림 1]

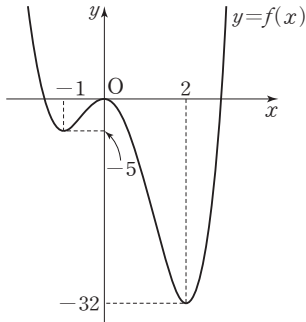
이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(ii) $f(0)=0$ 인 경우

$f(0)=k=0$ 이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와

같다.



[그림 2]

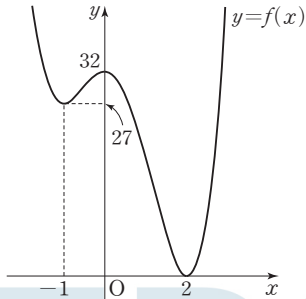
이 경우 조건 (나)를 만족시킨다.

(iii) $f(2)=0$ 인 경우

$f(2)=k-32=0$ 에서 $k=32$ 이므로

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+32$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

[그림 3]과 같다.



[그림 3]

이 경우 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ㄱ. ㉠에서 방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. (i)에서 $k=5$ 인 경우 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키지만 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 0이 아니다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 k 의 값은

$k=5$ 또는 $k=0$

이므로 그 합은 5이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

(필수 유형 ⑧)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ 이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = c$$

$$g(0) = f(0) = c \text{이므로 } c = \frac{1}{2}$$

한편, 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} \text{ 이어야 한다.}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = b$$

이므로 $b=0$

그러므로 $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$, $f'(x)=3x^2+2ax$

$$\text{ㄱ. } g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2} \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } f'(x)=x(3x+2a)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}a$$

이때 $-\frac{2}{3}a < 0$ 이면 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 조건을 만족

시키지 않는다. 즉, $-\frac{2}{3}a > 0$ 이므로 $a < 0$

$$\text{그러므로 } g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a < \frac{3}{2} \text{ (참)}$$

ㄷ. $x \geq 0$ 일 때 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$-\frac{2}{3}a$...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	극소	↗

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=-\frac{2}{3}a$ 에서 극소이면서 최소이므로

$$g\left(-\frac{2}{3}a\right)=f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$$

에서

$$a^3=-\frac{27}{8}, a=-\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 이므로

$$g(2)=f(2)=8-\frac{3}{2} \times 4 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

22

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a	\	$a-20$	/	$a+32$

그러므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 $a-20$ 을 갖고, $x=4$ 일 때 최댓값 $a+32$ 를 갖는다.

즉, $a-20 = -18$ 이므로 $a=2$

이때 $M = a+32 = 2+32 = 34$

따라서 $a+M = 2+34 = 36$

답 ③

23

$y = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 4$ 에서 $y' = 8x^3 - 6x - 2$ 이므로 x 좌표가 양수인 점에서 곡선 C 에 접하는 접선의 접점의 x 좌표를 t , 접선의 기울기를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = 8t^3 - 6t - 2 \quad (t > 0)$$

이때 $f'(t) = 24t^2 - 6 = 0$ 에서 $t = \frac{1}{2}$ 이므로 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	(-2)	\	-4	/

그러므로 함수 $f(t)$ 는 $t > 0$ 에서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 -4 를 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $(\frac{1}{2}, \frac{19}{8})$ 이고 기울기는 -4 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{19}{8} = -4(x - \frac{1}{2})$$

$$y = -4x + \frac{35}{8}$$

따라서 구하는 접선의 y 절편은 $\frac{35}{8}$ 이므로

$$p+q = 8 + \frac{35}{8} = 43$$

답 ③

24

$g(x) = x^2 - 6x + 10$ 이라 하자.

$$g(t) = g(t+2) \text{에서}$$

$$t^2 - 6t + 10 = (t+2)^2 - 6(t+2) + 10$$

$$4t = 8, t = 2$$

(i) $0 < t < 2$ 일 때,

$$g(t) > g(t+2) \text{이므로}$$

$$f(t) = t \times g(t+2) = t\{(t+2)^2 - 6(t+2) + 10\} = t^3 - 2t^2 + 2t$$

이때 $f'(t) = 3t^2 - 4t + 2$ 이고 이차방정식 $f'(t) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - 6 = -2 < 0$$

이므로 $f'(t) > 0$ 이다.

즉, $0 < t < 2$ 에서 함수 $f(t)$ 는 증가한다.

(ii) $t > 2$ 일 때,

$$g(t) \leq g(t+2) \text{이므로}$$

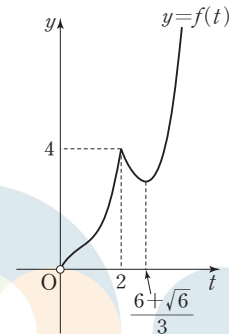
$$f(t) = t \times g(t) = t^3 - 6t^2 + 10t$$

이때 $f'(t) = 3t^2 - 12t + 10$ 이고 $f'(t) = 0$ 에서 $t = \frac{6 + \sqrt{6}}{3}$ 이며,

$t = \frac{6 + \sqrt{6}}{3}$ 의 좌우에서 $f'(t)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수

$f(t)$ 는 $t = \frac{6 + \sqrt{6}}{3}$ 에서 극소이다.

$f(2) = 4$ 이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(2) = 4$ 이고 $t > 2$ 에서 $f(t) = 4$ 이면

$$t^3 - 6t^2 + 10t = 4 \text{에서}$$

$$t^3 - 6t^2 + 10t - 4 = 0$$

$$(t-2)(t^2 - 4t + 2) = 0$$

$$t > 2 \text{이므로 } t = 2 + \sqrt{2}$$

그러므로 구간 $(0, a]$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 양수 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a \leq 2 + \sqrt{2}$$

따라서 $M = 2 + \sqrt{2}$, $m = 2$ 이므로

$$M + m = 4 + \sqrt{2}$$

답 ②

25

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 13$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2 \text{이므로}$$

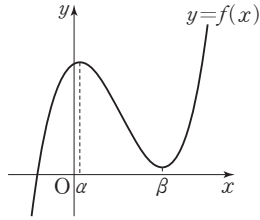
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{3}$$

이때 $\alpha = \frac{5 - \sqrt{19}}{3}$, $\beta = \frac{5 + \sqrt{19}}{3}$ 라 하고, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를

표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$k < \beta, k+2 > \beta$ 일 때, $f(k)=f(k+2)$ 이면
 $k^3 - 5k^2 + 2k + 13 = (k+2)^3 - 5(k+2)^2 + 2(k+2) + 13$
 $6k^2 - 8k - 8 = 0$

$2(3k+2)(k-2) = 0$

$\beta - 2 < k < \beta$ 이므로 $k=2$

(i) $t+1 \leq \alpha$, 즉 $t \leq \alpha-1$ 일 때,

$g(t) = f(t+1)$

(ii) $t-1 \leq \alpha \leq t+1$, 즉 $\alpha-1 \leq t \leq \alpha+1$ 일 때,

$g(t) = f(\alpha)$

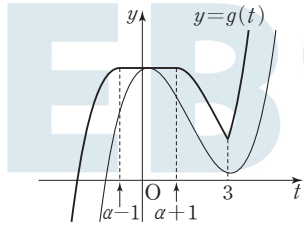
(iii) $\alpha \leq t-1 \leq 2$, 즉 $\alpha+1 \leq t \leq 3$ 일 때,

$g(t) = f(t-1)$

(iv) $t-1 \geq 2$, 즉 $t \geq 3$ 일 때,

$g(t) = f(t+1)$

(i)~(iv)에 의하여 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $g(t)$ 는 $t=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 $a=3$

$t=2$ 일 때, $g(t)=f(t-1)$ 이므로

$g'(a-1) = g'(2) = f'(1) = 3 - 10 + 2 = -5$

$t=4$ 일 때, $g(t)=f(t+1)$ 이므로

$g'(a+1) = g'(4) = f'(5) = 3 \times 5^2 - 10 \times 5 + 2 = 27$

따라서 $g'(a-1) + g'(a+1) = -5 + 27 = 22$

(필수 유형 ①)

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + k$ 라 하면

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값) > 0이고 (극솟값) < 0이어야 한다.

즉, $f(-1) = 7 + k > 0$ 에서 $k > -7$ 이고

$f(2) = k - 20 < 0$ 에서 $k < 20$ 이므로

$-7 < k < 20$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 는

$-6, -5, -4, \dots, 17, 18, 19$

이므로 그 개수는 26이다.

답 ③

26

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$ 라 하자.

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x+1)(x-1)(x-2)$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

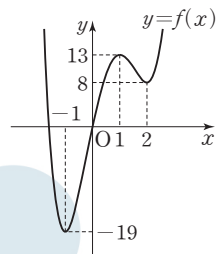
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x) - k = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 따라서 $k=8$ 또는 $k=13$ 이므로 조건을 만족시키는 모든 상수 k 의 값의 합은

$8 + 13 = 21$



답 ①

27

$f(x) = x^3 - 3x + n - 2$ 라 하자.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	n	↘	$n-4$	↗

(i) $n > 0$ 이므로 $n-4 < 0$ 이면 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 양수이고 극솟값이 음수이다. 즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. 그러므로 $n < 4$ 일 때, $a_n = 3$ 이다.

(ii) $n-4 = 0$ 이면 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 0이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 접한다. 즉, 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 그러므로 $n = 4$ 일 때, $a_n = 2$ 이다.

(iii) $n-4 > 0$ 이면 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값이 모두 양수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $n > 4$ 일 때, $a_n = 1$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n < 4) \\ 2 & (n = 4) \\ 1 & (n > 4) \end{cases}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 3 \times 3 + 2 + 1 \times 6 = 17$$

답 ②

28

방정식 $f(x)=g(x)$ 에서

$$2x^3 + 5x^2 - 7x = 2x^2 + 5x + a$$

$$2x^3 + 3x^2 - 12x = a$$

$$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

이므로 $h'(x)=0$ 에서

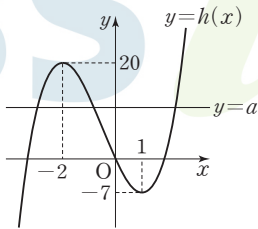
$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗

그러므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 점의 x 좌표이므로 주어진 조건을 만족시키려면 함수 $y=h(x)$ 의 그래프



가 직선 $y=a$ 와 서로 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 실근이 모두 양수일 수는 없으므로 그림과 같이 음의 실근 두 개와 양의 실근 한 개를 가져야 한다.

따라서 $0 < a < 20$ 이어야 하므로 조건을 만족시키는 모든 정수 a 의 개수는 19이다.

답 ④

29

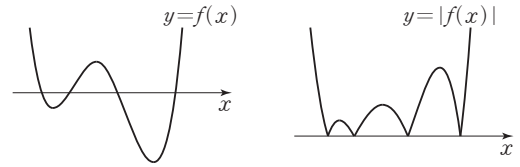
삼차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하이면 함수 $|f(x)|$ 가 서로 다른 세 점에서 극소일 수 없으므로 방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값 중 양수인 것이 있으면 이 값이 함수 $|f(x)|$ 의 극솟값이기도 하므로 함수 $|f(x)|$ 의 극솟값이 모두 0이라는 조건을 만족시키지 않는다.

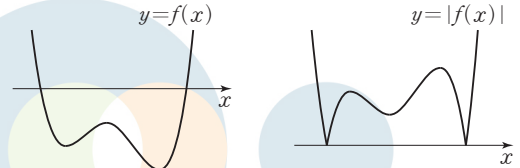
즉, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 모두 0보다 작거나 같아야 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 모두 음수인 경우

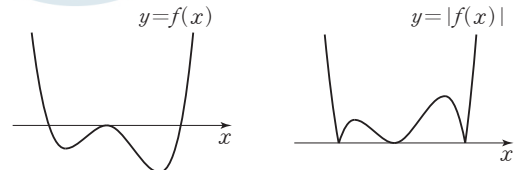
- ㉠ 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 양수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$ 가 극소인 서로 다른 x 의 값이 4개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



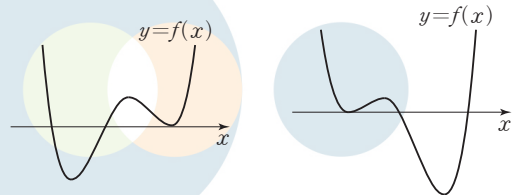
- ㉡ 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 음수이면 다음 그림과 같이 함수 $|f(x)|$ 의 0이 아닌 극솟값이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.



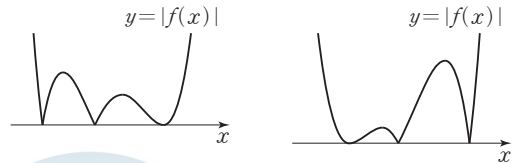
- ㉢ 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 0이면 다음 그림과 같이 조건을 모두 만족시킨다.



- (ii) 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 하나는 0이고 다른 하나는 음수인 경우 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우 중 하나이다.

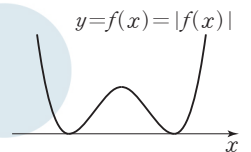


두 경우 모두 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프가 다음과 같으므로 조건을 모두 만족시킨다.



- (iii) 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 모두 0인 경우

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 같다. 즉, 함수 $|f(x)|$ 가 극소인 서로 다른 x 의 값이 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



- ㄱ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉡과 (ii)의 경우 모두 함수 $|f(x)|$ 가 극대인 서로 다른 x 의 값이 2개이다. (참)
- ㄴ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉡과 (ii)의 경우 모두 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 0보다 크거나 같다. (참)
- ㄷ. 조건을 만족시키는 (i)의 ㉡과 (ii)의 경우 모두 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30

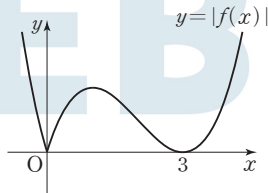
함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a ($a > 0$)이라 하면 조건 (가)에 의하여 $f(x) = ax(x-3)^2$ 또는 $f(x) = ax^2(x-3)$

으로 놓을 수 있다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 m 의 값이 $\frac{9}{2}$ 뿐이어야 한다.

(i) $f(x) = ax(x-3)^2$ 인 경우

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

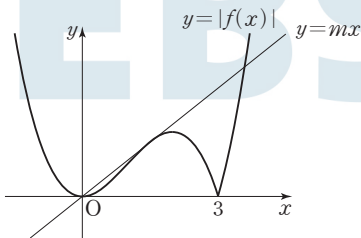
$f(x) = ax(x-3)^2 = ax^3 - 6ax^2 + 9ax$ 에서

$f'(x) = 3ax^2 - 12ax + 9a$ 이고 $f'(0) = 9a$ 이므로 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 는 $m = 9a$ 일 때 서로 다른 두 점에서 만나고, $0 < m < 9a$ 일 때 서로 다른 세 점에서 만난다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x) = ax^2(x-3)$ 인 경우

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 직선 $y = mx$ 가 제1사분면에서 함수 $y = -f(x)$ 의 그래프와 접할 때 m 의 값을 m_1 이라 하면 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 는 $m = m_1$ 일 때 서로 다른 세 점에서 만나고, $m > m_1$ 일 때 서로 다른 두 점에서, $0 < m < m_1$ 일 때 서로 다른 네 점에서, $m \leq 0$ 일 때 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건 (나)를 만족시킨다. 이때 $m_1 = \frac{9}{2}$ 이어야 한다.

(i), (ii)에 의하여

$f(x) = ax^2(x-3)$ (단, a 는 0보다 큰 상수)

로 놓을 수 있고, 직선 $y = \frac{9}{2}x$ 가 제1사분면에서 곡선 $y = -ax^2(x-3)$ 에 접해야 한다.

$y = -ax^2(x-3) = -ax^3 + 3ax^2$ 에서

$y' = -3ax^2 + 6ax$ 이므로 접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)이라 하면

$$-at^3 + 3at^2 = \frac{9}{2}t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-3at^2 + 6at = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이어야 한다. $t > 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$-at^2 + 3at = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } -3at^2 + 6at = -at^2 + 3at$$

$$2at^2 - 3at = 0, at(2t - 3) = 0$$

$$a \neq 0, t > 0 \text{이므로 } t = \frac{3}{2}$$

이것을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$-\frac{9}{4}a + \frac{9}{2}a = \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{4}a = \frac{9}{2}, a = 2$$

그러므로 $f(x) = 2x^2(x-3)$ 이고

$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$x = 0$ 또는 $x = 2$

따라서 함수 $|f(x)|$ 는 $x = 2$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$|f(2)| = |2 \times 4 \times (-1)| = 8$$

답 ③

참고

직선 $y = \frac{9}{2}x$ 가 제1사분면에서 곡선 $y = -ax^2(x-3)$ 에 접하도록 하는 실수 a 의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

조건을 만족시키려면 방정식 $\frac{9}{2}x = -ax^2(x-3)$, 즉

$$x(ax^2 - 3ax + \frac{9}{2}) = 0 \text{의 실근이 0과 양수인 중근이어야 하므로}$$

이차방정식 $ax^2 - 3ax + \frac{9}{2} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9a^2 - 18a = 9a(a-2) = 0 \text{이어야 한다.}$$

따라서 $a = 2$

(필수 유형 10)

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^3 - x^2 - x + 6 - a$$

이때 $h'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$ 이므로

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{3}$...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $x \geq 0$ 일 때 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(1)$ 이다.

이때 $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$, 즉 $h(x) \geq 0$ 이려면 $h(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$h(1) = 5 - a \geq 0$$

따라서 $a \leq 5$ 이므로 조건을 만족시키는 실수 a 의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

31

$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 12x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x - 12 = 2(x-1)(2x^2 + 5x + 6)$$

모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 5x + 6 > 0$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$a-8$	↗

즉, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $a-8$ 이므로 주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $a-8 \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 $a \geq 8$ 이므로 구하는 실수 a 의 최솟값은 8이다.

32

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 \text{에서}$$

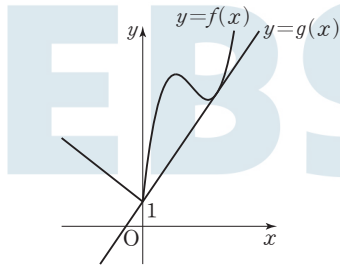
$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$y' = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2	...
y'		+	0	-	0	+
y	1	↗	6	↘	5	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



그림과 같이 직선 $y=g(x)$ 가 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때의 m 의 값을 구해 보자.

접점의 x 좌표를 $t (t > 0)$ 이라 하면 $f(t) = g(t)$ 이므로

$$2t^3 - 9t^2 + 12t + 1 = mt + 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(t) = m \text{이므로}$$

$$6t^2 - 18t + 12 = m \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2t^3 - 9t^2 + 12t + 1 = 6t^3 - 18t^2 + 12t + 1$$

$$4t^3 - 9t^2 = 0$$

$$t^2(4t - 9) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = \frac{9}{4}$$

이때 ㉡에서

$$m = 6 \times \frac{81}{16} - 18 \times \frac{9}{4} + 12 = \frac{15}{8}$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하도록 하는

실수 m 의 최댓값은 $\frac{15}{8}$ 이고, 최솟값은 직선 $y=1-x$ 의 기울기와 같

은 -1 이므로 구하는 합은

$$\frac{15}{8} + (-1) = \frac{7}{8}$$

답 ④

33

$g(x) = f(x) - f'(x)$ 에서 $f(0) = g(0) = 0$ 이므로 $f'(0) = 0$ 이다.

그러므로 $f(x) = x^3 + ax^2$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.

이때

$$g(x) = x^3 + ax^2 - 3x^2 - 2ax$$

$$= x^3 + (a-3)x^2 - 2ax$$

$$= x\{x^2 + (a-3)x - 2a\}$$

이차방정식 $x^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-3)^2 + 8a = a^2 + 2a + 9 = (a+1)^2 + 8 > 0$$

이므로 이차방정식 $x^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 두 실근을 α, β 라 하자.

만약 $\alpha\beta = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 이차방정식 $x^2 - 3x = 0$ 의 두 실근은 0, 3

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $\alpha\beta \neq 0$ 이고 조건을 만족시키려면 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 이어야 한다. 즉, $-a + 3 > 0, -2a > 0$ 이어야 하므로 $a < 0$ 이다.

이때 함수 $f(x)$ 의 모든 항의 계수가 정수이므로 $a \leq -1$ 이어야 한다.

따라서 $f(3) = 27 + 9a \leq 18$ 이므로 구하는 $f(3)$ 의 최댓값은 18이다.

답 ④

(필수 유형 ⑩)

점 P의 시간 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가

$$x = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + k$$

이므로 시간 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = -t^2 + 6t$$

$$a = -2t + 6$$

점 P의 가속도가 0일 때

$$-2t + 6 = 0 \text{에서 } t = 3 \text{이고 이때 점 P의 위치가 } 40 \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{3} \times 3^3 + 3 \times 3^2 + k = 40$$

$$\text{따라서 } k = 40 + 9 - 27 = 22$$

답 22

34

두 점 P, Q의 시간 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도를 각각 v_1, v_2 , 가속도를 각각 a_1, a_2 라 하면

$$v_1 = 6t^2 - 6t - 4, v_2 = 2t + 4$$

$$a_1 = 12t - 6, a_2 = 2$$

$$v_1 = v_2 \text{에서}$$

$$6t^2 - 6t - 4 = 2t + 4$$

$$6t^2 - 8t - 8 = 0$$

$$2(3t+2)(t-2) = 0$$

$$t \geq 0 \text{이므로 } t = 2$$

$$t = 2 \text{일 때,}$$

$$a_1 = 12 \times 2 - 6 = 18, a_2 = 2$$

이므로 구하는 두 점 P, Q의 가속도의 합은

$$18 + 2 = 20$$

답 ⑤

35

점 P의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = t^3 - 12t + 9$$

$$a = 3t^2 - 12$$

ㄱ. $v = (t-3)(t^2+3t-3) = 0$ 에서 $t \geq 0$ 이므로

$$t = 3 \text{ 또는 } t = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \dots \dots \text{㉠}$$

이고 이 값의 좌우에서 v 의 부호가 바뀌므로 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ. $a = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$ 이므로 $a=0$ 일 때 $t=2$

$1 \leq t \leq 3$ 에서 함수 v 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	...	2	...	3
a		-	0	+	
v	-2	↘	-7	↗	0

그러므로 점 P의 속력 $|v|$ 는 $t=2$ 에서 최댓값 7을 갖는다. (참)

ㄷ. ㉠에서 $\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} < 3$ 이므로 점 P는 $t=3$ 에서 마지막으로 운동

방향을 바꾼다. 이때 가속도는

$$a = 3 \times 3^2 - 12 = 15 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

점 P의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 속도를 v 라 하면

$$v = 3t^2 - 2at + b = 3\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$$

이때 조건 (가)에 의하여 점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으므로 0 이상의 모든 실수 t 에 대하여 $v \geq 0$ 이어야 한다. 이때 $a > 0$ 이므로

$$b - \frac{a^2}{3} \geq 0, \text{ 즉 } b \geq \frac{a^2}{3}$$

한편, $t \geq 0$ 일 때 $v \geq 0$ 이므로 점 P의 속력은

$$|v| = v = 3\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$$

이다. 조건 (나)에 의하여 $|v|$ 이 $t = \frac{2}{3}$ 일 때 최소이므로

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 즉 } a = 2$$

$$\text{그러므로 } b \geq \frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}$$

따라서 $x = t^3 - 2t^2 + bt$ ($b \geq \frac{4}{3}$)이고 점 P의 시각 $t=3$ 에서의 위치는

$$27 - 2 \times 9 + 3b = 3b + 9 \geq 3 \times \frac{4}{3} + 9 = 13$$

이므로 구하는 최솟값은 13이다.

답 13

06

다항함수의 적분법

정답

본문 66~75쪽

(필수 유형 ①) 4	01 ③	02 ③	03 ②
	04 ②	05 ②	
(필수 유형 ②) ①	06 ①	07 ①	08 ⑤
	09 ②	10 80	11 ③
(필수 유형 ③) 14	12 ③	13 ①	14 32
(필수 유형 ④) ①	15 ⑤	16 14	17 ①
	18 27	19 ③	20 ②
(필수 유형 ⑤) 5	21 ④	22 ③	23 ④
(필수 유형 ⑥) 36	24 8	25 ②	26 ③
	27 ③	28 ④	29 40
(필수 유형 ⑦) ②	30 ④	31 12	
(필수 유형 ⑧) ③	32 ②	33 ⑤	34 63

(필수 유형 ①)

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 + C \text{ (C는 적분상수)}$$

이고, $f(0) = C = 2$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ 이므로

$$f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$$

답 4

01

$$f(x) = \int (4x + 3) dx = 2x^2 + 3x + C \text{ (C는 적분상수)}$$

$f(1) = 2 + 3 + C = 0$ 에서 $C = -5$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ 이므로

$$f(2) = 8 + 6 - 5 = 9$$

답 ③

02

$$f(x) = \int (5x - k) dx - \int (x + k) dx$$

$$= \int \{(5x - k) - (x + k)\} dx$$

$$= \int (4x - 2k) dx = 2x^2 - 2kx + C \text{ (C는 적분상수)}$$

에서 $f'(x) = 4x - 2k$

$f'(1) = 2$ 에서 $4 - 2k = 2$ 이므로 $k = 1$

$f(1) = 0$ 에서 $2 - 2k + C = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 2x$ 이므로

$$f(2) = 8 - 4 = 4$$

답 ③

03

$G(x) = x^2 f(x) - 2x^6 + 3x^5 \dots \textcircled{1}$
 이때 $2xf(x)$ 의 한 부정적분이 $G(x)$ 이므로
 $G'(x) = 2xf(x)$
 $\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $2xf(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 12x^5 + 15x^4$
 $x^2 f'(x) = 12x^5 - 15x^4$
 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $f'(x) = 12x^3 - 15x^2$
 $f(x) = \int (12x^3 - 15x^2) dx$
 $= 3x^4 - 5x^3 + C$ (C 는 적분상수)
 $\textcircled{1}$ 에서 $G(1) = f(1) + 1$ 이고, $G(1) = 4$ 이므로
 $4 = f(1) + 1, f(1) = 3$
 $f(1) = 3 - 5 + C = 3$ 에서 $C = 5$
 따라서 $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 5$ 이므로
 $f(2) = 48 - 40 + 5 = 13$

답 ②

04

조건 (가)에서 $f'(x) = kx(x-2)$ 이므로
 $f(x) = \int f'(x) dx = \int kx(x-2) dx = \int (kx^2 - 2kx) dx$
 $= \frac{1}{3}kx^3 - kx^2 + C$ (C 는 적분상수)
 이고, $f(0) = 2$ 이므로 $C = 2$
 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 극값을 갖고, 조건 (나)에서
 $f(0) + f(2) = 0$ 이므로
 $2 + \left(\frac{8}{3}k - 4k + 2\right) = 0$
 $-\frac{4}{3}k + 4 = 0$ 에서 $k = 3$
 따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 이므로
 $f(-1) = -2$

답 ②

05

$f(x) = \int (3x^2 + ax) dx = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + C$ (C 는 적분상수)
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로
 $1 + \frac{a}{2} + C = 0 \dots \textcircled{1}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$
 $= \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2}$
 에서 $f'(1) = 1$
 $f'(x) = 3x^2 + ax$ 에서 $f'(1) = 3 + a = 1$ 이므로 $a = -2$

$a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $C = 0$
 따라서 $f(x) = x^3 - x^2$ 이므로 $f(2) = 8 - 4 = 4$

답 ②

(필수 유형 ②)

$\int_0^2 (3x^2 + 6x) dx = [x^3 + 3x^2]_0^2 = (2^3 + 3 \times 2^2) - 0 = 20$

답 ①

06

$\int_0^3 (x^2 + x|1-x|) dx$
 $= \int_0^1 (x^2 + x|1-x|) dx + \int_1^3 (x^2 + x|1-x|) dx$
 $= \int_0^1 \{x^2 + x(1-x)\} dx + \int_1^3 \{x^2 - x(1-x)\} dx$
 $= \int_0^1 x dx + \int_1^3 (2x^2 - x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3$
 $= \frac{1}{2} + \frac{40}{3} = \frac{83}{6}$

답 ①

07

$\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx = -\frac{1}{18}$ 의 양변에 18을 곱하면
 $18 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx = -1$ 이므로
 $18 \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx = \int_0^1 18\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{k}{6}\right) dx$
 $= \int_0^1 (12x^2 + 2x + 3k) dx$
 $= \left[4x^3 + x^2 + 3kx\right]_0^1 = 5 + 3k = -1$

따라서 $k = -2$

답 ①

08

$\int_0^1 \{f(x) + x^2\} dx = \int_0^1 \{(2x^2 + 6ax + 10) + x^2\} dx$
 $= \int_0^1 (3x^2 + 6ax + 10) dx$
 $= \left[x^3 + 3ax^2 + 10x\right]_0^1 = 3a + 11$

$f(1) = 6a + 12$

따라서 $3a + 11 = 6a + 12$ 이므로 $a = -\frac{1}{3}$

답 ⑤

09

$\int_0^a (3x^2 + x + 5) dx = \int_0^a (x + 9) dx$ 에서
 $\int_0^a (3x^2 + x + 5) dx - \int_0^a (x + 9) dx = 0$

$$\int_0^a \{(3x^2+x+5)-(x+9)\} dx=0$$

$$\int_0^a (3x^2-4) dx=0$$

$$\left[x^3-4x \right]_0^a = a^3-4a=0, a(a-2)(a+2)=0$$

따라서 $a > 0$ 이므로 $a=2$

답 ②

10

실수 a 의 값에 따라 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

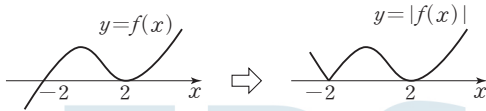
(i) $a \neq -2$ 이고 $a \neq 2$ 일 때



$$f(x)=(x-2)(x+2)(x+a) \text{이므로}$$

함수 $y=|f(x)|$ 는 세 개의 x 의 값에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-2$ 일 때

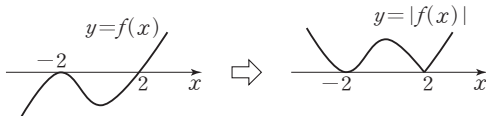


$$f(x)=(x-2)^2(x+2) \text{이므로}$$

함수 $y=|f(x)|$ 는 $x=-2$ 에서만 미분가능하지 않다.

즉, 음수인 한 개의 x 의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=2$ 일 때



$$f(x)=(x-2)(x+2)^2 \text{이므로}$$

함수 $y=|f(x)|$ 는 $x=2$ 에서만 미분가능하지 않다.

즉, 양수인 한 개의 x 의 값에서만 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $a=2$ 이고, $f(x)=(x-2)(x+2)^2$ 이므로

$$\int_0^{2a} f'(x) dx = \int_0^4 f'(x) dx = \left[(x-2)(x+2)^2 \right]_0^4 = 72 - (-8) = 80$$

답 80

11

조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

조건 (나)에서 $f(a) - f(0) = f(a) - f(1) = 0$ 이므로

$$f(a) = f(0) = f(1) = 0$$

즉, $f(x) = x(x-1)(x-a)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x(x-a) = 1-a = -3 \end{aligned}$$

에서 $a=4$

따라서 $f(x) = x(x-1)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 4x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{5}{3} + 2 = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

답 ③

(필수 유형 ④)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a 3x(x+1)^2 dx &= \int_{-a}^a (3x^3 + 6x^2 + 3x) dx \\ &= \int_{-a}^a 6x^2 dx + \int_{-a}^a (3x^3 + 3x) dx \\ &= 2 \int_0^a 6x^2 dx + 0 = 2 \left[2x^3 \right]_0^a \\ &= 2 \times 2a^3 = 56 \end{aligned}$$

따라서 $a^3=14$

답 14

12

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (4x^3 + ax^2 + ax) dx &= \int_{-1}^1 ax^2 dx + \int_{-1}^1 (4x^3 + ax) dx \\ &= 2 \int_0^1 ax^2 dx + 0 = 2 \left[\frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 = 2 \times \frac{a}{3} = 2 \end{aligned}$$

따라서 $a=3$

답 ③

13

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= 2 \int_0^1 ax^2 dx = 2 \left[\frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}a \\ \int_{-1}^1 xf(x) dx &= 2 \int_0^1 (x^4 + bx^2) dx = 2 \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{b}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b \end{aligned}$$

이므로 조건 (가)에서

$$4 \int_{-1}^1 f(x) dx + 5 \int_{-1}^1 xf(x) dx = 4 \times \frac{2}{3}a + 5 \times \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}b \right) = 0$$

$$4a + 5b + 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로 조건 (나)에서

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=-2, b=1$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ 이므로

$$f(3) = 27 - 18 + 3 = 12$$

답 ①

14

$f'(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$\text{조건 (가)에서 } \int_{-a}^a f'(x) dx = 2 \int_0^a (ax^2 + c) dx = 0$$

즉, $a=0, c=0$ 이므로 $f'(x) = 4x^3 + bx$

조건 (나)에서 $f(1)=0$, $f'(1)=0$ 이므로

$$f'(1)=4+b=0 \text{에서 } b=-4$$

$$\text{즉, } f'(x)=4x^3-4x$$

$f(x)=x^4-2x^2+d$ (d 는 상수)라 하면

$$f(1)=1-2+d=0 \text{에서 } d=1$$

$$\text{즉, } f(x)=x^4-2x^2+1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= 2 \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 30 \times \int_{-1}^1 f(x) dx = 30 \times \frac{16}{15} = 32$$

답 32

필수 유형 4

$f(x)=4x^3+x \int_0^1 f(t) dt$ 에서

$$\int_0^1 f(t) dt = k \text{ (} k \text{는 상수)} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

라 하면

$$f(x)=4x^3+kx$$

㉠에서

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (4t^3+kt) dt = \left[t^4 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^1 = 1 + \frac{k}{2} = k$$

이므로 $k=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$ 이므로

$$f(1)=4+2=6$$

답 ①

15

$f(x)=4x^2-6x+\int_0^1 tf(t) dt$ 에서

$$\int_0^1 tf(t) dt = k \text{ (} k \text{는 상수)} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

라 하면

$$f(x)=4x^2-6x+k$$

㉠에서

$$\begin{aligned} \int_0^1 tf(t) dt &= \int_0^1 t(4t^2-6t+k) dt = \int_0^1 (4t^3-6t^2+kt) dt \\ &= \left[t^4 - 2t^3 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^1 = -1 + \frac{k}{2} = k \end{aligned}$$

이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=4x^2-6x-2$ 이므로

$$f(-1)=8$$

답 ⑤

16

$f(x)=ax^2+\int_1^x (t-1)(t-5) dt \quad \dots\dots \text{㉠}$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=a+\int_1^1 (t-1)(t-5) dt = a+0=3$$

에서 $a=3$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2ax+(x-1)(x-5) \text{이므로}$$

$$f'(3)=6a+2 \times (-2)=6 \times 3-4=14$$

답 14

17

$$f(x)=\int_0^x x(2t+a) dt = x \int_0^x (2t+a) dt$$

의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_0^x (2t+a) dt + x(2x+a)$$

따라서

$$\begin{aligned} f'(1) &= \int_0^1 (2t+a) dt + (2+a) = \left[t^2 + at \right]_0^1 + (2+a) \\ &= (1+a) + (2+a) = 2a+3=5 \end{aligned}$$

이므로 $a=1$

답 ①

18

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} = b$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-3\} = f(1)-3=0 \text{에서 } f(1)=3$$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+a) dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=\int_0^1 (3t^2+a) dt = \left[t^3 + at \right]_0^1 = 1+a=3$$

에서 $a=2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x+1} \times \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2} f'(1) \end{aligned}$$

함수 $f(x)=\int_0^x (3t^2+2) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=3x^2+2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times (3+2) = \frac{5}{2}$$

따라서 $b=\frac{5}{2}$ 이므로

$$a+10b=2+10 \times \frac{5}{2}=27$$

답 27

참고

$$f(x)=\int_0^x (3t^2+2) dt = \left[t^3 + 2t \right]_0^x = x^3 + 2x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+2x-3}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+3}{x+1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

따라서 $b=\frac{5}{2}$

19

$$\int_1^x f(t) dt = (x+1)f(x) + x^3 - 3x \quad \dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t) dt = 2f(1) - 2$$

$$0 = 2f(1) - 2 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

한편, ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+1)f'(x) + 3x^2 - 3$$

$$(x+1)f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$$

이 등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$f'(x) = -3x + 3$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-3x + 3) dx$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 3x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

②에서 $f(1) = 1$ 이므로

$$-\frac{3}{2} + 3 + C = 1, C = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(2) = -6 + 6 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

20

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + b + 1$$

$$a + b = -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (나)에서 $f'(3) = 0$ 이므로

$$f'(3) = 27 + 6a + b = 0$$

$$6a + b = -27 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -5, b = 3$$

즉, $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 f'(x) dx &= \int_1^3 (3x^2 - 10x + 3) dx \\ &= \left[x^3 - 5x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= (27 - 45 + 9) - (1 - 5 + 3) = -8 \end{aligned}$$

(필수 유형 ⑥)

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{에서}$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^x f(t) dt \right] = f(x)$$

$$= -x^2 - 4x + a$$

$$= -(x+2)^2 + a + 4$$

함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가하

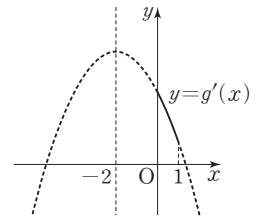
려면 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서

$g'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

즉, $g'(1) = a - 5 \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \geq 5$$

따라서 a 의 최솟값은 5이다.



답 5

21

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (3t^2 - 4) dt = \left[t^3 - 4t \right]_0^x \\ &= x^3 - 4x = x(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

이때 $g'(x) = 0$ 이면 $f(x) = 0$ 이므로 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 사차함수이므로 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$g(x) = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

에서 $g(2) = 0$ 이므로 $C = 4$

따라서 함수 $g(x)$ 의 극댓값은 $g(0) = 4$

답 4

22

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

주어진 조건에서 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극솟값 3을 가지므로

$$g(0) = \int_0^0 f'(t) dt + (0+1)f(0) + 1 = f(0) + 1 = 3$$

즉, $f(0) = 2$ 이므로 $c = 2$

$$g'(x) = f'(x) + f(x) + (x+1)f'(x) \text{에서}$$

$$g'(0) = f'(0) + f(0) + (0+1)f'(0) = 2f'(0) + 2 = 0$$

이므로 $f'(0) = -1$

즉, $b = -1$

주어진 조건에서 $g(1) = 8$ 이고 $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 2$ 이므로

$$g(1) = \int_0^1 f'(t) dt + (1+1)f(1) + 1$$

$$= \left[f(t) \right]_0^1 + 2f(1) + 1$$

$$= f(1) - f(0) + 2f(1) + 1$$

$$= 3f(1) - 1$$

$$= 3(1+a-1+2) - 1$$

$$= 3a + 5 = 8$$

에서 $a = 1$

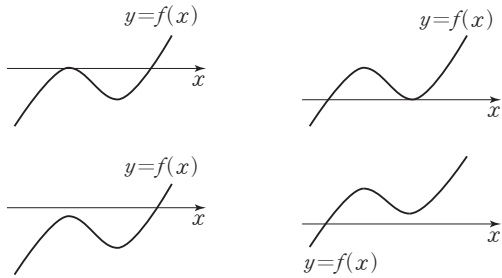
따라서 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ 이므로

$$f(-1) = -1 + 1 + 1 + 2 = 3$$

답 3

23

함수 $h(k)$ 의 최댓값이 2가 되려면 사차함수 $g(x)$ 가 극솟값을 갖는 x 의 값이 오직 하나이어야 하므로 $g(x)$ 의 도함수인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



즉, 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이어야 한다.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f(0)f(2) \geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a(a-4) \geq 0$$

$$a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 4 \text{ 에서 양수 } a \text{의 최솟값은 } 4 \text{이다.}$$

답 ④

(필수 유형 ⑥)

곡선 $y=x^2-7x+10$ 과 직선 $y=-x+10$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-7x+10 = -x+10 \text{ 에서 } x^2-6x=0, x(x-6)=0$$

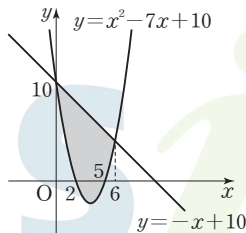
$$x=0 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$ 과 직선 $y=-x+10$ 은 그림과 같으므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^6 |(-x+10) - (x^2-7x+10)| dx$$

$$= \int_0^6 (-x^2+6x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6$$

$$= -72 + 108 = 36$$



답 36

24

곡선 $y=6x^2-12x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$6x^2-12x=0 \text{ 에서 } 6x(x-2)=0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

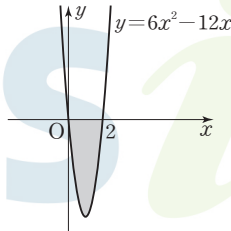
따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^2 |6x^2-12x| dx$$

$$= \int_0^2 (-6x^2+12x) dx$$

$$= \left[-2x^3 + 6x^2 \right]_0^2$$

$$= 8$$



답 8

25

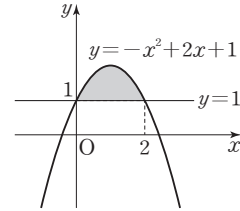
곡선 $y=-x^2+2x+1$ 과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2+2x+1=1 \text{ 에서 } x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=-x^2+2x+1$ 과 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+2x+1) - 1\} dx = \int_0^2 (-x^2+2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

답 ②

26

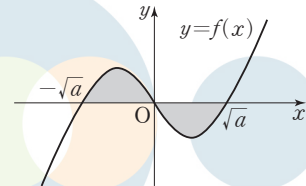
함수 $f(x)=x^3-ax$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^3-ax=0 \text{ 에서 } a \text{가 양수이므로}$$

$$x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=-\sqrt{a} \text{ 또는 } x=\sqrt{a}$$

함수 $f(x)=x^3-ax$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} |x^3-ax| dx = 2 \int_{-\sqrt{a}}^0 (x^3-ax) dx = 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{a}}^0$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{1}{2}a^2 = 18$$

$$a^2=36$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a=6$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3-6x \text{ 이므로 } f(-1)=5$$

답 ③

27

$f(x)=x^3-2x^2+k$ 에서 $f'(x)=3x^2-4x$ 이므로

$$f'(x)=0 \text{ 에서 } x(3x-4)=0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}$$

즉, $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 위의 점 $(0, k)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=k$ 이다.

곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표는

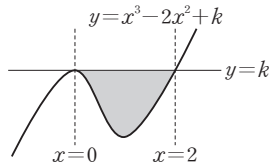
$$x^3-2x^2+k=k \text{ 에서 } x^3-2x^2=0 \text{ 이므로}$$

$$x^2(x-2)=0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 와 직선 $y=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 |k - (x^3 - 2x^2 + k)| dx \\
 &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\
 &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



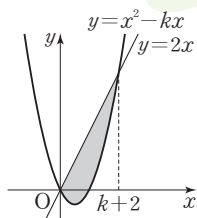
답 ③

28

곡선 $y = x^2 - kx$ 와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 - kx = 2x$ 에서 $x^2 - (k+2)x = 0$
 $x\{x - (k+2)\} = 0$
 $x = 0$ 또는 $x = k+2$

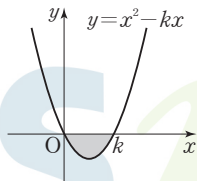
따라서 곡선 $y = x^2 - kx$ 와 직선 $y = 2x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1 은

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^{k+2} \{2x - (x^2 - kx)\} dx \\
 &= \int_0^{k+2} \{-x^2 + (k+2)x\} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k+2}{2}x^2 \right]_0^{k+2} = \frac{(k+2)^3}{6}
 \end{aligned}$$



곡선 $y = x^2 - kx$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2 는

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_0^k (-x^2 + kx) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^k = \frac{k^3}{6}
 \end{aligned}$$



$S_1 = 8S_2$ 이므로 $(k+2)^3 = (2k)^3$ 에서 $k+2 = 2k$
 따라서 $k = 2$

답 ④

29

조건 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 1\} = 0$ 에서 $f(0) = 1$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -1$ 이므로 $a = -1$

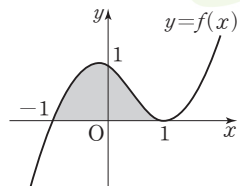
즉, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ 에서

$f(x) = x^3 - x^2 - x + C$ (C 는 적분상수)이고, $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ 이므로 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + 0 \\
 &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$



따라서 $30S = 30 \times \frac{4}{3} = 40$

답 40

필수 유형 ①

주어진 조건에서 $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$

이므로 $0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 그림과 같다고 하자.

