수학 가이드 답안지 [자연계열] <오후> (문항별 5점)

31. $y=f(x)$의 $x=a$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=6a^2-36a+60=6(a-3)^2+6$. $f'(a)$는 $a=3$에서 최솟값 $b=6$을 가진다. $a+b=9$

32. 역함수의 미분법에 의해서 $(f^{-1})'(k)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(k))}=\dfrac{1}{f'(k)}=1$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g'(k)=\sum_{k=1}^{n}\{f'(k)f^{-1}(k)+f(k)(f^{-1})'(k)\}=2\sum_{k=1}^{n}k=12$에서 $n=3$

33. $\displaystyle\int_1^{e^2}(1+\ln x)^2\,dx=\int_1^{e^2}[(\ln x)^2+2\ln x+1]\,dx=\Big[\,x(\ln x)^2\Big]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}dx=5e^2-1$

34. (곡선의 길이) $\displaystyle=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{x}\,dx=\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

35. $a_n=\dfrac{(x-3)^n}{n},\ b_n=\dfrac{n(x+2)^n}{3^{n+1}},\ c_n=\dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}},\ d_n=\dfrac{(-2)^n(x-3)^n}{\sqrt{n}}$이라 하면

㉠ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x-3|=|x-3|<1$에서 $2<x<4$이다. $x=2$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$은 수렴하고, $x=4$일 때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산한다. 따라서 수렴구간은 $[2,4)$이다. 그러므로 자연수 x의 개수는 2

㉡ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}|x+2|=\frac{|x+2|}{3}<1$에서 $-5<x<1$이다. $x=-5$일 때,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n$은 발산하고, $x=1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n$도 발산한다.

따라서 수렴구간은 $(-5,1)$이다. 그러므로 자연수 x의 개수는 0

㉢ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\,|x|=3|x|<1$에서 $-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$이다. 양 끝점의 수렴성에 관계없이 수렴하는 자연수 x의 개수는 0

㉣ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right|=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x-3|=2|x-3|<1$에서 $\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{7}{2}$이다. 양 끝점의 수렴성에 관계없이 수렴하는 자연수 x의 개수는 1

36. (회전체의 겉넓이) $\displaystyle=2\pi\int_0^{\pi}r(\theta)\sin\theta\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta=2\pi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta=\pi^2$

37. $\vec{a}$와 $\vec{c}$가 수직이므로 $0=\vec{a}\cdot(8\vec{b}-k\vec{a})=8(\vec{a}\cdot\vec{b})-k|\vec{a}|^2$. 따라서 $|\vec{a}|=2$

38. $\nabla f(1,3,0) = < 0, 0, 6 >$ 이고 벡터 $\vec{v} = < 1, 2, -1 >$ 방향으로의 단위벡터 $\vec{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle$ 이므로

$D_{\vec{u}} f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0) \cdot \vec{u} = -\sqrt{6}$

39. (i) $f_x(x,y) = 3y - 6,\ f_y(x,y) = 3x - 3$ 이므로 f의 임계점 $(1,2)$를 얻고 $f(1,2) = 1$

D의 경계를 살펴보자.

(ii) 선분 $\{(x,y) \mid y = 0,\ 0 \le x \le 3\}$에서: $u(x) \equiv f(x,0) = -6x + 7$ 이므로 $x = 0$ 또는 $x = 3$일 때, 즉, $(0,0)$과 $(3,0)$에서 $f(0,0) = 7,\ f(3,0) = -11$

(iii) 선분 $\{(x,y) \mid x = 0,\ 0 \le y \le 5\}$에서: $v(y) \equiv f(0,y) = -3y + 7$ 이므로 $y = 0$ 또는 $y = 5$일 때, 즉, $(0,0)$과 $(0,5)$에서 $f(0,0) = 7,\ f(0,5) = -8$

(iv) 선분 $\left\{(x,y) \,\middle|\, y = -\frac{5}{3}x + 5,\ 0 \le x \le 3\right\}$에서: $w(x) \equiv f\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right) = -5x^2 + 14x - 8$이고, $w(x)$는 $x = 0, \frac{7}{5}, 3$일 때, 즉, 점 $(0,5)$, $(7/5, 8/3)$, $(3,0)$에서 $f(0,5) = -8,\ f(7/5, 8/3) = 9/5,\ f(3,0) = -11$

그러므로 f의 최솟값은 $f(3,0) = -11$

40. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 4$

41. $\iint_D \frac{\sin x}{x} dA = \int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy\, dx = \int_0^\pi \sin x\, dx = 2$

42. $\mathrm{curl}\,\vec{F} = \vec{0}$이므로 $\vec{F}$의 포텐셜 함수 $f(x,y,z)$가 존재한다. $f(x,y,z) = e^{ax}\cos y + z + C$ (단, C는 적분상수)

따라서 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Big[f(x,y,z)\Big]_{\left(0, \frac{\pi}{2}, e^{18}\right)}^{(2a, \pi, 3e^{18})} = e^{18}$로 부터 $a = 3$

43. 곡면 S로 둘러싸인 토러스 안쪽 영역을 V라 할 때, 다이버전스 정리에 의하여

$2 = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V 2\, dV = 2 \times$ (토러스의 부피) 로 부터 (토러스의 부피) $= 1$

44. $\int_L xyz\, ds = \int_0^1 (t)(2t)(2t)\sqrt{1 + 2^2 + 2^2}\, dt = 3$

45. $a + 3 = trA = tr(P^{-1}AP) = b + 4$이므로 $a - b = 1$

46. 조건 (가)에 의해서 T의 치역은 1차원이다. 그런데 조건 (나)에 의해서 치역은 $\mathrm{span}\{e_2\}$ 이다. 따라서 $a = c = 0$. 조건 (다)에 의해서 $e_2 \cdot T(e_1 - e_i) = 0$ $(i = 2, 3)$이고, 조건 (가), (나)에 의해

$T(e_1 - e_i) = ke_2$

라 할 때, $k=0$. 즉, $T(e_1) = T(e_i)$. 그러므로 $T(e_1 + 2e_2 - e_3) = 4e_2$ 이고 $a+b-c=4$.

47. $\det(A) = 9$이다. 따라서 $\det(2A^{-1}) = 8\det(A^{-1}) = \dfrac{8}{\det(A)} = \dfrac{8}{9}$

48. 주어진 '완전미분방정식'의 일반해를 구하면 $3x^2 + 4xy + x + y^2 + 2y = C$ (C는 적분상수). $x = \dfrac{1}{3}$일 때 $y=1$이므로 $C=5$이고, 따라서 곡선 $f(x,y)=0$은 $3x^2+4xy+x+y^2+2y-5=0$. 그러므로 $a^2+6a=1$

49. 미분방정식 $y'' - 3y' - 4y = 6e^x$ 의 일반해는 $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} + Ae^x$꼴이다.
특수해 $y_p(x) = Ae^x$를 구하면 $A=-1$이고, 조건 $f(0) = f'(0) = -1$로 부터 $c_1 = c_2 = 0$이므로 $f(x) = -e^x$.
따라서 $f(1) \times f'(-1) = 1$

50. $\dfrac{s+1}{s^4+4s^3+4s^2} = \dfrac{s+1}{s^2(s+2)^2} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{(s+2)^2}\right]$이므로

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2(s+2)^2}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right) = \frac{1}{4}(t - te^{-2t})$$

이고 $f(4) = 1 - e^{-8}$