또한 조건 (가)에서

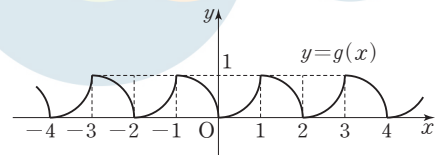
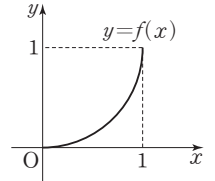
$-1 < x < 0$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는

$0 < x < 1$ 일 때의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축

에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로

1 만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같이 나타낼 수 있다.



한편, $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$ 이고

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

이때 함수 $g(x)$ 의 주기는 2이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^2 g(x) dx &= \int_{-3}^{-1} g(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_1^2 g(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_{-1}^0 g(x) dx \\
 &= 1 + 1 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}
 \end{aligned}$$

답 ②

30

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

에서 $b = 3$

조건 (나)에서 $x=0$ 일 때, $f(-3) = f(3)$ 이고

$$f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$0 = 9 + 3a + b$$

$$b = 3 \text{이므로 } a = -4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x+3 & (-3 < x < 0) \\ x^2 - 4x + 3 & (0 \leq x \leq 3) \end{cases} \text{이고}$$

$$f(x-3) = f(x+3) \text{에서 } f(x) = f(x+6)$$

즉, $f(x)$ 는 주기가 6인 주기함수이므로

$$\int_{-33}^{-29} f(x) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx$$

$$\int_{57}^{60} f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx$$

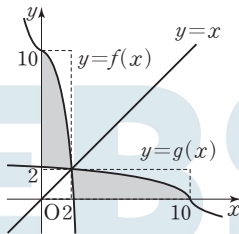
따라서

$$\begin{aligned} \int_{-33}^{-29} f(x) dx - \int_{57}^{60} f(x) dx &= \int_{-3}^1 f(x) dx - \int_{-3}^0 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ④

31

함수 $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax + 10$ 의 도함수는 $f'(x) = -3x^2 + 2ax - 3a$ 이다. 이때 삼차함수 $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax + 10$ 의 역함수가 존재하려면 극값을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4} = a^2 - 9a = a(a-9) \leq 0$ $0 \leq a \leq 9$ 따라서 a 의 최솟값은 0이므로 $f(x) = -x^3 + 10$ 이고, 그 역함수인 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$$\begin{aligned} \int_2^{10} g(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx - 2 \times 2 = \int_0^2 (-x^3 + 10) dx - 4 \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 10x \right]_0^2 - 4 = 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

답 12

필수 유형 ⑧

$t \geq 3$ 일 때, $v(t) = 2t - 6 \geq 0$ 이므로 $\int_3^k |v(t)| dt = \int_3^k (2t - 6) dt = \left[t^2 - 6t \right]_3^k = (k^2 - 6k) - (9 - 18) = k^2 - 6k + 9 = 25$ $k^2 - 6k - 16 = 0, (k+2)(k-8) = 0$ 따라서 $k > 3$ 이므로 $k = 8$

답 ③

32

시각 $t=0$ 에서의 위치를 a 라 하면 시각 $t=4$ 에서의 위치는 $a + \int_0^4 v(t) dt = a + \int_0^4 (-2t + 10) dt = a + \left[-t^2 + 10t \right]_0^4 = a + (-16 + 40) = a + 24$ 이때 시각 $t=4$ 에서의 위치가 30이므로 $a + 24 = 30, a = 6$

따라서 시각 $t=1$ 에서의 위치는

$$\begin{aligned} 6 + \int_0^1 v(t) dt &= 6 + \int_0^1 (-2t + 10) dt = 6 + \left[-t^2 + 10t \right]_0^1 \\ &= 6 + (-1 + 10) = 15 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

점 P의 시각 $t=1$ 에서의 위치를 a 라 하면 시각 $t=4$ 에서의 위치는 $a + \int_1^4 v(t) dt = a + \int_1^4 (-2t + 10) dt = a + \left[-t^2 + 10t \right]_1^4 = a + 15$ $a + 15 = 30$ 에서 $a = 15$ 따라서 점 P의 시각 $t=1$ 에서의 위치는 15이다.

33

시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치가 -5 이므로 $0 + \int_0^1 v(t) dt = \int_0^1 (3t^2 - 4t + k) dt = \left[t^3 - 2t^2 + kt \right]_0^1 = k - 1 = -5$

에서 $k = -4$

즉, $v(t) = 3t^2 - 4t - 4$

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 속도 $v(t) = 0$ 이므로

$$3t^2 - 4t - 4 = 0 \text{에서 } (3t+2)(t-2) = 0$$

$t > 0$ 이므로 $t = 2$

$0 < t < 2$ 일 때 $v(t) < 0$ 이고 $t > 2$ 일 때 $v(t) > 0$ 이므로

시각 $t=2$ 일 때 점 P가 움직이는 방향을 바꾼다.

따라서 시각 $t=0$ 에서 시각 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |v(t)| dt &= \int_0^2 |3t^2 - 4t - 4| dt = \int_0^2 (-3t^2 + 4t + 4) dt \\ &= \left[-t^3 + 2t^2 + 4t \right]_0^2 = 8 \end{aligned}$$

답 ⑤

34

두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 다시 만나는 위치 x 가 $x = k$ 일 때의 시각을 $t = a$ ($a > 0$)이라 하면

$$0 + \int_0^a v_1 dt = 0 + \int_0^a v_2 dt$$

$$\int_0^a (3t^2 + t) dt = \int_0^a (2t^2 + 3t) dt$$

$$\left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^a = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^a$$

$$a^3 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2$$

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 = \frac{1}{3}a^2(a - 3) = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a = 3$

따라서 시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치(또는 점 Q의 위치) $x = k$ 에서

$$k = 3^3 + \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{63}{2} \text{이므로}$$

$$2k = 2 \times \frac{63}{2} = 63$$

답 63

정답

본문 78~87쪽

(필수 유형 ①)	90	01 ③	02 ①	03 ③
		04 ②		
(필수 유형 ②)	11	05 ③	06 ⑤	07 ②
		08 35		
(필수 유형 ③)	②	09 ②	10 ④	11 ④
		12 15	13 ②	14 ③
(필수 유형 ④)	②	15 ②	16 54	17 ③
		18 ①		
(필수 유형 ⑤)	⑤	19 ⑤	20 992	21 ③
		22 ③		
(필수 유형 ⑥)	①	23 ②	24 ④	25 ②
		26 ⑤	27 269	28 ②

(필수 유형 ①)

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하자.

포물선 $y^2=4x$ 의 초점 F의 좌표는 (1, 0)이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6이므로

$$\frac{a+b+1}{3}=6 \text{에서}$$

$$a+b=17$$

$$b=17-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 포물선의 준선까지의 거리와 같고, 포물선 $y^2=4x$ 의 준선의 방정식은 $x=-1$ 이므로

$$\overline{AF}=a+1, \overline{BF}=b+1 \text{에서}$$

$$\overline{AF} \times \overline{BF}=(a+1)(b+1)$$

$$=ab+a+b+1$$

$$=a(17-a)+17+1 \text{ (}\textcircled{1}\text{에 의해)}$$

$$=-a^2+17a+18$$

$$=-\left(a-\frac{17}{2}\right)^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2+18$$

①에서 b는 1보다 큰 자연수이므로

$$b=17-a > 1, a < 16$$

a도 1보다 큰 자연수이므로

$$1 < a < 16$$

따라서 $\overline{AF} \times \overline{BF}$ 의 최댓값은 $a=8$ 또는 $a=9$ 일 때

$$-\frac{1}{4} + \frac{289}{4} + 18 = 90$$

답 90

01

초점의 좌표가 (2, -2), 준선의 방정식이 $x=-1$ 이므로

$$\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2} \text{에서 꼭짓점의 좌표는 } \left(\frac{1}{2}, -2\right) \text{이다.}$$

한편, 초점과 꼭짓점 사이의 거리가 $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 이므로 주어진 포물선은

$y^2=4 \times \frac{3}{2} \times x=6x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y축의 방향

으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 즉,

$$(y+2)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $a=2, b=6, c=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+b+c=2+6+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$$

답 ③

다른 풀이

포물선의 정의에 의하여

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-(-2))^2}=|x-(-1)|$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2+(y+2)^2=(x+1)^2$$

$$(y+2)^2=x^2+2x+1-x^2+4x-4$$

$$(y+2)^2=6x-3$$

$$(y+2)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $a=2, b=6, c=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+b+c=2+6+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$$

02

포물선 $y^2=8x$ 의 초점의 좌표는 F(2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

직선 $y=n$ 이 포물선 $y^2=8x$ 와 만나는 점의 좌표가 $P_n\left(\frac{n^2}{8}, n\right)$

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{P_nF}=\overline{P_nQ_n}+2 \text{이므로}$$

$$a_n=\overline{P_nF}+\overline{P_nQ_n}$$

$$=2\overline{P_nQ_n}+2$$

$$=2 \times \frac{n^2}{8} + 2$$

$$=\frac{n^2}{4} + 2$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{n^2}{4} + 2\right)$$

$$=\frac{1}{4} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times 10$$

$$=\frac{465}{4}$$

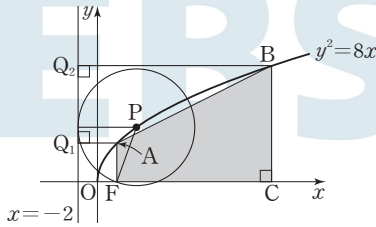
답 ①

03

포물선의 정의에 의하여 점 Q는 점 P에서 포물선 $y^2=8x$ 의 준선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발이다.

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2 라 하면 점 P가 점 A(2, 4)에서 점 B까지 포물선을 따라 움직일 때, 점 Q가 나타내는 도형은 선분 Q_1Q_2 이다.

$Q_1(-2, 4)$ 이고, 점 P가 점 A에서 점 B까지 포물선을 따라 움직일 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이가 8이므로 $4+8=12$ 에서 $Q_2(-2, 12)$ 이다.



점 B의 y 좌표가 12이고, 점 B가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로 $12^2=8x$ 에서 $x=18$

즉, B(18, 12)

초점의 좌표가 F(2, 0)이므로 사각형 AFQB는 사다리꼴이다.

따라서 사각형 AFQB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (4+12) \times (18-2) = 128$$

답 ③

04

포물선의 초점과 꼭짓점 사이의 거리는 꼭짓점과 준선 사이의 거리와 같으므로

포물선 C_1 의 준선의 방정식은 $x=-3$ 이고,

포물선 C_2 의 준선의 방정식은 $x=-6-9$, 즉 $x=-15$ 이다.

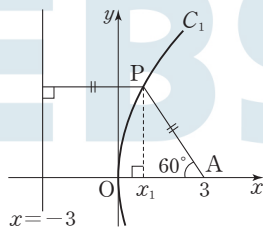
포물선 C_1 의 방정식은 $y^2=4 \times 3 \times x$ 에서

$$y^2=12x$$

포물선 C_2 의 방정식은

$$y^2=4 \times 9 \times (x+6)$$

$$y^2=36(x+6)$$



점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

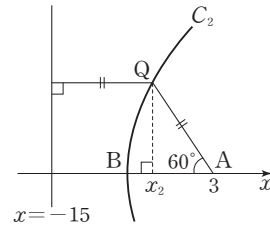
$$\cos 60^\circ = \frac{3-x_1}{x_1-(-3)} = \frac{1}{2}$$

$$x_1=1$$

$$y_1^2=12x_1 \text{에서 } y_1^2=12$$

$$y_1 > 0 \text{이므로 } y_1=2\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } P(1, 2\sqrt{3})$$



점 Q의 좌표를 (x_2, y_2) 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\cos 60^\circ = \frac{3-x_2}{x_2-(-15)} = \frac{1}{2}$$

$$x_2=-3$$

$$y_2^2=36(x_2+6) \text{에서}$$

$$y_2^2=36 \times (-3+6) = 108$$

$$y_2 > 0 \text{이므로 } y_2=6\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } Q(-3, 6\sqrt{3})$$

$$(6\sqrt{3})^2=12x \text{에서 } x=9 \text{이므로}$$

$$R(9, 6\sqrt{3})$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{9-(-3)\} \times (6\sqrt{3}-2\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 4\sqrt{3}$$

$$= 24\sqrt{3}$$

답 ②

(필수 유형 ②)

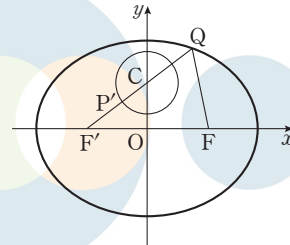
타원의 정의에 의하여

$$\overline{F'Q} + \overline{FQ} = \overline{F'P} + \overline{PQ} + \overline{FQ} = 2 \times 7 = 14$$

$$\text{이므로 } \overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P}$$

이때 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 값이 최대가 되기 위해서는 $\overline{F'P}$ 의 값이 최소가 되어야 한다.

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심을 C라 하면 선분 $F'P$ 의 길이가 최소가 되려면 그림과 같이 점 P의 위치는 원과 선분 $F'C$ 가 만나는 점 P'이어야 한다.



$$\text{즉, } \overline{F'P} + \overline{PC} \geq \overline{F'C}$$

$F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 하면

$$c^2 = 49 - 33 = 16 \text{에서 } c = 4 \text{이므로 } F'(-4, 0)$$

$$C(0, 3), \overline{P'C} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{F'P} \geq \overline{F'C} - \overline{P'C} = \sqrt{4^2 + 3^2} - 2 = 3$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P} \leq 14 - 3 = 11$ 이므로

$\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값은 11이다.

답 11

05

$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이라 하면
 $c^2 = 25 - 16 = 9$ 이므로

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점은 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이고 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 에서 $(x-3)^2 + y^2 = 3^2$ 이므로

원 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 은 중심이 점 F 이고, 반지름의 길이가 3이다.

즉, $\overline{PF} = 3$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \overline{PF'} = 10 - \overline{PF} = 10 - 3 = 7$$

따라서 $\overline{PF} \times \overline{PF'} = 3 \times 7 = 21$

답 ③

06

$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이라 하면
 $c^2 = 9 - 5 = 4$ 이므로

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점은 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이다.

점 F' 은 원의 중심이고, 두 점 A, F 는 원 위의 점이므로

$$\overline{F'F} = \overline{AF} = 4$$

이고, 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = 2 \times 3 = 6$$

이므로

$$\overline{AF} = 2$$

삼각형 FAF' 은 이등변삼각형이므로 점 F' 에서 변 AF 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = 1$$

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{F'H} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

$$\text{따라서 } \sin(\angle FAF') = \frac{\overline{F'H}}{\overline{AF'}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

07

$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이라 하면
 $c^2 = 16 - 7 = 9$ 이므로

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 의 두 초점은 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이다.

점 A 의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로

$$\overline{AF'} : \overline{AF} = 4 : 2 = 2 : 1$$

직선 PA 는 $\angle FPF'$ 을 이등분하므로

$$\overline{PF'} : \overline{PF} = 2 : 1$$

$\overline{PF} = k$ 라 하면 $\overline{PF'} = 2k$ 이므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 3k$$

타원의 정의에서 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 4 = 8$ 이므로

$$3k = 8 \text{에서 } k = \frac{8}{3}$$

따라서 $\overline{PF} = \frac{8}{3}, \overline{PF'} = \frac{16}{3}$ 이므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

답 ②

08

점 P 는 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이므로 $\overline{PF} = 1$

또한 점 P 는 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 2 = 4$$

그러므로

$$\overline{PF'} = 4 - 1 = 3$$

한편, 점 Q 는 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 원 위의 점이므로

$$\overline{QF'} = \frac{1}{2}$$

\overline{PQ} 가 최대 또는 최소가 되는 경우는 점 Q 가 직선 PF' 과 점 F' 을 중심으로 하는 원이 만나는 점일 때이다.

$$\overline{PF'} - \overline{QF'} \leq \overline{PQ} \leq \overline{PF'} + \overline{QF'}$$

$$3 - \frac{1}{2} \leq \overline{PQ} \leq 3 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} \leq \overline{PQ} \leq \frac{7}{2}$$

따라서 \overline{PQ} 의 최댓값은 $\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$4Mm = 4 \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} = 35$$

답 35

(필수 유형 ④)

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이가 6이므로

$$2a = 6$$

$$a = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 2$$

$$b = 2a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$b = 2 \times 3 = 6$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점을

$$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$$

이라 하면

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

$$c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$\overline{FF'} = 2c = 6\sqrt{5}$$

답 ②

09

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면 점 A가 쌍곡선 위의 점이므로

$|\overline{AF} - \overline{AF'}| = 2a$

$$|\sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} - \sqrt{\{2-(-2)\}^2 + (3-0)^2}|$$

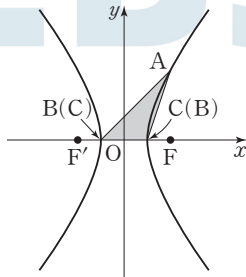
$$= |3 - 5| = 2$$

에서 $2a = 2$ 이므로 주축의 길이가 2이다.

즉, $\overline{BC} = 2$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$



답 ②

10

삼각형 PF'F는 직각삼각형이고,

$$\cos(\angle PF'F) = \frac{4}{5}, \overline{FF'} = 2\sqrt{5} \text{에서}$$

$$\overline{PF'} = \overline{FF'} \cos(\angle PF'F)$$

$$= 2\sqrt{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PF} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = \frac{8\sqrt{5}}{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$ 이므로

$$2a = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{에서}$$

$$a = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \dots \text{㉠}$$

$F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$ 이므로 $a^2 + b^2 = (\sqrt{5})^2$ 에서

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + b^2 = 5$$

$$b^2 = \frac{24}{5} \quad \dots \text{㉡}$$

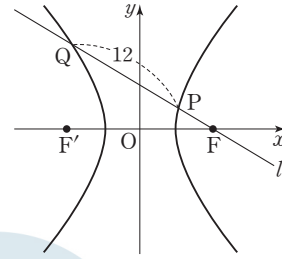
이 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$ 이므로

㉠, ㉡에서

$$m^2 = \frac{b^2}{a^2} = 24$$

답 ④

11



쌍곡선의 정의에 의하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ 위의 점에서 두 초점 사이의 거리의 차는 $2 \times 4 = 8$ 이므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 8$$

$$\overline{QF} - \overline{QF'} = 8$$

두 식을 번끼리 더하면

$$(\overline{PF'} - \overline{PF}) + (\overline{QF} - \overline{QF'})$$

$$= (\overline{PF'} - \overline{QF'}) + (\overline{QF} - \overline{PF})$$

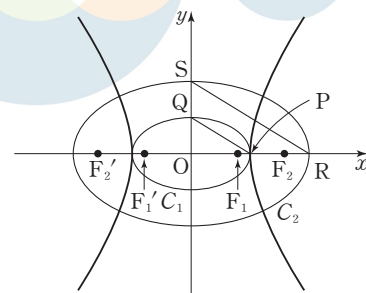
$$= 16$$

이때 $\overline{QF} - \overline{PF} = \overline{PQ} = 12$ 이므로

$$\overline{PF'} - \overline{QF'} = 16 - 12 = 4$$

답 ④

12



타원 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서

$P(a, 0), Q(0, 3)$

타원 $C_2: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서

$R(2a, 0), S(0, b)$

선분 PQ와 선분 RS는 서로 평행하므로

$$\frac{3}{a} = \frac{b}{2a}$$

에서 $b = 6$

타원 $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$ 의 초점이 일치하므로

$$4a^2 - 6^2 = a^2 + 6^2$$

$$3a^2 = 2 \times 6^2, a^2 = 24$$

$F_1(c_1, 0)$ ($c_1 > 0$)이라 하면

$$c_1^2 = 24 - 9 = 15 \text{에서}$$

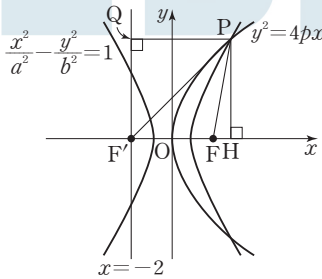
$$c_1 = \sqrt{15}$$

또 $F_2(c_2, 0) (c_2 > 0)$ 이라 하면
 $c_2^2 = a^2 + b^2 = 24 + 36 = 60$ 에서
 $c_2 = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$
 따라서 $\overline{F_1F_2} = c_2 - c_1 = 2\sqrt{15} - \sqrt{15} = \sqrt{15}$ 이므로
 $k^2 = (\sqrt{15})^2 = 15$

답 15

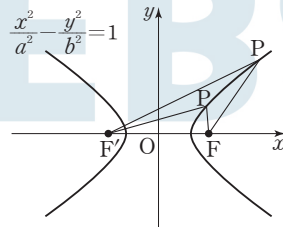
13

점 $F(2, 0)$ 이 포물선의 초점인 동시에 쌍곡선의 한 초점이므로
 $p=2, a^2 + b^2 = 2^2 = 4$
 포물선의 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.



그림과 같이 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H, 포물선의 준선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하면 $\overline{PF} = \overline{PQ}$ 이므로 직각삼각형 PFH에서
 $\overline{FH} = \overline{F'H} - \overline{F'F} = \overline{PQ} - \overline{F'F} = 5 - 4 = 1$
 $\overline{PH} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$
 이므로 점 P의 좌표는
 $P(3, 2\sqrt{6})$
 직각삼각형 PF'H에서
 $\overline{PF'} = \sqrt{\{(3 - (-2))\}^2 + (2\sqrt{6})^2}$
 $= \sqrt{49} = 7$
 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 7 - 5 = 2 = 2a$ 에서
 $a = 1$ 이므로 $b^2 = 3$
 따라서 $a^2 - b^2 + p^2 = 1 - 3 + 2^2 = 2$

14



$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이라 하면
 $\overline{F'F} = 2c$
 조건 (나)에서 점근선의 방정식 중 기울기가 양수인 경우가 $y = \frac{4}{3}x$ 이
 므로
 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

$a = 3k, b = 4k (k \text{는 양의 상수})$ 라 하면 $c^2 = a^2 + b^2$ 에서 $c^2 = 25k^2$
 $c = 5k$
 조건 (가)에서 삼각형 PF'F는 이등변삼각형이고 점 P는 제1사분면에
 있는 점이므로 $\overline{PF'} > \overline{PF}$ 이다.
 그러므로 이등변삼각형이 되는 경우는 $\overline{PF'} = \overline{F'F}$ 또는 $\overline{PF} = \overline{F'F}$ 인
 경우이다.

(i) $\overline{PF'} = \overline{F'F} = 2c$ 인 경우
 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$ 이므로
 $\overline{PF} = 2c - 2a$
 삼각형 PF'F의 둘레의 길이는
 $2c + 2c + (2c - 2a) = 6c - 2a$
 즉, $6c - 2a = 12$
 $6 \times 5k - 2 \times 3k = 12$
 에서 $k = \frac{1}{2}$
 $a = \frac{3}{2}$
 이므로 주축의 길이는
 $2a = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

(ii) $\overline{PF} = \overline{F'F} = 2c$ 인 경우
 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$ 이므로
 $\overline{PF'} = 2c + 2a$
 삼각형 PF'F의 둘레의 길이는
 $2c + 2c + (2c + 2a) = 6c + 2a$
 즉, $6c + 2a = 12$
 $6 \times 5k + 2 \times 3k = 12$
 에서 $k = \frac{1}{3}$
 $a = 1$
 이므로 주축의 길이는
 $2a = 2 \times 1 = 2$
 (i), (ii)에 의하여 모든 주축의 길이의 합은
 $3 + 2 = 5$

답 2

답 3

(필수 유형 4)

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면
 $y_1^2 = 4x_1 \dots\dots \textcircled{1}$
 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y_1y = 2(x + x_1)$
 이 접선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로
 $0 = 2(-2 + x_1)$ 에서 $x_1 = 2$
 $\textcircled{1}$ 에서 $y_1^2 = 4 \times 2 = 8$ 이고 $y_1 > 0$ 이므로
 $y_1 = 2\sqrt{2}$
 그러므로 점 P의 좌표는 $(2, 2\sqrt{2})$ 이다.
 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(2, 0)$ 이고
 점 F는 포물선의 초점이므로 $F(1, 0)$ 이다.
 직각삼각형 PFH에서 $\overline{FH} = 2 - 1 = 1, \overline{PH} = 2\sqrt{2}$ 이므로
 $\overline{PF} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$

따라서 $\cos(\angle PFH) = \frac{\overline{FH}}{\overline{PF}} = \frac{1}{3}$ 이므로
 $\cos(\angle PFO) = \cos(\pi - \angle PFH)$
 $= -\cos(\angle PFH)$
 $= -\frac{1}{3}$

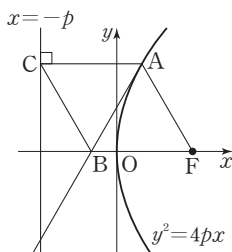
15

$y^2 = 16x = 4 \times 4 \times x$ 이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은
 $y = 2x + \frac{4}{2} = 2x + 2$
 $x = 0$ 일 때 $y = 2$ 이고,
 $y = 0$ 일 때 $0 = 2x + 2$ 에서 $x = -1$ 이다.
 따라서 구하는 삼각형의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

16

점 $A(2, a)$ 가 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로
 $a^2 = 8p$
 초점의 좌표는 $F(p, 0)$
 점 $A(2, a)$ 에서의 접선의 방정식은
 $ay = 2p(x + 2)$
 $y = 0$ 일 때 $x = -2$ 이므로
 $B(-2, 0)$
 $\overline{AB} = \overline{BF}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2$ 이므로
 $\{2 - (-2)\}^2 + \{a - 0\}^2 = \{p - (-2)\}^2$
 $16 + a^2 = (p + 2)^2$
 $16 + 8p = p^2 + 4p + 4$
 $p^2 - 4p - 12 = 0$
 $(p + 2)(p - 6) = 0$
 $p > 0$ 이므로 $p = 6$
 $a^2 = 8p = 48$
 따라서 $a^2 + p = 48 + 6 = 54$

참고



삼각형 ABF는 정삼각형이다.

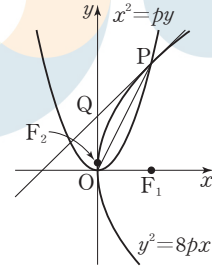
답 ②

답 ②

답 54

17

$x^2 = py$ 를 $y^2 = 8px$ 에 대입하면
 $(\frac{1}{p}x^2)^2 = 8px, x(x^3 - 8p^3) = 0$
 $x = 0$ 또는 $x = 2p$
 $x = 2p$ 일 때, $y^2 = 16p^2$ 이므로 점 P의 좌표는
 $P(2p, 4p)$
 포물선 $y^2 = 8px$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은
 $4py = 4p(x + 2p)$
 $y = x + 2p$
 이므로 $Q(0, 2p)$



삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 2p \times 2p = 2p^2 = 24$

이므로 $p^2 = 12$

두 포물선 $y^2 = 8px, x^2 = py$ 의 초점의 좌표는 각각

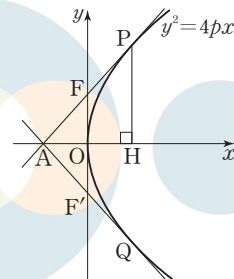
$F_1(2p, 0), F_2(0, \frac{1}{4}p)$

따라서 삼각형 OF₁F₂의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 2p \times \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4} \times 12 = 3$

답 ③

18



점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $y_1y = 2p(x + x_1)$ 이므로 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(-x_1, 0)$ 이다.

즉, $A(-x_1, 0)$ 이므로 $k = x_1$

점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(k, 0)$

$\cos(\angle FAO) = \frac{2}{3}$ 이고, $\overline{AH} = 2k$ 이므로

$\overline{AP} = 3k$

삼각형 AOF와 삼각형 AHP는 서로 닮은 삼각형이고, 닮음비가 1 : 2
이므로

$$\overline{AF} = \overline{PF} = \frac{3k}{2}$$

직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{(3k)^2 - (2k)^2} = \sqrt{5}k$$

이므로

$$\overline{FO} = \frac{\sqrt{5}k}{2}$$

즉, $F(0, \frac{\sqrt{5}k}{2})$, $P(k, \sqrt{5}k)$ 이고 $F'(0, -\frac{\sqrt{5}k}{2})$ 이므로

$$\overline{PF'} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{3\sqrt{5}k}{2}\right)^2} = \frac{7k}{2}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = \frac{7k}{2} - \frac{3k}{2} = 2k = 8$$

$k=4$

$P(4, 4\sqrt{5})$ 가 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로

$$(4\sqrt{5})^2 = 4p \times 4$$

$p=5$

쌍곡선의 초점이 $F(0, 2\sqrt{5})$, $F'(0, -2\sqrt{5})$ 이므로

$$(2\sqrt{5})^2 = a^2 + 16$$

$$a^2 = 20 - 16 = 4$$

$a=2$

따라서 $k+p+a=4+5+2=11$

답 ①

(필수 유형 ⑤)

타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{3 \times 1 + 1}$$

즉, $y = x \pm 2$

직선 $y = x + 2$ 와 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 이 접하는 점이 B이고 직선

$y = x - 2$ 와 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 이 접하는 점이 D일 때, 사각형 ABCD

의 넓이는 최대이다.

직선 $y = x + 2$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선 $y = x - 1$, 즉 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리를 d_1 이라 하면

$$d_1 = \frac{|0 - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

직선 $y = x - 2$ 위의 점 $(0, -2)$ 와 직선 $y = x - 1$, 즉 $x - y - 1 = 0$ 사이의 거리를 d_2 라 하면

$$d_2 = \frac{|0 - (-2) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편, 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 과 직선 $y = x - 1$ 이 만나는 두 점 A, C의 좌표는

$$\frac{x^2}{3} + (x-1)^2 = 1$$

$$2x(2x-3) = 0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

$x=0$ 일 때, $y=-1$

$$x=\frac{3}{2} \text{일 때, } y=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

이므로

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), C(0, -1)$$

그러므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times d_1 + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times d_2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ⑤

19

점 $P(4, 2)$ 가 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} = 1$$

점 $P(4, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{4b^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \text{에서 } a^2 = 4b^2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{16}{4b^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{8}{b^2} = 1, b^2 = 8$$

㉡에서 $a^2 = 32$

따라서 $a^2 + b^2 = 32 + 8 = 40$

답 ⑤

20

초점 F의 x좌표를 c ($c > 0$)이라 하면 $c^2 = 10 - 1 = 9$ 에서 $c = 3$

$F(3, 0)$

$\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y^2 = 1$ 이므로

$A(0, 1)$

직선 FA의 기울기는

$$\frac{0-1}{3-0} = -\frac{1}{3}$$

이므로 이 직선에 수직하려면 기울기가 3이어야 한다.

타원 $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 에 접하는 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{10 \times 3^2 + 1} = 3x \pm \sqrt{91}$$

접점의 x 좌표가 양수이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y = 3x - \sqrt{91} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{sx}{10} + ty = 1$$

$$y = -\frac{s}{10t}x + \frac{1}{t} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$3 = -\frac{s}{10t}, \quad -\sqrt{91} = \frac{1}{t}$$

이므로

$$s = \frac{30\sqrt{91}}{91}, \quad t = -\frac{\sqrt{91}}{91}$$

따라서 $s^2 + t^2 = \frac{900}{91} + \frac{1}{91} = \frac{901}{91}$ 에서

$$p = 91, \quad q = 901 \text{이므로}$$

$$p + q = 91 + 901 = 992$$

답 992

21

$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x^2 = 24y$ 에서 두 식을 연립하여 풀면

$$\frac{24y}{9} + y^2 = 1$$

$$3y^2 + 8y - 3 = 0$$

$$(3y - 1)(y + 3) = 0$$

점 P는 제1사분면에 있는 점이므로

$$y > 0 \text{에서 } y = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = 24 \times \frac{1}{3} = 8 \text{이고 } x > 0 \text{이므로}$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

$$\text{에서 } P\left(2\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$$

타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2\sqrt{2}x}{9} + \frac{1}{3}y = 1$$

이므로 Q(0, 3)

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

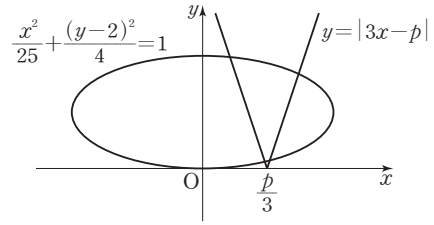
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

답 ③

22

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y = |3x - p|$ 의 그래프는 함수 $y = |3x|$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{p}{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.



p 의 값의 범위에 따라 교점의 개수를 구하면

(i) $p = 0$ 인 경우

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 과 함수 $y = |3x|$ 의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.

(ii) $p > 0$ 인 경우

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하는 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{25 \times 9 + 4} = 3x \pm \sqrt{229}$$

이므로 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 에 접하는 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y - 2 = 3x \pm \sqrt{229}$$

$$y = 3x \pm \sqrt{229} + 2$$

이 중에서 y 절편이 음수인 경우는

$$y = 3x - \sqrt{229} + 2$$

즉, 직선 $y = 3x - p$ 가 타원에 접하는 경우 $p = \sqrt{229} - 2$ 이므로

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 과 함수 $y = |3x - p|$ 의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 양수 p 의 값의 범위는 $0 < p < \sqrt{229} - 2$

(iii) $p < 0$ 인 경우

그래프의 대칭성에 의하여 직선 $y = -3x + p$ 가 타원에 접하는 경우

$$p = -\sqrt{229} + 2 \text{이므로 타원 } \frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \text{과 함수}$$

$y = |3x - p|$ 의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 음수 p 의 값의 범위는

$$-\sqrt{229} + 2 < p < 0$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$-\sqrt{229} + 2 < p < 0 \text{ 또는 } 0 < p < \sqrt{229} - 2$$

이때 $15 < \sqrt{229} < 16$ 이므로

$$-14 < -\sqrt{229} + 2 < -13 \text{이고 } 13 < \sqrt{229} - 2 < 14$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 p 는

$$-13, -12, -11, \dots, -1, 1, 2, \dots, 11, 12, 13$$

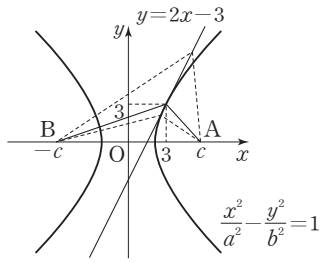
으로 그 개수는 26이다.

답 ③

(필수 유형 6)

두 양수 a, b 에 대하여 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라 하자.

이 쌍곡선이 점 (3, 3)을 지나고 점 (3, 3)에서 직선 $y = 2x - 3$ 에 접하면 $\overline{PB} - \overline{PA}$ 의 값은 점 P의 좌표가 (3, 3)일 때 최대이다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $(3, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{a^2} - \frac{3y}{b^2} = 1, \text{ 즉 } y = \frac{b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{3}$$

이 직선이 $y=2x-3$ 이므로

$$\frac{b^2}{a^2} = 2, -\frac{b^2}{3} = -3 \text{에서 } a^2 = \frac{9}{2}, b^2 = 9$$

두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}$$

$$\text{따라서 } c = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

답 ①

접고

$\overline{PB} - \overline{PA}$ 의 값이 최대가 되도록 하는 점 P에 대하여 주축의 길이가 $\overline{PB} - \overline{PA}$ 인 쌍곡선

$$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{이 직선 } y=2x-3$$

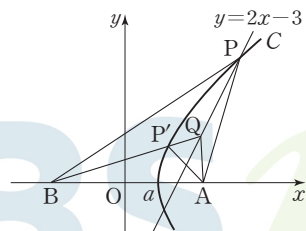
과 점 P에서 접하지 않을 때 직선

$y=2x-3$ 위의 점 중 점 P가 아닌

한 점 Q와 쌍곡선 C 위의 한 점 P'에 대하여 $\overline{QA} < \overline{P'Q} + \overline{P'A}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{PB} - \overline{PA} &= \overline{P'B} - \overline{P'A} \\ &< \overline{P'B} + \overline{P'Q} - \overline{QA} \\ &= \overline{QB} - \overline{QA} \end{aligned}$$

즉, $\overline{PB} - \overline{PA}$ 의 값이 최대라는 조건에 모순이다.



23

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 이 점은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점

이므로

$$x_1^2 - y_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4} - \frac{y_1y}{4} = 1, x_1x - y_1y = 4$$

이 접선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$2y_1 = 4, \text{ 즉 } y_1 = 2$$

$y_1 = 2$ 를 ①에 대입하면

$$x_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$-2\sqrt{2}x - 2y = 4 \text{ 또는 } 2\sqrt{2}x - 2y = 4$$

즉, $y = -\sqrt{2}x - 2$ 또는 $y = \sqrt{2}x - 2$ 이므로

$$m = -\sqrt{2} \text{ 또는 } m = \sqrt{2}$$

따라서 $m^2 = 2$

답 ②

24

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1 \text{에서}$$

$$y = 2x - \sqrt{2}$$

이 접선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1$ 과 만나는 두 점의 x좌표를 α, β 라

하면

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(2x - \sqrt{2})^2}{4} = -1 \text{에서}$$

$$x^2 - (2x - \sqrt{2})^2 = -4$$

$$3x^2 - 4\sqrt{2}x - 2 = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

한편, 직선 $y = 2x - \sqrt{2}$ 의 기울기가 2이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{5}|\alpha - \beta| \\ &= \sqrt{5}\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} \\ &= \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{14}}{3} = \frac{2\sqrt{70}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

25

$c^2 = 2 + 7 = 9$ 에서 주어진 초점의 좌표는 $F(3, 0)$ 이다.

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하면 점 P는 쌍곡선

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1 \text{ 위의 점이므로}$$

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{7} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{2} - \frac{y_1y}{7} = 1$$

$$y = 0 \text{일 때 } x = \frac{2}{x_1} \text{이므로}$$

$$Q\left(\frac{2}{x_1}, 0\right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\overline{PF} = \overline{PQ}$ 에서 삼각형 PQF는 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 FQ에 내린 수선의 발은 선분 FQ의 중점이다.

$$2x_1 = \frac{2}{x_1} + 3$$

$$2x_1^2 - 3x_1 - 2 = 0, (2x_1 + 1)(x_1 - 2) = 0$$

$x_1 > 0$ 이므로 $x_1 = 2$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2 - \frac{y_1^2}{7} = 1, y_1^2 = 7$$

$$y_1 = \sqrt{7} \text{이므로 } P(2, \sqrt{7})$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } Q(1, 0)$$

따라서 삼각형 PQF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (3 - 1) \times \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

답 ②

26

점 A의 좌표를 $(s, t) (s > 0, t > 0)$ 이라 하자.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$\frac{sx}{4} - \frac{ty}{12} = 1$$

즉, $3sx - ty = 12$ ㉠

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x, y = -\sqrt{3}x$$

$y = \sqrt{3}x$ 를 ㉠에 대입하면

$$3sx - \sqrt{3}tx = 12$$

에서 $x = \frac{12}{3s - \sqrt{3}t}$

이므로 점 B의 좌표는 $(\frac{12}{3s - \sqrt{3}t}, \frac{12\sqrt{3}}{3s - \sqrt{3}t})$ 이다.

$y = -\sqrt{3}x$ 를 ㉠에 대입하면

$$3sx + \sqrt{3}tx = 12 \text{에서 } x = \frac{12}{3s + \sqrt{3}t}$$

이므로 점 C의 좌표는 $(\frac{12}{3s + \sqrt{3}t}, -\frac{12\sqrt{3}}{3s + \sqrt{3}t})$ 이다.

점 A는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{s^2}{4} - \frac{t^2}{12} = 1$$

$$3s^2 - t^2 = 12 \text{ ㉡}$$

점근선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 $60^\circ, 120^\circ$ 이므로

$$\overline{OB} = 2 \times \frac{12}{3s - \sqrt{3}t}$$

$$\overline{OC} = 2 \times \frac{12}{3s + \sqrt{3}t}$$

$\overline{OB} = 2\overline{OC}$ 에서

$$\frac{24}{3s - \sqrt{3}t} = 2 \times \frac{24}{3s + \sqrt{3}t}$$

$$6s - 2\sqrt{3}t = 3s + \sqrt{3}t$$

$$3s = 3\sqrt{3}t$$

$$s = \sqrt{3}t \text{ ㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면 $s = \frac{3\sqrt{2}}{2}, t = \frac{\sqrt{6}}{2}$

㉠에서 $D(0, -\frac{12}{t})$ 이므로

$$D(0, -4\sqrt{6})$$

따라서 선분 OD의 길이는 $4\sqrt{6}$ 이다.

다른 풀이

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x, y = -\sqrt{3}x$$

이므로 점근선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $60^\circ, 120^\circ$ 이다.

$\overline{OB} = 2\overline{OC}$ 에서 $\overline{OB} = 2k, \overline{OC} = k (k > 0)$ 이라 하면

$$B(k, \sqrt{3}k), C(\frac{1}{2}k, -\frac{\sqrt{3}}{2}k)$$

그러므로 접선의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}k - (-\frac{\sqrt{3}}{2}k)}{k - \frac{1}{2}k} = 3\sqrt{3}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에 대하여 기울기가 $3\sqrt{3}$ 이고 y 절편이 음수인 접선의 방정식은

$$y = 3\sqrt{3}x - \sqrt{4 \times (3\sqrt{3})^2 - 12}$$

$$= 3\sqrt{3}x - \sqrt{96}$$

$$= 3\sqrt{3}x - 4\sqrt{6}$$

이므로 $D(0, -4\sqrt{6})$

따라서 선분 OD의 길이는 $4\sqrt{6}$ 이다.

27

$\overline{FF'} = 12, \overline{PF} = 5$ 이므로 직각삼각형 $PF'F$ 에서

$$\overline{PF'} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$\overline{PF'} + \overline{PF} = 13 + 5 = 18$ 이므로 타원의 정의에 의하여

타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{9^2 - 6^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{45} = 1$$

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 13 - 5 = 8$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{6^2 - 4^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{20} = 1$$

직선 l 의 방정식은

$$\frac{6x}{9^2} + \frac{5y}{45} = 1$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 9$$

이므로 직선 l 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{20} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{3}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{4^2 \times (\frac{3}{2})^2 - 20}$$

$$= \frac{3}{2}x \pm \sqrt{16}$$

$$= \frac{3}{2}x \pm 4$$

그러므로 두 직선 m_1, m_2 의 방정식은

$$y = \frac{3}{2}x + 4, y = \frac{3}{2}x - 4$$

두 직선 사이의 거리는 직선 $y = \frac{3}{2}x - 4$ 위의 점 $(0, -4)$ 와 직선

$3x - 2y + 8 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$k = \frac{|3 \times 0 - 2 \times (-4) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{13}}$$

$$k^2 = \frac{256}{13}$$

따라서 $p = 13, q = 256$ 이므로

$$p + q = 13 + 256 = 269$$

답 ⑤

28

쌍곡선 $C: x^2 - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = x, y = -x$ 이므로 기울기가 양수인 직선 l 은 $y = x$ 이다.

점 P_n 의 x 좌표를 a_n 이라 하면 $P_n(a_n, a_n)$

$n \geq 2$ 일 때 직선 l 과 직선 P_nQ_{n-1} 은 서로 수직이므로 직선 P_nQ_{n-1} 의 방정식은

$$y - a_n = -(x - a_n)$$

$$y = -x + 2a_n$$

직선 $y = -x + 2a_n$ 과 쌍곡선 C 의 교점 Q_{n-1} 의 좌표를 구하면

$$x^2 - (-x + 2a_n)^2 = 1$$

$$4a_n x = 4a_n^2 + 1$$

$$x = \frac{4a_n^2 + 1}{4a_n}$$

$$y = -\frac{4a_n^2 + 1}{4a_n} + 2a_n = \frac{4a_n^2 - 1}{4a_n}$$

에서

$$Q_{n-1}\left(\frac{4a_n^2 + 1}{4a_n}, \frac{4a_n^2 - 1}{4a_n}\right)$$

쌍곡선 C 위의 점 Q_{n-1} 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4a_n^2 + 1}{4a_n}x - \frac{4a_n^2 - 1}{4a_n}y = 1$$

이 접선과 직선 l 의 교점 P_{n-1} 의 좌표를 구하면

$$\frac{4a_n^2 + 1}{4a_n}x - \frac{4a_n^2 - 1}{4a_n}x = 1$$

$$\frac{2}{4a_n}x = 1$$

$$x = 2a_n$$

에서 $P_{n-1}(2a_n, 2a_n)$

$a_{n-1} = 2a_n$ 에서

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$a_1 = 3$ 이므로

$$a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이때 직선 P_7Q_6 의 기울기는 -1 이고 두 점 P_7, Q_6 의 x 좌표는 각각 $a_7,$

$\frac{4a_7^2 + 1}{4a_7}$ 이므로 선분 P_7Q_6 이 빗변인 직각이등변삼각형에서

$$\overline{P_7Q_6} = \sqrt{2} \left(\frac{4a_7^2 + 1}{4a_7} - a_7 \right) = \frac{\sqrt{2}}{4a_7}$$

$$a_7 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{에서}$$

$$\overline{P_7Q_6} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

답 ②

08

평면벡터

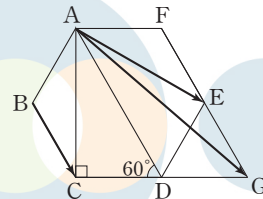
정답

본문 90~99쪽

(필수 유형 ①) ②	01 ④	02 ③	03 ④
	04 ①	05 ⑤	
(필수 유형 ②) 8	06 ②	07 ③	08 ③
	09 253		
(필수 유형 ③) ⑤	10 ①	11 ③	12 ⑤
(필수 유형 ④) ②	13 ②	14 ④	15 ②
(필수 유형 ⑤) ⑤	16 ④	17 ③	18 7
(필수 유형 ⑥) ④	19 ④	20 ⑤	21 ④
	22 ①	23 ②	
(필수 유형 ⑦) 17	24 ③	25 16	26 ②
(필수 유형 ⑧) ②	27 ②	28 ①	29 ③

(필수 유형 ①)

직선 EF 와 직선 CD 가 만나는 점을 G 라 하자.



삼각형 DGE 는 정삼각형이므로

$$\overline{BC} = \overline{EG}$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG}$$

직각삼각형 ACD 에서 $\overline{AD} = 2, \angle ADC = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{AC} = \overline{AD} \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$\overline{DG} = 1$ 이고, 삼각형 ACG 는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AG}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{AC}^2 + (\overline{CD} + \overline{DG})^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + (1+1)^2 = 7 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \overline{AG} = \sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } |\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AG}| = \overline{AG} = \sqrt{7}$$

답 ②

01

두 벡터 $2\vec{a} + \vec{b}, k\vec{a} + 3\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$k\vec{a} + 3\vec{b} = m(2\vec{a} + \vec{b}) \quad (m \neq 0)$$

을 만족시키는 실수 m 이 존재한다.

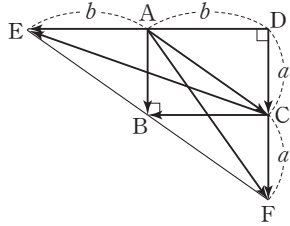
$$k\vec{a} + 3\vec{b} = 2m\vec{a} + m\vec{b}$$

$$k = 2m, 3 = m$$

따라서 $k = 6$

답 ④

02



그림과 같이 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$ 인 점 D, F와 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE}$ 인 점 E를 그리면

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$$

이므로

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{CE}| = 2\sqrt{6}$$

$\angle EDF = \angle ABC = 90^\circ$ 이므로

$|\overrightarrow{DC}| = a, |\overrightarrow{AD}| = b$ 라 하면

$$|\overrightarrow{AF}|^2 = (2a)^2 + b^2 = 14 \quad \dots \text{㉠}$$

$$|\overrightarrow{CE}|^2 = a^2 + (2b)^2 = 24 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$5(a^2 + b^2) = 38$$

$$a^2 + b^2 = \frac{38}{5}$$

따라서 $|\overrightarrow{AC}|^2 = a^2 + b^2 = \frac{38}{5}$

답 ③

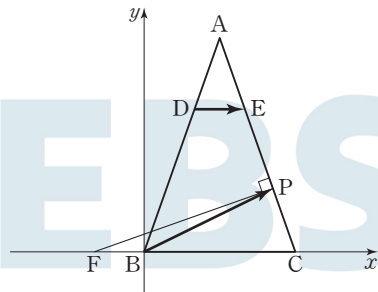
03

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB}$ 가 되도록 점 F를 정하면

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{FP}$$

삼각형 ABC의 변 BC가 x축 위에, 점 B가 원점, 점 C의 좌표가

(2, 0)이 되도록 좌표평면에 놓으면 $|\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BP}|$ 의 최솟값은 점 F와 직선 AC 사이의 거리와 같다.



점 A의 좌표가 $(1, \sqrt{3}-1)^2$

즉, $(1, 2\sqrt{2})$ 이므로

직선 AC의 방정식은

$$y = \frac{2\sqrt{2}-0}{1-2}(x-2) = -2\sqrt{2}(x-2)$$

즉, $2\sqrt{2}x + y - 4\sqrt{2} = 0$

두 삼각형 ADE, ABC는 닮음비가 1 : 3인 닮은 도형이고

$$\overline{BC} = 2 \text{이므로 } \overline{DE} = \frac{2}{3}$$

점 F의 좌표가 $(-\frac{2}{3}, 0)$

따라서 $|\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BP}|$ 의 최솟값은

$$\frac{|2\sqrt{2} \times (-\frac{2}{3}) + 0 - 4\sqrt{2}|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{\frac{16\sqrt{2}}{3}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{9}$$

답 ④

04

$$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PD} \text{에서}$$

$$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{PD}$$

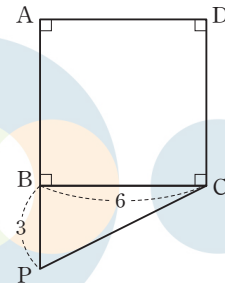
$$2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD}$$

$$2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}$$

$$2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{이므로 } \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

즉, 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있고, $|\overrightarrow{PB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}| = 3$ 에서 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점이다.



직각삼각형 BPC에서 피타고라스 정리에 의하여

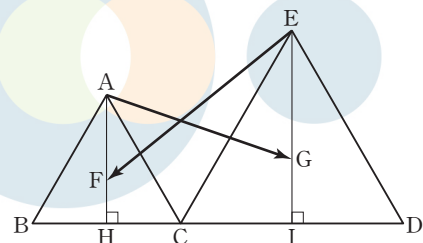
$$\overline{PC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{BC}^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$

따라서 $|\overline{PC}| = 3\sqrt{5}$

답 ①

05

두 점 A, E에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면



$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FE}$$

$$= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EG}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$$

두 정삼각형 ABC, ECD의 닮음비는 2 : 3이므로

$$\overline{EI} = \frac{3}{2}\overline{AH}$$

$$\vec{AH} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\begin{aligned} \vec{AG} + \vec{EF} &= \frac{2}{3}\vec{AH} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\vec{AH}\right) \\ &= \frac{5}{3}\vec{AH} = \frac{5}{6}(\vec{AB} + \vec{AC}) \end{aligned}$$

두 벡터 \vec{AB} , \vec{AC} 가 서로 평행하지 않으므로 $m = \frac{5}{6}$, $n = \frac{5}{6}$

$$\text{따라서 } m+n = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

(필수 유형 ②)

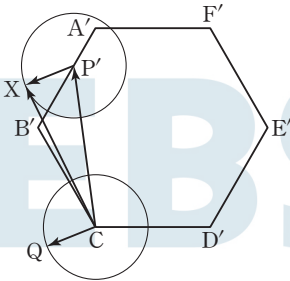
조건 (가)에서

$$\vec{CX} = \frac{1}{2}\vec{CP} + \vec{CQ}$$

$$\frac{1}{2}\vec{CP} = \vec{CP}'$$

$$\vec{CX} = \vec{CP}' + \vec{CQ}$$

선분 CA, CB, CD, CE, CF의 중점을 각각 A', B', D', E', F'이라 하면 점 X는 정육각형 A'B'CD'E'F' 위의 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직인다.



조건 (나)에서

$$\vec{XA} + \vec{XC} + 2\vec{XD} = k\vec{CD}$$

$$(\vec{CA} - \vec{CX}) - \vec{CX} + 2(\vec{CD} - \vec{CX}) = k\vec{CD}$$

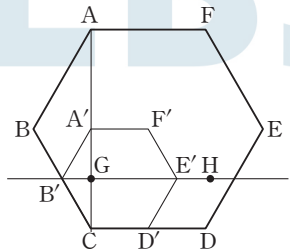
$$\vec{CX} = \frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{2-k}{4}\vec{CD}$$

$\frac{1}{4}\vec{CA} = \vec{CG}$ 라 하면 점 X는 점 G를 지나고 직선 CD에 평행한 직선 위를 움직인다.

직선 GE' 위의 점 H가

$$\vec{E'H} = 1, \vec{GH} > \vec{GE}'$$

을 만족시키도록 점 H를 잡는다.



X가 점 G일 때, $|\vec{CX}|$ 의 값은 최소이다.

$$\vec{CX} = \vec{CG} + \frac{2-k}{4}\vec{CD}$$

$$\frac{2-k}{4} = 0, k = 2$$

즉, $a = 2$

점 X가 점 H일 때, $|\vec{CX}|$ 의 값은 최대이다.

$$|\vec{GH}| = 4$$

$$\left| \frac{2-k}{4}\vec{CD} \right| = 4$$

$$\frac{2-k}{4} > 0 \text{ 이므로 } \frac{2-k}{4} |\vec{CD}| = 4$$

$$\frac{2-k}{4} \times 4 = 4$$

$$k = -2$$

즉, $\beta = -2$

$$\text{따라서 } a^2 + \beta^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

답 ⑤

06

$$\vec{AQ} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$= \frac{3}{12}\vec{AB} + \frac{4}{12}\vec{AC}$$

$$= \frac{7}{12} \times \frac{3\vec{AB} + 4\vec{AC}}{7}$$

선분 BC를 4 : 3으로 내분하는 점을 R라 하면

$$\vec{AR} = \frac{3\vec{AB} + 4\vec{AC}}{7}$$

$$\vec{AQ} = \frac{7}{12}\vec{AR}$$

즉, 점 R은 두 직선 AQ, BC의 교점이므로 두 점 P, R은 일치한다.

$$\vec{AQ} = \frac{7}{12}\vec{AP}$$

$$\text{따라서 } |\vec{AQ}| = \frac{7}{12}|\vec{AP}| = \frac{7}{12} \times 24 = 14$$

답 8

답 ②

07

$$\vec{AP} = s\vec{AB} \quad (0 \leq s \leq 1), \vec{FQ} = t\vec{FE} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\vec{AR} = \frac{2\vec{AQ} + \vec{AP}}{2+1}$$

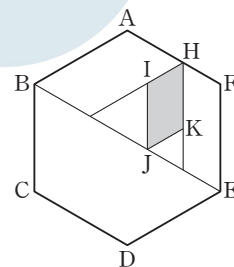
$$= \frac{2}{3}(\vec{AF} + \vec{FQ}) + \frac{1}{3}\vec{AP}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{AF} + \frac{2t}{3}\vec{FE} + \frac{s}{3}\vec{AB}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{AF} + \frac{s}{3}\vec{AB} + \frac{2t}{3}\vec{FE}$$

이때 세 점 H, I, K에 대하여

$$\frac{2}{3}\vec{AF} = \vec{AH}, \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{HI}, \frac{2}{3}\vec{FE} = \vec{HK}$$



$\vec{AR} = \vec{AH} + s\vec{HI} + t\vec{HK} \quad (0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$ 이므로 점 R가 나타내는 도형은 두 선분 HI, HK를 두 변으로 하는 평행사변형과 그 내부이다.

$|\overline{HI}|=1, |\overline{HK}|=2$ 이고 두 벡터 $\overline{AB}, \overline{HI}$ 가 서로 평행하고, 두 벡터 $\overline{FE}, \overline{HK}$ 가 서로 평행하므로 $\angle KHI=60^\circ$ 이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는

$$1 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

답 ③

08

직선 AD가 각 A의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 6 : 4 = 3 : 2$$

$$\text{그러므로 } \overline{AD} = \frac{3\overline{AC} + 2\overline{AB}}{3+2} = \frac{3\overline{AC} + 2\overline{AB}}{5}$$

한편, 삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 비가 3 : 2이므로 삼각형 ABD의 넓이는

$$8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$$

이때 점 E가 선분 AD 위의 점이므로 상수 $k (0 \leq k \leq 1)$ 에 대하여

$$\overline{AE} = k\overline{AD} \text{이고, 삼각형 ABE의 넓이가 } \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$\frac{24}{5} \times \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{AD}|} = \frac{24}{5} k = \frac{3}{5}$$

$$\text{에서 } k = \frac{1}{8}$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{8}\overline{AD}$$

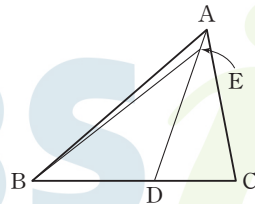
$$= \frac{1}{8} \times \frac{3\overline{AC} + 2\overline{AB}}{5}$$

$$= \frac{1}{20}\overline{AB} + \frac{3}{40}\overline{AC}$$

이때 두 벡터 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 는 서로 평행하지

$$\text{않으므로 } p = \frac{1}{20}, q = \frac{3}{40}$$

$$\text{따라서 } p - q = \frac{1}{20} - \frac{3}{40} = -\frac{1}{40}$$



답 ③

09

$$25\overline{PQ} = 18\overline{PA} + 27\overline{PB}$$

$$\overline{PQ} = \frac{9}{5} \times \frac{2\overline{PA} + 3\overline{PB}}{5}$$

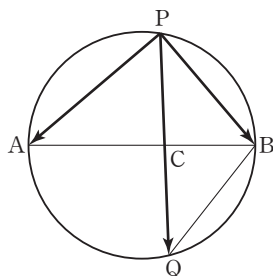
에서 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점을 C라 하면

$$\overline{PQ} = \frac{9}{5}\overline{PC}$$

이므로 세 점 P, Q, C는 한 직선 위에 있고,

$$|\overline{PQ}| = \frac{9}{5}|\overline{PC}| \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \overline{CQ} = \overline{PQ} - \overline{PC} = \frac{4}{5}\overline{PC} \quad \dots\dots \text{㉠}$$



원주각의 성질에 의하여

$$\angle BAP = \angle BQP, \angle APQ = \angle ABQ$$

이므로 두 삼각형 CAP, CQB는 서로 닮은 도형이다.

$$\overline{AB} = 5 \text{에서 } \overline{CA} = 3, \overline{CB} = 2$$

$$\overline{CA} : \overline{CQ} = \overline{CP} : \overline{CB}$$

$$3 : \overline{CQ} = \overline{CP} : 2$$

$$\text{이므로 } \overline{CQ} \times \overline{CP} = 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\overline{PC}^2 = 6 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\overline{PC} > 0 \text{이므로 } \overline{PC} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$|\overline{PQ}| = \frac{9}{5}|\overline{PC}| = \frac{9}{5} \times \frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{9\sqrt{30}}{10}$$

$$|\overline{PQ}|^2 = \frac{243}{10}$$

따라서 $p = 10, q = 243$ 이므로

$$p + q = 10 + 243 = 253$$

답 253

(필수 유형 ④)

두 벡터 \vec{a} 와 $\vec{v} + \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{v} + \vec{b} = k\vec{a} \quad (k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

로 놓을 수 있다. 이때

$$\vec{v} = k\vec{a} - \vec{b}$$

$$= k(3, 1) - (4, -2)$$

$$= (3k - 4, k + 2)$$

$$|\vec{v}|^2 = (3k - 4)^2 + (k + 2)^2$$

$$= 10k^2 - 20k + 20$$

$$= 10(k - 1)^2 + 10$$

따라서 $|\vec{v}|^2$ 의 최솟값은 $k = 1$ 일 때 10이다.

답 ⑤

10

원점 O에 대하여

$$\overline{AC} + \overline{PA} + 2\overline{PB}$$

$$= (\overline{OC} - \overline{OA}) + (\overline{OA} - \overline{OP}) + 2(\overline{OB} - \overline{OP})$$

$$= 2\overline{OB} + \overline{OC} - 3\overline{OP}$$

$$= \vec{0}$$

이므로

$$3\overline{OP} = 2\overline{OB} + \overline{OC}$$

$$= 2(1, -1) + (2, 0)$$

$$= (4, -2)$$

$$\text{따라서 } \overline{OP} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}$$

$$= \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (3, 2)$$

$$= \left(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

이므로 벡터 \overline{AP} 의 모든 성분의 합은

$$-\frac{5}{3} + \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{13}{3}$$

11

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} &= 3\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{OP} &= 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &= (3, 2) + 2(-1, 1) \\ &= (1, 4) \end{aligned}$$

따라서 $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

12

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} &= 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}) \text{에서} \\ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} &= 3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OQ} \\ 3\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} \\ \overrightarrow{OA} &= \frac{\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ}}{3} \end{aligned}$$

에서 점 A는 선분 PQ를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}| &= 6 \text{에서 } |\overrightarrow{AQ}| = 3, |\overrightarrow{PQ}| = 9 \\ |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

세 점 A, P, Q가 한 직선 위의 점이고 \overrightarrow{OA} 가 일정하므로 삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되는 경우는 벡터 \overrightarrow{OA} 와 벡터 \overrightarrow{PQ} 가 서로 수직이 되는 경우이다.

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times |\overrightarrow{PQ}| \times |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2} \times 9 \times \sqrt{5} = \frac{9\sqrt{5}}{2}$$

(필수 유형 4)

두 벡터 $6\vec{a} + \vec{b}$ 와 $\vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(6\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$6|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\text{즉, } 6 \times 1 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 9 = 0 \text{에서}$$

$$5\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$$

$$\text{따라서 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5}$$

13

$$|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$$

이고

$$|\vec{a}| = \sqrt{14}, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - 3\vec{b}| = 2\sqrt{5}$$

이므로

$$(2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{14})^2 + 9 \times 2^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$$

답 ①

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 4 \times (\sqrt{14})^2 + 2^2 + 4 \times 5 \\ &= 80 \end{aligned}$$

이므로

$$|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

답 ②

14

$$\begin{aligned} |\vec{a}| = 2, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{3} \text{에서} \\ |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} \\ 12 &= 4 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{b}|^2 - 2 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

두 벡터 $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 3\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 0$$

$$2|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

㉠에 의하여

$$8 - 3|\vec{b}|^2 - 5(|\vec{b}|^2 - 2) = 0$$

$$8|\vec{b}|^2 = 18, |\vec{b}|^2 = \frac{9}{4}$$

따라서 벡터 \vec{b} 의 크기는

$$|\vec{b}| = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

답 ④

15

조건 (가)에서 $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}$, 즉

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = |\vec{c}|$$

이때 $|\vec{b}| = 0$ 이면 $\vec{c} = 2\vec{a}$

$|\vec{c}| = 2|\vec{a}| = 4$ 가 되어 $|\vec{c}| = 6$ 이라는 조건에 모순이다.

따라서 $|\vec{b}| \neq 0$

조건 (나)에서 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = |\vec{a}| + 2|\vec{b}|$ 이므로

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + 2|\vec{b}|)^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}| \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)라 하면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

㉠에서 $\cos \theta = -1$ 이므로 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 의 방향은 서로 반대이다.

$\vec{b} = -k\vec{a}$ ($k > 0$)으로 놓으면

$$|\vec{c}| = |2\vec{a} + 3\vec{b}| = |2 - 3k||\vec{a}|$$

$$= 2|2 - 3k|$$

$$2|2 - 3k| = 6 \text{에서}$$

$$2 - 3k = 3 \text{ 또는 } 2 - 3k = -3$$

$$k = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } k = \frac{5}{3}$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = \frac{5}{3}, \vec{b} = -\frac{5}{3}\vec{a}, \vec{c} = -3\vec{a}$$

따라서

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \left| \vec{a} - \frac{5}{3}\vec{a} - 3\vec{a} \right| = \frac{11}{3}|\vec{a}| = \frac{22}{3}$$

답 ②

필수 유형 ⑤

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= (4, 2), \\ \vec{BC} &= \vec{OC} - \vec{OB} = (2, 0) - (0, 2) = (2, -2) \\ \text{이므로} \\ \vec{OA} \cdot \vec{BC} &= (4, 2) \cdot (2, -2) \\ &= 4 \times 2 + 2 \times (-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (k, -1) \cdot (3, k^2 - 1) \\ &= 3k - (k^2 - 1) > -3 \end{aligned}$$

에서
 $k^2 - 3k - 4 < 0, (k+1)(k-4) < 0$
 $-1 < k < 4$
 따라서 부등식을 만족시키는 정수 k 는
 0, 1, 2, 3
 으로 그 개수는 4이다.

17

조건 (가)에서 두 벡터
 $\vec{a} = (p, q), \vec{b} = (-2, 5)$
 가 서로 수직이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

이 성립한다.
 $-2p + 5q = 0$ 에서 $q = \frac{2}{5}p$ ㉠

조건 (나)에서 두 벡터
 $\vec{a} + 2\vec{b} = (p-4, q+10), \vec{a} - \vec{b} = (p+2, q-5)$

가 서로 수직이므로
 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

이 성립한다. 따라서
 $(p-4)(p+2) + (q+10)(q-5) = 0$

㉠에서
 $(p-4)(p+2) + \left(\frac{2}{5}p+10\right)\left(\frac{2}{5}p-5\right) = 0$

$$\frac{29}{25}p^2 = 58$$

$$p^2 = 50$$

이때 $p > 0$ 이므로 $p = 5\sqrt{2}, q = 2\sqrt{2}$

따라서 $p + q = 7\sqrt{2}$

다른 풀이

조건 (가)에서 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 서로 수직이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이 성립한다.

$$-2p + 5q = 0 \text{에서 } q = \frac{2}{5}p \text{ ㉠}$$

조건 (나)에서 두 벡터 $\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$\begin{aligned} (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \\ |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 &= 0 \\ |\vec{a}|^2 &= 2|\vec{b}|^2 \\ p^2 + q^2 &= 2(4 + 25) \end{aligned}$$

㉠에서 $\frac{29}{25}p^2 = 2 \times 29$

$$p^2 = 50$$

이때 $p > 0$ 이므로 $p = 5\sqrt{2}, q = 2\sqrt{2}$

따라서 $p + q = 7\sqrt{2}$

답 ⑤

18

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{OA} = (2, -1) \\ \vec{b} &= \vec{OB} - 2\vec{OA} = (1-4, k+2) = (-3, k+2) \end{aligned}$$

에서
 $\vec{a} + \vec{b} = (-1, k+1)$
 조건 (가)에서 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{17}$ 이므로
 $\sqrt{(-1)^2 + (k+1)^2} = \sqrt{17}$

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= 16 \text{에서} \\ k &= -5 \text{ 또는 } k = 3 \end{aligned}$$

2 $\vec{a} + \vec{b} = (1, k)$ 이므로 조건 (나)에서
 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = (2, -1) \cdot (1, k)$
 $= 2 - k < 0$

즉, $k > 2$ 이므로 $k = 3$

$\vec{OA} = (2, -1), \vec{OB} = (1, 3)$ 이므로

두 벡터 \vec{OA}, \vec{OB} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{2-3}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

따라서 두 선분 OA, OB를 이웃한 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는

$$|\vec{OA}| \times |\vec{OB}| \times \sin \theta = \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7$$

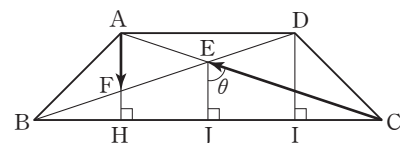
답 7

필수 유형 ⑥

직각삼각형 ABH에서
 $\vec{AB} = \sqrt{2}, \angle ABC = 45^\circ$

이므로

$$\vec{AH} = \vec{BH} = 1$$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\vec{BI} = 3, \vec{DI} = 1 \text{이고}$$

답 ③

$\triangle BID \sim \triangle BHF$ 이므로

$$\overline{BI} : \overline{DI} = \overline{BH} : \overline{FH}$$

$$\text{즉, } 3 : 1 = 1 : \overline{FH}$$

$$\overline{FH} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{AF} = \overline{AH} - \overline{FH} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

한편, 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$$\overline{BJ} = \overline{CJ} = 2, \overline{BH} = \overline{HJ} = 1$$

이므로

$$\overline{EJ} = 2\overline{FH} = \frac{2}{3}$$

직각삼각형 EJC에서 $\angle CEJ = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\overline{EJ}|}{|\overline{CE}|}$$

이고, $\overline{AF} = \overline{EJ}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AF} \cdot \overline{CE} &= \overline{EJ} \cdot (-\overline{EC}) \\ &= -\overline{EJ} \cdot \overline{EC} \\ &= -|\overline{EJ}|^2 \\ &= -\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

19

$\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ 라 하자.

점 C는 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

점 D는 선분 BC를 1 : k로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \frac{1}{k+1}\overline{OC} + \frac{k}{k+1}\overline{OB} \\ &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + k\vec{b}\right) \end{aligned}$$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{OD} \cdot \overline{AB} &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + k\vec{b}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{k+1}\left[\left(\frac{2}{3} - k\right)(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{2}{3}|\vec{a}|^2 + k|\vec{b}|^2\right] \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3^2 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OD} \cdot \overline{AB} &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2-3k}{3} \times \frac{9}{2} - 6 + 9k\right) \\ &= \frac{3(2-3k) - 12 + 18k}{2(k+1)} \\ &= \frac{9k-6}{2(k+1)} \end{aligned}$$

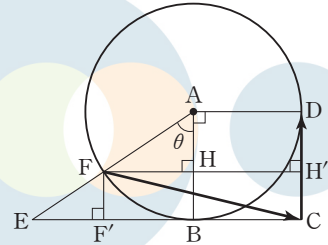
$$\overline{OD} \cdot \overline{AB} = 3 \text{에서}$$

$$\frac{9k-6}{2(k+1)} = 3, 3k-2 = 2(k+1)$$

따라서 $k=4$

답 ④

20



점 F에서 선분 EC에 내린 수선의 발을 F' 이라 하고, 점 F에서 선분 AB와 선분 DC에 내린 수선의 발을 각각 H, H' 이라 하자.

$\angle EAB = \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)로 놓으면

$\angle EAD = 90^\circ + \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(\angle EAD) &= \cos(90^\circ + \theta) \\ &= -\sin \theta = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

답 ④

에서

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$$

이므로

$$\overline{EB} = 2 \tan \theta = \frac{8}{3}$$

$$\overline{FH} = \overline{F'B} = 2 \sin \theta = \frac{8}{5}$$

$$\overline{HB} = \overline{H'C} = 2 - 2 \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \overline{FC} \cdot \overline{ED} &= \overline{FC} \cdot (\overline{EC} + \overline{CD}) \\ &= \overline{FC} \cdot \overline{EC} + \overline{FC} \cdot \overline{CD} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \overline{FC} \cdot \overline{EC} &= \overline{F'C} \times \overline{EC} \\ &= \left(\frac{8}{5} + 2\right) \times \left(\frac{8}{3} + 2\right) = \frac{18}{5} \times \frac{14}{3} = \frac{84}{5} \end{aligned}$$

$$\overline{FC} \cdot \overline{CD} = -\overline{H'C} \times \overline{CD} = -\frac{4}{5} \times 2 = -\frac{8}{5}$$

$$\text{따라서 } \overline{FC} \cdot \overline{ED} = \frac{84}{5} - \frac{8}{5} = \frac{76}{5}$$

답 ⑤

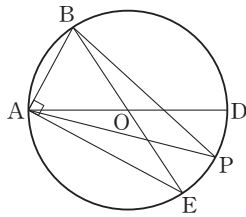
21

조건 (가)에서 $\angle BAP = \theta$ 라 하면

$$\overline{AB} \cdot \overline{AP} = |\overline{AB}| |\overline{AP}| \cos \theta \geq 0$$

즉, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

조건 (나)에서 두 직선 OA, BP의 교점이 원의 둘레 또는 내부에 있으므로 직선 OA가 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 직선 BO가 원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하면 점 P는 점 A를 포함하지 않는 호 DE 위의 점이다.



선분 AB의 길이가 4이면 삼각형 BAO는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$$\angle DOE = \angle AOB = 60^\circ$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴의 호와 같으므로 그 길이는

$$4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

답 ④

22

$$\vec{PA} - 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = 5\vec{AC}$$

$$\vec{PA} - 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = 5(\vec{PC} - \vec{PA})$$

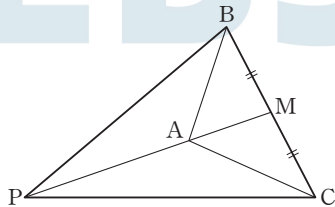
$$6\vec{PA} - 2\vec{PB} - 2\vec{PC} = \vec{0}$$

$$3\vec{PA} = \vec{PB} + \vec{PC}$$

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$3\vec{PA} = 2\vec{PM} \quad \dots \textcircled{1}$$

이므로 점 P는 선분 AM을 2 : 3으로 외분하는 점이다.



$$\vec{MB} = -\vec{MC}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$= (\vec{AM} + \vec{MB}) \cdot (\vec{AM} + \vec{MC})$$

$$= |\vec{AM}|^2 + (\vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{AM} + \vec{MB} \cdot \vec{MC}$$

$$= |\vec{AM}|^2 - |\vec{MB}|^2$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2$$

$$|\vec{AM}|^2 = |\vec{MB}|^2 - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①에서 $|\vec{PM}| = 3|\vec{AM}|$ 이므로 ②에 의하여

$$\vec{PB} \cdot \vec{PC}$$

$$= (\vec{PM} + \vec{MB}) \cdot (\vec{PM} + \vec{MC})$$

$$= |\vec{PM}|^2 + (\vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{PM} + \vec{MB} \cdot \vec{MC}$$

$$= |\vec{PM}|^2 - |\vec{MB}|^2$$

$$= 9|\vec{AM}|^2 - |\vec{MB}|^2$$

$$= 8|\vec{MB}|^2 - 18$$

$$\vec{PB} \cdot \vec{PC} = 6$$

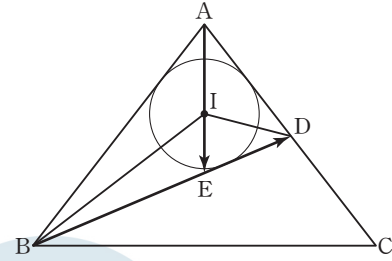
$$8|\vec{MB}|^2 - 18 = 6$$

$$|\vec{MB}|^2 = 3$$

$$|\vec{BC}| = 2|\vec{MB}| = 2\sqrt{3}$$

답 ①

23



직선 AI가 선분 BD와 만나는 점을 E라 하자.

선분 AE는 $\angle BAD$ 를 이등분하므로

$$\vec{BE} : \vec{ED} = \vec{AB} : \vec{AD} = 2 : 1$$

따라서

$$\begin{aligned} \vec{AE} &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) \end{aligned}$$

$$\vec{AI} = \frac{1}{5}(\vec{AB} + \vec{AC}) \text{에서 } \vec{AI} = \frac{3}{5}\vec{AE} \text{이므로}$$

점 I는 선분 AE를 3 : 2로 내분하는 점이다.

삼각형 ABD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$(\text{삼각형 IBD의 넓이}) = \frac{2}{5} \times (\text{삼각형 ABD의 넓이})$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times \vec{BD} \times r = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times (6 + 3 + \vec{BD}) \times r$$

$$\vec{BD} = \frac{2}{5}(9 + \vec{BD})$$

$$\vec{BD} = 6$$

이등변삼각형 ABD에서 선분 AD의 중점을 M이라 하면

$$\vec{AM} = \frac{3}{2}, \vec{AM} \perp \vec{BM} \text{이므로 } \angle BAD = \theta \text{로 놓으면}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{AM}}{\vec{AB}} = \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b} \text{로 놓으면 } |\vec{a}| = |\vec{b}| = 6 \text{이고}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 6^2 \times \frac{1}{4} = 9$$

따라서

$$\begin{aligned} \vec{AI} \cdot \vec{BD} &= \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= -\frac{1}{5}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{10}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{10}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= -\frac{1}{5} \times 6^2 + \frac{1}{10} \times 6^2 - \frac{1}{10} \times 9 \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

답 ②

(필수 유형 ①)

원 O의 중심을 O라 하자.

$\vec{AD} \cdot \vec{CX} = \vec{AD} \cdot (\vec{OX} - \vec{OC}) = \vec{AD} \cdot \vec{OX} - \vec{AD} \cdot \vec{OC}$ 에서 네 점 A, C, D, O는 모두 고정된 점이므로 $\vec{AD} \cdot \vec{OC}$ 의 값은 상수이다.

따라서 $\vec{AD} \cdot \vec{CX}$ 의 값이 최소하려면 $\vec{AD} \cdot \vec{OX}$ 의 값이 최소이어야 한다.

$-6 \leq \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} \leq 4$ 에서
 $-6 \leq -\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ} \leq 4$
 즉, $-4 \leq \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ} \leq 6$
 이므로 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은
 $6 + (-4) = 2$

답 ②

필수 유형 ⑥

$\vec{p} = (x, y), \vec{q} = (x', y')$ 이라 하고
 $A(2, 4), B(2, 8), C(1, 0), P(x, y), Q(x', y')$ 이라 하자.
 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$
 이므로
 $\overline{AP} \perp \overline{PB}$
 이다. 그러므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 움직인다.
 즉, 점 P는 선분 AB의 중점인 점 M(2, 6)을 중심으로 하고 반지름의
 길이가 2인 원 위에 있다.

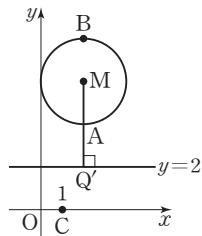
한편,

$$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + t\vec{c}$$

$$= \frac{1}{2}(2, 4) + t(1, 0)$$

$$= (1+t, 2)$$

이므로 점 Q는 직선 $y=2$ 위에 있다.
 이때 $|\vec{p} - \vec{q}|$ 의 값은 두 점 P, Q 사이의 거리와 같고 다음 그림과 같이
 점 M에서 직선 $y=2$ 에 내린 수선의 발을 Q'이라 하면 점 P가 점 A에
 있고, 점 Q가 점 Q'에 있을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 된다.



이때 $A(2, 4), Q'(2, 2)$ 이므로
 $|\vec{p} - \vec{q}| = \overline{PQ} \geq \overline{AQ'} = 2$
 따라서 구하는 최솟값은 2이다.

답 ②

27

$$\frac{2x+1}{2} = \frac{4-y}{3} \text{에서 } \frac{x+\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-4}{-3}$$

두 직선 $\frac{x}{2} = y+1, \frac{x+\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-4}{-3}$ 의 방향벡터를 각각 \vec{u}_1, \vec{u}_2 라 하면
 $\vec{u}_1 = (2, 1), \vec{u}_2 = (1, -3)$
 으로 놓을 수 있다.

두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \times |\vec{u}_2|}$$

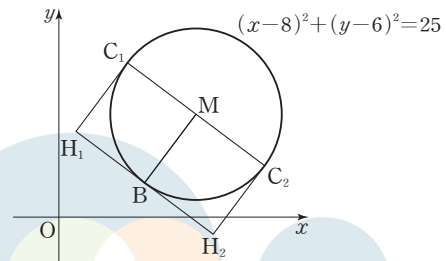
$$= \frac{|2 \times 1 + 1 \times (-3)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

답 ②

28

선분 OA의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 (8, 6)이다.
 $\frac{\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PA}}{2} = \overrightarrow{PM}$ 이므로 $|\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PA}|^2 = 100$ 에서
 $|2\overrightarrow{PM}|^2 = 4|\overrightarrow{PM}|^2 = 100, |\overrightarrow{PM}| = 5$
 즉, 점 P는 중심이 M(8, 6)이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.
 점 P가 나타내는 도형 위의 두 점 B(5, 2), C(a, b)에서의 접선이 서로
 수직이므로 그 교점을 H라 하면 사각형 BMCH는 한 변의 길이가
 5인 정사각형이다.



위 그림에서 조건을 만족시키는 점 C는 C₁, C₂로 2가지이다.
 점 B(5, 2)는 점 M(8, 6)을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로
 -4만큼 평행이동한 점이고 두 직선 BM, C₁M은 서로 수직이므로
 점 C₁은 점 M(8, 6)을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만
 큼 평행이동한 점이고, 그 좌표는 (4, 9)이다.
 마찬가지로 방법으로 점 C₂의 좌표는 (12, 3)이다.
 이때 $b-a=5$ 또는 $b-a=-9$ 이므로
 $p=-9, q=5$
 따라서 $p+q=-4$

답 ①

29

$\vec{p} = (p_1, p_2), \vec{q} = (q_1, q_2)$ 로 놓자.
 $\vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{p} \cdot \vec{c}$ 에서
 $\vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 0$ ㉠
 $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (1+0+3, 0-2-1) = (4, -3)$

이므로 ㉠에서

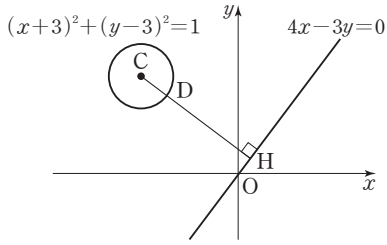
$$(p_1, p_2) \cdot (4, -3) = 0$$

$$4p_1 - 3p_2 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$|\vec{q} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{a}| \text{에서}$$

$$(q_1 + 3)^2 + (q_2 - 3)^2 = 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

좌표평면의 두 점 P(p₁, p₂), Q(q₁, q₂)에 대하여 ㉡, ㉢에서 점 P는
 직선 $4x - 3y = 0$ 위의 점이고, 점 Q는 원 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 1$ 위
 의 점임을 알 수 있다.



위 그림과 같이 원 $(x+3)^2+(y-3)^2=1$ 의 중심 $C(-3, 3)$ 에서 직선 $4x-3y=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 CH가 원과 만나는 점을 D라 하자.

$$\overline{CH} = \frac{|4 \times (-3) - 3 \times 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{21}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} |\vec{p} - \vec{q}| &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{QP}| \\ &\geq \overline{DH} \\ &= \overline{CH} - 1 \\ &= \frac{21}{5} - 1 = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

이므로 $|\vec{p} - \vec{q}|$ 의 최솟값은 $\frac{16}{5}$ 이다.

답 ③

09

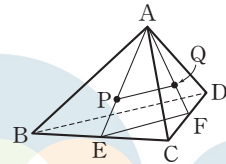
공간도형과 공간좌표

정답

본문 102~111쪽

(필수 유형 ①)	③	01 ⑤	02 ④
(필수 유형 ②)	①	03 ⑤	04 ③
(필수 유형 ③)	③	05 ③	06 ③
		07 ②	
		08 ④	
(필수 유형 ④)	①	09 ⑤	10 ①
		11 80	
(필수 유형 ⑤)	162	12 ②	13 ①
		14 ②	
(필수 유형 ⑥)	⑤	15 ④	16 ②
		17 ①	
(필수 유형 ⑦)	④	18 ⑤	19 ④
		20 ②	21 ③
(필수 유형 ⑧)	②	22 60	
		23 7	

(필수 유형 ①)



- ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
- ㄴ. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
- ㄷ. 그림에서 선분 BC, 선분 CD의 중점을 각각 E, F라 하면 두 점 P, Q는 각각 선분 AE, 선분 AF를 2 : 1로 내분하는 점이므로 삼각형 AEF에서 $\overline{PQ} \parallel \overline{EF}$, 삼각형 BCD에서 $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ 이다. 즉, $\overline{PQ} \parallel \overline{BD}$ 이므로 직선 PQ와 직선 BD는 꼬인 위치에 있지 않다. 이상에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

01

정오각뿔의 6개의 꼭짓점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 서로 다른 두 개의 꼭짓점을 지나는 직선의 개수는 ${}_6C_2=15$ 이다.

따라서 $a=15$ ㉠

정오각뿔의 6개의 꼭짓점 중 서로 다른 세 개 이상의 꼭짓점을 포함하는 평면 중 점 A를 포함하고 밑면인 정오각형 BCDEF의 5개의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 지나는 평면의 개수는 ${}_5C_2=10$ 이고, 점 A를 포함하지 않는 평면은 평면 BCDEF뿐이다.

따라서 $b=10+1=11$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$a+b=15+11=26$$

답 ⑤

02

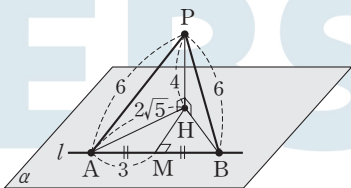
- ㄱ. 오각기둥의 한 면을 포함하는 7개의 평면 중 사각형 BGHC의 한 변을 포함하는 평면의 개수는 5이다. (참)
- ㄴ. 5개의 점 F, G, H, I, J 중 서로 다른 두 점을 지나는 직선의 개수는 ${}_5C_2=10$
 세 점 A, D, E 중 한 점과 5개의 점 F, G, H, I, J 중 한 점을 지나는 직선의 개수는 $3 \times 5=15$
 이때 직선 BC와 평행한 직선은 GH, FI로 2개이므로 오각기둥의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는 $10+15-2=23$ (거짓)
- ㄷ. 오각기둥의 15개의 모서리 중 점 C 또는 점 F를 포함하는 것은 BC, CD, CH, AF, FG, FJ로 6개이다.
 따라서 직선 CF와 오각기둥의 한 모서리를 포함하는 평면은 BFC, CFD, AFHC, CFG, CFJ로 모두 5개이다. (참)
- 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

참고

- ㄴ. 오각기둥의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선의 개수는 ${}_{10}C_2=45$
 (i) 직선 BC와 평행한 직선은 AD, FI, GH로 3개이다.
 (ii) 직선 BC와 점 B에서 만나는 직선은 AB, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ로 8개이다.
 직선 BC와 점 C에서 만나는 직선은 AC, CD, CE, CF, CG, CH, CI, CJ로 8개이다.
 직선 BC와 두 점 B, C가 아닌 점에서 만나는 직선은 AE, ED로 2개이다.
 따라서 직선 BC를 제외한 44개의 직선 중 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수는 $44-(3+2 \times 8+2)=23$

(필수 유형 ②)



$\overline{PH} \perp \alpha$ 이므로 직선 PH는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
 즉, $\overline{PH} \perp \overline{AH}$, $\overline{PH} \perp \overline{BH}$ 이므로 삼각형 PHA와 삼각형 PHB는 모두 직각삼각형이다.
 그러므로 $\overline{AH} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$, $\overline{BH} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$
 이때 삼각형 HAB는 이등변삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{AB} \perp \overline{HM}$ 이고, 점 H와 직선 l 사이의 거리는 선분 HM의 길이와 같다.
 삼각형 HAM은 직각삼각형이므로

$$\overline{HM} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 3^2} = \sqrt{11}$$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{11}$ 이다.

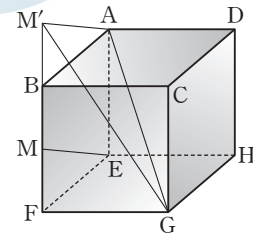
답 ①

다른 풀이

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PM} \perp l$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HM} \perp l$ 이다.
 따라서 $\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{HM} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{11}$

03

정육면체 ABCD-EFGH의 한 모서리의 길이를 2라 하자.



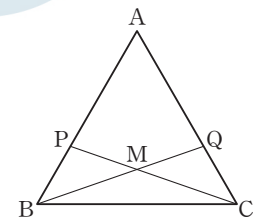
$\overline{ME} \parallel \overline{M'A}$ 를 만족시키는 직선 BF 위의 점 M'에 대하여 $\overline{M'A} = \overline{ME} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
 $\overline{AG} = 2\sqrt{3}$, $\overline{M'G} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
 두 직선 AG, ME가 이루는 예각의 크기가 θ 이므로 $\angle M'AG = \theta$
 따라서 삼각형 M'GA에서 코사인법칙에 의하여 $\cos \theta = \frac{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{3}}$
 $= \frac{5 + 12 - 13}{4\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

답 ⑤

04

정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이를 3이라 하자.

삼각형 PBC에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{PC}^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos 60^\circ = 7$
 에서 $\overline{PC} = \sqrt{7}$ 이다.
 마찬가지로 방법으로 $\overline{BQ} = \overline{QD} = \overline{CR} = \sqrt{7}$ 임을 알 수 있다.
 두 직선 PC, BQ의 교점을 M이라 하자.



정삼각형 ABC에서 두 삼각형 PBC, QCB는 서로 합동이므로 $\overline{PM} = x$ ($0 < x < \sqrt{7}$)로 놓으면

$$\overline{BM} = \overline{MC} = \sqrt{7} - x$$

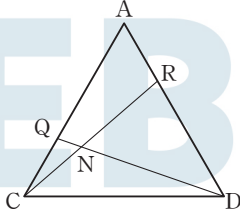
두 삼각형 PBM, PBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle BPM) = \frac{1^2 + x^2 - (\sqrt{7} - x)^2}{2 \times 1 \times x} = \frac{1^2 + (\sqrt{7})^2 - 3^2}{2 \times 1 \times \sqrt{7}}$$

$$\frac{2\sqrt{7}x - 6}{2x} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}, x = \frac{12\sqrt{7}}{30} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

$$\text{즉, } \overline{MC} = \sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{5} = \frac{3\sqrt{7}}{5}$$

또 두 직선 QD, CR의 교점을 N이라 하자.



정삼각형 ACD에서 두 삼각형 ACR, CDQ는 서로 합동이므로 두 삼각형 QCD, QNC에서

$$\angle AQD = \angle QCD + \angle QDC = \angle QCN + \angle QNC$$

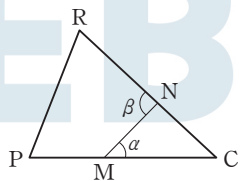
이때 $\angle QCD = 60^\circ$, $\angle QDC = \angle QCN$ 이므로

$$\angle QNC = 60^\circ$$

따라서 두 삼각형 QNC, QCD는 서로 닮음이므로

$$\overline{QC} : \overline{QD} = \overline{CN} : \overline{DC}, 1 : \sqrt{7} = \overline{CN} : 3$$

$$\overline{CN} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$



두 평면 PCR, BQD의 교선 l은 직선 MN이므로

직선 MN과 직선 PC가 이루는 예각의 크기는 $\angle NMC$ 와 같고, 직선 MN과 직선 CR가 이루는 예각의 크기는 $\angle RNM$ 과 같다.

$$\text{즉, } \alpha = \angle NMC, \beta = 180^\circ - \angle NMC$$

삼각형 NMC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sin(\angle MNC)}{\sin(\angle NMC)} = \frac{\overline{MC}}{\overline{NC}} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{5}}{\frac{3\sqrt{7}}{7}} = \frac{7}{5}$$

따라서

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(180^\circ - \angle NMC)}{\sin(\angle NMC)} = \frac{\sin(\angle NMC)}{\sin(\angle NMC)} = \frac{7}{5}$$

집고

삼각형 APR에서

$$\overline{PR}^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ = 3$$

$$\overline{PR} > 0 \text{이므로 } \overline{PR} = \sqrt{3}$$

삼각형 PCR에서

$$\cos(\angle PCR) = \frac{7 + 7 - 3}{2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{11}{14}$$

$\overline{MC} = 7k, \overline{NC} = 5k$ (k 는 양의 상수)로 놓으면

$$\overline{MN}^2 = (7k)^2 + (5k)^2 - 2 \times 7k \times 5k \times \frac{11}{14} = 19k^2$$

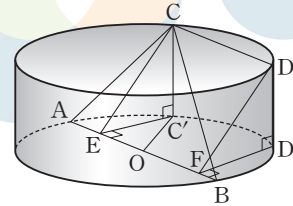
$\overline{MN} > 0$ 이므로 $\overline{MN} = \sqrt{19}k$

$$\cos(\angle MNC) = \frac{(5k)^2 + (\sqrt{19}k)^2 - (7k)^2}{2 \times 5k \times \sqrt{19}k} < 0$$

이므로 $\angle MNC > 90^\circ$

(필수 유형 ④)

두 점 C, D에서 두 점 A, B를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 각각 C', D'이라 하고, 두 점 C', D'에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$$\overline{CC'} \perp (\text{평면 } ABD'C'), \overline{C'E} \perp \overline{AB}$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{CE} \perp \overline{AB}$$

조건 (가)에서 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CE} = 16$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{CE} = 16$$

$$\overline{CE} = 4$$

직각삼각형 CC'E에서

$$\overline{CC'} = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{C'E} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{CC'}^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

선분 AB의 중점을 O라 하면 직각삼각형 OC'E에서

$$\overline{OE} = \sqrt{\overline{OC'}^2 - \overline{C'E}^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$$

마찬가지 방법으로

$$\overline{OF} = 3$$

조건 (나)에서 두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$$\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{OE} + \overline{OF} = 3 + 3 = 6$$

답 ③

05

조건 (가)에 의하여 점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PA} \perp \alpha, \overline{PH} \perp \overline{BC}$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AH} \perp \overline{BC}$$

조건 (나), (다)에서 $\overline{BC} = 10$ 이고, 삼각형 ABC의 넓이가 20이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 10 \times \overline{AH} = 20$$

$$\overline{AH} = 4$$

따라서 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 선분 PH의 길이와 같으므로

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$$

답 ③

$$\overline{PH} = \overline{MM'} \times \frac{\overline{PQ}}{\overline{QM}} = 3 \times \frac{12\sqrt{2}}{9} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{MH} = \sqrt{\overline{MP}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{2})^2} = 7$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 7^2} = 2\sqrt{19}$$

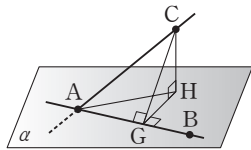
따라서 $\angle PAH = \theta$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{PH}}{\overline{AH}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{38}}{19}$$

답 ④

(필수 유형 4)

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 G, 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HG} \perp \overline{AB}$



직각삼각형 AGC에서 $\angle CAG = \theta_1$ 이고, $\sin \theta_1 = \frac{4}{5}$ 이므로 양수 k 에 대하여 $\overline{AC} = 5k$ 라 하면

$$\overline{CG} = 4k \text{이고, } \cos \theta_1 = \frac{3}{5}$$

또 직각삼각형 AHC에서 $\angle CAH = \frac{\pi}{2} - \theta_1$ 이므로

$$\overline{CH} = \overline{AC} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$$

$$= 5k \times \cos \theta_1$$

$$= 5k \times \frac{3}{5} = 3k$$

이때 직각삼각형 CGH에서

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{CG}^2 - \overline{CH}^2}$$

$$= \sqrt{(4k)^2 - (3k)^2}$$

$$= \sqrt{7}k$$

이고, $\angle CGH = \theta_2$ 이므로

$$\cos \theta_2 = \frac{\overline{GH}}{\overline{CG}} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

답 ①

09

점 C에서 두 평면의 교선 l 에 내린 수선의 발을 H' 이라 하면 점 H' 은 선분 AB의 중점이다

$$\overline{CH} \perp \beta, \overline{CH'} \perp \overline{AB}$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AB} \perp \overline{H'H}$$

$\overline{CH'} = 3\sqrt{3}$, $\overline{CH} = 2\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 CHH' 에서

$$\overline{HH'} = \sqrt{\overline{CH'}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$$

두 평면 α, β 가 이루는 예각의 크기는 $\angle CH'H$ 와 같으므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{HH'}}{\overline{CH}} = \frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 ⑤

10

점 M에서 선분 DG에 내린 수선의 발을 I라 하고

점 M에서 평면 DHGC에 내린 수선의 발을 J라 하자.

삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{IJ} \perp \overline{DG}$$

점 J는 선분 CG의 중점이므로 직각이등변삼각형 DGC에서

$$\overline{IJ} = \overline{CD} \times \frac{\overline{JG}}{\overline{DG}} = 4 \times \frac{2}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 MIJ에서

$$\overline{MI} = \sqrt{\overline{MJ}^2 + \overline{IJ}^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

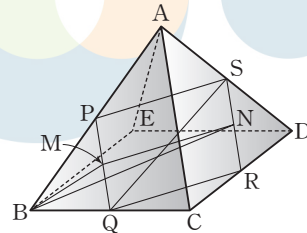
평면 DMN은 평면 DMG와 일치하고, 직선 DG는 두 평면 DMG, DHGC의 교선이므로 두 평면 DMN, DHGC가 이루는 이면각의 크기는 두 직선 MI, IJ가 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 직각삼각형 MIJ에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{IJ}}{\overline{MI}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

답 ①

11



$\overline{PB} = \overline{BQ} = 2$ 이고 $\angle PBQ = 60^\circ$ 이므로 삼각형 PBQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

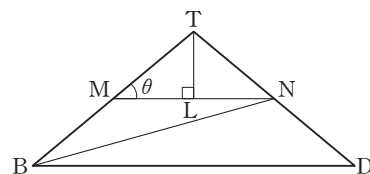
선분 PQ의 중점을 M이라 하면 점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발은 점 M이다.

이때 $\overline{PQ} \parallel$ (평면 AEC), $\overline{PS} \perp$ (평면 AEC)이므로

$$\overline{PQ} \perp \overline{PS}$$

따라서 사각형 PQRS는 직사각형이고, 선분 SR의 중점을 N이라 하면 $\overline{NM} \perp \overline{PQ}$ 가 성립한다.

선분 AC의 중점을 T라 하면 두 점 M, N은 각각 선분 BT, TD의 중점이므로 평면 PQRS와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기는 두 직선 BT, MN이 이루는 예각의 크기와 같다.



점 T에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 L이라 하면

$$\overline{BT} = \overline{DT} = 2\sqrt{3}, \overline{BD} = 4\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \cos (\angle TML) = \frac{\overline{ML}}{\overline{TM}} = \frac{\frac{1}{4}\overline{BD}}{\frac{1}{2}\overline{BT}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $120 \cos^2 \theta = 120 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 80$

답 80

(필수 유형 6)

$\cos (\angle ABC) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\sin (\angle ABC) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

이때 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=9, \overline{BC}=12$ 이므로 그 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AB} \times \sin (\angle ABC)$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 9 \times \frac{\sqrt{6}}{3}$

$= 18\sqrt{6}$

한편, $\overline{AP} \perp$ (평면 BCD)이고 $\overline{AQ} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ ㉠

㉠에 의하여 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\theta = \angle AQP$ 이고, 삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로 삼각형 BCP의 넓이 k 는

$k = S \times \cos \theta = 18\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 9\sqrt{2}$

따라서 $k^2 = (9\sqrt{2})^2 = 162$

답 162

12

원 C 위의 한 점 A에 대하여

$\overline{AO} = 6$ 이고,

조건 (가)에서 $\overline{OO'} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{AO'} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OO'}^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$

즉, 원 C의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 이므로 그 넓이는 18π 이다.

조건 (나)에서 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 6π 이므로

$\cos \theta = \frac{6\pi}{18\pi} = \frac{1}{3}$

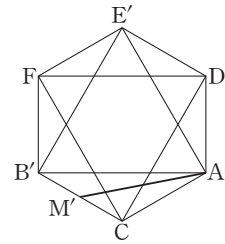
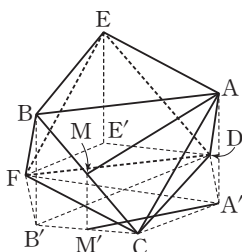
답 ②

13

정팔면체 ABCDEF에서 사각형 ABFD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로 $\overline{AB} \parallel \overline{FD}$

마찬가지 방법으로 $\overline{BE} \parallel \overline{CD}, \overline{AE} \parallel \overline{CF}$

따라서 두 평면 ABE, CDF는 서로 평행하다.



세 점 A, B, E의 평면 CDF 위로의 정사영을 각각 A', B', E'이라 하면 삼각형 A'B'E'은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이고

$\angle DA'E' = 30^\circ$ 이므로

$\overline{A'D} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 육각형 A'DE'FB'C는 한 변의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 인 정육각형이다.

선분 BC의 중점 M의 평면 CDF 위로의 정사영을 M'이라 하면 점 M'은 선분 B'C의 중점이다.

삼각형 M'CA'에서 $\angle M'CA' = 120^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{A'M'}^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \cos 120^\circ$

$= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{16}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{28}{3}$

따라서 선분 AM의 평면 CDF 위로의 정사영인 선분 A'M'의 길이는

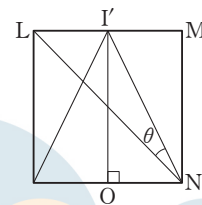
$\sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

답 ①

14

세 선분 AD, BC, FG의 중점을 각각 L, M, N이라 하자.

두 선분 FG, JK가 서로 일치하도록 삼각형 IJK를 평행이동시켰을 때, 점 I가 평행이동한 점을 I'이라 하고 점 I'에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 O라 하자.



평면 AFD는 점 G를 지나므로 두 평면 AFD, IJK가 이루는 예각의 크기는 두 평면 AFGD, I'FG가 이루는 예각의 크기와 같다.

직사각형 AFGD에서 $\overline{AF} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{LN} = 2\sqrt{2}$

직각삼각형 I'ON에서

$\overline{I'N} = \sqrt{\overline{I'O}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

두 평면 AFD, IJK가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

삼각형 I'LN에서 $\angle LNI' = \theta$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos \theta = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - 1^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \frac{12}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

삼각형 AFD의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 AFD의 평면 IJK 위로의 정사영의 넓이는

$$2\sqrt{2} \times \cos \theta = 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

답 ②

(필수 유형 6)

좌표공간의 점 A(2, 2, -1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$B(2, -2, 1)$$

따라서 점 C(-2, 1, 1)에 대하여 선분 BC의 길이는

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(-2-2)^2 + (1+2)^2 + (1-1)^2} \\ &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

15

$\overline{OA} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{OA}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$2^2 + 0^2 + 3^2 = a^2 + (b+2)^2 + (-3)^2$$

$$a^2 + (b+2)^2 = 4 \quad \text{..... ㉠}$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-2)^2 + b^2 + (-3)^2 = a^2 + (b+2)^2 + (-3)^2$$

$$-4a + 13 = 4b + 13$$

$$b = -a \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a^2 + (-a+2)^2 = 4$$

$$2a^2 - 4a = 0, \quad 2a(a-2) = 0$$

$$a \neq 0, \quad b \neq 0 \text{이므로 } a=2, \quad b=-2$$

$$\text{따라서 } ab = -4$$

답 ④

16

점 B의 좌표가 (1, 2, -3)이므로 점 C의 좌표는 (1, 0, -3)이다.

이때 세 점 A(1, 2, 3), B(1, 2, -3), C(1, 0, -3)의 x좌표가 1로 같으므로 평면 ABC는 yz평면과 평행하다.

따라서 원점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 길이는 1이고, 삼각형 ABC의 넓이가

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

이므로 사면체 OABC의 부피는

$$\frac{1}{3} \times 6 \times 1 = 2$$

답 ②

17

점 H를 원점으로 하고, 세 직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축

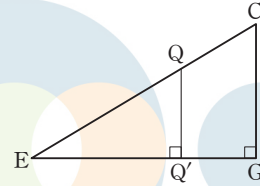
으로 하여 정육면체 ABCD-EFGH를 좌표공간에 놓으면 네 점 A, F, C, E의 좌표는 각각

$$(6, 0, 6), (6, 6, 0), (0, 6, 6), (6, 0, 0)$$

선분 AF 위를 움직이는 점 P의 좌표는

$$(6, t, 6-t) \quad (t \text{는 } 0 \leq t \leq 6 \text{인 실수})$$

로 놓을 수 있고, 선분 CE 위를 움직이는 점 Q에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q'이라 하자.



이때 점 Q의 z좌표를 s라 하면 점 Q'은 선분 EG를 s : (6-s)로 내분하므로 점 Q는 선분 EC를 s : (6-s)로 내분한다. 그러므로 점 Q의 좌표는

$$(6-s, s, s) \quad (s \text{는 } 0 \leq s \leq 6 \text{인 실수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\overline{PQ}^2 = (6-s-6)^2 + (s-t)^2 + (s-6+t)^2$$

$$= s^2 + s^2 + t^2 - 2ts + s^2 + t^2 + 36 - 12t - 12s + 2ts$$

$$= 2t^2 + 3s^2 - 12t - 12s + 36$$

$$= 2(t-3)^2 + 3(s-2)^2 + 6$$

따라서 t=3, s=2일 때, \overline{PQ}^2 의 값이 최소이므로

선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$ 이다.

답 ①

(다른 풀이)

점 C에서 직선 AF에 내린 수선의 발을 M이라 하고, 점 M에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 N이라 하자.

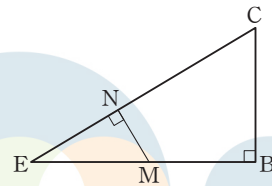
$$\overline{CB} \perp (\text{평면 AEFB}), \quad \overline{CM} \perp \overline{AF}$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{BM} \perp \overline{AF}$ 이다.

따라서 점 M은 정사각형 AEFB의 두 대각선 AF, EB의 교점이다.

선분 AF 위의 점 P와 선분 CE 위의 점 Q에 대하여

$$\overline{PQ} \geq \overline{QM} \geq \overline{MN}$$



두 직각삼각형 EMN, ECB는 서로 닮음이므로

$$\overline{MN} = \overline{CB} \times \frac{\overline{EM}}{\overline{CE}} = 6 \times \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{6}$ 이다.

(필수 유형 7)

두 점 A(a, 1, -1), B(-5, b, 3)의 중점의 좌표가 (8, 3, 1)이므로

$$\frac{a+(-5)}{2} = 8, \quad \frac{1+b}{2} = 3$$

따라서 a=21, b=5이므로

$$a+b=21+5=26$$

답 ④

18

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{1+0+2}{3}, \frac{-2+2+0}{3}, \frac{3+1+2}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 0, 2)$$

두 점 A, G의 yz평면 위로의 정사영의 좌표는 각각 (0, -2, 3), (0, 0, 2)

따라서 선분 AG의 yz평면 위로의 정사영의 길이는 $\sqrt{(0+2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$

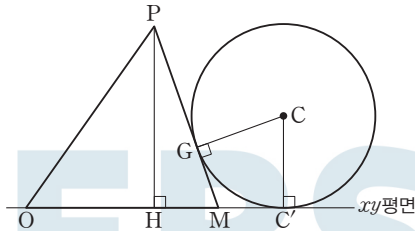
답 ⑤

19

점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 구 S의 중심을 C, 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C'이라 하자.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 점 H는 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$$\overline{OM}=\sqrt{3}, \overline{HM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



구 S가 xy평면과 접하고 삼각형 PAB의 무게중심인 G에서 평면 PAB와 접하므로

$$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{PM}$$

원 밖에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로 위 그림에서

$$\overline{GM}=\overline{MC'}$$

$$\overline{MC'}=x \ (x>0) \text{으로 놓으면}$$

$$\overline{OC}=\sqrt{6}, \overline{CC'}=\frac{\sqrt{6}}{3} \text{이고, } \overline{OC}^2=\overline{OC'}^2+\overline{CC'}^2 \text{이므로}$$

$$(\sqrt{6})^2=(\sqrt{3}+x)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2, \sqrt{3}+x=\sqrt{6-\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{PM}=3\overline{GM}=\sqrt{3} \text{이므로}$$

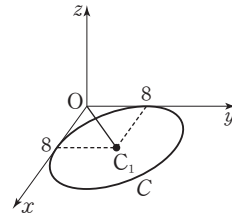
$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

따라서 점 P의 z좌표는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

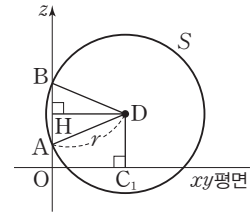
답 ④

필수 유형 ⑧

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하면 원 C의 넓이가 64π 이므로 원 C의 반지름의 길이는 8이다. 이때 구 S가 x축, y축에 각각 접하므로 [그림 1]과 같이 원 C의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $C_1(8, 8, 0)$ 이고 원점 O에 대하여 $\overline{OC_1}=8\sqrt{2}$ 이다.



[그림 1]



[그림 2]

한편, [그림 2]와 같이 구 S가 z축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 $\overline{AB}=8$

구 S의 중심을 D, 점 D에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이다.

또 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발이 원 C의 중심 C_1 이므로 사각형 $DHOC_1$ 은 직사각형이다.

이때 직각삼각형 DHA에서

$$\overline{DH}=\overline{OC_1}=8\sqrt{2}, \overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$$

따라서 구 S의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{128 + 16} \\ &= \sqrt{144} \\ &= 12 \end{aligned}$$

답 ②

20

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+k=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14-k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

구 ①의 중심을 C라 하면 그 좌표는 (1, -2, 3)이다.

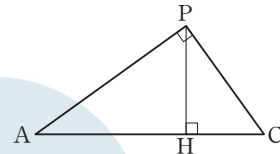
점 A를 지나는 직선이 구와 점 P에서 접하고,

$$\overline{AC}=\sqrt{1^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{21}$$

$$\overline{PC}=\sqrt{14-k}$$

이므로

$$\overline{AP}^2=\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=21-(14-k)=k+7$$



이때 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 AHP, APC는 서로 닮음이므로

$$\overline{PH}=\overline{PC}\times\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\sqrt{14-k}\times\frac{\sqrt{k+7}}{\sqrt{21}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

즉, 선분 PH의 길이가 일정하므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 H이고 반지름의 길이가 \overline{PH} 인 원이다.

문제의 조건에서 점 P가 나타내는 도형의 길이가 $\frac{6\sqrt{14}}{7}\pi$ 이므로

$$\overline{PH}=\frac{3\sqrt{14}}{7} \text{이다.}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \frac{\sqrt{(14-k)(k+7)}}{\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{14}}{7}$$

$$(14-k)(k+7)=54$$

$$k^2-7k-44=0$$

$$(k-11)(k+4)=0$$

$$0 < k < 14 \text{ 이므로 } k=11$$

답 ②

21

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{3}x - 4y - 6z + 7 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$$

점 C의 좌표는 $(\sqrt{3}, 2, 3)$ 이므로

$$\overline{OC} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 + 3^2} = 4$$

구 S 위의 점 P에 대하여 삼각형 OPC의 넓이는 $\overline{OC} \perp \overline{CP}$ 일 때 최대이다.

$$\text{따라서 그 최댓값은 } \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

점 C $(\sqrt{3}, 2, 3)$ 의 xy 평면 위로의 정사영을 C'이라 하면

$$\overline{OC'} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}$$

이고, 직선 OC와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

직선 CP가 xy 평면과 평행할 때 삼각형 OPC의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이가 최대이다.

따라서 삼각형 OPC의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

$$6 \cos \theta = 6 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

답 ③

22

두 구 S_1, S_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하고, 구 S_1 이 yz 평면과 만나서 생기는 도형을 C라 하자.

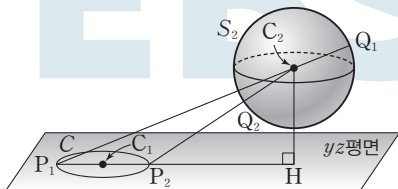
점 $C_1(0, 3, 3)$ 이 yz 평면 위의 점이므로 도형 C는 중심이 C_1 이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

점 $C_2(2, -1, 0)$ 에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 그 좌표는 $(0, -1, 0)$ 이다.

직선 HC_1 이 원 C와 만나는 두 점 중 점 H와의 거리가 먼 점을 P_1 , 가까운 점을 P_2 라 하자.

직선 P_1C_2 가 구 S_2 와 만나는 두 점 중 점 P_1 과의 거리가 먼 점을 Q_1 이라 하고,

직선 P_2C_2 가 구 S_2 와 만나는 두 점 중 점 P_2 와의 거리가 가까운 점을 Q_2 라 하자.



$$\overline{C_1H} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = 5, \overline{C_2H} = 2$$

위 그림에서 $\overline{P_2Q_2} \leq \overline{PQ} \leq \overline{P_1Q_1}$ 이므로

$$M = \overline{P_1Q_1} = \overline{P_1C_2} + \overline{C_2Q_1}$$

$$= \sqrt{(5+1)^2 + 2^2} + 1 = 2\sqrt{10} + 1$$

$$m = \overline{P_2Q_2} = \overline{P_2C_2} - \overline{C_2Q_2}$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + 2^2} - 1 = 2\sqrt{5} - 1$$

따라서

$$(M-1)^2 + (m+1)^2 = (2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{5})^2$$

$$= 40 + 20 = 60$$

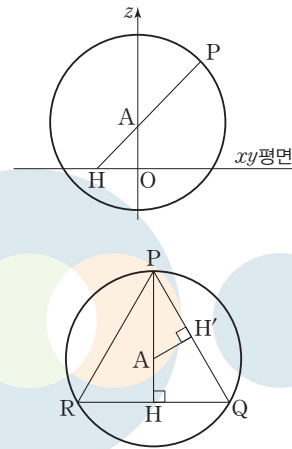
답 60

23

구 S의 방정식은 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4^2$ 이고 이 식에 $z=0$ 을 대입하면 $x^2 + y^2 = 12$

즉, 구 S가 xy 평면과 만나서 생기는 도형 C는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 xy 평면 위의 원이다.

구 S 위의 점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (가)에서 삼각형 PQR가 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 인 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 RQ의 중점이다.



이때 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$$\overline{PH'} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\cos(\angle APH') = \frac{\overline{PH'}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

따라서

$$\overline{PH} = \overline{PQ} \times \cos(\angle APH') = 5\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{8} = \frac{25}{4}$$

$$\overline{AH} = \overline{PH} - \overline{AP} = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$$

평면 PQR와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AH}} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9}$$

$$\text{이므로 } \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{9}$$

원 C의 넓이가 $(2\sqrt{3})^2\pi = 12\pi$ 이므로 원 C의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는

$$12\pi \times \frac{\sqrt{17}}{9} = \frac{4\sqrt{17}}{3}\pi$$

따라서 $p=3, q=4$ 이므로

$$p+q=7$$

답 7



실전편

실전 모의고사 1회

본문 114~125쪽

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ④	07 ④	08 ①	09 ④	10 ①
11 ②	12 ⑤	13 ⑤	14 ⑤	15 ①
16 97	17 16	18 20	19 3	20 15
21 39	22 320	23 ①	24 ④	25 ③
26 ②	27 ④	28 ②	29 24	30 256

01

$2^{\log_5 5} = 5, (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}$ 이므로

$2^{\log_5 5} \times (\sqrt{5})^{-2} = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

답 ①

02

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ 에서

$f'(x) = 6x^2 + 8x - 5$

따라서 $f'(1) = 6 + 8 - 5 = 9$

답 ②

03

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$a_5 - a_2 = 3d = 12$ 에서 $d = 4$

따라서 $a_4 = a_1 + 3d = 3 + 3 \times 4 = 15$

답 ④

다른 풀이

$a_5 - a_2 = a_4 - a_1 = 12$ 이고

$a_1 = 3$ 이므로 $a_4 = 15$

04

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \{xf(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x \times \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \times 2 = 4$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} \{xf(x)\} = 3 + 4 = 7$

답 ⑤

05

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 에서 $f(1) = 0$

또한 다항함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 3$

한편, $g(x) = xf(x) + 2$ 에서 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ 이므로
 $g'(1) = f(1) + 1 \times f'(1) = 0 + 1 \times 3 = 3$

답 ③

06

$\tan \theta - \frac{4}{1 + \tan \theta} = 2$ 에서

$\tan \theta (1 + \tan \theta) - 4 = 2(1 + \tan \theta)$

$\tan^2 \theta - \tan \theta - 6 = 0, (\tan \theta + 2)(\tan \theta - 3) = 0$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\tan \theta > 0$ 이므로

$\tan \theta = 3$

즉, $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3$ 에서

$\sin \theta = 3 \cos \theta$ ㉠

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \theta < 0$ 이므로

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ 을 ㉠에 대입하면

$\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

따라서 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$

답 ④

07

$t^3 - 12t^2 + 36t = t^2 - 6t$ 에서

$t^3 - 13t^2 + 42t = 0, t(t-6)(t-7) = 0$

$t = 0$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 7$

두 점 P, Q가 출발한 후 처음으로 속도가 같아지는 시각은 $t = 6$ 이다.

즉, $a = 6$ 이고 $\frac{a}{2} = 3$

따라서 시각 $t = 3$ 에서 $t = 6$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$\int_3^6 |t^2 - 6t| dt = \int_3^6 (6t - t^2) dt = \left[3t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_3^6$
 $= (108 - 72) - (27 - 9) = 18$

답 ④

08

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x^2} = -1$ 에서

$f(x) - x^3 = -3x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{9x} = -1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 에서 $f(0) = b = 0$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + ax}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + a}{9} = \frac{a}{9}$ 이므로

$$\frac{a}{9} = -1 \text{에서 } a = -9$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

답 ①

09

$$\sum_{k=1}^n S_k = T_n = 2n^3 + 4n^2 + 2n \text{이라 하면}$$

$$T_n - T_{n-1} = S_n \quad (n \geq 2) \text{에서}$$

$$S_n = (2n^3 + 4n^2 + 2n) - \{2(n-1)^3 + 4(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ = 6n^2 + 2n \quad (n \geq 2)$$

$$\text{한편, } \sum_{k=1}^n a_k = S_n \text{이므로}$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (6 \times 3^2 + 2 \times 3) - (6 \times 2^2 + 2 \times 2) \\ = 60 - 28 = 32$$

답 ④

10

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2\sqrt{7} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{7} \times \sin \frac{2}{3}\pi = 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21}$$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BDA)} = 2\sqrt{7}$$

$$\overline{AB} = 2\sqrt{7} \sin(\angle BDA) = 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = x \quad (x > 0)$ 이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$(\sqrt{21})^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 9 = 0, \quad (x + 3\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = \sqrt{3}$$

직선 AD가 $\angle BAC$ 를 이등분하므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CE}$

$$\text{즉, } 2\sqrt{3} : \sqrt{3} = \overline{BE} : \overline{CE} \text{에서 } \overline{BE} = 2\overline{CE}$$

$$\text{따라서 } \overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BC} = \frac{2\sqrt{21}}{3}, \quad \overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{\sqrt{21}}{3} \text{이므로}$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = \left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{3}\right)^2 = \frac{35}{3}$$

답 ①

11

$$f(x) = 3x^2 + ax - (2x-1) \int_0^1 f(t) dt \text{이고}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} \text{이므로 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \text{에서 } a = 2$$

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면 } f(x) = 3x^2 + 2x - (2x-1)k$$

$$f(x) = 3x^2 + 2(1-k)x + k \text{이고}$$

$$\int_0^1 \{3x^2 + 2(1-k)x + k\} dx = k$$

이때

$$\int_0^1 \{3x^2 + 2(1-k)x + k\} dx = \left[x^3 + (1-k)x^2 + kx \right]_0^1 \\ = 1 + (1-k) + k = 2$$

$$\text{이므로 } k = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 - 2x + 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 3 \times 4 - 2 \times 2 + 2 = 10$$

답 ②

12

함수 $f(x) = a \cos \frac{\pi x}{b}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = 2b$ 이고, 최댓값은 a , 최솟값

은 $-a$ 이다.

$$f(x) = -a \text{에서}$$

$$a \cos \frac{\pi x}{b} = -a, \quad \cos \frac{\pi x}{b} = -1$$

$$\frac{\pi x}{b} = \pi, \quad x = b$$

즉, 점 A의 좌표는 $(b, -a)$ 이다.

$$f(x) = \frac{a}{2} \text{에서}$$

$$a \cos \frac{\pi x}{b} = \frac{a}{2}, \quad \cos \frac{\pi x}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{b} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi x}{b} = \frac{5\pi}{3}$$

$$x = \frac{b}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5b}{3}$$

$\overline{OB} < \overline{OC}$ 이므로 두 점 B, C의 좌표는 $B\left(\frac{b}{3}, \frac{a}{2}\right), C\left(\frac{5b}{3}, \frac{a}{2}\right)$ 이다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $x = b$ 에 대하여 대칭이므로

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

이때 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \left(\frac{5b}{3} - \frac{b}{3} \right) = \frac{2}{3}b, \quad \overline{AH} = \frac{a}{2} - (-a) = \frac{3}{2}a \text{이므로}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{2}{3}b} = \sqrt{3}, \quad a = \frac{4\sqrt{3}}{9}b$$

따라서 직선 OA의 기울기는 $-\frac{a}{b}$ 이고, 직선 OB의 기울기는 $\frac{3a}{2b}$ 이므

로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은

$$-\frac{a}{b} \times \frac{3a}{2b} = -\frac{3a^2}{2b^2} = -\frac{3}{2b^2} \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}b \right)^2 = -\frac{8}{9}$$

답 ⑤

13

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=2, a_n a_{n+1} = (-1)^n$ 을 만족시키므로 각 항을 차례로 구하면

$$a_1 a_2 = -1 \text{에서 } a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 a_3 = 1 \text{에서 } a_3 = -2$$

$$a_3 a_4 = -1 \text{에서 } a_4 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 a_5 = 1 \text{에서 } a_5 = 2$$

⋮

$$a_1 = 2 \text{이므로 } b_1 = 1 - 2$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \text{이므로 } b_2 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = -2 \text{이므로 } b_3 = 3 - (-2) = 3 + 2$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \text{이므로 } b_4 = 4 - \frac{1}{2}$$

$$a_5 = 2 \text{이므로 } b_5 = 5 - 2$$

⋮

따라서

$$b_n = \begin{cases} n-2 & (n=4m-3) \\ n+\frac{1}{2} & (n=4m-2) \\ n+2 & (n=4m-1) \\ n-\frac{1}{2} & (n=4m) \end{cases} \quad (\text{단, } m \text{은 자연수})$$

자연수 k 에 대하여 b_{2k} 는 수열 $\{b_n\}$ 의 짝수번째 항을 의미하므로

$$b_{2k} = \begin{cases} 2k+\frac{1}{2} & (2k=4m-2) \\ 2k-\frac{1}{2} & (2k=4m) \end{cases} \quad (\text{단, } m \text{은 자연수})$$

$$b_{2k} + b_{2k+2} = \left(2k+\frac{1}{2}\right) + \left(2k+2-\frac{1}{2}\right) = 4k+2$$

$$\text{또는 } b_{2k} + b_{2k+2} = \left(2k-\frac{1}{2}\right) + \left(2k+2+\frac{1}{2}\right) = 4k+2$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} (b_{2k} + b_{2k+2}) = \sum_{k=1}^{10} (4k+2) = 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 = 240$$

답 ⑤

다른 풀이

조건 (가)에 의하여 $a_2 = -\frac{1}{2}$ 이고

자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} a_{2n+1} = (-1)^{2n} = 1, \quad a_{2n+1} a_{2n+2} = (-1)^{2n+1} = -1 \text{이므로}$$

$$a_{2n+2} = \frac{-1}{a_{2n+1}} = -a_{2n} \text{을 만족시킨다.}$$

$$\text{따라서 } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2}$$

조건 (나)에 의하여 $a_{2n} + b_{2n} = 2n$ 에서

$$b_{2n} = 2n - a_{2n} = 2n - \frac{(-1)^n}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (b_{2k} + b_{2k+2}) &= \sum_{k=1}^{10} \left[2k - \frac{(-1)^k}{2} + 2k + 2 - \frac{(-1)^{k+1}}{2} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{10} (4k+2) \\ &= 240 \end{aligned}$$

14

ㄱ. $f(x) + x f'(x) = -4x^3 + 6x$ 에서 $\{x f(x)\}' = -4x^3 + 6x$ 이므로

$$x f(x) = \int (-4x^3 + 6x) dx$$

$$= -x^4 + 3x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉑의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 \times f(0) = C, \text{ 즉 } C=0$$

$C=0$ 을 ㉑에 대입하면

$$x f(x) = -x^4 + 3x^2$$

$$f(x) \text{가 다항함수이므로 } f(x) = -x^3 + 3x$$

따라서 $f(-1) = -2$ (참)

ㄴ. $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-1	⋯	1	⋯
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이고, $x=1$ 에서 극대이다.

$$f(-1) = -2, \quad f(1) = 2 \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$f(x) = -2 \text{에서}$$

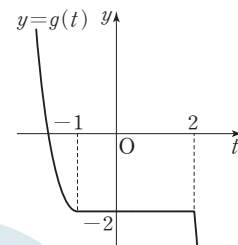
$$-x^3 + 3x = -2$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\text{함수 } g(t) = \begin{cases} f(t) & (t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2) \\ f(-1) & (-1 < t < 2) \end{cases} \text{이므로 함수 } y=g(t)$$

의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서만 미분가능하지 않다. (참)

$$\text{ㄷ. } |f(t) - g(t)| = \begin{cases} 0 & (t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2) \\ f(t) + 2 & (-1 < t < 2) \end{cases}$$

따라서 $|f(t) - g(t)|$ 는 $t=1$ 일 때 최댓값 $f(1) + 2 = 2 + 2 = 4$ 를 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 3n - 1$ 이므로 집합 A 의 원소는 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로만 이루어져 있다.

한편, 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n = 2n - 1$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 의 각 항 중에서 3으로 나눈 나머지가 2가 아닌 수가 집합 $B - A$ 의 원소가 된다.

(i) $n=3k-2$ (k 는 자연수)일 때

$b_{3k-2}=2(3k-2)-1$ 에서
 $2(3k-2)-1=6k-5=3(2k-1)-2$ 이므로
 $n=3k-2$ 일 때 b_n 은 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수이다.
 따라서 b_{3k-2} 는 집합 $B-A$ 의 원소이다.

(ii) $n=3k-1$ (k 는 자연수)일 때

$b_{3k-1}=2(3k-1)-1$ 에서
 $2(3k-1)-1=6k-3=3(2k-1)$ 이므로
 $n=3k-1$ 일 때 b_n 은 3의 배수이다.
 따라서 b_{3k-1} 은 집합 $B-A$ 의 원소이다.

(iii) $n=3k$ (k 는 자연수)일 때

$b_{3k}=2 \times 3k-1$ 에서
 $2 \times 3k-1=3 \times 2k-1$ 이므로
 $n=3k$ 일 때 b_n 은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수이다.
 따라서 b_{3k} 는 집합 $B-A$ 의 원소가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 $B-A = \{b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \dots\}$

이때 $d_n = b_{3n-2} + b_{3n-1}$ 이라 하면 $d_1 = b_1 + b_2 = 4$ 이고

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= (b_{3n+1} + b_{3n+2}) - (b_{3n-2} + b_{3n-1}) \\ &= \{2(3n+1)-1 + 2(3n+2)-1\} \\ &\quad - \{2(3n-2)-1 + 2(3n-1)-1\} \\ &= (12n+4) - (12n-8) = 12 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{d_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공차가 12인 등차수열이다.

이때 수열 $\{d_n\}$ 의 첫째항부터 제 k 항까지의 합을 S_k 라 하면

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{k\{2 \times 4 + 12(k-1)\}}{2} > 140 \text{에서} \\ k(12k-4) &> 280, 3k^2 - k - 70 > 0, (3k+14)(k-5) > 0 \\ k > 0 \text{에서 } k > 5 \text{이므로 부등식을 만족시키는 자연수 } k \text{의 최솟값은 } 6 \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } S_6 = (b_1 + b_2) + (b_4 + b_5) + \dots + (b_{16} + b_{17}) = \sum_{k=1}^{12} c_k = 204$$

한편, $b_{17} = 2 \times 17 - 1 = 33$ 에서 $S_6 - b_{17} = 171$ 이다. 집합 $B-A$ 에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n 번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는

$$b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} = \sum_{k=1}^{11} c_k \text{인 경우이므로 자연수 } n \text{의 최솟값은 } 11 \text{이다.}$$

답 ①

다른 풀이

조건을 만족시키는 집합 $B-A$ 의 원소는 $b_1, b_2, b_4, b_5, b_7, b_8, \dots$ 이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 $3n$ 항까지의 합에서 수열 $\{b_{3n}\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 뺀 것을 S_n 이라 하자.

수열 $\{b_{3n}\}$ 은 첫째항이 $b_3=5$ 이고 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n} b_k - \sum_{k=1}^n b_{3k} \\ &= \frac{3n\{2+2(3n-1)\}}{2} - \frac{n\{10+6(n-1)\}}{2} = \frac{18n^2}{2} - \frac{6n^2+4n}{2} \\ &= 6n^2 - 2n = 2n(3n-1) \end{aligned}$$

$$2n(3n-1) > 140 \text{에서 } 3n^2 - n - 70 > 0 \text{이고}$$

$(3n+14)(n-5) > 0$ 에서 n 은 자연수이므로 $n > 5$ 이고, 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

$$\text{이때 } S_6 = b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} + b_{17} = \sum_{k=1}^{12} c_k = 204 \text{이고}$$

$$b_{17} = 2 \times 17 - 1 = 33 \text{이므로}$$

$$b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} = \sum_{k=1}^{11} c_k = 171 > 140 \text{이 성립한다.}$$

따라서 집합 $B-A$ 에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n 번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는 $b_1 + b_2 + b_4 + b_5 + \dots + b_{16} = \sum_{k=1}^{11} c_k$ 인 경우이므로 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

16

$$\sum_{k=1}^{10} (k+2a_k) = \sum_{k=1}^{10} k + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 21 = 97$$

답 97

17

$$f(x) = \int (3x^2 + 2x + a) dx = x^3 + x^2 + ax + C \quad (C \text{는 적분상수}) \text{이고,}$$

함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로}$$

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\text{즉, } C=0 \text{이고 } f(x) = x^3 + x^2 + ax$$

$$\text{또한 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + a \text{에서 } a=2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + x^2 + 2x \text{이므로 } f(2) = 8 + 4 + 4 = 16$$

답 16

18

$$\text{조건 (가)에서 } \log_8 a + \log_8 b = \log_2 12 - \log_2 3 \text{이므로}$$

$$\log_8 ab = \log_2 4, \log_8 ab = 2$$

$$ab = 64 \quad \dots \textcircled{A}$$

$$\text{조건 (나)에서 } \log_3 16 \times \log_2 9 = \frac{4 \log 2}{\log 3} \times \frac{2 \log 3}{\log 2} = 8 \text{이므로}$$

$$\log_2 a \times \log_2 b = 8 \quad \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } b = \frac{64}{a} \text{이므로 이를 } \textcircled{B} \text{에 대입하면}$$

$$\log_2 a \times \log_2 \frac{64}{a} = 8, \log_2 a \times (6 - \log_2 a) = 8$$

$$(\log_2 a)^2 - 6 \log_2 a + 8 = 0, (\log_2 a - 2)(\log_2 a - 4) = 0$$

$$\log_2 a = 2 \text{ 또는 } \log_2 a = 4$$

$$a = 4 \text{ 또는 } a = 16$$

$$a = 4 \text{일 때 } b = 16 \text{이고, } a = 16 \text{일 때 } b = 4 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a + b = 4 + 16 = 20$$

답 20

19

$f'(x) = x^2 - 2ax + 1$ 에서 함수 $f(x)$ 가 극값이 존재하지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \leq 0, a^2 \leq 1, -1 \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a 의 값은 $-1, 0, 1$ 이고, 그 개수는 3이다.

답 3

20

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2x$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 하자.

또 함수 $|f(x)-2x|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)-2x=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, 즉 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+2x$ 로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x^2} = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = a^2\beta^2 = 0$ 에서 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

(i) $\alpha=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-\beta)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-\beta)^2 = \beta^2 = 16$$

$\beta > 0$ 이므로 $\beta=4$ 이고 $f(x)=x^2(x-4)^2+2x$

이때 $f(1)=11 < 15$ 이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\beta=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\alpha)^2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-\alpha)^2 = a^2 = 16$$

$\alpha < 0$ 이므로 $\alpha=-4$ 이고 $f(x)=x^2(x+4)^2+2x$

이때 $f(1)=27 > 15$ 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$$f(x) = x^2(x+4)^2 + 2x = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x + 2$$

$f'(x)=2$ 에서

$$4x^3 + 24x^2 + 32x + 2 = 2$$

$$4x(x+4)(x+2) = 0$$

$$x = -4 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

$f(-2)=12$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의

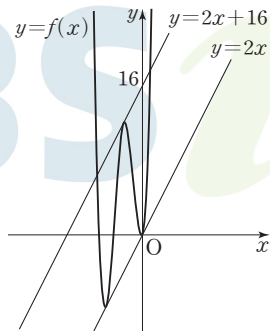
점 $(-2, 12)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-12=2(x+2), \text{ 즉 } y=2x+16$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

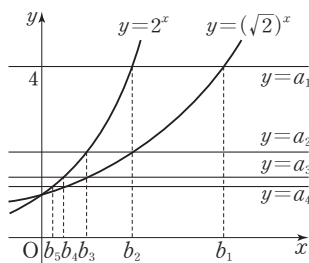
$$0 < k < 16$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, ..., 15이고, 그 개수는 15이다.



답 15

21



위의 그림에서 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 각 항을 구하면 다음과 같다.

(i) 직선 $y=a_1=4$ 가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 과 만나는 점의 x 좌표가 b_1 이므로 $4=(\sqrt{2})^x$ 에서 $x=b_1=4$ 이고 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점의 x 좌표가 b_2 이므로 $4=2^x$ 에서 $x=b_2=2$

직선 $y=a_2$ 가 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 과 만나는 점의 x 좌표가 b_2 이므로 $b_2=2$ 에서 $a_2=(\sqrt{2})^2=2$

$$\text{따라서 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{4} = 1, \frac{a_2}{b_2} = \frac{2}{2} = 1$$

(ii) 직선 $y=a_2=2$ 가 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점의 x 좌표가 b_3 이므로 $2=2^x$ 에서 $x=b_3=1$

$$a_3=(\sqrt{2})^1=\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_3}{b_3} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

(iii) 직선 $y=a_3=\sqrt{2}$ 가 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점의 x 좌표가 b_4 이므로

$$\sqrt{2}=2^x \text{에서 } x=b_4=\frac{1}{2}=2^{-1}$$

$$a_4=(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_4}{b_4} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{-1}} = 2^{\frac{5}{4}}$$

(iv) 직선 $y=a_4=2^{\frac{1}{4}}$ 이 곡선 $y=2^x$ 과 만나는 점의 x 좌표가 b_5 이므로

$$2^{\frac{1}{4}}=2^x \text{에서 } x=b_5=\frac{1}{4}=2^{-2}$$

$$a_5=(\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_5}{b_5} = \frac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{-2}} = 2^{\frac{17}{8}}$$

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 \log_2 \frac{a_n}{b_n} &= \log_2 \frac{a_1}{b_1} + \log_2 \frac{a_2}{b_2} + \log_2 \frac{a_3}{b_3} + \log_2 \frac{a_4}{b_4} + \log_2 \frac{a_5}{b_5} \\ &= \log_2 \left(\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} \times \frac{a_4}{b_4} \times \frac{a_5}{b_5} \right) \\ &= \log_2 (1 \times 1 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{\frac{17}{8}}) \\ &= \log_2 2^{\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{17}{8}} = \frac{31}{8} \end{aligned}$$

따라서 $p=8, q=31$ 이므로 $p+q=8+31=39$

답 39

다른 풀이

$a_n=(\sqrt{2})^{b_n}=2^{\frac{b_n}{2}}$ 에서 $2^{\frac{b_n}{2}}=2^{b_{n+1}}$ 이므로

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n \text{ 이고}$$

$$a_1=(\sqrt{2})^{b_1}=4 \text{에서 } b_1=4$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

$$\text{즉, } b_n=4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{3-n}$$

한편, $2^{b_{n+1}}=a_n$ 에서 $b_{n+1}=2^{2-n}$ 이므로 $a_n=2^{2^{2-n}}$

$$\text{따라서 } \log_2 \frac{a_n}{b_n} = \log_2 \frac{2^{2^{2-n}}}{2^{3-n}} = 2^{2-n} + (n-3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 (2^{2-n} + n - 3) &= \frac{2 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{5 \times 6}{2} - 3 \times 5 \\ &= 4 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 15 - 15 \\ &= 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8} \end{aligned}$$

즉, $p=8, q=31$ 이므로 $p+q=8+31=39$

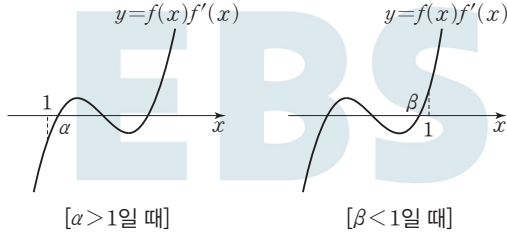
22

방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면
 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$, $f'(x)=2x-\alpha-\beta$ 이므로
 $f(x)f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

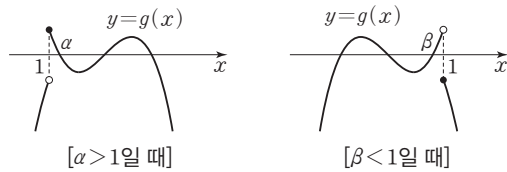
이때 $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ 이다.

(i) $\alpha > 1$ 또는 $\beta < 1$ 일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



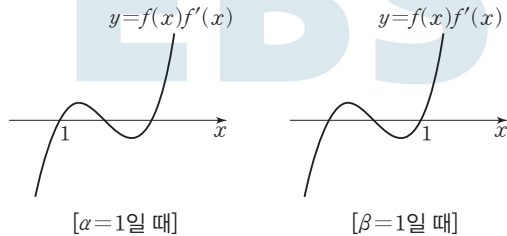
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



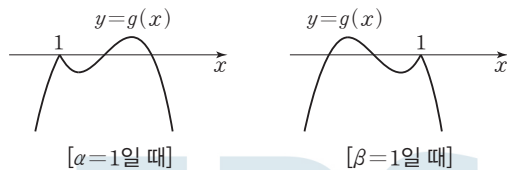
이때 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$ 일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



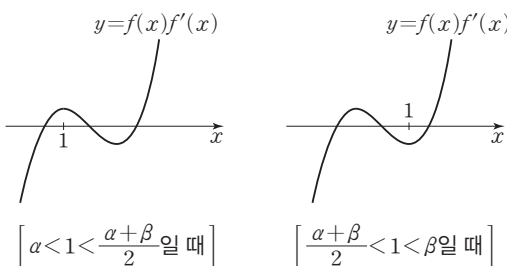
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



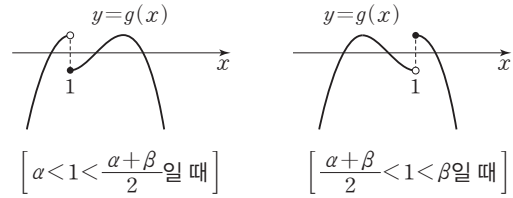
함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시키지만 $h(k)=2$ 이고 $\lim_{t \rightarrow k^-} h(t) > \lim_{t \rightarrow k^+} h(t)$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재하지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

(iii) $\alpha < 1 < \frac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\frac{\alpha+\beta}{2} < 1 < \beta$ 일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



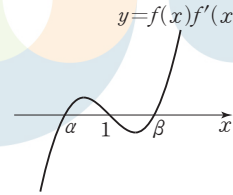
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iv) $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$ 일 때

함수 $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

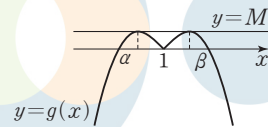


$i(x)=f(x+1)f'(x+1)$ 이라 하면

$i(x)=2x(x-\alpha+1)(x+\alpha-1)$ 이므로 $i(-x)=-i(x)$ 이다.

즉, 함수 $y=i(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $i(x)$ 의 극댓값을 M 이라 하면 $i(x)$ 의 극솟값은 $-M$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)f'(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 극댓값은 M , 극솟값은 $-M$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

또 $h(k)=2$ 이고 $\lim_{t \rightarrow k^-} h(t) > \lim_{t \rightarrow k^+} h(t)$ 를 만족시키는 실수 $k=M$ 이 존재하므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i)~(iv)에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$ 이므로 $f(x)=x^2-2x+a$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)$ 이므로

$x < 1$ 일 때 $g(x)=2(x-1)(x^2-2x+a)$

$g(-1)=2 \times (-2) \times (3+a)=20$ 에서 $a=-8$ 이므로

$$g(x)=2(x-1)(x^2-2x-8)$$

$$=2(x+2)(x-1)(x-4)$$

한편, $x \geq 1$ 일 때 $g(x)=-2(x+2)(x-1)(x-4)$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases} 2(x+2)(x-1)(x-4) & (x < 1) \\ -2(x+2)(x-1)(x-4) & (x \geq 1) \end{cases}$$

따라서

$$g(0)=2 \times 2 \times (-1) \times (-4)=16,$$

$$g(3)=-2 \times 5 \times 2 \times (-1)=20$$

이므로

$$g(0) \times g(3)=16 \times 20$$

$$=320$$

23

선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P라 하면

점 P의 z좌표는

$$\frac{2 \times a + 1 \times 4}{2 + 1} = \frac{2a + 4}{3}$$

점 P가 xy평면 위의 점이므로

$$\frac{2a + 4}{3} = 0, a = -2$$

따라서 $\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-2)^2 + (-2-4)^2} = 7$

답 ①

24

쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{26} = 1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는

$(-\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, 0)$

즉, 타원의 두 초점이 x축 위의 점이므로 $a^2 > 12$ 이고

$a^2 - 12 = 10$ 에서 $a^2 = 22$

$a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{22}$

답 ④

25

구 S : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 25$ 의 중심은 $(1, -2, 4)$ 이고 반지름의 길이는 5이므로 점 A의 좌표는 $(1, -2, 9)$ 이다.

점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A'이라 하면

$A'(1, -2, 0)$ 이고 $\overline{AA'} = 9$ 이다.

구 S와 xy평면이 만나서 생기는 도형 O는 $z=0$ 이므로

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (0-4)^2 = 25$ 에서

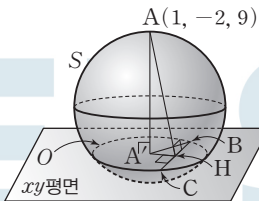
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

이다. 즉, 도형 O는 xy평면 위의 중심이 $A'(1, -2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

$\overline{AA'} \perp (xy\text{평면}), \overline{AH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

이때 $\overline{AH} = \sqrt{\overline{A'B}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

따라서 $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AA'}^2 + \overline{A'H}^2} = \sqrt{9^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{86}$



답 ③

26

포물선 $y^2 = 6x$ 위의 점 $P(3, 3\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$3\sqrt{2}y = 3(x+3)$ 에서 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+3)$

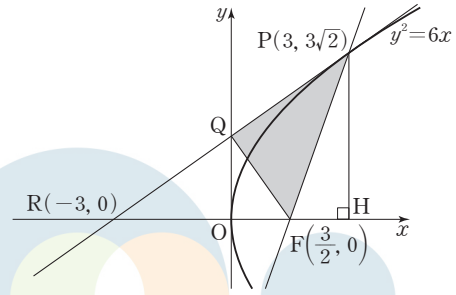
이 접선이 x축과 만나는 점을 R라 하면 $R(-3, 0)$ 이다.

포물선 $y^2 = 6x$ 의 초점의 좌표는 $F(\frac{3}{2}, 0)$ 이므로

$\overline{RF} = \frac{3}{2} - (-3) = \frac{9}{2}$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ 이므로

$\overline{PF} = \overline{RF} = \frac{9}{2}$



따라서 삼각형 PRF는 이등변삼각형이고 점 Q는 선분 PR의 중점이므로 삼각형 PQF의 넓이는 삼각형 PRF의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PRF의 넓이는

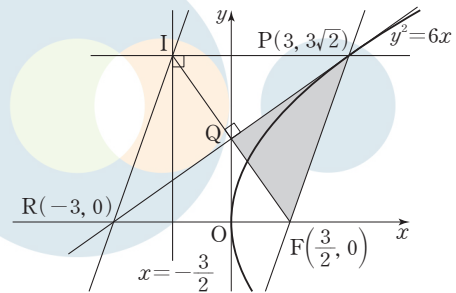
$\frac{1}{2} \times \overline{RF} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{27\sqrt{2}}{4}$

이므로 삼각형 PQF의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{27\sqrt{2}}{4} = \frac{27\sqrt{2}}{8}$

답 ②

다른 풀이



포물선 $y^2 = 6x$ 위의 점 $P(3, 3\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$3\sqrt{2}y = 3(x+3)$ 에서 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+3)$ 이므로 접선이 x축과 만나는 점

을 R라 하면 $R(-3, 0)$ 이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 I라 하면 두 점 P, I를 지나는 직선

은 x축과 평행하고 $\overline{PI} = \overline{RF} = \frac{9}{2}$ 이다.

또한 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PI} = \overline{PF}$ 이므로 사각형 PIRF는 마름모이고 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로

$\overline{PQ} \perp \overline{FQ}$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QF}$ 이다.

점 Q의 좌표가 $(0, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ 이므로

$\overline{PQ} = \sqrt{(3-0)^2 + (3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ 이고

$\overline{QF} = \sqrt{(\frac{3}{2}-0)^2 + (0 - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 PQF의 넓이는

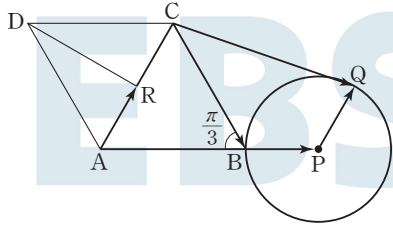
$\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{8}$

27

조건 (가)에서 $\overline{AB} = 2\overline{BP}$ 이므로 점 P는 선분 AB를 3:1로 외분하는 점이다.

$|\overline{PQ}| = 1$ 이므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

조건 (나)에서 $\overline{DC} = 2\overline{DR} + \overline{AD}$, 즉 $\overline{DR} = \frac{\overline{DA} + \overline{DC}}{2}$ 이므로 점 R는 선분 AC의 중점이다.



한편,

$$\begin{aligned} \overline{AR} \cdot \overline{CQ} &= \overline{AR} \cdot (\overline{CB} + \overline{BP} + \overline{PQ}) \\ &= \overline{AR} \cdot \overline{CB} + \overline{AR} \cdot \overline{BP} + \overline{AR} \cdot \overline{PQ} \end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AR} \cdot \overline{CB} = |\overline{AR}| |\overline{CB}| \cos \frac{2}{3}\pi = 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\overline{AR} \cdot \overline{BP} = |\overline{AR}| |\overline{BP}| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

두 벡터 \overline{AR} , \overline{PQ} 가 같은 방향일 때 $\overline{AR} \cdot \overline{PQ}$ 의 값이 최대이므로

$$\overline{AR} \cdot \overline{PQ} \leq |\overline{AR}| |\overline{PQ}| = 1$$

따라서

$$\overline{AR} \cdot \overline{CQ} \leq -1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

이므로 $\overline{AR} \cdot \overline{CQ}$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

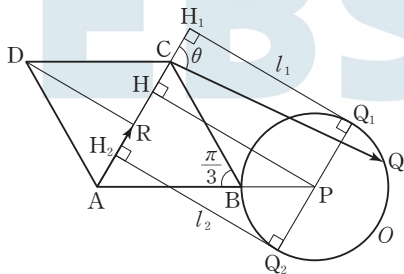
답 ④

다른 풀이

조건 (가)에서 $\overline{AB} = 2\overline{BP}$ 이므로 점 P는 선분 AB를 3:1로 외분하는 점이다.

$|\overline{PQ}| = 1$ 이므로 점 Q는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다. 이 원을 O라 하자.

조건 (나)에서 $\overline{DC} = 2\overline{DR} + \overline{AD}$, 즉 $\overline{DR} = \frac{\overline{DA} + \overline{DC}}{2}$ 이므로 점 R는 선분 AC의 중점이다.



두 벡터 \overline{AR} , \overline{CQ} 가 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라 하면

$$\overline{AR} \cdot \overline{CQ} = |\overline{AR}| |\overline{CQ}| \cos \theta = |\overline{CQ}| \cos \theta$$

직선 AC에 수직이고 원 O에 접하는 두 직선을 각각 l_1 , l_2 라 하고, 두 직선 l_1 , l_2 와 원 O의 교점을 각각 Q_1 , Q_2 ($\overline{CQ_1} < \overline{CQ_2}$), 두 점 Q_1 , Q_2

에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 H_1 , H_2 라 하면

$$-|\overline{CH_2}| \leq \overline{AR} \cdot \overline{CQ} \leq |\overline{CH_1}| \quad \dots \textcircled{1}$$

점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 APH에서 $\angle HAP = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{AH} = \overline{AP} \times \cos \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서

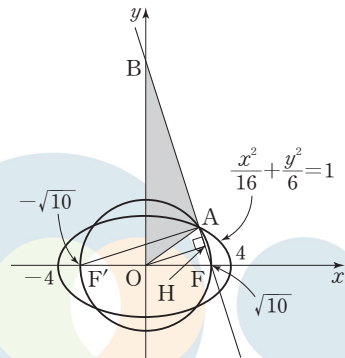
$$\begin{aligned} \overline{CH_1} &= \overline{AH_1} - \overline{AC} = (\overline{AH} + \overline{HH_1}) - \overline{AC} \\ &= \left(\frac{3}{2} + 1\right) - 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $\overline{AR} \cdot \overline{CQ}$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

28

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1$ 의 장축의 길이는 8이고, 초점의 좌표는

$F(\sqrt{10}, 0)$, $F'(-\sqrt{10}, 0)$ 이다.



타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

점 A가 선분 F'H를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

삼각형 AF'F는 $\angle FAF' = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

따라서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 = 40 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \overline{AF}^2 + (8 - \overline{AF})^2 = 40$$

$$2\overline{AF}^2 - 16\overline{AF} + 24 = 0, \overline{AF}^2 - 8\overline{AF} + 12 = 0$$

$$(\overline{AF} - 2)(\overline{AF} - 6) = 0$$

삼각형 AF'F에서 $\overline{AF'} > \overline{AF}$ 이므로 $\overline{AF} = 2$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \overline{AF'} = 6$$

두 삼각형 AF'F, OBF에서 $\angle BFO = \angle AFF'$ 이고

$\angle BOF = \angle F'AF = \frac{\pi}{2}$ 이므로 두 삼각형 AF'F와 OBF는 서로 닮은

도형이다.

$$\overline{F'F} : \overline{BF} = \overline{AF} : \overline{OF}$$

$$2\sqrt{10} : \overline{BF} = 2 : \sqrt{10}, \overline{BF} = 10$$

$$\overline{AB} = \overline{BF} - \overline{AF} = 10 - 2 = 8$$

한편, 삼각형 OAF는 $\overline{OA} = \overline{OF} = \sqrt{10}$ 인 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AF의 중점이다.

점 O는 선분 FF'의 중점이므로 삼각형 AF'F에서

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} \overline{AF'} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$

답 ②

29

삼각형 PND에서

$$\overline{DP} = 3, \overline{DN} = 2, \angle PDN = \frac{\pi}{3}$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{NP}^2 &= \overline{DP}^2 + \overline{DN}^2 - 2 \times \overline{DP} \times \overline{DN} \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 7 \end{aligned}$$

$$\overline{NP} > 0 \text{ 이므로 } \overline{NP} = \sqrt{7}$$

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

마찬가지로 삼각형 PMD에서

$$\overline{MP} = \sqrt{7}$$

점 P에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 G라 하면

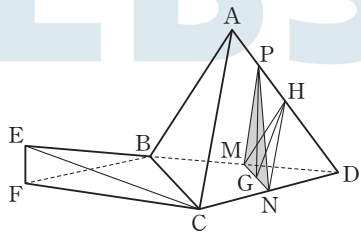
$$\overline{GM} = \overline{GN}, \overline{GP} \perp \overline{MN} \text{ 이므로}$$

$$\overline{GN} = \frac{1}{2} \times \overline{MN} = 1$$

$$\overline{GP} = \sqrt{\overline{NP}^2 - \overline{GN}^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 1^2} = \sqrt{6}$$

삼각형 PMN의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{MN} \times \overline{GP} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{6} = \sqrt{6}$$



선분 AD의 중점을 H라 하면 $\overline{GH} \perp \overline{MN}$ 이고 $\overline{HN} = 2$ 이므로

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{HN}^2 - \overline{GN}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

평면 ABC와 평면 HMN은 서로 평행하고 $\overline{GP} \perp \overline{MN}$, $\overline{GH} \perp \overline{MN}$ 이므로 평면 PMN과 평면 ABC의 이면각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{GP}^2 + \overline{GH}^2 - \overline{HP}^2}{2 \times \overline{GP} \times \overline{GH}} \\ &= \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 - 1^2}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

평면 ABC와 평면 BEC가 서로 수직이므로

두 평면 BEC와 PMN의 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이다.

이때

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이므로 삼각형 PMN의 평면 BEC 위로의 정사영의 넓이 S는

$$S = \sqrt{6} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{6} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{따라서 } 36S^2 = 36 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 24$$

답 24

30

점 C는 세 점 O, A, B로 만들어지는 평행사변형의 다른 한 꼭짓점이다.

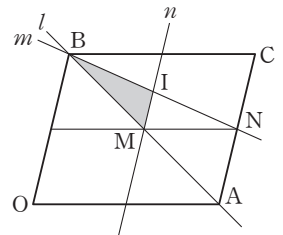
한편, 점 P의 위치벡터 \vec{p} 에 대하여

$\vec{p} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ 에서 $\vec{p} = \vec{b} + t(\vec{a} - \vec{b})$ 이므로 직선 l은 점 B를 지나고 방향벡터가 $\vec{a} - \vec{b}$ 인 직선이다.

또한 $\vec{q} = -s\vec{a} + \left(1 + \frac{s}{2}\right)\vec{b}$ 에서 $\vec{q} = \vec{b} + s\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$ 이므로 직선 m은 점 B를 지나고 방향벡터가 $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 인 직선이다.

같은 방법으로 $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a} + \left(u + \frac{1}{2}\right)\vec{b}$ 에서 $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + u\vec{b}$ 이므로 직선 n은 선분 AB의 중점을 지나고 방향벡터가 \vec{b} 인 직선이다.

평행사변형 OACB에 대하여 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 하고 두 직선 m, n의 교점을 I라 하면 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 부분은 그림과 같다.



삼각형 BAN에서

$$\overline{MI} = \frac{1}{2} \overline{AN}$$

$$\text{또한 } \overline{MI} = \frac{1}{2} \overline{AN} = \frac{1}{4} \overline{AC} \text{ 이므로 } \overline{AC} = 4\overline{MI}$$

삼각형 BMI에서 선분 MI를 밑변, 점 B에서 직선 n까지의 거리를 h라 하면 점 B에서 직선 AC까지의 거리는 2h이다.

한편, 삼각형 BMI의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{MI} \times h = 16 \text{ 에서 } \overline{MI} \times h = 32$$

따라서 평행사변형 OACB의 넓이는

$$\begin{aligned} \overline{AC} \times 2h &= 4\overline{MI} \times 2h = 8 \times \overline{MI} \times h \\ &= 8 \times 32 = 256 \end{aligned}$$

답 256

01 ④	02 ②	03 ⑤	04 ①	05 ②
06 ③	07 ④	08 ③	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ⑤	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 7	17 127	18 124	19 581	20 42
21 14	22 109	23 ③	24 ①	25 ③
26 ④	27 ④	28 ④	29 20	30 80

01

$$9^{\sqrt{2}} \times 3^{1-2\sqrt{2}} = (3^2)^{\sqrt{2}} \times 3^{1-2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}} \times 3^{1-2\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}+(1-2\sqrt{2})} = 3$$

답 ④

02

$$f(x) = (3x^2 - 2)(x^2 + 2x + 5) \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x(x^2 + 2x + 5) + (3x^2 - 2)(2x + 2)$$

$$\text{따라서 } f'(1) = 6 \times 8 + 1 \times 4 = 52$$

답 ②

03

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 3 = 5$$

답 ⑤

04

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 8 \text{에서 } a + 2d = 8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_2 + a_6 = \frac{1}{2}a_{15} \text{에서 } (a+d) + (a+5d) = \frac{1}{2}(a+14d)$$

$$4a + 12d = a + 14d, 3a = 2d \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = 2, d = 3$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_k = 2 + (k-1) \times 3 = 3k - 1$$

$$a_k = 3k - 1 > 100 \text{에서 } k > \frac{101}{3}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 34이다.

답 ①

05

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 30 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k = 30 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left(b_k - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2} \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k - \frac{1}{2} \times 10 = \frac{11}{2}, \sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{11}{2} + 5 = \frac{21}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } \sum_{k=1}^{10} a_k + 21 = 30$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 30 - 21 = 9$$

답 ②

06

시간 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_1^3 v(t) dt &= \int_1^3 (2t^2 + at + 2) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + 2t \right]_1^3 \\ &= \left(18 + \frac{9}{2}a + 6\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{a}{2} + 2\right) = 4a + \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 4a + \frac{64}{3} = \frac{100}{3} \text{에서 } 4a = 12$$

따라서 $a = 3$

답 ③

07

$$\text{직각삼각형 AOH에서 } AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{이므로}$$

$$\angle AOH = \alpha \text{라 하면 } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

직선 l 과 x 축의 교점을 B라 하면 직각삼각형 AOH와 직각삼각형 ABO는 서로 닮음이므로

$$\angle ABO = \angle AOH = \alpha$$

이때 $\theta = \pi - \alpha$ 이므로

$$\sin \theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

답 ④

08

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ (} a, b, c \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 3)$ 에서 직선 $y=4x-1$ 에 접하므로

$$f(1) = 3, f'(1) = 4$$

$$\text{함수 } f(x) \text{가 } x = \frac{1}{3} \text{에서 극소이므로 } f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 4 \text{에서 } 2a + b = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a + b = 0 \text{에서 } 2a + 3b = -1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -1$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = -1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이다.

$$\text{한편, } f(x) = x^3 + x^2 - x + c \text{이고 } f(1) = 3 \text{이므로}$$

$$1 + 1 - 1 + c = 3 \text{에서 } c = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ 이므로 구하는 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = -1 + 1 - (-1) + 2 = 3$$

답 ③

09

$$\log_2 f(1) + \log_2 (1-3)^2 = 5 \text{에서 } \log_2 f(1) = 3 \text{이므로 } f(1) = 8$$

$$f(1) - 8 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{또한 } \log_2 f(5) + \log_2 (5-3)^2 = 5 \text{에서 } \log_2 f(5) = 3 \text{이므로 } f(5) = 8$$

$$f(5) - 8 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

답 ②

㉠, ㉡에서

$$f(x) - 8 = a(x-1)(x-5) \quad (a \text{는 양수})$$

$$f(x) = a(x-1)(x-5) + 8 = a(x-3)^2 - 4a + 8$$

이차함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 4를 가져야 하므로
 $-4a + 8 = 4$ 에서 $a=1$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-5) + 8$ 이므로

$$f(0) = (-1) \times (-5) + 8 = 13$$

답 ②

10

$f(0) = 5$ 이므로

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 5$ (a, b, c 는 상수이고 $a \neq 0$)이라 하면

$$g(x) = \int_{-x}^x f(t) dt = \int_{-x}^x (at^3 + bt^2 + ct + 5) dt$$

$$= 2 \int_0^x (bt^2 + 5) dt = 2 \left[\frac{b}{3}t^3 + 5t \right]_0^x = \frac{2b}{3}x^3 + 10x$$

$g(1) = 12$ 이므로

$$\frac{2b}{3} + 10 = 12, \quad b = 3$$

따라서 $g(x) = 2x^3 + 10x$ 이므로

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 (2x^3 + 10x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + 5x^2 \right]_0^2 = 8 + 20 = 28$$

답 ④

11

함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c, -a+c$ 이므로
 조건 (가)에 의하여

$$(a+c) + (-a+c) = 2c = 6 \text{에서 } c=3$$

함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{b}$

또한 $g(x) = \left| \cos\left(3\pi x - \frac{1}{2}\right) \right| + 1 = \left| \cos 3\pi\left(x - \frac{1}{6\pi}\right) \right| + 1$ 이므로

함수 $g(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3}$

조건 (나)에 의하여 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{3} \text{에서 } b=6$$

즉, $f(x) = a \sin(6\pi x) + 3$ 이고 $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = a \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 3 = -a + 3 = 1 \text{에서 } a=2$$

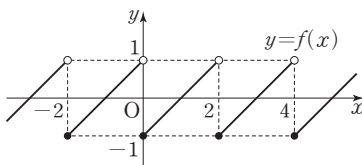
따라서 $f(x) = 2 \sin(6\pi x) + 3$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + 3 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 3 + \sqrt{3}$$

답 ⑤

12

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $-2 \leq x < 0$ 일 때, $f(x) = x+1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$$

$2 \leq x < 4$ 일 때, $f(x) = x-3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = -1$$

그러므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + (-1) = 0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=2n$ (n 은 정수)에서만 불연속이므로 함수 $|f(x)|$ 가 $x=2n$ (n 은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다. 앞의 그림에 의하면 모든 정수 n 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2n^-} |f(x)| = 1$$

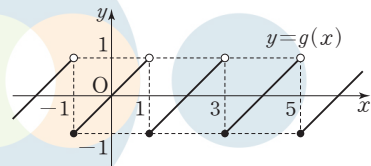
$$\lim_{x \rightarrow 2n^+} f(x) = -1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2n^+} |f(x)| = 1$$

$$|f(2n)| = |-1| = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2n} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2n} |f(x)| = |f(2n)|$ 이므로 함수 $|f(x)|$ 는 $x=2n$ (n 은 정수)에서 연속이다.

그러므로 함수 $|f(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 모든 정수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x=2n$ 에서만 불연속이고, 함수 $f(x+1)$ 은 $x=2n-1$ 에서만 불연속이므로 함수 $f(x)f(x+1)$ 이 $x=n$ (n 은 정수)에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다. $g(x) = f(x+1)$ 이라 하면 $-1 \leq x < 1$ 일 때 $g(x) = x$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = g(x+2)$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



정수 n 에 대하여

(i) $\lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2n^+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2n^+} f(x)g(x) = (-1) \times 0 = 0$$

$$f(2n)f(2n+1) = f(2n)g(2n) = (-1) \times 0 = 0$$

즉, 모든 정수 n 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow 2n^-} f(x)f(x+1) = f(2n)f(2n+1)$$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$ 은 $x=2n$ (n 은 정수)에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow (2n-1)^-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (2n-1)^-} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow (2n-1)^+} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (2n-1)^+} f(x)g(x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$f(2n-1)f(2n) = f(2n-1)g(2n-1) = 0 \times (-1) = 0$$

즉, 모든 정수 n 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow (2n-1)^-} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (2n-1)^-} f(x)f(x+1) = f(2n-1)f(2n)$$

이므로 함수 $f(x)f(x+1)$ 은 $x=2n-1$ (n 은 정수)에서 연속이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)f(x+1)$ 은 $x=n$ (n 은 정수)에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A(t, \log_2 t), B(t, \log_2 16t)$$

점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표를 a라 하면

$$\log_2 16a = \log_2 t \text{에서 } 16a = t, \text{ 즉 } a = \frac{t}{16}$$

점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 b라 하면

$$\log_2 b = \log_2 16t \text{에서 } b = 16t$$

즉, $C\left(\frac{t}{16}, \log_2 t\right), D(16t, \log_2 16t)$ 이므로 삼각형 ABC의 무게

중심 G_1 의 좌표는

$$G_1\left(\frac{t+t+\frac{t}{16}}{3}, \frac{\log_2 t + \log_2 16t + \log_2 t}{3}\right)$$

$$\text{즉, } G_1\left(\frac{11}{16}t, \frac{4}{3} + \log_2 t\right)$$

이고, 삼각형 ADB의 무게중심 G_2 의 좌표는

$$G_2\left(\frac{t+16t+t}{3}, \frac{\log_2 t + \log_2 16t + \log_2 16t}{3}\right)$$

$$\text{즉, } G_2\left(6t, \frac{8}{3} + \log_2 t\right)$$

이므로 직선 G_1G_2 의 기울기는

$$\frac{\left(\frac{8}{3} + \log_2 t\right) - \left(\frac{4}{3} + \log_2 t\right)}{6t - \frac{11}{16}t} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{85}{16}t} = \frac{64}{255t}$$

$$\text{즉, } \frac{64}{255t} = \frac{16}{255} \text{이므로 } t=4$$

따라서 A(4, 2), B(4, 6), D(64, 6)이므로 삼각형 ADB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (64-4) \times (6-2) = \frac{1}{2} \times 60 \times 4 = 120$$

답 ⑤

14

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a라 하면 방정식 $f(x) - x = 0$ 의 세 실근이 0, 1, 2이므로

$$f(x) - x = ax(x-1)(x-2) \quad (a > 0)$$

으로 놓을 수 있다.

$$\text{즉, } f(x) = ax(x-1)(x-2) + x \text{이고, } f(0)=0, f(1)=1,$$

$$f(2)=2 \text{이다.}$$

한편, 함수 $g(x)$ 는 $0 \leq x \leq 2$ 일 때

$g(x) = f(x)$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$g(x+2) = g(x) + 2$ 를 만족시키므로

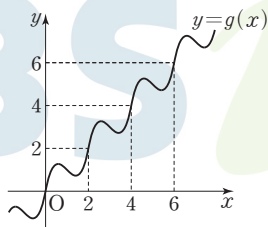
함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과

같이 생각할 수 있다.

이때

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 \{ax(x-1)(x-2) + x\} dx \\ &= \int_0^2 \{ax^3 - 3ax^2 + (2a+1)x\} dx \\ &= \left[\frac{a}{4}x^4 - ax^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 4a - 8a + 4a + 2 = 2 \end{aligned}$$

이고, 자연수 k 에 대하여



$$\begin{aligned} \int_{2k-2}^{2k} g(x) dx &= 2 \times (2k-2) + \int_0^2 g(x) dx = (4k-4) + \int_0^2 f(x) dx \\ &= (4k-4) + 2 = 4k-2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{2n} g(x) dx &= \int_0^2 g(x) dx + \int_2^4 g(x) dx + \dots + \int_{2n-2}^{2n} g(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n (4k-2) = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n = 2n^2 \end{aligned}$$

따라서 $2n^2 = 72$ 에서 $n^2 = 36$

n 은 자연수이므로 $n=6$

답 ①

참고

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 세

점 (0, 0), (1, 1), (2, 2)에서 만나므로 함

수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$f(x) = ax(x-1)(x-2) + x$ 에서

$$f(x+1) - 1 = ax(x+1)(x-1) + x$$

$$= ax^3 + (1-a)x$$

이므로 함수 $y=f(x+1)-1$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x+1)-1$ 의 그래프를 x 축

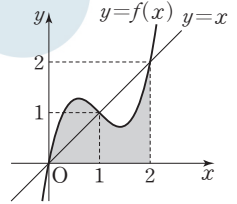
의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 점 (1, 1)에 대하여 대칭이다.

따라서 그림의 색칠된 부분의 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의

넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로 2이다.

$$\text{즉, } \int_0^2 f(x) dx = 2$$



15

선분 CD가 원의 지름이므로 $\angle CPD = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PCD에서 $\overline{CD}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ 이므로

$$\overline{PD} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{PC}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$$

삼각형 APD의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로 $\angle APD = \theta$ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{PD} \times \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서 $\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 이므로

$$\overline{PB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3$$

삼각형 BPC에서 $\angle BPC = \pi - \theta$ 이고 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - 2 \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{2}{3} = 9 + 16 - 16 = 9$$

$\overline{BC} > 0$ 이므로 $\overline{BC} = 3$

답 ②

16

함수 $f(x)=2x^3-x+1$ 에 대하여 x 의 값이 -2 에서 2 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{(16-2+1)-(-16+2+1)}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

답 7

17

$\log_2 \frac{128}{n} = m$ (m 은 자연수)로 놓으면

$$\frac{128}{n} = 2^m \text{에서 } 2^{7-m} = n$$

n 이 자연수이므로 $7-m \geq 0$

즉, m 은 $1 \leq m \leq 7$ 인 자연수이므로 조건을 만족시키는 n 은

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$$

따라서 모든 n 의 값의 합은 $\frac{1 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 2^7 - 1 = 127$

답 127

18

함수 $f(x)$ 의 차수가 3 이상이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x) + 3x^2}{x^2 - 1} = \infty \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x) + 3x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

이므로 조건을 만족시키지 않고, 함수 $f(x)$ 의 차수가 1 이하이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x) + 3x^2}{x^2 - 1} = 3$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다. 그러므로 함수 $f(x)$ 는 이차함수이다.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(2x) + 3x^2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4ax^2 + 2bx + c + 3x^2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4a + 3 + \frac{2b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 4a + 3 \end{aligned}$$

이므로 $4a + 3 = 7$ 에서 $a = 1$

즉, $f(x) = x^2 + bx + c$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^2 + bt + c) = c$$

이므로 $c = 4$

그러므로 $f(x) = x^2 + bx + 4$ 이고

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 4 - \frac{b^2}{4}$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{b}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $-\frac{b}{2} = -1$ 에서 $b = 2$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 4$ 이므로 $f(10) = 100 + 20 + 4 = 124$

답 124

19

$\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x) = x^2 + (k-2)x$ 이고

$$\int_0^1 \{t^2 + (k-2)t\} dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{k-2}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{k-2}{2} = \frac{k}{2} - \frac{2}{2}$$

이므로 $\frac{k}{2} - \frac{2}{3} = k$ 에서 $k = -\frac{4}{3}$

즉, $f(x) = x^2 - \frac{10}{3}x$ 이고 함수 $y=f(x)$ 의

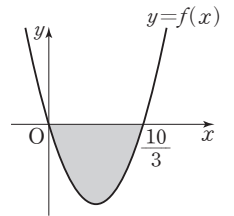
그래프는 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{10}{3}} |f(x)| dx &= \int_0^{\frac{10}{3}} \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{10}{3}} \left(-x^2 + \frac{10}{3}x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2\right]_0^{\frac{10}{3}} = -\frac{1000}{81} + \frac{500}{27} = \frac{500}{81} \end{aligned}$$

즉, $p=81, q=500$ 이므로 $p+q=81+500=581$

답 581



20

조건 (다)에서 n 이 홀수이면 $n+2$ 가 홀수이므로 $f(n)$ 의 값에 상관없이 $a_n = 1$

n 이 짝수이면 $n+2$ 가 짝수이므로

$f(n) > 0$ 이면 $a_n = 2$

$f(n) = 0$ 이면 $a_n = 1, f(n) < 0$ 이면 $a_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 \text{에서 } \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^5 a_{2n-1} + \sum_{n=1}^5 a_{2n} = 5 + \sum_{n=1}^5 a_{2n} = 10$$

$$\text{즉, } \sum_{n=1}^5 a_{2n} = 5 \quad \dots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 $f(n) = 0$ 인 10 이하의 자연수 n 의 값이 2개 이하이므로 ㉠을 만족시키려면 $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$ 중에서 $a_n = 1$ 인 짝수 n 이 반드시 1개 존재해야 하고 $a_n = 2$ 인 짝수 n 이 2개, $a_n = 0$ 인 짝수 n 이 2개 존재해야 한다.

즉, 10 이하의 자연수 n 중에서 $f(n) = 0$ 인 짝수 n 이 1개, $f(n) > 0$ 인 짝수 n 이 2개, $f(n) < 0$ 인 짝수 n 이 2개 존재한다.

이때 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고 조건 (나)에 의하여 $f(n) = 0$ 인 10 이하의 홀수 n 이 하나 존재한다.

(i) $f(2) = 0$ 인 경우

조건 (가)에서 $f(1) > 0$ 이므로 $f(4)$ 와

$f(6)$ 의 값이 모두 음수이고 $f(8)$ 과

$f(10)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.

조건 (나)에 의하여 $f(7) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-2)(x-7)$$

(ii) $f(4) = 0$ 인 경우

$f(2) < 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 의 한 실근이 사잇값의 정리에 의하여 1과 2 사이에 존재해야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(2) > 0$ 이므로 $f(6)$ 과 $f(8)$ 의 값이

모두 음수이고 $f(10)$ 의 값이 양수이어야

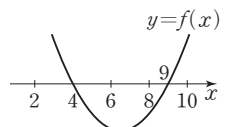
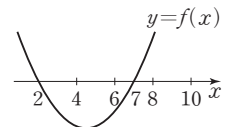
한다.

조건 (나)에 의하여 $f(9) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-4)(x-9)$$

(iii) $f(6) = 0$ 인 경우

$f(4) > 0$ 이면 $f(2) > 0$ 이고 $f(8)$ 과 $f(10)$ 의 값이 모두 음수이어야 한다. 즉, 방정식 $f(x) = 0$ 의 한 실근이 10보다 커야 하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



즉, $f(4) < 0$ 이면 $f(8)$ 과 $f(10)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.
따라서 $f(2) < 0$ 이고 $f(1) = 0$ 이어야 하는데 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 조건을 만족시키는 $f(x)$ 는 존재하지 않는다.

(iv) $f(8) = 0$ 인 경우

$f(6) > 0$ 이면 $f(2)$ 와 $f(4)$ 의 값도 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(6) < 0$ 이므로 $f(4) < 0$ 이고 $f(2)$ 와 $f(10)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.

조건 (나)에 의하여 $f(3) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-3)(x-8)$$

(v) $f(10) = 0$ 인 경우

$f(8) > 0$ 이면 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ 의 값이 모두 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $f(8) < 0$ 이므로 $f(6) < 0$ 이고 $f(2)$ 와 $f(4)$ 의 값이 모두 양수이어야 한다.

조건 (나)에 의하여 $f(5) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-5)(x-10)$$

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-2)(x-7) \text{ 또는 } f(x) = (x-4)(x-9)$$

또는 $f(x) = (x-3)(x-8)$ 또는 $f(x) = (x-5)(x-10)$

따라서 $f(11)$ 의 값은 $9 \times 4 = 36$, $7 \times 2 = 14$, $8 \times 3 = 24$, $6 \times 1 = 6$ 이므로 최솟값은 6, 최댓값은 36이고, 그 합은 42이다.

답 42

21

$p < 0$ 이라 하면 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 0$ 이면 $a_{n+1} = a_n - p > a_n$, 즉 $a_{21} \neq a_1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, p 는 자연수이다.

a_1, a_2, \dots, a_{20} 중 음수인 것의 개수를 k 라 하면 0 이상인 것의 개수는 $20 - k$ 이므로

$$a_{21} = a_1 - (20 - k)p + kpq$$

$k = 20$ 이면 $a_1 > 0$ 에 모순이므로 k 는 19 이하인 자연수이다.

$a_{21} = a_1$ 에서

$$(20 - k)p = kpq, kp(q + 1) = 20p$$

$p \neq 0$ 이므로 $k(q + 1) = 20$

q 는 정수이고 k 는 19 이하의 자연수이므로 k 는 19 이하인 20의 양의 약수이다. 즉, k 는 1, 2, 4, 5, 10

(i) $k = 1$ 인 경우, $q = 19$

18 이하의 자연수 n_1 에 대하여

$$a_{n_1+1} = a_1 - n_1 p \geq 0, a_{n_1+2} = a_1 - (n_1 + 1)p < 0$$

$$\text{즉, } \frac{40}{n_1 + 1} < p \leq \frac{40}{n_1} \text{ 일 때}$$

$$a_{n_1+3} = a_1 - (n_1 + 1)p + 19p = a_1 + (18 - n_1)p$$

$$n_1 \geq 14 \text{ 일 때, } 2 < \frac{40}{n_1 + 1} < \frac{40}{n_1} < 3 \text{ 이므로 이를 만족시키는 자연수 } p \text{ 가 존재하지 않는다.}$$

$$n_1 = 13 \text{ 일 때, } \frac{20}{7} < p \leq \frac{40}{13} \text{ 이므로 } p = 3$$

$$n_1 \leq 12 \text{ 일 때, } 3 < \frac{40}{n_1 + 1} < p \text{ 이므로 자연수 } p \text{ 가 존재하면 } p > 3$$

따라서 $p \geq 3$ 이므로 이 경우에 $p + q$ 의 최솟값은 $3 + 19 = 22$

(ii) $k = 2$ 인 경우, $q = 9$

8 이하의 자연수 n_1 에 대하여

$$a_{n_1+1} = a_1 - n_1 p \geq 0, a_{n_1+2} = a_1 - (n_1 + 1)p < 0$$

$$\text{즉, } \frac{40}{n_1 + 1} < p \leq \frac{40}{n_1} \text{ 일 때}$$

$$a_{n_1+3} = a_1 - (n_1 + 1)p + 9p = a_1 + (8 - n_1)p \geq 0$$

$$a_{n_1+4} = a_1 + (7 - n_1)p$$

⋮

$$a_{n_1+3+(8-n_1)} = a_1, \text{ 즉 } a_{11} = a_1 \text{ 이고 } a_{n_1+10} = a_n$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+10} = a_n$ 을 만족시키므로 $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

$$n_1 = 8 \text{ 일 때, } \frac{40}{9} < p \leq 5 \text{ 이므로 } p = 5$$

$$n_1 \leq 7 \text{ 일 때, } 5 \leq \frac{40}{n_1 + 1} \text{ 이므로 자연수 } p \text{ 가 존재하면 } p > 5$$

따라서 $p \geq 5$ 이므로 이 경우에 $p + q$ 의 최솟값은 $5 + 9 = 14$

(iii) $k = 4$ 인 경우, $q = 4$

3 이하의 자연수 n_1 에 대하여

$$a_{n_1+1} = a_1 - n_1 p \geq 0, a_{n_1+2} = a_1 - (n_1 + 1)p < 0$$

$$\text{즉, } \frac{40}{n_1 + 1} < p \leq \frac{40}{n_1} \text{ 일 때}$$

$$a_{n_1+3} = a_1 - (n_1 + 1)p + 4p = a_1 + (3 - n_1)p \geq 0$$

$$a_{n_1+4} = a_1 + (2 - n_1)p$$

⋮

$$a_{n_1+3+(3-n_1)} = a_1, \text{ 즉 } a_6 = a_1 \text{ 이고 } a_{n_1+5} = a_n$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+5} = a_n$ 을 만족시키므로 $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

$$n_1 = 3 \text{ 일 때, } 10 < p \leq \frac{40}{3} \text{ 이므로 } p = 11, 12, 13$$

$$n_1 \leq 2 \text{ 일 때, } 13 < \frac{40}{n_1 + 1} \text{ 이므로 자연수 } p \text{ 가 존재하면 } p > 13$$

따라서 $p \geq 11$ 이므로 이 경우에 $p + q$ 의 최솟값은 $11 + 4 = 15$

(iv) $k = 5$ 인 경우, $q = 3$

$$a_3 = a_1 - 2p \geq 0, a_4 = a_1 - 3p < 0 \text{ 인 경우}$$

$$\text{즉, } \frac{40}{3} < p \leq 20 \text{ 에서 } p = 14, 15, \dots, 20 \text{ 인 경우}$$

$$a_5 = a_1 - 3p + 3p = a_1$$

$$a_2 = a_1 - p \geq 0, a_3 = a_1 - 2p < 0 \text{ 인 경우}$$

$$\text{즉, } \frac{40}{2} < p \leq 40 \text{ 에서 } p = 21, 22, \dots, 40$$

$$a_4 = a_1 - 2p + 3p = a_1 + p > 0, \text{ 즉 } a_5 = a_1 \text{ 이고 } a_{n_1+4} = a_n$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+4} = a_n$ 을 만족시키므로 $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

따라서 $p \geq 14$ 이므로 이 경우에 $p + q$ 의 최솟값은 $14 + 3 = 17$

(v) $k = 10$ 인 경우, $q = 1$

$$a_2 = a_1 - p < 0, \text{ 즉 } p > 40 \text{ 을 만족시키고 } a_3 = a_1 - p + p = a_1 \text{ 이므로}$$

주기 가 2이다. 즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = a_n$ 을 만족시키므로 $a_{21} = a_1$ 을 만족시킨다.

따라서 이 경우에 $p + q$ 의 최솟값은

$$41 + 1 = 42$$

(i)~(v)에서 $p + q$ 의 최솟값은 14이다.

답 14

22

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$ 에서 연속이어야 한다. 즉, $f(k) = \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$ 이어야 하므로

$$f(k) = k^3 - 3k + a = -k^2 + 13k + b$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{(x^3 - 3x + a) - (k^3 - 3k + a)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{(x - k)(x^2 + kx + k^2 - 3)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^-} (x^2 + kx + k^2 - 3) = 3k^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{(-x^2 + 13x + b) - (-k^2 + 13k + b)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{-(x - k)(x + k - 13)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^+} (-x - k + 13) = -2k + 13 \end{aligned}$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하므로

$$3k^2 - 3 = -2k + 13, 3k^2 + 2k - 16 = 0, (3k + 8)(k - 2) = 0$$

$$k = -\frac{8}{3} \text{ 또는 } k = 2$$

이때 함수 $y = x^3 - 3x + a$ 에서 $y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$

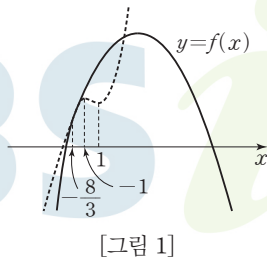
이므로 함수 $y = x^3 - 3x + a$ 는 $x = 1$ 또는 $x = -1$ 에서 극값을 갖는데,

$k = -\frac{8}{3}$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프

가 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

즉, $k = 2$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + a & (x < 2) \\ -x^2 + 13x + b & (x \geq 2) \end{cases}$$



[그림 1]

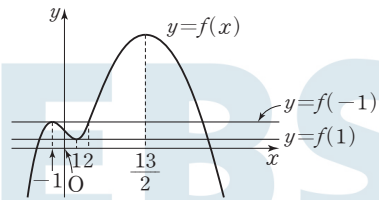
이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이어

야 하므로 $2 + a = 22 + b$

$$a - b = 20 \quad \dots \textcircled{1}$$

한편, $f(-1) = f(2) < f(\frac{13}{2})$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

[그림 2]와 같다. 즉, 방정식 $f(x) = c$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 경우는 $c = f(-1)$ 또는 $c = f(1)$ 인 경우이다.



[그림 2]

$$f(-1) = 2 + a, f(1) = -2 + a \text{이므로}$$

$$(2 + a) + (-2 + a) = 8 \text{에서 } a = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = a - 20 = -16$$

$$\text{즉, } f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 4 & (x < 2) \\ -x^2 + 13x - 16 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고, 방정식 $f(x) = d$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되는 경우는

$$d = f\left(\frac{13}{2}\right) \text{인 경우이므로 구하는 실수 } d \text{의 값은}$$

$$d = f\left(\frac{13}{2}\right) = -\left(\frac{13}{2}\right)^2 + 13 \times \frac{13}{2} - 16 = \frac{105}{4}$$

따라서 $p = 4, q = 105$ 이므로 $p + q = 4 + 105 = 109$

답 109

23

두 점 $A(-3, a, 5), B(b, 3, -2)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:3으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2b+9}{2-3}, \frac{6-3a}{2-3}, \frac{-4-15}{2-3}\right), \text{ 즉 } (-2b-9, 3a-6, 19)$$

이므로

$$-2b - 9 = 1 \text{에서 } b = -5, 3a - 6 = -3 \text{에서 } a = 1$$

$$c = 19$$

$$\text{따라서 } a + b + c = 1 + (-5) + 19 = 15$$

답 ③

24

그림에서 점 P 의 좌표는 $(a, 6)$ 이고 점 P 는 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점이므로

$$6^2 = 4a \text{에서 } a = 9$$

포물선 $y^2 = 4x$ 의 준선의 방정식이

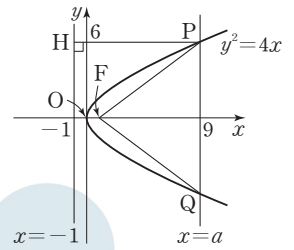
$x = -1$ 이므로 점 P 에서 준선에 내린

수선의 발을 H 라 하면

$$PF = PH = 9 - (-1) = 10$$

삼각형 PFQ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos(\angle PFQ) &= \frac{10^2 + 10^2 - 12^2}{2 \times 10 \times 10} \\ &= \frac{56}{200} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$



답 ①

다른 풀이

점 P 의 좌표는 $(a, 6)$ 이고 점 P 는 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점이므로

$$6^2 = 4a \text{에서 } a = 9$$

즉, 점 P 의 좌표가 $(9, 6)$ 이고 F 의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로

$$PF = \sqrt{(9-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

삼각형 PFQ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle PFQ) = \frac{10^2 + 10^2 - 12^2}{2 \times 10 \times 10} = \frac{56}{200} = \frac{7}{25}$$

25

그림과 같이 선분 BC 를 한 변으로 하는 정

삼각형의 다른 한 꼭짓점 중 정사각형

$BCDF$ 의 내부에 있는 점을 G 라 하면

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BG} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG}$$

이때 $\angle ABG = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB} = \overline{BG}$ 이므로

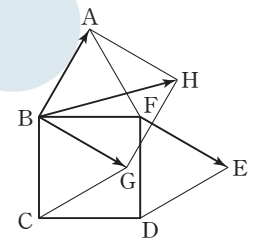
세 점 A, B, G 를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 다른 한 꼭짓점을 H 라

하면

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BH}$$

$$\text{따라서 } |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FE}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{BH}| = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FE}|^2 = 8$$



답 ③

26

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 (3, 4)에서의 접선의 방정식은

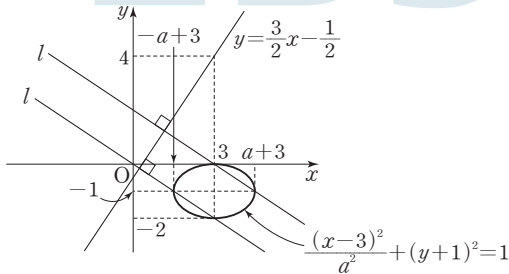
$$3x - \frac{4y}{2} = 1 \text{에서 } y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

이 접선에 수직인 직선을 l 이라 하면 직선 l 의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} + (y+1)^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 타원 ①의 네 꼭짓점의 좌표는 (3, 0), (3, -2), (a+3, -1), (-a+3, -1)이다.



그림과 같이 직선 l 은 타원 ①의 네 꼭짓점 중 두 꼭짓점 (3, 0), (a+3, -1)을 지나거나 두 꼭짓점 (3, -2), (-a+3, -1)을 지나야 하므로 직선 l 의 기울기는

$$\frac{(-1)-0}{(a+3)-3} = \frac{(-1)-(-2)}{(-a+3)-3} = -\frac{1}{a}$$

따라서 $-\frac{1}{a} = -\frac{2}{3}$ 이므로 $a = \frac{3}{2}$

답 ④

27

사각형 DMFN은 두 대각선의 길이가 $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$ 인 마름모이므로 사각형 DMFN의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

그림과 같이 선분 CD의 중점을 M' 이라 하면 사각형 DMFN의 평면 CGHD 위로의 정사영이 $DM'GN$ 이고 사각형 $DM'GN$ 의 넓이는 $1 \times 2 = 2$

그러므로 두 평면 DMFN, CGHD가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

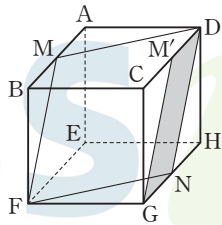
$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

이때 삼각형 CGD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

이므로 삼각형 CGD의 평면 DMFN 위로의 정사영의 넓이 S 는

$$S = 2 \cos \theta = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $S^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$



답 ④

28

타원의 중심 (1, t)에서 두 직선 $y=2x+4$, $y=2x-4$ 에 이르는 거리가 서로 같으므로

$$\frac{|2 \times 1 - t + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|2 \times 1 - t - 4|}{\sqrt{5}}$$

에서 $|6-t| = |t+2|$ 이므로

$$6-t = -t-2 \text{ 또는 } 6-t = t+2$$

$$6-t = -t-2 \text{에서 } 6 \neq -2$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

$$6-t = t+2 \text{에서 } t=2$$

타원 $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$ 의 기울기가 2인 접선의 방정식은

$$y-2 = 2(x-1) \pm \sqrt{4a^2+b^2} \text{에서 } y = 2x \pm \sqrt{4a^2+b^2}$$

$$\text{즉, } 4a^2+b^2=16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$FF' = 4 \text{이므로 } |a^2-b^2| = 4$$

$a^2-b^2=4$ 인 경우 ①과 연립하여 풀면 $b^2=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$b^2-a^2=4$ 인 경우 ①과 연립하여 풀면

$$a^2 = \frac{12}{5}, b^2 = \frac{32}{5}$$

$$\text{따라서 } ta^2 + b^2 = 2 \times \frac{12}{5} + \frac{32}{5} = \frac{56}{5}$$

답 ④

29

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{OA} \text{에서 } \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP} = (t+1)\overrightarrow{OA}$$

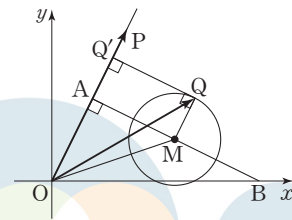
즉, 점 P는 직선 $y=2x$ 의 $x > 2$ 인 부분에 있는 점이고,

$$|\overrightarrow{OP}| = (t+1)|\overrightarrow{OA}| = 2\sqrt{5}(t+1)$$

한편, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$|\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ}| = |\overrightarrow{2MQ}| = 2\sqrt{5} \text{에서 } |\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{5}$$

이므로 점 Q는 점 M(6, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원 위에 있는 점이다.



이때 점 Q에서 직선 $y=2x$ 에 내린 수선의 발을 Q' 이라 하면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|$$

이므로 그림과 같이 직선 QQ' 이 원 위의 제1사분면에 있는 점 Q에서 원에 접할 때 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 값이 최대가 된다.

한편, 직선 AM의 기울기가 $\frac{2-4}{6-2} = -\frac{1}{2}$ 이므로 점 M에서 직선 $y=2x$

에 내린 수선의 발이 점 A이다.

즉, 사각형 AMQQ'은 직사각형이고,

$$\overrightarrow{OA} = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}, \overrightarrow{AQ'} = \overrightarrow{MQ} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ'} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

그러므로

$$f(t) = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 2\sqrt{5}(t+1) \times 3\sqrt{5} = 30(t+1)$$

$f(t)=200$ 에서 $30(t+1)=200$

$t = \frac{20}{3} - 1 = \frac{17}{3}$

따라서 $p=3, q=17$ 이므로 $p+q=3+17=20$

답 20

30

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고, 세 점 E, F, G에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 각각 E', F', G'이라 하자.

두 점 F, G는 두 선분 AC, AD를 2:1로 내분하는 점이므로 두 점 F', G'은 두 선분 HC, HD를 각각 2:1로 내분하는 점이다.

또한 점 E는 선분 AB를 1:t로 내분하는 점이므로 점 E'은 선분 HB를 1:t로 내분하는 점이다.

삼각형 AFG와 삼각형 ACD는 닮음비가 2:3인 닮은 도형이므로

$\overline{FG} = \overline{F'G'} = \frac{2}{3} \overline{CD} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$

점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M이라 하고, 직선 BM이 선분 F'G'과 만나는 점을 M'이라 하자.

삼각형 E'F'G'의 넓이가 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{E'M'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \overline{E'M'} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

이때 $\overline{HM'} = \frac{2}{3} \overline{HM} = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\overline{E'H} = \overline{E'M'} - \overline{HM'} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

또 $\overline{BH} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{BE'} = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

즉, $\overline{E'H} : \overline{BE'} = \frac{2\sqrt{3}}{3} : \frac{4\sqrt{3}}{3} = 1 : 2$ 이므로 $t=2$

즉, 점 E는 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이므로

$\overline{AE} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$

삼각형 AEF와 삼각형 AGE에서

$\overline{AF} = \overline{AG} = \frac{2}{3} \times 6 = 4, \angle FAE = \angle GAE = \frac{\pi}{3}$

이므로 $\angle AEF = \angle AEG = \frac{\pi}{2}$ 이고

$\overline{EF} = \overline{EG} = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{EI} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$

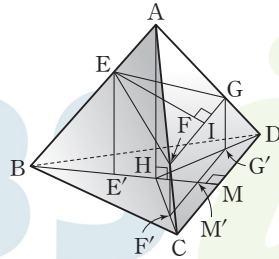
이므로 삼각형 EFG의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

즉, $\cos^2 \theta = \left(\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{4\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 = \frac{2}{3}$

따라서 $60t \cos^2 \theta = 60 \times 2 \times \frac{2}{3} = 80$

답 80



실전 모의고사 3회

본문 138~149쪽

01 ②	02 ③	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 ④	07 ②	08 ②	09 ⑤	10 ③
11 ④	12 ②	13 ③	14 ②	15 ③
16 6	17 31	18 22	19 2	20 4
21 8	22 45	23 ①	24 ④	25 ④
26 ②	27 ③	28 ④	29 36	30 12

01

$8^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} = (2^3)^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \times (2^{-1})^{\sqrt{3}+1} = 2^{\sqrt{3}-\sqrt{3}-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

답 ②

02

$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2$ 에서 $f'(x) = 9x^2 - 12x$

따라서 $f'(1) = 9 - 12 = -3$

답 ③

03

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$a_4 = 4a_2$ 에서 $a_1 r^3 = 4a_1 r, r^2 = 4$

모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_1 = a_3 \times \frac{1}{r^2} = 4 \times \frac{1}{2^2} = 1$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$a_4 = a_3 \times r = 4r$ 이므로

$a_4 = 4a_2$ 에서 $4r = 4a_1 \times r$

따라서 $a_1 = 1$

04

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2, f(1) = -1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + f(1) = 1 + 2 + (-1) = 2$

답 ⑤

05

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$

$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}, \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$

$= 1 + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로 $\sin \theta + \cos \theta > 0$

따라서 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$

답 ⑤

06

두 곡선 $y=x^3-2x^2$ 과 $y=x^2-4$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면
 $x^3-2x^2=x^2-4$ 에서
 $x^3-3x^2+4=0, (x+1)(x-2)^2=0$
 $x=-1$ 또는 $x=2$

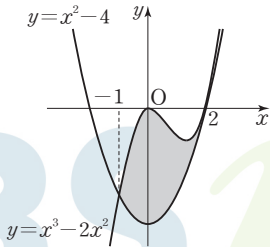
두 곡선 $y=x^3-2x^2$ 과 $y=x^2-4$ 는
 그림과 같다.
 따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-1}^2 |(x^3-2x^2)-(x^2-4)| dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x^3-3x^2+4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2$$

$$= (4-8+8) - \left(\frac{1}{4} + 1 - 4 \right) = \frac{27}{4}$$



답 ④

07

$9^{x-1} - k \times 3^x + 9 = 0$ 의 양변에 9를 곱하면

$$9^x - 9k \times 3^x + 81 = 0$$

$$3^x = X \quad (X > 0) \text{이라 하면}$$

$$X^2 - 9kX + 81 = 0 \quad \dots \text{㉠}$$

이 방정식이 오직 하나의 양의 실근을 가져야 한다.
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $81 > 0$ 이므로
 두 근의 부호는 같다. 따라서 이차방정식이 오직 하나의 양의 실근을
 가지려면 ㉠의 판별식을 D 라 할 때, $D=0$ 이어야 한다.

즉, $D = (-9k)^2 - 4 \times 81 = 0$ 에서
 $k^2 - 4 = 0, k^2 = 4$
 이때 이 중근이 양수이어야 하므로 이차방정식이 두 근의 합이 양수이다.
 즉, $9k > 0$ 에서 $k > 0$ 이므로
 $k = 2$
 $X^2 - 18X + 81 = 0$ 에서
 $(X-9)^2 = 0, X=9, 3^x=9, x=2$
 즉, $a=2$
 따라서 $k+a=2+2=4$

답 ②

08

두 함수 $f(x)$ 와 $f(x)+5$ 는 $x=a$ 에서만 불연속이므로 함수
 $f(x)\{f(x)+5\}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=a$ 에서 연속
 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)\{f(x)+5\} = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)\{f(x)+5\} = f(a)\{f(a)+5\}$$

..... ㉠

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)\{f(x)+5\} = (a+1)(a+6)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)\{f(x)+5\} = (a-5)a$$

$$f(a)\{f(a)+5\} = (a+1)(a+6)$$

이므로 ㉠에서 $(a+1)(a+6) = (a-5)a$

$$a^2+7a+6 = a^2-5a, 12a = -6$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$

답 ②

09

$a_3 = \frac{1}{6}$ 에서

$$a_3 = \frac{1}{4-8a_2} \text{이므로 } \frac{1}{6} = \frac{1}{4-8a_2}, a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{1}{4-8a_1} \text{이므로 } -\frac{1}{4} = \frac{1}{4-8a_1}, a_1 = 1$$

또한 $a_3 = \frac{1}{6}$ 에서

$$a_4 = \frac{1}{4-8a_3} = \frac{1}{4-8 \times \frac{1}{6}} = \frac{3}{8}$$

$$a_5 = \frac{1}{4-8a_4} = \frac{1}{4-8 \times \frac{3}{8}} = 1$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \dots$ 으로 첫째항부터

네 개의 수 $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}$ 이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{25} a_n = \sum_{n=1}^{24} a_n + a_{25} = 6(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_1$$

$$= 6\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) + 1 = 6 \times \frac{31}{24} + 1 = \frac{35}{4}$$

답 ⑤

10

$y = x^3 - x - 1$ 에서 $y' = 3x^2 - 1$

점 A(-1, -1)에서의 접선의 기울기는 $3 \times (-1)^2 - 1 = 2$ 이므로

곡선 $y = x^3 - x - 1$ 위의 점 A(-1, -1)에서의 접선의 방정식은
 $y + 1 = 2(x + 1)$, 즉 $y = 2x + 1$

곡선 $y = x^3 - x - 1$ 과 직선 $y = 2x + 1$ 이 만나는 점의 x 좌표는
 $x^3 - x - 1 = 2x + 1$ 에서 $(x+1)^2(x-2) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 2$

따라서 A(-1, -1), B(2, 5)이므로

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

삼각형 APB의 넓이는
 그림과 같이 점 P에서의 접선의
 기울기가 직선 AB의 기울기 2와
 같을 때 최대가 된다.

$y' = 3x^2 - 1$ 에서

점 P의 x 좌표를 t 라 하면

$$3t^2 - 1 = 2$$

$$3(t+1)(t-1) = 0$$

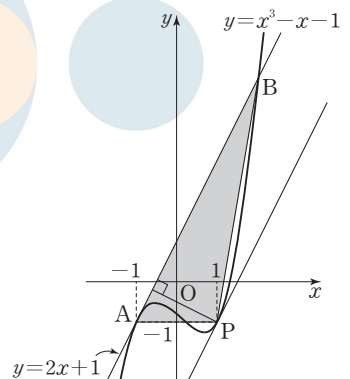
이때 $t \neq -1$ 이므로

$$t = 1$$

점 P는 곡선 $y = x^3 - x - 1$ ($-1 < x < 2$) 위의 점이므로 y 좌표는

$$y = 1^3 - 1 - 1 = -1$$

즉, P(1, -1)



점 P(1, -1)과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는 $\frac{|2 \times 1 - (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

따라서 삼각형 APB의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = 6$

답 ③

11

조건 (가)에서 직선 OC의 기울기가 2이므로 점 C의 좌표를 $(t, 2t)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(2t, t)$ 이다.

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$a^{2t} + 4 = t \quad \dots \text{㉠}$$

점 B가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{4} \log_a 2t = t, \quad a^{4t} = 2t \quad \dots \text{㉡}$$

㉡에서 $t = \frac{1}{2} a^{4t}$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$a^{2t} + 4 = \frac{1}{2} a^{4t}$$

$a^{2t} = k$ ($k > 0$)이라 하면

$$k + 4 = \frac{1}{2} k^2, \quad k^2 - 2k - 8 = 0, \quad (k+2)(k-4) = 0$$

$k > 0$ 이므로 $k = 4$

$a^{2t} = 4$ 이므로 ㉠에서 $t = 8$ 이고, $a^{16} = 4$ 에서 $a = 4^{\frac{1}{16}} = 2^{\frac{1}{8}}$ 이다.

즉, 점 B의 좌표는 (16, 8), 점 C의 좌표는 (8, 16)이다.

$f(x) = 2^{\frac{1}{8}x} + 4$ 이고, 조건 (나)에서 두 점 A, C의 x 좌표가 같으므로

$$f(8) = 2^1 + 4 = 6$$

에서 점 A의 좌표는 (8, 6)이다.

$\overline{AC} = 16 - 6 = 10$ 이고, 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $16 - 8 = 8$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40$$

답 ④

12

$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}kx^3 - 4k^2x^2$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 4kx^2 - 8k^2x = 4x(x^2 - kx - 2k^2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 4x(x+k)(x-2k) = 0$$

$$x = -k \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2k$$

$k > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

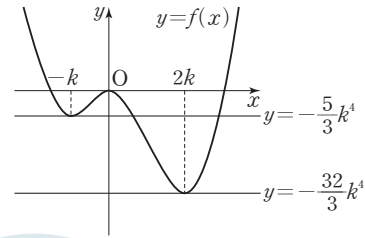
x	...	$-k$...	0	...	$2k$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소

함수 $f(x)$ 는 $x = -k$ 와 $x = 2k$ 에서 극소이고 $x = 0$ 에서 극대이다.

$$f(-k) = k^4 + \frac{4}{3}k^4 - 4k^4 = -\frac{5}{3}k^4, \quad f(0) = 0,$$

$$f(2k) = 16k^4 - \frac{32}{3}k^4 - 16k^4 = -\frac{32}{3}k^4$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y = -\frac{32}{3}k^4$ 은 오직 한 점에서 만나므로

조건 (가)에서

$$a = -\frac{32}{3}k^4$$

직선 $y=0$ 과 직선 $y = -\frac{5}{3}k^4$ 은 곡선 $y=f(x)$ 와 각각 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (나)에서

$$b = -\frac{5}{3}k^4 \text{ 또는 } b = 0$$

$$(i) \quad a = -\frac{32}{3}k^4, \quad b = 0 \text{일 때, } b - a = 0 - \left(-\frac{32}{3}k^4\right) = \frac{32}{3}k^4$$

$$(ii) \quad a = -\frac{32}{3}k^4, \quad b = -\frac{5}{3}k^4 \text{일 때, } b - a = -\frac{5}{3}k^4 - \left(-\frac{32}{3}k^4\right) = 9k^4$$

따라서 $b - a$ 의 모든 값의 합은

$$\frac{32}{3}k^4 + 9k^4 = \frac{59}{3}k^4 = 236$$

이므로 $k^4 = 12$

답 ②

13

선분 AD의 길이를 k ($k > 0$)이라 하자.

$$\angle ABD = \angle BDA = \frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\overline{BD} = 2 \times \overline{AB} \times \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}k$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin(\angle ABD)} = 2R_1 \text{이므로}$$

$$R_1 = \frac{k}{2 \sin \frac{\pi}{6}} = k$$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} \text{이므로}$$

$$\frac{k}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\overline{CD}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{6}}{3}k$$

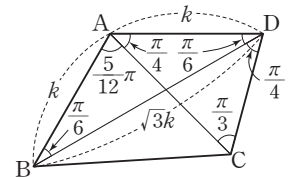
삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle CDB)$$

$$= (\sqrt{3}k)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}k\right)^2 - 2 \times \sqrt{3}k \times \frac{\sqrt{6}}{3}k \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3k^2 + \frac{2}{3}k^2 - 2k^2 = \frac{5}{3}k^2$$

$$\overline{BC} = \frac{\sqrt{15}}{3}k$$



삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)} = 2R_2, R_2 = \frac{\sqrt{30}}{6}k$$

이므로 $R_1 : R_2 = k : \frac{\sqrt{30}}{6}k$ 이다.

따라서 $f(k) = \frac{\sqrt{6}}{3}k, g(k) = \frac{\sqrt{15}}{3}k, h(k) = \frac{\sqrt{30}}{6}k$ 이므로

$$\frac{f(3) \times g(3)}{h(6)} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{15}}{\sqrt{30}} = \sqrt{3}$$

14

$$\begin{aligned} \neg. f(x)g(x) &= \begin{cases} (-x^2+x)g(x) & (x < 0) \\ (x^2-2x)g(x) & (x \geq 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x(x-1)g(x) & (x < 0) \\ x(x-2)g(x) & (x \geq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$f(0) = 0$ 이므로 $f(0)g(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{- (x-1)g(x)\} = g(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{(x-2)g(x)\} = -2g(0)$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에 서도 미분가능하다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{x}$ 에서

$$g(0) = -2g(0), g(0) = 0 \text{ (참)}$$

∴ ∇에서 $g(0) = 0$ 이므로 일차함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = mx \text{ (} m \text{은 } 0 \text{이 아닌 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x)g(x) dx \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x^2+x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x)g(x) dx &= \int_{-1}^0 mx(-x^2+x) dx = m \int_{-1}^0 (-x^3+x^2) dx \\ &= m \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 \\ &= m \times \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right\} = \frac{7}{12}m \\ -\frac{5}{6} &= \frac{7}{12}m \text{에서 } m = -\frac{10}{7} \end{aligned}$$

따라서 $g(x) = -\frac{10}{7}x$ 이므로 $g(-1) = \frac{10}{7}$ (참)

∴ $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = 0$ 인 일차함수 $g(x) = mx$ (m 은 0 이 아닌 상수)가 존재한다고 하자.

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^0 mx(-x^2+x) dx + \int_0^1 mx(x^2-2x) dx$$

이때 ∇에서

$$\int_{-1}^0 mx(-x^2+x) dx = \frac{7}{12}m$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 mx(x^2-2x) dx &= m \int_0^1 (x^3-2x^2) dx = m \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= m \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{5}{12}m \end{aligned}$$

따라서

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \frac{7}{12}m + \left(-\frac{5}{12}m \right) = \frac{m}{6} = 0$$

이므로 $m = 0$ 이 되어 모순이다.

즉, $\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = 0$ 을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 가 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ∇, √이다.

답 ③

15

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)이라 하자.

$$a_n a_{n+5} \leq 0 \text{에서 } a_n(a_n + 5d) \leq 0$$

$$-5d \leq a_n \leq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$S_n = \frac{n(a+a_n)}{2}$$

$$S_{n+5} = \frac{(n+5)(a+a_{n+5})}{2} = \frac{(n+5)(a+a_n+5d)}{2}$$

n 은 자연수이므로 $S_n S_{n+5} \leq 0$ 에서

$$(a+a_n)(a+5d+a_n) \leq 0$$

$$d > 0 \text{이므로 } -a-5d \leq a_n \leq -a \quad \dots \textcircled{2}$$

한편, $a \geq 0$ 이면 $a_n \geq 0$ 에서 $n(A) \leq 1$ 이므로 $n(A \cap B) = 3$ 을 만족시킬 수 없다. 즉, $a < 0$

$$n(A \cap B) = 3 \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } -a-5d < 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

따라서 $A \cap B = \{n \mid -a-5d \leq a_n \leq 0, n \text{은 자연수}\}$ 이다.

한편, $S_m = a_m$ 인 짝수인 자연수 m 이 존재하므로

$$a_m = S_m - S_{m-1} \text{에서 } S_m = S_m - S_{m-1}, S_{m-1} = 0$$

$$\frac{(m-1)(a+a_{m-1})}{2} = 0, a+a_{m-1} = 0$$

$$a + \{a + (m-2)d\} = 0$$

$$m = 2k \text{ (} k \text{는 자연수)라 하면 } 2a + (2k-2)d = 0$$

즉, $-a = (k-1)d$ 인 자연수 k 가 존재한다.

③에서 $-a-5d = (k-1)d-5d = (k-6)d < 0$ 이므로 k 는 5 이하의 자연수이다.

$$-a = (k-1)d \text{에서}$$

$$a_n = a + (n-1)d = -(k-1)d + (n-1)d = (n-k)d$$

이므로

$$A \cap B = \{n \mid (k-6)d \leq (n-k)d \leq 0, n \text{은 자연수}\}$$

$$= \{n \mid k-6 \leq n-k \leq 0, n \text{은 자연수}\}$$

$$= \{n \mid 2k-6 \leq n \leq k, n \text{은 자연수}\}$$

k 의 값에 따라 집합 $A \cap B$ 를 구하면 다음과 같다.

$$k=1 \text{이면 } A \cap B = \{1\}$$

$$k=2 \text{이면 } A \cap B = \{1, 2\}$$

$$k=3 \text{이면 } A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

$$k=4 \text{이면 } A \cap B = \{2, 3, 4\}$$

$$k=5 \text{이면 } A \cap B = \{4, 5\}$$

이때 $n(A \cap B) = 3$ 이므로 $k=3$ 또는 $k=4$

답 ②

- (i) $k=3$ 일 때, $a=-2d$ 이고
 $a_n=(n-k)d=(n-3)d$
 ㉠에서 $-5d \leq (n-3)d \leq 0$, $-5 \leq n-3 \leq 0$, $-2 \leq n \leq 3$ 이므로
 $A = \{1, 2, 3\}$
 ㉡에서 $2d-5d \leq (n-3)d \leq 2d$, $-3 \leq n-3 \leq 2$, $0 \leq n \leq 5$ 이므로
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 이때 $A-B = \emptyset$ 이다.
- (ii) $k=4$ 일 때, $a=-3d$ 이고
 $a_n=(n-k)d=(n-4)d$
 ㉠에서 $-5d \leq (n-4)d \leq 0$, $-5 \leq n-4 \leq 0$, $-1 \leq n \leq 4$ 이므로
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 ㉡에서 $3d-5d \leq (n-4)d \leq 3d$, $-2 \leq n-4 \leq 3$, $2 \leq n \leq 7$ 이므로
 $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 이때 $A-B = \{1\} \neq \emptyset$ 이다.

(i), (ii)에서 $k=4$ 이고 $m=2k=8$ 이다.
 $a = -3d$ 이므로
 $a_m = a_8 = a + 7d = -3d + 7d = 4d$,
 $a_{m+10} = a_{18} = a + 17d = -3d + 17d = 14d$
 따라서 $\frac{a_{m+10}}{a_m} = \frac{14d}{4d} = \frac{7}{2}$

답 ③

16

$t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면
 $s = \int_0^2 |v(t)| dt = \int_0^2 |6t^2 - 6t| dt$
 $= \int_0^1 (6t - 6t^2) dt + \int_1^2 (6t^2 - 6t) dt$
 $= [3t^2 - 2t^3]_0^1 + [2t^3 - 3t^2]_1^2$
 $= (3-2) - 0 + (16-12) - (2-3) = 1+5=6$

답 6

17

선분 AB의 중점의 x 좌표가 1이므로
 $\frac{\log_2 a + \log_2 \frac{2}{3}}{2} = 1, \log_2 \frac{2}{3} a = 2$
 $\frac{2}{3} a = 4, a = 6$
 선분 AB의 중점의 y 좌표가 0이므로
 $\frac{-2 + \log_5 b}{2} = 0, \log_5 b = 2$
 $b = 25$
 따라서 $a+b = 6+25 = 31$

답 31

18

$\int_2^x (t^3 + 2t - 1) dt = ax^3 + 3x - f(x) \dots \textcircled{1}$
 ㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $x^3 + 2x - 1 = 3ax^2 + 3 - f'(x)$

$f'(x) = -x^3 + 3ax^2 - 2x + 4$
 $f'(2) = 16$ 에서
 $-8 + 12a - 4 + 4 = 16$
 $12a = 24, a = 2$
 ㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $\int_2^2 (t^3 + 2t - 1) dt = 8a + 6 - f(2)$
 $0 = 16 + 6 - f(2)$
 따라서 $f(2) = 22$

답 22

19

$\sum_{k=1}^5 (k+a)^2 = 50 + \sum_{k=1}^5 k(k+a)$ 에서
 $\sum_{k=1}^5 (k^2 + 2ak + a^2) = 50 + \sum_{k=1}^5 (k^2 + ak), \sum_{k=1}^5 (ak + a^2) = 50$
 $a \times \frac{5 \times 6}{2} + 5a^2 = 50, 5a^2 + 15a - 50 = 0$
 $a^2 + 3a - 10 = 0, (a+5)(a-2) = 0$
 a 는 양수이므로 $a = 2$

답 2

20

$f(x) = \begin{cases} -2x+2 & (x \leq 0) \\ 2 & (0 < x \leq 2) \\ 2x-2 & (x > 2) \end{cases}$ 에서

(i) 직선 $y=2x-2$ 와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$ 가 접하는 경우

이차방정식 $2x-2 = \frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-3x+k+2=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-3)^2 - 2(k+2) = 0, k = \frac{5}{2}$$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(3, 4)$ 이다.

직선 $y=-2x+2$ 와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$ 가 접하는 경우

이차방정식 $-2x+2 = \frac{1}{2}x^2-x+k$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+x+k-2=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 1^2 - 2(k-2) = 0, k = \frac{5}{2}$$

이고, 이때 접점의 좌표는 $(-1, 4)$ 이다.

직선 $y=2$ 와 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-x+k$ 가 접하는 경우

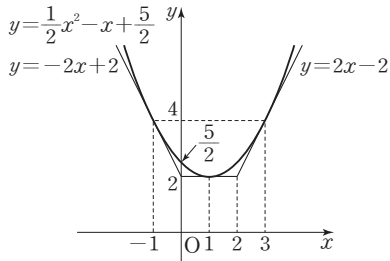
이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+k=2$, 즉 $\frac{1}{2}x^2-x+k-2=0$ 의 판별식을 D_3 이라 하면

$$D_3 = (-1)^2 - 2(k-2) = 0, k = \frac{5}{2}$$

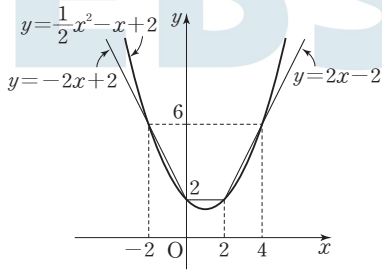
이고, 이때 접점의 좌표는 $(1, 2)$ 이다.

따라서 $k = \frac{5}{2}$ 일 때 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 세 점 $(3, 4), (-1, 4), (1, 2)$ 에서 접하므로

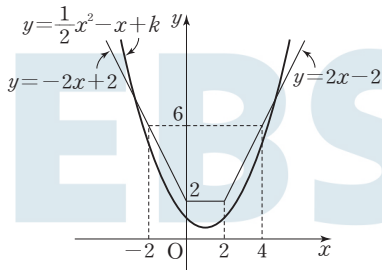
$$h\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$



- (ii) 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $(0, 2)$, $(2, 2)$ 를 지나면, 즉 $k=2$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점 $(-2, 6)$, $(4, 6)$ 에서도 만나므로 $h(2)=4$



- (iii) $k < 2$ 이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(k)$ 는 다음과 같다.

$$h(k) = \begin{cases} 2 & (k < 2) \\ 4 & (k = 2) \\ 6 & (2 < k < \frac{5}{2}) \\ 3 & (k = \frac{5}{2}) \\ 0 & (k > \frac{5}{2}) \end{cases}$$

$$h\left(\frac{5}{2}\right) + \lim_{k \rightarrow a^+} h(k) = 9 \text{에서}$$

$$\lim_{k \rightarrow a^+} h(k) = 9 - h\left(\frac{5}{2}\right) = 9 - 3 = 6$$

$2 \leq a < \frac{5}{2}$ 이므로 구하는 실수 a 의 최솟값은 $p=2$

따라서 $h(2)=4$

답 4

21

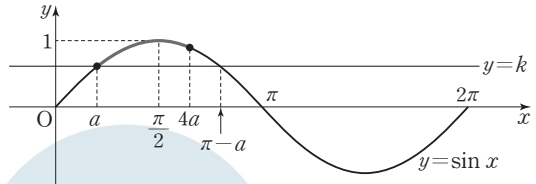
$0 < a < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < 4a < 2\pi$ 이고,

$a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식 $\sin x = 1$ 의 해가 존재하므로 $4a \geq \frac{\pi}{2}$ 이다.

즉, $\frac{\pi}{2} \leq 4a < 2\pi$

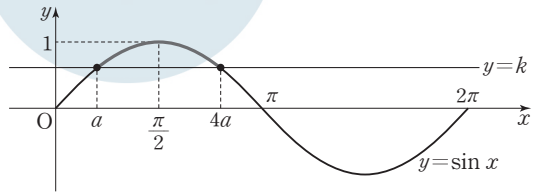
$\sin a = \sin(\pi - a)$ 이므로 $4a$ 의 값과 $\pi - a$ 의 값의 대소 관계에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

- (i) $\frac{\pi}{2} \leq 4a < \pi - a$ 인 경우



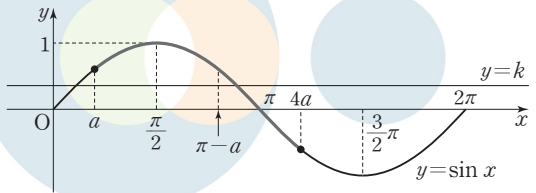
$\sin a \leq k < \sin 4a$ 또는 $k=1$ 이면 $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식 $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

- (ii) $4a = \pi - a$ 인 경우



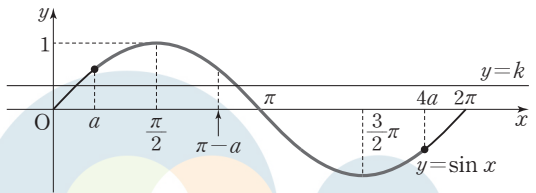
$k=1$ 이면 $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식 $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다. $k \neq 1$ 이면 $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식 $\sin x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 2이다.

- (iii) $\pi - a < 4a \leq \frac{3}{2}\pi$ 인 경우



$\sin 4a \leq k < \sin a$ 또는 $k=1$ 이면 $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식 $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

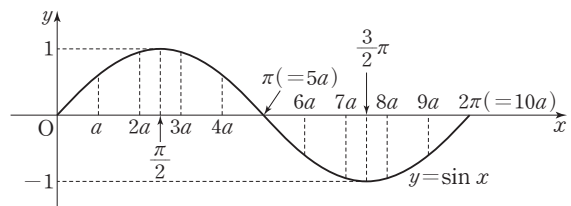
- (iv) $\frac{3}{2}\pi < 4a < 2\pi$ 인 경우



$\sin 4a < k < \sin a$ 또는 $k=1$ 또는 $k=-1$ 이면 $a \leq x \leq 4a$ 에서 방정식 $\sin x = k$ 는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

- (i)~(iv)에서 방정식 $\sin x = k$ 가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값이 1뿐인 경우는 (ii)이다.

즉, $4a = \pi - a$ 이므로 $a = \frac{\pi}{5}$



한편, m, n ($m < n$)이 10 이하의 두 자연수일 때, 닫힌구간 $[ma, na]$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 0인 경우는

$$\textcircled{1} 0 < ma \leq \frac{\pi}{2} \text{이고 } \frac{3}{2}\pi \leq na \leq 2\pi \text{인 경우}$$

(최댓값 1, 최솟값 -1)

$$\textcircled{2} \frac{\pi}{2} < ma < \pi < na < \frac{3}{2}\pi \text{이고 } ma + na = 2\pi \text{인 경우}$$

(최댓값 $\sin ma$, 최솟값 $\sin na = \sin(2\pi - ma) = -\sin ma$)

이다.

①에서 m 의 값은 1 또는 2이고 n 의 값은 8 또는 9 또는 10이므로 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $2 \times 3 = 6$

②에서 가능한 순서쌍 (m, n) 은 $(3, 7), (4, 6)$ 으로 그 개수는 2
따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$6 + 2 = 8$$

답 8

22

조건 (가)의 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 6$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 다항함수이므로 $f(2) = 0$

조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $|f(x)| \leq |xg(x)|$ 인 연속함수 $g(x)$ 가 존재하므로 $0 \leq |f(0)| \leq |0 \times g(0)| = 0$ 에서 $f(0) = 0$

따라서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x(x-2)(x^2 + ax + b) \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} 6 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x^2 + ax + b)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x(x^2 + ax + b) = 2(4 + 2a + b) \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 2a + b = -1$$

$$b = -1 - 2a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또한 } x \neq 0 \text{일 때 } \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |g(x)| \text{에서 } -|g(x)| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |g(x)|$$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$-\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} |g(x)|$$

이고 함수 $g(x)$ 는 연속함수이므로

$$-|g(0)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq |g(0)|$$

$$-6 \leq f'(0) \leq 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(x) = (x^2 - 2x)(x^2 + ax + b) \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x - 2)(x^2 + ax + b) + (x^2 - 2x)(2x + a) \text{이므로}$$

$$f'(0) = -2b \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } -6 \leq -2b \leq 6, -3 \leq b \leq 3$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } -3 \leq -2a - 1 \leq 3, -2 \leq a \leq 1$$

$$f(3) = 3(9 + 3a + b) = 3(9 + 3a - 1 - 2a) = 3(a + 8)$$

따라서 $f(3) = 3(a + 8)$ 은

$$a = -2 \text{일 때 최소이고 최솟값은 } 3 \times 6 = 18,$$

$$a = 1 \text{일 때 최대이고 최댓값은 } 3 \times 9 = 27 \text{이므로 구하는 합은}$$

$$18 + 27 = 45$$

답 45

23

선분 AB를 1:2로 내분하는 점을 P라 하면

$$\text{점 P의 } y \text{좌표는 } \frac{1 \times b + 2 \times 2}{1 + 2} = \frac{b + 4}{3}$$

$$\text{점 P의 } z \text{좌표는 } \frac{1 \times (-4) + 2 \times a}{1 + 2} = \frac{-4 + 2a}{3}$$

점 P가 x 축 위의 점이므로

$$\frac{b + 4}{3} = 0, \frac{-4 + 2a}{3} = 0 \text{에서 } a = 2, b = -4$$

$$\text{따라서 } a + b = 2 + (-4) = -2$$

답 ①

24

한 초점이 x 축 위에 있고 두 점근선의 교점이 원점이므로 쌍곡선의 방

$$\text{정식을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{으로 놓을 수 있다.}$$

두 점근선의 방정식이 $y = 3x, y = -3x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 3, \text{ 즉 } b = 3a \quad \dots \textcircled{1}$$

쌍곡선의 한 초점이 $(2\sqrt{10}, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{10})^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$a^2 + (3a)^2 = 40, 10a^2 = 40$$

즉, $a = 2, b = 6$ 이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$$

따라서 이 쌍곡선의 꼭짓점 중에서 x 좌표가 양수인 점의 좌표는 $(2, 0)$
이므로 x 좌표는 2이다.

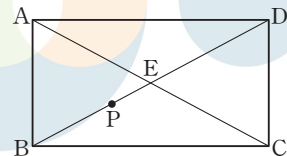
답 ④

25

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PD} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{PD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{PB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BP} \quad \dots \textcircled{1}$$



선분 AC의 중점을 E라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} &= 2 \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \\ &= 2\overrightarrow{PE} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{4}{3}\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PE}$$

$$\text{즉, } \overrightarrow{BP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PE}$$

점 P는 선분 BE를 3:2로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \frac{3}{2} \overrightarrow{PE} = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \overrightarrow{BE} \right) \\ &= \frac{3}{5} \overrightarrow{BE} = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \right) = \frac{3}{10} \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

에서 $\overrightarrow{PD} = \frac{7}{10} \overrightarrow{BD}$

사각형 ABCD의 넓이가 40이므로 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 40 = 20$$

또한 $|\overrightarrow{PD}| = \frac{7}{10} |\overrightarrow{BD}|$ 이므로 삼각형 APD의 넓이는 삼각형 ABD의

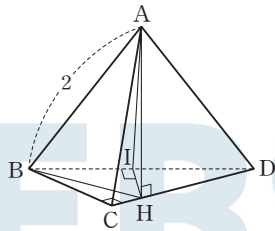
넓이의 $\frac{7}{10}$ 이다.

따라서 삼각형 APD의 넓이는

$$20 \times \frac{7}{10} = 14$$

26

점 H에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{AH} \perp$ (평면 BCD), $\overline{HC} \perp \overline{BC}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = 2, \angle ABC = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

$\overline{AH} \perp$ (평면 BCD), $\overline{HI} \perp \overline{BD}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AI} \perp \overline{BD}$

직각삼각형 ABI에서

$$\overline{AB} = 2, \angle ABI = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\overline{BI} = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

선분 BH가 공통, $\overline{BC} = \overline{BI} = 1$ 이므로 두 직각삼각형 BCH, BIH는 서로 합동이다.

$$\text{따라서 } \angle HBC = \frac{1}{2} \angle DBC = \frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC} = 1, \angle HBC = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{BC} = \overline{BH} \cos \frac{\pi}{6}, \text{ 즉 } \overline{BH} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos(\angle ABH) = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

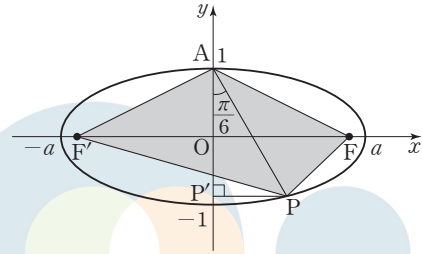
답 ④

답 ②

27

$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 에서 두 초점 F, F'의 좌표는 각각

$$(\sqrt{a^2-1}, 0), (-\sqrt{a^2-1}, 0) \dots\dots \textcircled{1}$$



점 P의 좌표를 (p, q) 라 하고 점 P에서 y 축에 내린 수선의 발을 P'이라 하면 점 P'의 좌표는 $(0, q)$ 이고

$$\overline{AP'} = 1 - q$$

직각삼각형 AP'P에서

$$\angle P'AP = \frac{\pi}{6}, \overline{AP} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{AP'} = \overline{AP} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{8} = 1 - q$$

$$\text{즉, } q = 1 - \frac{15}{8} = -\frac{7}{8}$$

$$\overline{P'P} = \overline{AP} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{8} = p$$

점 P $(\frac{5\sqrt{3}}{8}, -\frac{7}{8})$ 은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 위의 점이므로

$$\frac{1}{a^2} \times \left(\frac{5\sqrt{3}}{8} \right)^2 + \left(-\frac{7}{8} \right)^2 = 1, \frac{75}{a^2} + 49 = 64$$

$$\frac{75}{a^2} = 15, a^2 = 5$$

①에서 두 초점이 F(2, 0), F'(-2, 0)이므로

$$\overline{F'F} = 4$$

따라서 사각형 AF'PF의 넓이를 S라 하면

$$S = (\text{삼각형 AF'F의 넓이}) + (\text{삼각형 PFF'의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{7}{8} = \frac{15}{4}$$

답 ③

28

조건 (가)에서 $\overline{AF} : \overline{BF} = 2 : 1, \overline{AB} : \overline{CF} = 3 : 1$ 이므로

조건 (나)에서

$$\overline{CF} = \frac{1}{3} \overline{AB} = 3 \dots\dots \textcircled{1}$$

점 C의 x 좌표를 c ($c < 0$)이라 하면

$$\overline{BF} = \overline{CF} = p - c, \overline{AF} = 2\overline{CF} = 2p - 2c$$

두 점 A, B에서 포물선의 준선

$x = -p$ 에 내린 수선의 발을 각각 $A_1,$

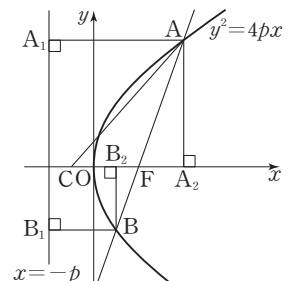
B_1 이라 하고, 두 점 A, B에서 x 축에

내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2 라 하자.

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AA_1} = \overline{AF} = 2p - 2c$$

$$\overline{BB_1} = \overline{BF} = p - c$$

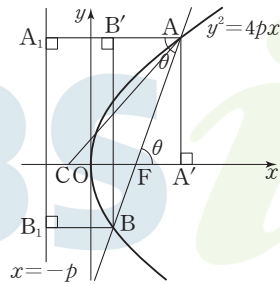


점 $F(p, 0)$ 과 준선 $x = -p$ 사이의 거리가 $2p$ 이므로
 $\overline{A_2F} = \overline{AA_1} - 2p = (2p - 2c) - 2p = -2c$
 $\overline{B_2F} = 2p - \overline{BB_1} = 2p - (p - c) = p + c$
 이때 $\overline{AF} : \overline{BF} = 2 : 1$ 이므로 두 삼각형 $\triangle AFA_2, \triangle BFB_2$ 는 닮음비가
 $2 : 1$ 인 닮은 도형이다.
 즉, $\overline{A_2F} : \overline{B_2F} = 2 : 1$ 이므로
 $-2c : (p + c) = 2 : 1$
 $2p + 2c = -2c, p = -2c$
 ㉠에서 $\overline{CF} = p - c = -3c = 3$ 이므로 $c = -1$
 $\overline{AF} = 6, \overline{A_2F} = -2c = 2$
 $\overline{AA_2} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{A_2F}^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$
 $\overline{CA_2} = \overline{CF} + \overline{FA_2} = 3 + 2 = 5$
 따라서 직각삼각형 $\triangle ACA_2$ 에서
 $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AA_2}^2 + \overline{CA_2}^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{57}$

다른 풀이

조건 (가)에서 $\overline{AF} : \overline{BF} = 2 : 1, \overline{AB} : \overline{CF} = 3 : 1$ 이므로
 조건 (나)에서
 $\overline{CF} = \frac{1}{3}\overline{AB} = 3$

두 점 A, B에서 포물선의 준선
 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 각각 $A_1,$
 B_1 , 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발
 을 A' , 점 B에서 선분 AA_1 에 내린
 수선의 발을 B' 이라 하자.



포물선의 정의에 의하여
 $\overline{BF} = \overline{BB_1} = \overline{A_1B'} = 3,$
 $\overline{AF} = \overline{AA_1} = 6$ 이므로
 $\overline{AB'} = \overline{AA_1} - \overline{A_1B'} = 3$
 $\angle BAB' = \theta$ 라 하면
 $\cos \theta = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

삼각형 $\triangle AFA'$ 에서 $\angle AFA' = \theta$ 이므로
 $\overline{FA'} = \overline{AF} \cos \theta = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$\overline{AA'} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{FA'}^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$

삼각형 $\triangle AA'C$ 에서
 $\overline{CA'} = \overline{CF} + \overline{FA'} = 3 + 2 = 5$ 이므로

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CA'}^2 + \overline{AA'}^2} = \sqrt{5^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{57}$

29

$$(\overline{DP} + \overline{DQ}) \cdot \overline{BD} = \overline{DP} \cdot \overline{BD} + \overline{DQ} \cdot \overline{BD}$$

$$= -(\overline{DP} \cdot \overline{DB} + \overline{DQ} \cdot \overline{DB})$$

이므로 $(\overline{DP} + \overline{DQ}) \cdot \overline{BD}$ 의 최댓값이 a 이면

$\overline{DP} \cdot \overline{DB} + \overline{DQ} \cdot \overline{DB}$ 의 최솟값은 $-a$ 이다.

$$|\overline{DB}| = \overline{DB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

(i) 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{DP} \cdot \overline{DB} = |\overline{DH}| |\overline{DB}|$$

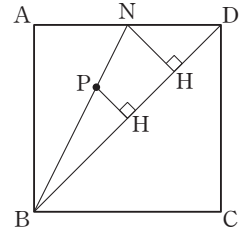
점 P는 선분 BN 위의 점이므로 [그림 1]
 과 같이 $|\overline{DH}| = \overline{DH}$ 의 값은 점 P가 점
 N의 위치에 있을 때 최소이고

$$\overline{DH} \geq \overline{DN} \cos 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서

$$\overline{DP} \cdot \overline{DB} = |\overline{DH}| |\overline{DB}|$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 2$$



[그림 1]

(ii) 점 Q에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$$\overline{DQ} \cdot \overline{DB} = |\overline{DI}| |\overline{DB}|$$

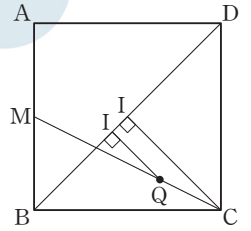
점 Q는 선분 CM 위의 점이므로 [그림 2]
 와 같이 $|\overline{DI}| = \overline{DI}$ 의 값은 점 Q가 점 C
 의 위치에 있을 때 최소이고

$$\overline{DI} \geq \overline{DC} \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

따라서

$$\overline{DQ} \cdot \overline{DB} = |\overline{DI}| |\overline{DB}|$$

$$\geq \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$



[그림 2]

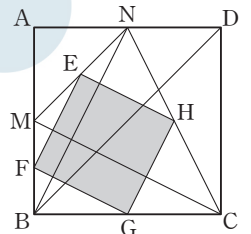
(i), (ii)에서 $\overline{DP} \cdot \overline{DB} + \overline{DQ} \cdot \overline{DB}$ 의 최솟값은 $-a = 2 + 4 = 6$ 이므로
 $(\overline{DP} + \overline{DQ}) \cdot \overline{BD}$ 의 최댓값은 $a = -6$ 이다.

따라서 $a^2 = (-6)^2 = 36$

답 36

다른 풀이

선분 PQ의 중점을 R라 하고 네 선분 MN,
 MB, BC, CN의 중점을 각각 E, F, G,
 H라 하면 점 R가 움직일 수 있는 영역은
 사각형 EFGH와 그 내부이다.



$$(\overline{DP} + \overline{DQ}) \cdot \overline{BD}$$

$$= 2 \left(\frac{\overline{DP} + \overline{DQ}}{2} \right) \cdot \overline{BD}$$

$$= 2 \overline{DR} \cdot \overline{BD} = -2(\overline{DR} \cdot \overline{DB})$$

$\overline{DR} \cdot \overline{DB} > 0$ 이므로 $-2(\overline{DR} \cdot \overline{DB})$ 의 값은 점 R가 점 H에 있을 때
 최대이다.

점 B를 원점으로 하고 세 점 A, C, D의 좌표가 각각 $(0, 2), (2, 0),$
 $(2, 2)$ 인 좌표평면을 생각하자.

점 $H\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ 에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H' 이라 하면

직선 BD의 방정식은 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 이므로

$$\overline{HH'} = \frac{\left| \frac{3}{2} - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \overline{DH} = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (2 - 1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

직각삼각형 $\triangle DHH'$ 에서

$$\overline{DH'} = \sqrt{\overline{DH}^2 - \overline{HH'}^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

또한 $\overline{DB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$-2(\overline{DR} \cdot \overline{DB}) \leq -2|\overline{DH'}| |\overline{DB}|$$

$$= -2 \times \overline{DH'} \times \overline{DB} = -2 \times \frac{3}{2\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} = -6$$

따라서 $(\overline{DP} + \overline{DQ}) \cdot \overline{BD}$ 의 최댓값은 -6 이므로

$a = -6$ 에서 $a^2 = (-6)^2 = 36$

30

$$\overline{D'M} \perp \overline{BM}, \overline{D'M} \perp \overline{MF}$$

이므로 직선 $D'M$ 은 평면 $EBCF$ 와 수직이다.

따라서 $\overline{D'M} \perp \overline{MC}$ 이므로 삼각형

$D'MC$ 는 $\angle D'MC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각

삼각형이다.

직사각형 $ABCD$ 에서

$$\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\overline{D'M} = \overline{DM} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \sqrt{5}$$

이고 $\overline{MC} = \overline{MB} = \overline{D'M} = \sqrt{5}$

직각삼각형 $D'MC$ 에서

$$\overline{CD'} = \sqrt{\overline{D'M}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}$$

한편, 두 삼각형 DMF, DCB 는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{DF} : \overline{DB} = \overline{DM} : \overline{DC} \text{에서}$$

$$\overline{DF} = \frac{\overline{DB} \times \overline{DM}}{\overline{DC}} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{4} = \frac{5}{2}$$

그러므로

$$\overline{CF} = \overline{DC} - \overline{DF} = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}, \overline{D'F} = \overline{DF} = \frac{5}{2}$$

삼각형 $D'CF$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{D'C}^2 = \overline{D'F}^2 + \overline{CF}^2 - 2 \times \overline{D'F} \times \overline{CF} \times \cos(\angle CFD')$$

$$10 = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} - 2 \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \cos(\angle CFD')$$

$$\cos(\angle CFD') = -\frac{1}{5}$$

$$\sin(\angle CFD') = \sqrt{1 - \cos^2(\angle CFD')} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

삼각형 CFD' 의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{D'F} \times \overline{CF} \times \sin(\angle CFD') = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

점 D' 의 평면 $EBCF$ 위로의 정사영이 M 이므로 삼각형 CFD' 의 평면 $EBCF$ 위로의 정사영은 삼각형 CFM 이다.

직각삼각형 DMF 에서

$$\overline{MF} = \sqrt{\overline{DF}^2 - \overline{DM}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin(\angle CFM) = \sin(\pi - \angle DFM) = \sin(\angle DFM)$$

$$= \sin(\angle DBC)$$

$$= \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 CFM 의 넓이를 S_2 라 하면

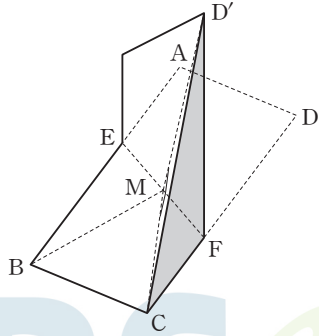
$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{MF} \times \overline{CF} \times \sin(\angle CFM) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{4}$$

평면 CFD' 과 평면 $EBCF$ 가 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$$S_2 = S_1 \times \cos \theta$$

$$\text{즉, } \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4} \times \cos \theta \text{에서 } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{따라서 } 72 \cos^2 \theta = 72 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 12$$



실전 모의고사 4회

본문 150~161쪽

01 ①	02 ④	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ④	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ②	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ②
16 6	17 8	18 62	19 10	20 54
21 135	22 52	23 ③	24 ③	25 ④
26 ③	27 ③	28 ⑤	29 33	30 3

01

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} &= 2^{\sqrt{2}-1} \times (2^{-2})^{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-2 \times \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)} \\ &= 2^{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ①

02

$f(x) = (x+1)(x^2+2)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (x^2+2) + (x+1) \times 2x \\ &= x^2+2+2x^2+2x \\ &= 3x^2+2x+2 \end{aligned}$$

따라서 $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 2 = 18$

답 ④

03

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

$$a_2 = 10 \text{에서 } ar = 10 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\frac{a_4}{a_1} = 8 \text{에서 } \frac{ar^3}{a} = r^3 = 8$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 실수이므로

$$r = 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2a = 10, a = 5$$

따라서 $a_5 = ar^4 = 5 \times 2^4 = 80$

답 ②

04

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 + 2 \times 2 = 5$$

답 ⑤

05

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

답 12

$$\begin{aligned}
 |\sin \theta + \cos \theta|^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\
 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\
 &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

$|\sin \theta + \cos \theta| \geq 0$ 이므로

$$|\sin \theta + \cos \theta| = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

06

방정식 $x^3 + x^2 + 4 = x^2 + 3x + k$, 즉 $x^3 - 3x + 4 = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

$$h(x) = x^3 - 3x + 4 \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

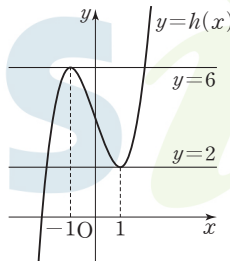
$$h(-1) = 6, h(1) = 2$$

함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2이려면 $k = 2$ 또는 $k = 6$ 이어야 한다.

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$2 + 6 = 8$$



답 ③

07

$$a_1 = 10 \text{이고 } 10 \text{은 짝수이므로 } a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$a_2 = 5 \text{이고 } 5 \text{는 홀수이므로 } a_3 = a_2 + 1 = 5 + 1 = 6$$

$$a_3 = 6 \text{이고 } 6 \text{은 짝수이므로 } a_4 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$a_4 = 3 \text{이고 } 3 \text{은 홀수이므로 } a_5 = a_4 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_5 = 4 \text{이고 } 4 \text{는 짝수이므로 } a_6 = \frac{1}{2}a_5 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$a_6 = 2 \text{이고 } 2 \text{는 짝수이므로 } a_7 = \frac{1}{2}a_6 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$a_7 = 1 \text{이고 } 1 \text{은 홀수이므로 } a_8 = a_7 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_8 = 2 \text{이고 } 2 \text{는 짝수이므로 } a_9 = \frac{1}{2}a_8 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

이와 같은 과정을 반복하면

$$a_6 = a_8 = a_{10} = \dots = 2$$

$$a_7 = a_9 = a_{11} = \dots = 1$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 1$ 이고, $n \leq 5$ 이면 $a_n \geq 3$,

$a_6 + a_7 = 2 + 1 = 3$ 이므로 $a_k + a_{k+1} = 3$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

답 ④

08

직사각형 ABCD의 넓이가 6이므로 선분 AB와 곡선 $y = kx^2$ 및 두 직선 $x = -1, x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이다.

$$\int_{-1}^1 (2 - kx^2) dx = 2 \int_0^1 (2 - kx^2) dx = 2 \left[2x - \frac{kx^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(2 - \frac{k}{3} \right)$$

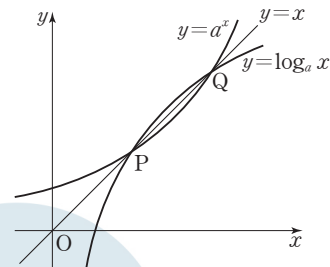
$$2 \left(2 - \frac{k}{3} \right) = 3 \text{에서 } 2 - \frac{k}{3} = \frac{3}{2}, \frac{k}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{3}{2}$$

답 ③

09

$f(x) = a^x, g(x) = \log_a x$ 라 하면 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 서로 역함수 관계이고, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선 $y = a^x, y = \log_a x$ 의 교점은 곡선 $y = a^x$ 과 직선 $y = x$ 의 교점과 같다. 즉, 두 점 P, Q는 직선 $y = x$ 위의 점이다.



$\overline{OP} = \overline{PQ}$ 이므로 양수 k 에 대하여 점 P의 좌표를 (k, k) 라 하면 점 Q의 좌표는 $(2k, 2k)$ 이다.

두 점 P, Q는 곡선 $y = a^x$ 위의 점이므로

$$a^k = k \quad \dots \text{㉠}$$

$$a^{2k} = 2k \quad \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡에서 } a^{2k} = (a^k)^2 \text{이므로 ㉠을 대입하면 } k^2 = 2k, k(k-2) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = 2 \quad \dots \text{㉢}$$

$$\text{㉢을 ㉠에 대입하면 } a^2 = 2$$

$$a > 1 \text{이므로 } a = \sqrt{2}$$

답 ⑤

10

$g(x) = 2x + 4$ 라 하면 $f'(1) = g'(1), f(1) = g(1)$ 이므로 함수 $f(x) - g(x)$ 는 $(x-1)^2$ 을 인수로 갖는다.

또 $f'(2) = g'(2), f(2) = g(2)$ 이므로 함수 $f(x) - g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 갖는다. 즉, $f(x) - g(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ 이므로

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)^2 + 2x + 4$$

$$\text{따라서 } f(3) = (3-1)^2 \times (3-2)^2 + 2 \times 3 + 4 = 14$$

답 ②

11

점 C의 y 좌표를 t 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times (1-t), S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times t \text{이므로}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\overline{OD} \times t}{\overline{AB} \times (1-t)}$$

$$\frac{\overline{OD} \times t}{\overline{AB} \times (1-t)} = \frac{\overline{OD}}{\overline{AB}} \text{에서 } 1-t=t, \text{ 즉 } t = \frac{1}{2}$$

곡선 $y=f(x-a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 두 점 A, B의 x 좌표는 각각 $\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{2}$ 이고,

$$\text{점 C의 } x\text{좌표는 } \frac{\frac{1}{2} + (a + \frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

즉, $C(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 이고 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{2} = \sin\left[\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

한편, $0 < a < 1$ 에서 $\frac{\pi}{2} < \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)\pi < \pi$ 이고

$$\sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2} \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{이므로 } a = \frac{2}{3}$$

답 ②

12

$$\lim_{x \rightarrow -1} |g(x)| = \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{x^3 + x + 1}{f(x)} \right|$$

$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x + 1) = -1$ 이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$$\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| = 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x+1$ 을 인수로 갖는다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + x + 1}{f(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x + 1) = 31$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 $x-3$ 을 인수로 갖는다.

$f(x) = (x+1)(x-3)(x-a)$ (a 는 상수)라 하자.

$a > 3$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$x \rightarrow 3+$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = -\infty \text{이고}$$

$x \rightarrow 3-$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0+$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \infty$ 이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

마찬가지로 $a < 3$ 인 경우도 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

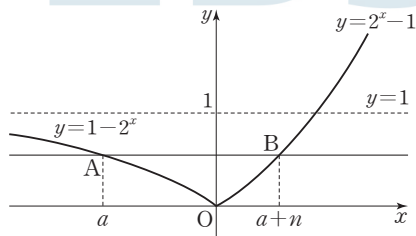
$$a = 3 \text{이면 } f(x) = (x+1)(x-3)^2, g(x) = \frac{x^3 + x + 1}{(x+1)(x-3)^2} \text{이므로}$$

조건 (나)를 만족시킨다.

$$\text{따라서 } f(5) = 6 \times 4 = 24$$

답 ①

13



$$f(x) = |2^x - 1| = \begin{cases} 1 - 2^x & (x < 0) \\ 2^x - 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고, 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선은 $y=1$ 이다.

곡선 $y=1-2^x$ ($x < 0$) 위의 점 A, 곡선 $y=2^x-1$ ($x > 0$) 위의 점 B를 직선 AB가 x 축과 평행하고 $\overline{AB}=n$ 이 되도록 잡는다.

점 A의 x 좌표를 a 라 하면 점 B의 x 좌표는 $a+n$ 이므로

$$1 - 2^a = 2^{a+n} - 1, (2^n + 1) \times 2^a = 2, 2^a = \frac{2}{2^n + 1}$$

$$\text{즉, } a = \log_2 \frac{2}{2^n + 1}$$

(i) $t < a$ 일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$ 에서 함수 $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값은 $f(t)$

(ii) $t = a$ 일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$ 에서 함수 $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값은 $f(t) = f(t+n)$

(iii) $t > a$ 일 때

닫힌구간 $[t, t+n]$ 에서 함수 $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값은 $f(t+n)$

(i), (ii), (iii)에서 $t \geq a$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+n]$ 에서 함수

$f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값이 $f(t+n)$ 이므로 닫힌구간 $[t, t+n]$ 에서 함수 $f(x) = |2^x - 1|$ 의 최댓값이 $f(t+n)$ 이 되도록 하는 실수 t 의

최솟값은 $a = \log_2 \frac{2}{2^n + 1}$ 이고 $g(n) = \log_2 \frac{2}{2^n + 1}$ 이다.

$$2^{g(n)} = \frac{2}{2^n + 1}, \frac{1}{2^{g(n)}} = \frac{2^n + 1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2^{g(3)}} = \frac{2^3 + 1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{2^{g(4)}} = \frac{2^4 + 1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\frac{1}{2^{g(5)}} = \frac{2^5 + 1}{2} = \frac{33}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2^{g(3)}} + \frac{1}{2^{g(4)}} + \frac{1}{2^{g(5)}} = \frac{9}{2} + \frac{17}{2} + \frac{33}{2} = \frac{59}{2}$$

답 ①

14

ㄱ. $a=0$ 이면 $v(t) = t^2(t-2) = t^3 - 2t^2$ 이므로

$$\begin{aligned} x(1) &= \int_0^1 (t^3 - 2t^2) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12} < 0 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄴ. $x(2) = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 t(t-2)(t-a) dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \{t^3 - (a+2)t^2 + 2at\} dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{a+2}{3}t^3 + at^2 \right]_0^2 \\ &= 4 - \frac{8(a+2)}{3} + 4a = \frac{4a-4}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{4a-4}{3} = a \text{에서 } a = 4 \text{ (참)}$$

ㄷ. $x(a) = \int_0^a v(t) dt = \int_0^a t(t-2)(t-a) dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \{t^3 - (a+2)t^2 + 2at\} dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{a+2}{3}t^3 + at^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}a^4 - \frac{a+2}{3} \times a^3 + a^3 = -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 = -a^2 \text{에서}$$

$$a > 0 \text{이므로 } -\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{3}a = -1$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0, (a+2)(a-6) = 0$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 6, \text{ 즉 } x(6) = -6^2$$

$0 \leq t \leq 2$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이고, $2 \leq t \leq 6$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^6 |v(t)| dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^6 \{-v(t)\} dt \\ &= \int_0^2 v(t) dt - \int_2^6 v(t) dt \\ &= \int_0^2 v(t) dt - \left(\int_0^6 v(t) dt - \int_0^2 v(t) dt \right) \\ &= 2 \int_0^2 v(t) dt - \int_0^6 v(t) dt \\ &= 2 \times x(2) - x(6) = 2 \times x(2) - (-6^2) \\ &= 2 \times x(2) + 36 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

x 에 대한 방정식 $\sin x - |\sin t| = 0$ 에서

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \text{일 때, } x = t \text{ 또는 } x = \pi - t$$

$$\frac{\pi}{2} < t < \pi \text{일 때, } x = \pi - t \text{ 또는 } x = t$$

$$\pi < t < \frac{3}{2}\pi \text{일 때, } x = t - \pi \text{ 또는 } x = 2\pi - t$$

$$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi \text{일 때, } x = 2\pi - t \text{ 또는 } x = t - \pi$$

x 에 대한 방정식 $|\sin x| - \sin t = 0$ 에서

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \text{일 때, } x = t \text{ 또는 } x = \pi - t \text{ 또는 } x = \pi + t \text{ 또는 } x = 2\pi - t$$

$$\frac{\pi}{2} < t < \pi \text{일 때, } x = \pi - t \text{ 또는 } x = t \text{ 또는 } x = 2\pi - t \text{ 또는 } x = \pi + t$$

$$\pi < t < \frac{3}{2}\pi \text{일 때, 실근은 존재하지 않는다.}$$

$$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi \text{일 때, 실근은 존재하지 않는다.}$$

그러므로 각 경우의 $0 < x < 2\pi$ 에서 x 에 대한 방정식

$(\sin x - |\sin t|)(|\sin x| - \sin t) = 0$ 의 실근을 크기순으로 나열하고 서로 다른 모든 실근의 합을 구하면

(i) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 일 때

$x = t$ 또는 $x = \pi - t$ 또는 $x = \pi + t$ 또는 $x = 2\pi - t$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$t + (\pi - t) + (\pi + t) + (2\pi - t) = 4\pi$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 일 때

$x = \pi - t$ 또는 $x = t$ 또는 $x = 2\pi - t$ 또는 $x = \pi + t$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$(\pi - t) + t + (2\pi - t) + (\pi + t) = 4\pi$$

(iii) $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$ 일 때

$x = t - \pi$ 또는 $x = 2\pi - t$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$(t - \pi) + (2\pi - t) = \pi$$

(iv) $\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$ 일 때

$x = 2\pi - t$ 또는 $x = t - \pi$ 이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$$(2\pi - t) + (t - \pi) = \pi$$

즉,

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ \pi - t & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ t - \pi & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ 2\pi - t & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}, g(t) = \begin{cases} 2\pi - t & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ \pi + t & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ t - \pi & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

$$g(t) - f(t) = \begin{cases} 2\pi - 2t & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ 2t & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ 3\pi - 2t & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ 2t - 3\pi & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}, h(t) = \begin{cases} 4\pi & (0 < t < \frac{\pi}{2}) \\ 4\pi & (\frac{\pi}{2} < t < \pi) \\ \pi & (\pi < t < \frac{3}{2}\pi) \\ \pi & (\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

$0 < t < \pi$ ($t \neq \frac{\pi}{2}$)에서 $\pi < kh(t) < 2\pi$ 일 때

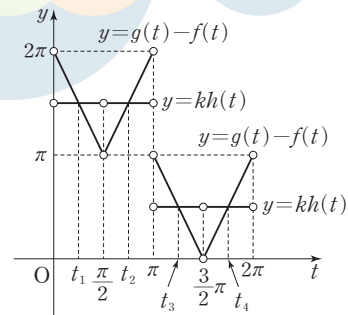
방정식 $g(t) - f(t) = kh(t)$ 의 두 실근을 t_1, t_2 라 하면

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{\pi}{2} \text{에서 } t_1 + t_2 = \pi$$

$\pi < t < 2\pi$ ($t \neq \frac{3}{2}\pi$)에서 $0 < kh(t) < \pi$ 일 때

방정식 $g(t) - f(t) = kh(t)$ 의 두 실근을 t_3, t_4 라 하면

$$\frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{에서 } t_3 + t_4 = 3\pi$$



$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = (t_1 + t_2) + (t_3 + t_4) = \pi + 3\pi = 4\pi \text{이므로}$$

$0 < t < \pi$ ($t \neq \frac{\pi}{2}$)에서 $\pi < kh(t) < 2\pi$ 이고

$\pi < t < 2\pi$ ($t \neq \frac{3}{2}\pi$)에서 $0 < kh(t) < \pi$ 인 경우에만

방정식 $g(t) - f(t) = kh(t)$ 의 모든 실근의 합이 4π 이다.

$0 < t < \pi$ ($t \neq \frac{\pi}{2}$)에서 $h(t) = 4\pi$ 이므로 $\pi < 4\pi k < 2\pi$

$$\frac{1}{4} < k < \frac{1}{2} \quad \dots \text{㉠}$$

$\pi < t < 2\pi$ ($t \neq \frac{3}{2}\pi$)에서 $h(t) = \pi$ 이므로 $0 < \pi k < \pi$

$$0 < k < 1 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 모든 실수 k 의 값의 범위는 $\frac{1}{4} < k < \frac{1}{2}$

따라서 $a = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{2}$ 이므로 $a\beta = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

답 ②

16

$$\begin{aligned} \log_2 9 \times \frac{1}{\log_8 3} &= \log_2 9 \times \log_3 8 = \frac{\log 9}{\log 2} \times \frac{\log 8}{\log 3} \\ &= \frac{2 \log 3}{\log 2} \times \frac{3 \log 2}{\log 3} = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

답 6

17

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3x^2 + 4x + 1) dx \\ &= x^3 + 2x^2 + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\ \text{한편, } f(0) &= 4 \text{이므로 } C = 4 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^3 + 2x^2 + x + 4 \text{이므로} \\ f(1) &= 1^3 + 2 \times 1^2 + 1 + 4 = 8 \end{aligned}$$

답 8

18

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)(b_k + 2) &= \sum_{k=1}^{10} (a_k b_k + 2a_k + 2b_k + 4) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k b_k + 2 \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) + 40 \end{aligned}$$

$$150 = \sum_{k=1}^{10} a_k b_k + 2 \times 24 + 40 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k b_k = 150 - (48 + 40) = 62$$

답 62

19

이차함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x) = f(1-x)$ 이므로 $f(x) = (x-1)^2 + k = x^2 - 2x + (k+1)$ (단, k 는 실수) 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선 l_1 은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $B(b, f(b))$ 에서의 접선 l_2 는 $y=f'(b)(x-b)+f(b)$ 이므로 x 에 대한 방정식 $f'(a)(x-a)+f(a)=f'(b)(x-b)+f(b)$ 의 근은 두 직선 l_1, l_2 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$\frac{a+b}{2} = 1 \text{인 경우에만 두 직선 } l_1, l_2$$

의 교점의 x 좌표가 1이므로

$$a+b=2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{2} = 1 \text{에서 } f(a)=f(b) \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$\sqrt{(b-a)^2 + \{f(b)-f(a)\}^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2}$$

$$= b-a=6 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=4$$

따라서 $f'(x) = 2x - 2$, $a + 2b = (-2) + 2 \times 4 = 6$ 이므로

$$f'(a+2b) = f'(6) = 2 \times 6 - 2 = 10$$

답 10

20

조건 (가)에서

$$\int_0^6 xf(x) dx - 6 \int_0^6 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^6 xf(x) dx = 6 \int_0^6 f(x) dx \quad \dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$2 \int_0^6 xf(x) dx + 3 \int_0^6 f(x) dx = 90 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\int_0^6 f(x) dx = A, \int_0^6 xf(x) dx = B \text{라 하면}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } B=6A, \textcircled{2} \text{에서 } 2B+3A=90$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A = \int_0^6 f(x) dx = 6, B = \int_0^6 xf(x) dx = 36 \quad \dots \textcircled{3}$$

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^6 (x^2 + ax + b) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^6 \\ &= 72 + 18a + 6b = 6(12 + 3a + b) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \text{에 의하여 } 12 + 3a + b = 1, 3a + b = -11 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 xf(x) dx &= \int_0^6 (x^3 + ax^2 + bx) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^6 \\ &= \frac{1}{4} \times 6^4 + \frac{a}{3} \times 6^3 + \frac{b}{2} \times 6^2 = 36 \left(9 + 2a + \frac{b}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \text{에 의하여 } 9 + 2a + \frac{b}{2} = 1, 4a + b = -16 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{을 연립하여 풀면 } a = -5, b = 4$$

따라서 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 이므로

$$f(10) = 10^2 - 5 \times 10 + 4 = 54$$

답 54

21

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 $\frac{4}{3}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이고, 2와 3의 최소공배수는 6이다.

$$m=6 \text{일 때, } A_6 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{12}\}, B_6 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{18}\}$$

$$A_6 \cap B_6 = \{a_6, a_{12}\}, b_6 = a_{12}$$

$$m=7 \text{일 때, } A_7 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{14}\}, B_7 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{21}\}$$

$$A_7 \cap B_7 = \{a_6, a_{12}\}, b_7 = a_{12}$$

$$m=8 \text{일 때, } A_8 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{16}\}, B_8 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{24}\}$$

$$A_8 \cap B_8 = \{a_6, a_{12}\}, b_8 = a_{12}$$

$$m=9 \text{일 때, } A_9 = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{18}\}, B_9 = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{27}\}$$

$$A_9 \cap B_9 = \{a_6, a_{12}, a_{18}\}, b_9 = a_{18}$$

$$m=10 \text{일 때, } A_{10} = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}\}, B_{10} = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{30}\}$$

$$A_{10} \cap B_{10} = \{a_6, a_{12}, a_{18}\}, b_{10} = a_{18}$$

$$m=11 \text{일 때, } A_{11} = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{22}\}, B_{11} = \{a_3, a_6, a_9, \dots, a_{33}\}$$

$$A_{11} \cap B_{11} = \{a_6, a_{12}, a_{18}\}, b_{11} = a_{18}$$

⋮

이와 같은 과정을 반복하면

$$b_{3k+3} = b_{3k+4} = b_{3k+5} = a_{6k+6} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n = \frac{4}{3} + (n-1) \times \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$a_{6k+6} = \frac{4}{3} + \{(6k+6)-1\} \times \frac{1}{3} = 2k+3$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{m=6}^{20} b_m &= \sum_{k=1}^5 (b_{3k+3} + b_{3k+4} + b_{3k+5}) = \sum_{k=1}^5 3a_{6k+6} \\ &= 3 \sum_{k=1}^5 a_{6k+6} = 3 \sum_{k=1}^5 (2k+3) = 3 \times \left(2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 3 \times 5 \right) = 135 \end{aligned}$$

답 135

22

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(i) 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f'(x+2) - f'(x-2)}{x-2}$$

$$g(2) = 2 \times f(2) \quad \dots \text{㉠}$$

$x \rightarrow 2-$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2-} \{f'(x+2) - f'(x-2)\} = 0$ 이고 $f'(x)$ 가 연속이므로

$$f'(4) = f'(0)$$

$$3 \times 4^2 + 2 \times a \times 4 + b = b$$

$$a = -6$$

또한 $f'(x) = 3x^2 - 12x + b$ 에서

$$f'(x+2) - f'(x-2)$$

$$= 3(x+2)^2 - 12(x+2) + b - 3(x-2)^2 + 12(x-2) - b$$

$$= 3x^2 + 12x + 12 - 12x - 24 - 3x^2 + 12x - 12 + 12x - 24$$

$$= 24(x-2)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{24(x-2)}{x-2} = 24$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx + c \text{에서 } f(2) = 2b + c - 16$$

$$\text{㉠에 의하여 } 2(2b + c - 16) = 24$$

$$2b + c = 28 \quad \dots \text{㉡}$$

(ii) 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$x < 2 \text{일 때, } g(x) = 24 \text{이고 } g'(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = 0 \quad \dots \text{㉢}$$

$x \geq 2$ 일 때, $g(x) = xf(x)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)f(x) + 2\{f(x) - f(2)\}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= f(2) + 2f'(2) \quad \dots \text{㉣}$$

이때 $f'(2) = 12 - 24 + b = b - 12$ 이고 ㉣에서 $f(2) = 12$ 이므로

$$f(2) + 2f'(2) = 12 + 2(b - 12) = 2b - 12$$

$$g(x) \text{가 } x=2 \text{에서 미분가능하므로 } \text{㉢} = \text{㉣}$$

$$2b - 12 = 0 \text{에서 } b = 6$$

$$b = 6 \text{을 } \text{㉡에 대입하면}$$

$$12 + c = 28 \text{에서 } c = 16$$

(i), (ii)에 의하여 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 16$ 이므로

$$f(6) = 6^3 - 6 \times 6^2 + 6 \times 6 + 16 = 52$$

답 52

23

$A(2, a, -b), B(-2, a, -b)$ 이므로 선분 AB를 1:2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-2) - 2 \times 2}{1-2}, \frac{1 \times a - 2 \times a}{1-2}, \frac{1 \times (-b) - 2 \times (-b)}{1-2} \right)$$

즉, $(6, a, -b)$

이 좌표를 구의 방정식에 대입하면

$$36 + a^2 + b^2 = 60$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 24$$

답 ③

24

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $c^2 = 1 + 3 = 4$ 이므로 $c = 2$

즉, $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이고 $\overline{F'F} = 4$ 이다.

$\overline{PF} = x$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} = x + 2$ 이고

삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이가 14이므로

$$\overline{PF'} + \overline{F'F} + \overline{PF} = (x+2) + 4 + x = 2x + 6 = 14$$

$$x = 4$$

따라서 선분 PF의 길이는 4이다.

답 ③

25

직선 $\frac{x+1}{a} = \frac{y-1}{3}$ 은 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{1+1}{a} = \frac{2-1}{3}, \frac{2}{a} = \frac{1}{3} \text{에서 } a = 6$$

직선 $\frac{x}{b} = \frac{y+1}{a}$ 은 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{1}{b} = \frac{2+1}{a}, \frac{1}{b} = \frac{3}{6} \text{에서 } b = 2$$

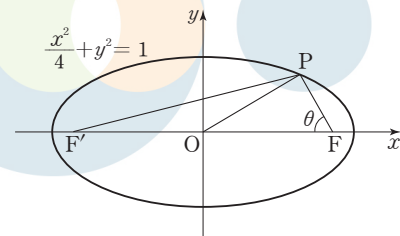
두 직선의 방향벡터가 각각 $(6, 3), (2, 6)$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{|(6, 3) \cdot (2, 6)|}{\sqrt{6^2+3^2} \times \sqrt{2^2+6^2}} = \frac{|6 \times 2 + 3 \times 6|}{\sqrt{45} \times \sqrt{40}} = \frac{30}{3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ④

26



$\overline{PF} = t$ 라 하면

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 장축의 길이가 4이므로 $\overline{PF'} = 4 - t$

$$\overline{OF} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}, \overline{FF'} = 2 \times \overline{OF} = 2\sqrt{3}$$

$\angle PFO = \theta$ 라 하고, 두 삼각형 $POF, PF'F$ 에 각각 코사인법칙을 적용하면

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{3})^2 + t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2 \times \sqrt{3} \times t} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + t^2 - (4-t)^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times t}$$

$$t^2 - 4t + \frac{11}{4} = 0$$

$$t(4-t) = \frac{11}{4}$$

$$\text{따라서 } \overline{PF} \times \overline{PF'} = t(4-t) = \frac{11}{4}$$

27

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 직각삼각형 OAB의 빗변의 중점이 M이므로

$$\overline{OM} = \overline{AM} = \frac{5}{2}$$

$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 삼각형 ABC에서

$$\overline{MN} = \frac{5}{2}$$

$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ 이고 직각이등변삼각형 OCA의 빗변의 중점이 N
이므로

$$\overline{ON} = \overline{AN} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 OMN은 $\overline{OM} = \overline{MN}$ 인 이등변삼각형이므로 점 M에서 선분 ON에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

이때 삼각형 OMN의 넓이는

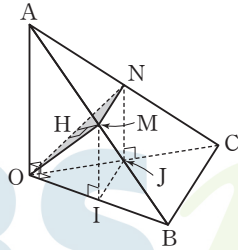
$$\frac{1}{2} \times \overline{ON} \times \overline{MH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

점 M에서 평면 OBC에 내린 수선의 발 I는 선분 OB의 중점이고, 점 N에서 평면 OBC에 내린 수선의 발 J는 선분 OC의 중점이다.

이때 삼각형 OIJ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OI} \times \overline{OJ} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{34}}{2}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$



답 ③

28

포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $y_1 y = 2p(x + x_1)$ 이므로 $y_1 \neq 0$ 이면 접선의 기울기는 $\frac{2p}{y_1}$ 이다.

포물선 $y^2 = 4px$ 가 기울기가 1인 직선과 접하기 위해서는 $\frac{2p}{y_1} = 1$ 에서

$y_1 = 2p$ 이고 접점의 y 좌표는 $2p$ 이다.

$y = 2p$ 를 $y^2 = 4px$ 에 대입하면 $(2p)^2 = 4p^2 = 4px$ 에서 $x = p$ 이므로 접점의 좌표는 $(p, 2p)$ 이다.

포물선 $C_1: y^2 = 4p_1(x - k_1)$ 은 포물선 $y^2 = 4p_1x$ 를 x 축의 방향으로 k_1 만큼 평행이동한 것이므로 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발은 F_1 이고

$$\overline{PF_1} = \overline{OF_1} = 2p_1, \overline{A_1F_1} = p_1$$

$$\overline{OA_1} = \overline{OF_1} - \overline{A_1F_1} = 2p_1 - p_1 = p_1, k_1 = \overline{OA_1} = p_1 \text{ (단, O는 원점이다.)}$$

답 ③

같은 방법으로 포물선 $C_2: y^2 = -4p_2(x + k_2)$ 는 포물선 $y^2 = -4p_2x$ 를 x 축의 방향으로 $-k_2$ 만큼 평행이동한 것이므로 점 Q에서 x 축에 내린 수선의 발은 F_2 이고

$$\overline{QF_2} = \overline{OF_2} = 2p_2, \overline{A_2F_2} = p_2$$

$$\overline{OA_2} = \overline{OF_2} - \overline{A_2F_2} = 2p_2 - p_2 = p_2, k_2 = \overline{OA_2} = p_2$$

$$\overline{F_1F_2} = \overline{OF_1} + \overline{OF_2} = 2p_1 + 2p_2 = 2(p_1 + p_2) \text{ 이고}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \times \overline{F_1F_2} = 2\sqrt{2}(p_1 + p_2) \text{ 이므로 조건 (가)에서}$$

$$2\sqrt{2}(p_1 + p_2) = 4\sqrt{2}$$

$$p_1 + p_2 = 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\overline{A_1F_2} = \overline{OA_1} + \overline{OF_2} = p_1 + 2p_2, \overline{A_2F_1} = \overline{OF_1} + \overline{OA_2} = 2p_1 + p_2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{A_1F_2} - \overline{A_2F_1} = (p_1 + 2p_2) - (2p_1 + p_2) = -p_1 + p_2$$

조건 (나)에 의하여

$$-p_1 + p_2 = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } p_1 \times p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

답 ⑤

29

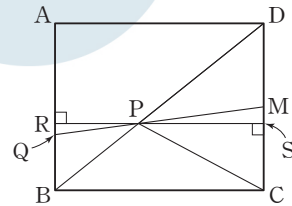
$$\overline{PA} + k\overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = \vec{0} \text{ 에서}$$

$$\frac{\overline{PA} + k\overline{PB}}{k+1} + \frac{2}{k+1} \times \frac{\overline{PC} + \overline{PD}}{2} = \vec{0}$$

선분 AB를 $k:1$ 로 내분하는 점을 Q, 선분 CD의 중점을 M이라 하면

$$\overline{PQ} + \frac{2}{k+1} \times \overline{PM} = \vec{0}$$

세 점 P, Q, M은 한 직선 위에 있고, 점 P는 선분 QM을 $2:(k+1)$ 로 내분한다.



점 P를 지나고 선분 AD에 평행한 직선이 두 선분 AB, CD와 만나는 점을 각각 R, S라 하면 삼각형 PQR과 삼각형 PMS는 닮음이므로 점 P는 선분 RS를 $2:(k+1)$ 로 내분한다.

이때 $\overline{PS} = 5 \times \frac{k+1}{k+3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \text{(삼각형 PCD의 넓이)} &= \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{PS} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{5(k+1)}{k+3} = \frac{10(k+1)}{k+3} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{10(k+1)}{k+3} = 6 \text{ 에서 } 10k + 10 = 6k + 18 \text{ 이므로}$$

$$k = 2$$

점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 잡으면

$$A(0, 4), B(0, 0)$$

$$k = 2 \text{ 이므로 } Q\left(0, \frac{4}{3}\right), M(5, 2)$$

점 P는 선분 QM을 $2:3$ 으로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 3 \times 0}{2+3}, \frac{2 \times 2 + 3 \times \frac{4}{3}}{2+3}\right), \text{ 즉 } \left(2, \frac{8}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PA} = \left(-2, \frac{12}{5}\right), \overrightarrow{PB} = \left(-2, -\frac{8}{5}\right) \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4 - \frac{96}{25} = \frac{4}{25}$$

$$\text{따라서 } k \times \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2 \times \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$$

$$\text{즉, } p=25, q=8 \text{이므로 } p+q=25+8=33$$

다른 풀이

삼각형 ACD의 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 BD 위에 있다.

선분 AC와 선분 BD의 교점을 M이라 하면

$$\overline{BM} = \overline{DM}, \overline{DG} : \overline{GM} = 2 : 1 \text{이므로}$$

$$\overline{BG} : \overline{BD} = 2 : 3$$

$$\overline{BG} = \frac{2}{3} \times \overline{BD} \quad \text{..... ㉠}$$

$$\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \text{에서}$$

$$k\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

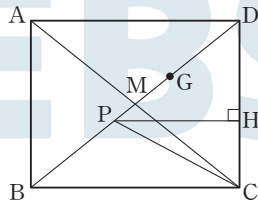
$$k\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PG}$$

세 점 B, P, G는 한 직선 위에 있고, 점 P는 선분 BG를 3 : k로 내분한다.

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{3+k} \times \overrightarrow{BG} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3+k} \times \overrightarrow{BD} \quad \text{..... ㉢}$$



점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} (\text{삼각형 PCD의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{PH} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{PH} = 2\overline{PH} \end{aligned}$$

$$2\overline{PH} = 6 \text{에서 } \overline{PH} = 3$$

$$\overline{PH} : \overline{BC} = \overline{DP} : \overline{DB} = 3 : 5 \text{이므로}$$

$$\overline{BP} : \overline{BD} = 2 : 5$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{5} \times \overrightarrow{BD} \quad \text{..... ㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣에서 } \frac{2}{3+k} = \frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$k=2$$

점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 잡으면

$$A(0, 4), B(0, 0), C(5, 0), D(5, 4)$$

점 P는 선분 BD를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 3 \times 0}{2+3}, \frac{2 \times 4 + 3 \times 0}{2+3}\right), \text{ 즉 } \left(2, \frac{8}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PA} = \left(-2, \frac{12}{5}\right), \overrightarrow{PB} = \left(-2, -\frac{8}{5}\right) \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4 - \frac{96}{25} = \frac{4}{25}$$

$$k \times \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 2 \times \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$$

$$\text{따라서 } p=25, q=8 \text{이므로 } p+q=25+8=33$$

30

구 S의 중심을 O라 하자.

직각삼각형 OM₁A에서

$$\overline{OA} = 2, \overline{AM}_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{OM}_1 = \sqrt{3}$$

같은 방법으로

$$\overline{OM}_2 = \overline{OM}_3 = \sqrt{3}$$

세 점 M₁, M₂, M₃을 지나는 원의 중심은 O이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{M}_1\overline{M}_2 &= \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{M}_1\overline{M}_2 \\ &= \overline{M}_1\overline{M}_2 \end{aligned}$$

이므로

$$\overline{M}_1\overline{M}_2 = 3$$

$\angle M_2M_1M_3 = \frac{\pi}{2}$ 이므로 선분 M₂M₃의 중점은 O이고

$$\overline{M}_2\overline{M}_3 = 2\sqrt{3}$$

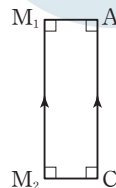
$$\overline{M}_1\overline{M}_3 = \sqrt{\overline{M}_2\overline{M}_3^2 - \overline{M}_1\overline{M}_2^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{3}$$

좌표공간은 평면 M₁M₂M₃에 의하여 두 영역으로 나누어진다. 두 영역을 각각 ㉠, ㉡이라 하자.

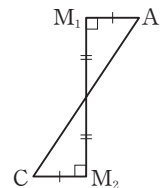
점 A가 ㉠에 속한다고 하면

(i) 점 C가 ㉠에 속할 때

(ii) 점 C가 ㉡에 속할 때



두 직선 AC와 M₁M₂는 만나지 않는다.



두 직선 AC와 M₁M₂는 한 점에서 만난다.

(i), (ii)에서 점 C는 ㉡에 속하고 같은 방법으로 점 E는 ㉠에 속한다.

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{M}_1\overline{M}_2^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{CE} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{M}_2\overline{M}_3^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$\overline{AE} = \overline{M}_1\overline{M}_3 = \sqrt{3}$ 이므로 삼각형 ACE는 $\angle CAE = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ACE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$\text{즉, } p=2, q=1 \text{이므로 } p+q=2+1=3$$

01 ①	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ③	07 ⑤	08 ①	09 ②	10 ⑤
11 ③	12 ③	13 ①	14 ③	15 ⑤
16 114	17 8	18 81	19 17	20 32
21 21	22 426	23 ⑤	24 ③	25 ①
26 ②	27 ④	28 ③	29 160	30 5

01

$$4^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} = 2 + 3^2 = 2 + 9 = 11$$

답 ①

02

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$ 에서 $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$ 이므로

$$f'(1) = 6 - 10 + 3 = -1$$

답 ②

03

$a_1 = a, a_{99} = l$ 이라 하면 $\sum_{k=1}^{99} a_k = 297$ 에서

$$\frac{99(a+l)}{2} = 297, \frac{a+l}{2} = \frac{297}{99} = 3$$

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 도 등차수열이다.

$$a_{2 \times 1 - 1} = a_1 = a, a_{2 \times 50 - 1} = a_{99} = l$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} = \frac{50(a+l)}{2} = 50 \times 3 = 150$$

답 ④

04

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

$x+1=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0^-$ 일 때 $t \rightarrow 1^-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) = 1 + 1 = 2$$

답 ⑤

05

$a_{2n-1} = 2^n, a_{2n} = 3^n$ 이므로 짝수번째 항과 홀수번째 항을 나누어 생각하면

$$\sum_{n=1}^{10} \log_6 a_n = \sum_{k=1}^5 \log_6 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 \log_6 a_{2k} = \sum_{k=1}^5 \log_6 2^k + \sum_{k=1}^5 \log_6 3^k$$

$$= \sum_{k=1}^5 k \log_6 2 + \sum_{k=1}^5 k \log_6 3 = \log_6 2 \times \sum_{k=1}^5 k + \log_6 3 \times \sum_{k=1}^5 k$$

$$= (\log_6 2 + \log_6 3) \times \frac{5 \times (5+1)}{2}$$

$$= \log_6 6 \times 15 = 15$$

답 ③

06

함수 $f(x)$ 는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 1$ 에서만 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 과 $x = 1$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이 된다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x) = f(-1)g(-1) \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) = (1-a+b) \times (-2-1) = -3(1-a+b)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x) = (1-a+b) \times 1 = 1-a+b$$

$$f(-1)g(-1) = (1-a+b) \times (-2-1) = -3(1-a+b)$$

$$\text{이므로 } -3(1-a+b) = 1-a+b$$

$$a-b=1 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = f(1)g(1) \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = (1+a+b) \times (-1) = -(1+a+b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = (1+a+b) \times 2 = 2(1+a+b)$$

$$f(1)g(1) = (1+a+b) \times (-1) = -(1+a+b)$$

$$\text{이므로 } -(1+a+b) = 2(1+a+b)$$

$$a+b=-1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=0, b=-1 \text{이므로 } f(x) = x^2 - 1$$

$$\text{따라서 } f(2) = 4 - 1 = 3$$

답 ③

07

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x - 2$$

$$= -\sin x \times \sin x + \cos x - 2 = -\sin^2 x + \cos x - 2$$

$$= \cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = \cos^2 x + \cos x - 3$$

$$= \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\text{함수 } y = \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} \text{은 } \cos x = -\frac{1}{2} \text{일 때 최솟값 } -\frac{13}{4},$$

$\cos x = 1$ 일 때 최댓값 -1 을 갖는다.

$$\text{따라서 } M = -1, m = -\frac{13}{4} \text{이므로 } M - m = -1 - \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

답 ⑤

08

$$2 \times 3^x + a \times 3^{-x} \leq 1 \text{에서 } 2 \times 3^x + \frac{a}{3^x} \leq 1, 2(3^x)^2 + a \leq 3^x$$

$$3^x - 2(3^x)^2 \geq a$$

$$t = 3^x \text{이라 하면 } t > 0 \text{이고 } t - 2t^2 \geq a$$

$$f(t) = t - 2t^2 (t > 0) \text{이라 하면 } f(t) = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} (t > 0)$$

부등식 $f(t) \geq a$ 의 실수인 해가 존재하려면 a 는 함수 $f(t)$ 의 최댓값보다 작거나 같아야 한다.

$$t > 0 \text{일 때 함수 } f(t) \text{의 최댓값은 } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \text{이므로 } a \leq \frac{1}{8} \text{이다.}$$

이때 $a = \frac{1}{8}$ 이면 $t = \frac{1}{4} = 3^x$ 이므로 이를 만족시키는 실수인 x 가 존재한다.
따라서 a 의 최댓값은 $\frac{1}{8}$ 이다.

답 ①

09

$$y = -x^3 - 3x^2 + 6 \text{에서 } y' = -3x^2 - 6x$$

곡선 위의 점 $(t, -t^3 - 3t^2 + 6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (-t^3 - 3t^2 + 6) = (-3t^2 - 6t)(x - t)$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a - (-t^3 - 3t^2 + 6) = (-3t^2 - 6t)(1 - t)$$

$$2t^3 - 6t + 6 - a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

삼차함수의 그래프에서 두 개 이상의 점에 동시에 접하는 직선은 존재하지 않으므로 방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가지면 그을 수 있는 접선의 개수가 3이 된다.

$$f(t) = 2t^3 - 6t + 6 - a \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6 = 6(t+1)(t-1)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-1	...	1	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$f(-1) = -2 + 6 + 6 - a = -a + 10$$

$$f(1) = 2 - 6 + 6 - a = -a + 2$$

방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$-a + 10 > 0, -a + 2 < 0 \text{에서 } 2 < a < 10$$

따라서 정수 a 의 개수는

$$10 - 2 - 1 = 7$$

10

$$2 \int_p^x f(t) dt - \int_p^x \{f'(t)\}^2 dt = 2 - 3x \quad \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x = p$ 를 대입하면

$$0 = 2 - 3p, p = \frac{2}{3}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2f(x) - \{f'(x)\}^2 = -3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$f'(1) = -2$ 에서 $f(x)$ 는 상수함수가 아니므로

$f(x)$ 의 차수를 $n (n \geq 1)$ 이라 하면 $f'(x)$ 의 차수는 $n-1$,

$\{f'(x)\}^2$ 의 차수는 $2(n-1)$ 이다.

②의 양변의 차수를 비교하면 $n = 2(n-1)$ 에서 $n = 2$

$f(x) = ax^2 + bx + c (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0)$ 이라 하면

$$f'(x) = 2ax + b \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{이므로 ②에서 } 2(ax^2 + bx + c) - (2ax + b)^2 = -3$$

$$(2a - 4a^2)x^2 + (2b - 4ab)x + 2c - b^2 = -3$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a - 4a^2 = 0, 2b - 4ab = 0, 2c - b^2 = -3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{에서 } a = \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = -2 \text{이므로 ③에서}$$

$$f'(1) = 2a + b = 1 + b = -2$$

$$b = -3$$

$$\textcircled{4} \text{에서 } 2c - (-3)^2 = -3$$

$$c = 3$$

$$\text{이므로 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 \text{이고 } f(2) = 2 - 6 + 3 = -1$$

$$\text{따라서 } p + f(2) = \frac{2}{3} + (-1) = -\frac{1}{3}$$

답 ⑤

11

$$y = 3 \tan \pi x \text{에 } x = \frac{1}{3} \text{을 대입하면}$$

$$3 \tan \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \text{이므로 } P\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt{3}\right)$$

$$0 < x \leq 1 \text{이고 } y = 3 \tan \pi x = 0 \text{에서 } \pi x = \pi, x = 1 \text{이므로 } R(1, 0)$$

주어진 그래프에서 $y = a \sin \frac{\pi}{b} x$ 의 주기가 1이므로

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}} = 2b = 1 \text{에서 } b = \frac{1}{2}$$

함수 $y = a \sin 2\pi x$ 의 그래프가 점 $P\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ 을 지나므로

$$a \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 3\sqrt{3} \text{에서 } a = 6$$

이때 두 곡선 $y = 3 \tan \pi x, y = 6 \sin 2\pi x$ 는 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로 사각형 OQRP는 평행사변형이다.

사각형 OQRP의 넓이는 삼각형 ORP의 넓이의 2배이므로

$$S = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 3\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } abS = 6 \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

답 ③

12

$f(x) = x^3 - 4x, g(x) = x^2 + ax$ 라 하고, 점 P의 x좌표를 t 라 하면

$f(t) = g(t)$ 이고 $f'(t) = g'(t)$ 이다.

$$f'(x) = 3x^2 - 4, g'(x) = 2x + a \text{이므로}$$

$$t^3 - 4t = t^2 + at \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3t^2 - 4 = 2t + a \quad \cdots \textcircled{2}$$

②에서 $a = 3t^2 - 2t - 4$ 이고, 이를 ①에 대입하면

$$t^3 - 4t = t^2 + (3t^2 - 2t - 4)t, t^2(2t - 1) = 0 \text{에서 } t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

$$t = 0 \text{이면 } a = -4$$

$$t = \frac{1}{2} \text{이면 } a = -\frac{17}{4}$$

(i) $a = -4$ 일 때

$$f(x) - g(x) = (x^3 - 4x) - (x^2 - 4x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$-\int_0^1 (x^3 - x^2) dx = -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$$

(ii) $a = -\frac{17}{4}$ 일 때

$$f(x) - g(x) = (x^3 - 4x) - \left(x^2 - \frac{17}{4}x\right)$$

$$= x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

이므로 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{64} - \frac{1}{24} + \frac{1}{32} = \frac{1}{192}$$

따라서 $S_1 = \frac{1}{12}$, $S_2 = \frac{1}{192}$ 이므로 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{192}} = \frac{192}{12} = 16$

답 ③

13

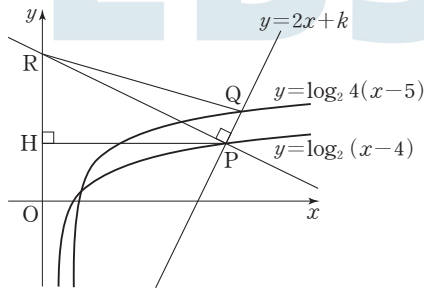
$y = \log_2 4(x-5) = \log_2(x-5) + \log_2 4 = \log_2(x-5) + 2$
 이므로 함수 $y = \log_2 4(x-5)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2(x-4)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
 직선 $y = 2x + k$ 의 기울기가 2이므로 점 P를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{PR} = 15, \overline{PR} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$$

점 P에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$

이므로 $\overline{RH} : \overline{PH} : \overline{PR} = 1 : 2 : \sqrt{5}$ 이다.



$\overline{PR} = 6\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{PH} = 12$

점 P의 x 좌표를 p 라 하면 $p = 12$

점 P($p, 2p+k$), 즉 P($12, 24+k$)는 곡선 $y = \log_2(x-4)$ 위의 점
 이므로

$$24+k = \log_2 8 = 3$$

$$\text{따라서 } k = 3 - 24 = -21$$

다른 풀이

$y = \log_2 4(x-5) = \log_2(x-5) + \log_2 4 = \log_2(x-5) + 2$
 이므로 함수 $y = \log_2 4(x-5)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2(x-4)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
 직선 $y = 2x + k$ 의 기울기가 2이므로 점 P를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{PR} = 15, \overline{PR} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

점 P의 x 좌표를 p ($p > 0$)이라 하면 점 P는 직선 $y = 2x + k$ 위의 점
 이므로

$$P(p, 2p+k)$$

점 P를 지나고 직선 $y = 2x + k$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로

직선 PR의 방정식은

$$y - (2p+k) = -\frac{1}{2}(x-p), x + 2y - 5p - 2k = 0$$

$$x=0 \text{ 이면 } y = \frac{5p+2k}{2} \text{ 이므로 } R\left(0, \frac{5p+2k}{2}\right)$$

\overline{PR} 는 점 R과 직선 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{PR} = \frac{\left|0 - \frac{5p+2k}{2} + k\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{5p}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}p \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } \frac{\sqrt{5}}{2}p = 6\sqrt{5}, p = 12$$

점 P($12, 24+k$)는 곡선 $y = \log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$$24+k = \log_2 8 = 3$$

$$\text{따라서 } k = 3 - 24 = -21$$

14

$h(x) = x^3 - 3a^2x$ 라 하면

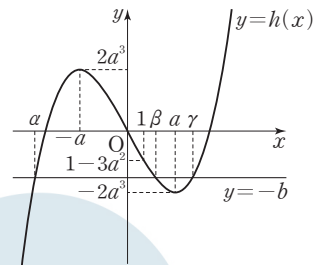
$$h'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$$h'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -a \text{ 또는 } x = a$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\dots	$-a$	\dots	a	\dots
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

$$h(-a) = -a^3 + 3a^3 = 2a^3, h(a) = a^3 - 3a^3 = -2a^3$$



삼차방정식 $x^3 - 3a^2x + b = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면
 $x^3 - 3a^2x = -b$ 에서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -b$ 가 서로
 다른 세 점에서 만나야 하고, 세 근 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)에 대하여

$$\beta > 1 \text{ 이 성립하려면 } h(1) = 1 - 3a^2 \text{ 이므로}$$

$$-2a^3 < -b < 1 - 3a^2, \text{ 즉 } 3a^2 - 1 < b < 2a^3$$

$$\text{따라서 } f(a) = 3a^2 - 1, g(a) = 2a^3 \text{ 이므로}$$

$$f(3) + g(2) = 26 + 16 = 42$$

답 ③

15

$$\neg, a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 1 \times \sin \frac{\pi}{2} = a_1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times \sin \pi = a_2 = 2$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times \sin \frac{3\pi}{2} = a_3 - 3 = -1$$

$$\text{이므로 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 2 + (-1) = 4 \text{ (참)}$$

ㄴ. 자연수 k 에 대하여

$$a_{4k+1} = a_{4k} + 4k \sin \frac{4k\pi}{2} = a_{4k}$$

$$a_{4k+2} = a_{4k+1} + (4k+1) \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} = a_{4k} + 4k + 1$$

$$a_{4k+3} = a_{4k+2} + (4k+2) \sin \frac{(4k+2)\pi}{2} = a_{4k+2} = a_{4k} + 4k + 1$$

$$\begin{aligned} a_{4k+4} &= a_{4k+3} + (4k+3) \sin \frac{(4k+3)\pi}{2} \\ &= (a_{4k} + 4k + 1) - (4k+3) = a_{4k} - 2 \end{aligned}$$

$$a_{4k+5} = a_{4k+4} = a_{4k} - 2 = a_{4k+1} - 2$$

$$\begin{aligned} a_{4k+6} &= a_{4k+5} + (4k+5) = a_{4k} - 2 + (4k+5) \\ &= a_{4k} + 4k + 3 = a_{4k+2} + 2 \end{aligned}$$

$$a_{4k+7} = a_{4k+6} = a_{4k+2} + 2 = a_{4k+3} + 2$$

이므로 수열 $\{a_{4k-3}\}$, $\{a_{4k-2}\}$, $\{a_{4k-1}\}$, $\{a_{4k}\}$ 는 각각 공차가 -2 , 2 , 2 , -2 인 등차수열이다.

$$a_4 = -1 \text{ 이므로}$$

$$a_{4k} = -1 + (k-1) \times (-2) = -2k + 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$
이고

$$\begin{aligned} a_{4k+1} + a_{4k+2} &= a_{4k} + (a_{4k} + 4k + 1) = 2a_{4k} + 4k + 1 \\ &= 2(-2k + 1) + 4k + 1 = 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{48} a_k + a_{49} + a_{50} = 4 \times 12 + 3 = 48 + 3 = 51 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (6x^2 + 5x + 1) dx &= 2 \int_0^3 (6x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[2x^3 + x \right]_0^3 \\ &= 2(54 + 3) = 114 \end{aligned}$$

답 114

17

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 a_5 = 2a_7 \text{에서 } ar^2 \times ar^4 = 2ar^6$$

$$a^2 r^6 = 2ar^6$$

$$a \neq 0, r \neq 0 \text{이므로 } a = 2$$

$$a_8 + a_9 = 6a_7 \text{에서}$$

$$2r^7 + 2r^8 = 6 \times 2r^6$$

$$r + r^2 = 6, r^2 + r - 6 = 0, (r+3)(r-2) = 0$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 2$$

$$\text{즉, } a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \text{이므로}$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$

답 8

18

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 + 3ax - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4ax + 3a$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식

$$f'(x) = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 9a \leq 0, a(4a-9) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq \frac{9}{4}$$

따라서 a 의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 0이므로

$$36(M+m) = 36\left(\frac{9}{4} + 0\right) = 81$$

답 81

19

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 4} = -\frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로 마주보는 각의 크기의 합은 π 이다.

즉, $B + D = \pi$ 이므로

$$\sin D = \sin(\pi - B) = \sin B = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{..... ㉠}$$

$$\cos D = \cos(\pi - B) = -\cos B = \frac{1}{5}$$

$\overline{AD} = a$ 라 하면 $\overline{CD} = 2a$ 이므로

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = a^2 + (2a)^2 - 4a^2 \cos D \text{이므로}$$

$$49 = 5a^2 - 4a^2 \times \frac{1}{5} = \frac{21}{5} a^2$$

$$a^2 = \frac{5}{21} \times 49 = \frac{35}{3} \quad \text{..... ㉡}$$

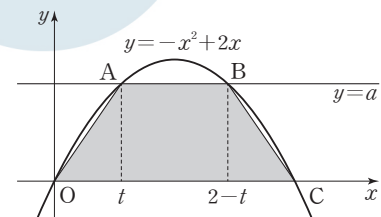
㉠, ㉡에서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times a \times 2a \times \sin D = a^2 \sin D = \frac{35}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{14\sqrt{6}}{3}$$

따라서 $p = 3$, $q = 14$ 이므로 $p + q = 3 + 14 = 17$

답 17

20



점 C의 좌표는 $(2, 0)$ 이고, 곡선 $y = -x^2 + 2x$ 는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로 점 A의 x 좌표를 t ($0 < t < 1$)이라 하면 점 B의 x 좌표는 $2 - t$ 이다.

점 A의 y좌표가 $-t^2+2t$ 이므로 사각형 OCBA의 넓이를 $f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \times \{2 + (2-2t)\} \times (-t^2+2t) \\ &= t(t-2)^2 = t(t^2-4t+4) \\ f'(t) &= (t-2)^2 + 2t(t-2) \\ &= (t-2)(3t-2) \end{aligned}$$

$$0 < t < 1 \text{ 이므로 } f'(t) = 0 \text{ 에서 } t = \frac{2}{3}$$

이때 $f(t)$ 는 $t = \frac{2}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값 S는

$$S = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

따라서 $27S = 32$

답 32

21

집합 S_n 의 원소는

$$\begin{aligned} (-2)^0 a_1 + (-2)^1 a_2 + (-2)^2 a_3 + \dots + (-2)^{n-1} a_n \\ = a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{n-1} a_n \end{aligned}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

집합 S_3 의 원소는 $a_1 - 2a_2 + 4a_3$ 의 꼴로 나타나고 a_k ($k=1, 2, 3$)의 값은 0 또는 1이다.

따라서 $a_1 + 4a_3$ 의 값은 0, 1, 4, 5로 4가지

$-2a_2$ 의 값은 -2, 0으로 2가지

경우가 될 수 있으므로

$$S_3 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

즉, $p=8$

집합 S_n 에 속하는 원소 $a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{n-1} a_n$ 의 값은 $a_{2i-1}=1, a_{2i}=0$ ($i=1, 2, 3, \dots$)

일 때 최대이다.

자연수 j 에 대하여 $n=2j$ 라 하면 집합 S_n 에 속하는 원소의 최댓값은

$$\begin{aligned} a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{2j-1} a_{2j} \\ = 1 - 0 + 2^2 - 0 + \dots + (-2)^{2j-2} - 0 \\ = 1 + 2^2 + \dots + 2^{2j-2} = \frac{2^{2j} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{2j} - 1}{3} \end{aligned}$$

$n=2j+1$ 이라 하면

$$\begin{aligned} a_1 - 2a_2 + 2^2 a_3 - \dots + (-2)^{(2j+1)-1} a_{2j+1} \\ = 1 - 0 + 2^2 - 0 + \dots + (-2)^{2j-2} - 0 + (-2)^{2j} \\ = 1 + 2^2 + \dots + 2^{2j-2} + 2^{2j} = \frac{2^{2j+2} - 1}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{2^{2j} - 1}{3} \leq 5453 \leq \frac{2^{2j+2} - 1}{3} \text{ 에서}$$

$$\frac{2^{12} - 1}{3} = \frac{4095}{3} = 1365, \quad \frac{2^{14} - 1}{3} = \frac{16383}{3} = 5461 \text{ 이고}$$

$5453 = 5461 - 8$ 이므로

$$5453 = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{12} - 2^3$$

따라서 5453을 원소로 갖는 S_n 중 n 의 값이 최소인 경우는

$$n = 2 \times 6 + 1 = 13 \text{ 일 때이다.}$$

그러므로 $q=13$

따라서 $p+q=8+13=21$

답 21

22

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 3(t^2 - 1) \\ &= 3x^2 + 6x - 3(t+1)(t-1) \\ &= 3\{x - (t-1)\}\{x + (t+1)\} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = t-1$ 또는 $x = -t-1$

$t > 0$ 이므로 $-t-1 < -1 < t-1$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-t-1$...	$t-1$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$\begin{aligned} f(t-1) &= (t-1)^3 + 3(t-1)^2 - 3(t^2-1)(t-1) + 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ &= (t-1)^3 + 3(t-1)^2 - 3(t-1)^2(t+1) + (t-1)^2(2t+1) \\ &= (t-1)^2\{(t-1) + 3 - 3(t+1) + (2t+1)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 3 + 3(t^2-1) + 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ &= 2t^3 \end{aligned}$$

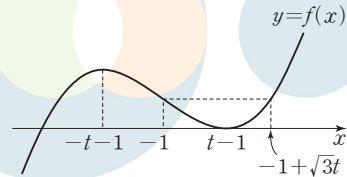
$$\begin{aligned} f(2) &= 8 + 12 - 6(t^2-1) + 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ &= 2t^3 - 9t^2 + 27 \end{aligned}$$

$f(x) = f(-1)$ 에서

$$f(x) - 2t^3 = (x+1)(x^2+2x+1-3t^2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{3}t$$

에서 $f(-1) = f(-1 + \sqrt{3}t) = 2t^3$



이때 $-1 + \sqrt{3}t \geq 2$, 즉 $t \geq \sqrt{3}$ 이면 $g(t) = f(-1) = 2t^3$

$0 < t < \sqrt{3}$ 이면 $g(t) = f(2) = 2t^3 - 9t^2 + 27$

한편, $t-1 \geq 2$, 즉 $t \geq 3$ 이면 $h(t) = f(2) = 2t^3 - 9t^2 + 27$

$0 < t < 3$ 이면 $h(t) = f(t-1) = 0$

그러므로 두 함수 $g(t), h(t)$ 는 다음과 같다.

$$g(t) = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 27 & (0 < t < \sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \geq \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < 3) \\ 2t^3 - 9t^2 + 27 & (t \geq 3) \end{cases}$$

이때 함수 $g(t)$ 는 $t = \sqrt{3}$ 에서 미분가능하지 않으므로 $a = \sqrt{3}$ 이다.

$$\begin{aligned} g(2a) &= g(2\sqrt{3}) = 2 \times (2\sqrt{3})^3 \\ &= 48\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(3a) &= h(3\sqrt{3}) = 2(3\sqrt{3})^3 - 9(3\sqrt{3})^2 + 27 \\ &= 162\sqrt{3} - 216 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} g(2a) + h(3a) &= 48\sqrt{3} + (162\sqrt{3} - 216) \\ &= 210\sqrt{3} - 216 \end{aligned}$$

즉, $p=210, q=-216$ 이므로

$$p - q = 210 - (-216) = 426$$

답 426

23

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, k) \cdot (-3, 1) = 0$ 에서
 $-6 + k = 0$
 따라서 $k = 6$

답 ⑤

24

좌표공간의 점 $A(2, 0, \sqrt{3})$ 에서 xy 평면에 내린 수선의 발 H 의 좌표는 $(2, 0, 0)$ 이다.
 xy 평면 위의 타원 $x^2 + 9y^2 = 9$, 즉 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 의 장축은 x 축 위에 있으므로 점 P 가 장축의 양 끝점 중 점 H 와의 거리가 먼 점 $(-3, 0, 0)$ 에 있을 때 선분 AP 의 길이가 최대이다.
 따라서
 $AP = \sqrt{AH^2 + HP^2} \leq \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3-2)^2} = 2\sqrt{7}$
 이므로 선분 AP 의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{7}$ 이다.

답 ③

25

정팔면체의 한 모서리의 길이를 2라 하자.
 선분 CF 의 중점을 N 이라 하면 두 사각형 $ACFE$, $ABFD$ 는 모두 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로
 $AN = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $AM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 삼각형 CBF 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로
 $MN = 1$
 사각형 $BCDE$ 는 정사각형이므로
 $DE \parallel BC$
 정삼각형 CBF 에서
 $BC \parallel MN$
 즉, $DE \parallel MN$ 이므로 두 직선 AM , DE 가 이루는 예각의 크기는 두 직선 AM , MN 이 이루는 예각의 크기와 같다.
 이등변삼각형 AMN 에서
 $\cos \theta = \cos(\angle AMN) = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

답 ①

26

포물선 $y^2 = 4px$ 의 준선의 방정식이 $x = -2$ 이므로 $p = 2$ 이다.
 네 점 F, Q, R, S 는 모두 중심이 P 인 원 위의 점이므로 원의 두 현 RF, SQ 가 서로 평행하면 사다리꼴 $FQSR$ 는 $\overline{FQ} = \overline{SR}$ 인 등변사다리꼴이다.
 이때 서로 합동인 두 이등변삼각형 PFQ, PRS 의 꼭짓점 P 에서 x 축 및 y 축에 내린 두 수선의 길이는 서로 같으므로 점 P 의 x 좌표와 y 좌표는 같다.
 $y^2 = 8x, y = x$ 를 연립하면
 $x^2 = 8x$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 8$
 두 점 F, P 의 좌표가 각각 $(2, 0), (8, 8)$ 이므로 세 점 Q, R, S 의 좌표는 각각 $Q(14, 0), R(0, 2), S(0, 14)$ 이다.

따라서 사각형 $FQSR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 14^2 - \frac{1}{2} \times 2^2 = 96$$

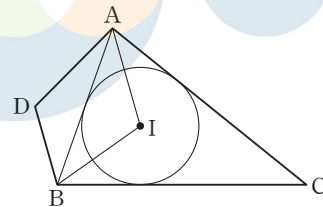
답 ②

27

두 삼각형 ABH, ABE 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자.
 두 평면 α, β 가 이루는 예각 θ 에 대하여 $\cos \theta = \frac{5}{8}$ 이므로
 $S_1 = \frac{4}{5}S \times \cos \theta = \frac{1}{2}S$ ㉠
 평면 β 위의 점 D 에서 평면 α 위에 내린 수선의 발 H 가 선분 AE 위의 점이므로 $\frac{AE}{AH} = p (p > 0)$ 으로 놓으면
 $S_1 : S_2 = 1 : p$
 $S_1 = \frac{1}{p} \times S_2$ ㉡
 점 E 는 선분 BC 를 2 : 1로 내분하는 점이므로
 $S_2 = \frac{2}{3} \times S$ ㉢
 ㉠, ㉡, ㉢에서
 $\frac{1}{2}S = \frac{1}{p} \times \left(\frac{2}{3} \times S\right)$
 따라서 $p = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$

답 ④

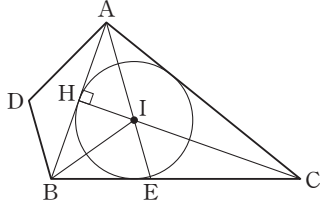
28



조건 (가)에서 $\overrightarrow{DB} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
 $2\overrightarrow{DB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ㉠
 점 I 는 삼각형 ABC 의 내심이므로 $\angle BAC$ 의 이등분선인 직선 AI 가 변 BC 와 만나는 점을 E 라 하면
 $\overline{BE} : \overline{EC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 3$
 점 E 는 선분 BC 를 2 : 3으로 내분하는 점이므로
 $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{DB}$ 이고, 조건 (나)에서 $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{4}\overrightarrow{DB}$ 이므로
 $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AE}$
 즉, 점 I 는 선분 AE 를 5 : 3으로 내분하는 점이므로
 (삼각형 IBC 의 넓이) = $\frac{3}{8} \times$ (삼각형 ABC 의 넓이) ㉢
 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 $r (r > 0)$, $\overline{BC} = k (k > 0)$ 이라 하면 ㉢에서
 $\frac{1}{2} \times k \times r = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \times (4 + 6 + k) \times r$

$$k = \frac{3}{8}(10+k), k=6$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AC} = \overline{BC} = 6$ 인 이등변삼각형이다.



점 C에서 밑변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점이므로

$$\overline{HC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{HC} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2}$$

이므로

$$(\text{삼각형 ABI의 넓이}) = \frac{5}{8} \times (\text{삼각형 ABE의 넓이})$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} \times (\text{삼각형 ABC의 넓이})$$

$$= \frac{1}{4} \times 8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

이때 $\overline{DB} \parallel \overline{AI}$ 에서 두 삼각형 DBA, ABI의 높이는 서로 같고, $\overline{DB} : \overline{AI} = 4 : 5$ 이므로

$$\begin{aligned} (\text{삼각형 DBA의 넓이}) &= \frac{4}{5} \times (\text{삼각형 ABI의 넓이}) \\ &= \frac{4}{5} \times 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

따라서 사각형 ADBI의 넓이는

$$\begin{aligned} &(\text{삼각형 ABI의 넓이}) + (\text{삼각형 DBA의 넓이}) \\ &= 2\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{5} = \frac{18\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

답 ③

29

조건 (가)에서 쌍곡선의 두 초점은 두 포물선 $y^2 = 4(x+a)$, $y^2 = -4(x-a)$ 의 교점이므로 $4(x+a) = -4(x-a)$ 에서 $x=0$, $y^2 = 4(0+a)$ 에서 $y = \pm 2\sqrt{a}$

따라서 두 포물선의 교점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{a})$, $(0, -2\sqrt{a})$ 이고,

쌍곡선 $x^2 - y^2 = -b^2$, 즉 $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 두 초점의 좌표가

$$(0, b\sqrt{2}), (0, -b\sqrt{2}) \text{이므로}$$

$$2\sqrt{a} = b\sqrt{2} \text{에서 } b^2 = 2a \dots \text{㉠}$$

점 F의 y좌표가 양수라 하자.

두 점 P, Q는 모두 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 위의 점이므로

$\overline{FP} = p$, $\overline{FQ} = q$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{F'P} = p + 2b, \overline{F'Q} = q + 2b$$

두 삼각형 FPQ, F'QP의 둘레의 길이의 차는

$$|(\overline{F'P} + \overline{F'Q} + \overline{PQ}) - (\overline{FP} + \overline{FQ} + \overline{PQ})|$$

$$= |(\overline{F'P} - \overline{FP}) + (\overline{F'Q} - \overline{FQ})| = 4b$$

이므로 조건 (나)에서

$$4b = 8\sqrt{3}, b = 2\sqrt{3}$$

㉠에서 $2a = 12, a = 6$

두 식 $y^2 = 4(x+6)$, $x^2 - y^2 = -12$ 를 연립하면

$$x^2 - 4(x+6) = -12, x^2 - 4x - 12 = 0, (x+2)(x-6) = 0$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = \pm 4$$

$$x = 6 \text{ 일 때, } y = \pm 4\sqrt{3}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2, 4)$, $(6, 4\sqrt{3})$ 이므로

$$\overline{PQ}^2 = (6+2)^2 + (4\sqrt{3}-4)^2 = 128 - 32\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } p = 128, q = 32 \text{ 이므로 } p + q = 128 + 32 = 160$$

답 160

30

조건 (가)의 $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = 0$ 에서 $\overline{AP} \perp \overline{PB}$

즉, 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1 위의 점이다.

$\overline{BQ} \cdot \overline{QC} = 0$ 에서 $\overline{BQ} \perp \overline{QC}$

즉, 점 Q는 선분 BC를 지름으로 하는 원 C_2 위의 점이다.

조건 (나)에서 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면

$$\overline{AP} \cdot \overline{BC} = (x_1 + 2, y_1) \cdot (4, 0) = 4(x_1 + 2) \leq 4$$

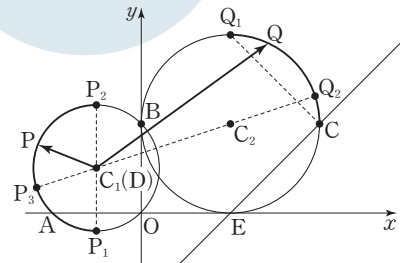
$$x_1 \leq -1$$

따라서 원 C_1 이 직선 $x = -1$ 과 만나는 두 점 P_1, P_2 라 하면 점 P는

원 C_1 위의 점 중 x좌표가 -1 보다 작거나 같은 호 P_1P_2 위의 점이다.

점 E(2, 0)에 대하여 점 C를 지나고 직선 EC에 수직인 직선이 원 C_2 와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q이라 하자.

$\overline{CQ} \cdot \overline{AB} \geq 0$ 에서 점 Q는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 원 C_2 의 호 Q_1C 위의 점이다.



두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하면 점 D(-1, 1)은 점 C_1 과 일치한다.

$\overline{DP} \cdot \overline{DQ}$, 즉 $\overline{C_1P} \cdot \overline{C_1Q}$ 의 값은 점 P가 P_2 의 위치에 있고, 점 Q가 Q_1 의 위치에 있을 때 최대이므로

$$\begin{aligned} M &= \overline{C_1P_2} \cdot \overline{C_1Q_1} \\ &= (0, \sqrt{2}) \cdot (3, 3) = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

직선 C_1C_2 가 원 C_1 과 만나는 점 중 C_1 에 가까운 점을 P_3 이라 하고

직선 C_1C_2 가 원 C_2 와 만나는 점 중 C_2 에 가까운 점을 Q_2 라 하자.

$\overline{C_1P} \cdot \overline{C_1Q}$ 의 값은 점 P가 P_3 의 위치에 있고, 점 Q가 Q_2 의 위치에 있을 때 최소이므로

$$\begin{aligned} m &= \overline{C_1P_3} \cdot \overline{C_1Q_2} = -|\overline{C_1P_3}| \times |\overline{C_1Q_2}| \\ &= -\sqrt{2} \times (\sqrt{3^2 + 1^2} + 2) = -2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } M + m = \sqrt{2} - 2\sqrt{5}$$

$$\text{즉, } p = 1, q = -2 \text{ 이므로 } p^2 + q^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$$

답 5