• 수학 영역 •

정 답

1	①	2	④	3	③	4	②	5	②
6	①	7	④	8	⑤	9	⑤	10	③
11	①	12	③	13	②	14	⑤	15	④
16	②	17	⑤	18	③	19	①	20	④
21	④	22	3	23	27	24	12	25	30
26	14	27	141	28	24	29	6	30	25

해 설

1. [출제의도] 정수와 유리수의 연산 원리를 이용하여 식의 값을 계산한다.

$\left\{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}\div\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{3}\times(-9)=-\left(\frac{5}{3}\times 9\right)$

$=-15$

2. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 일차항의 계수를 계산한다.

$2x(x+3)-(x^2+2x-1)=2x^2+6x-x^2-2x+1$

$=(2-1)x^2+(6-2)x+1$

$=x^2+4x+1$

따라서 x의 계수는 4

3. [출제의도] 삼각비를 이용하여 식의 값을 계산한다.

$\sin 30^\circ\times\tan 60^\circ=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. [출제의도] 다항식의 인수분해를 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구한다.

$(3x-1)(x+2)-x^2-8x=(3x^2+6x-x-2)-x^2-8x$

$=2x^2-3x-2$

$=(2x+1)(x-2)$

$=(2x+a)(x+b)$

a, b가 정수이므로 $a=1$, $b=-2$

따라서 $a-b=1-(-2)=3$

5. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구한다.

직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BH}^2=\overline{AB}^2-\overline{AH}^2=13^2-12^2=25=5^2$

$\overline{BH}=5$

$\overline{BC}=14$이므로 $\overline{HC}=\overline{BC}-\overline{BH}=14-5=9$

직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{HC}^2=12^2+9^2=225=15^2$

따라서 선분 AC의 길이는 15

6. [출제의도] 줄기와 잎 그림과 상대도수의 분포표를 이해하여 상대도수를 구한다.

주어진 줄기와 잎 그림에서

0개 이상 10개 미만의 자료는

1, 8, 9이므로 변량의 개수는 3,

10개 이상 20개 미만의 자료는

12, 15, 15, 16, 17, 18, 19이므로 변량의 개수는 7,

20개 이상 30개 미만의 자료는

21, 23, 24, 24, 27이므로 변량의 개수는 5,

30개 이상 40개 미만의 자료는

32, 35, 37, 38이므로 변량의 개수는 4,

40개 이상 50개 미만의 자료는

42이므로 변량의 개수는 1이다.

그러므로 10개 이상 20개 미만인 계급의 상대도수는

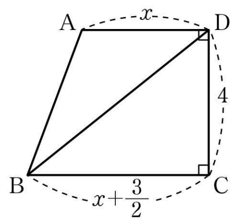
$p=\frac{7}{20}=0.35$

20개 이상 30개 미만인 계급의 상대도수는

$q=\frac{5}{20}=0.25$

따라서 $p-q=0.35-0.25=0.1$

7. [출제의도] 일차방정식을 이해하여 주어진 선분의 길이를 구한다.



$\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{BC}=x+\frac{3}{2}$

$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\times x\times 4+\frac{1}{2}\times\left(x+\frac{3}{2}\right)\times 4$

$=2x+(2x+3)$

$=4x+3=17$

$4x=14$, $x=\frac{7}{2}$

따라서 선분 AD의 길이는 $\frac{7}{2}$

8. [출제의도] 이차방정식을 이해하여 이차방정식의 근을 구한다.

양수 a가 이차방정식 $x^2-2ax+2a+3=0$의 한 근이므로

$a^2-2a^2+2a+3=0$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$a=-1$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$

이차방정식 $3x^2+(a-6)x-1=0$에서 $a=3$이므로

$3x^2-3x-1=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 3\times(-1)}}{2\times 3}$

$=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$

이때 $\sqrt{9}<\sqrt{21}$, 즉 $3<\sqrt{21}$이므로

$\frac{3+\sqrt{21}}{6}>0$, $\frac{3-\sqrt{21}}{6}<0$

따라서 이차방정식 $3x^2-3x-1=0$의 두 근 중

양수인 근은 $\frac{3+\sqrt{21}}{6}$

9. [출제의도] 직선의 방정식을 이해하여 상수의 값을 구한다.

두 점 A$(-1, 4)$, B$(2, 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-4}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$

두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로 두 직선의 기울기는 서로 같다.

직선 CD의 y절편을 k라 하면 두 점 C, D를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+k$

이 직선이 점 C$(-2, 2)$를 지나므로

$2=-\frac{1}{3}\times(-2)+k$, $k=\frac{4}{3}$

직선 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$가 점 D$(1, a)$를 지나므로

$a=-\frac{1}{3}\times 1+\frac{4}{3}=1$

직선 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$의 x절편이 b이므로

$0=-\frac{1}{3}\times b+\frac{4}{3}$, $b=4$

따라서 $a+b=1+4=5$

10. [출제의도] 산점도를 이해하여 대푯값을 구한다.

산점도에서 각 운동 시간별 학생의 수를 구하면

운동 시간이 9시간인 학생의 수는 1,

운동 시간이 8시간인 학생의 수는 1,

운동 시간이 7시간인 학생의 수는 1,

운동 시간이 6시간인 학생의 수는 1,

운동 시간이 5시간인 학생의 수는 4,

운동 시간이 4시간인 학생의 수는 1,

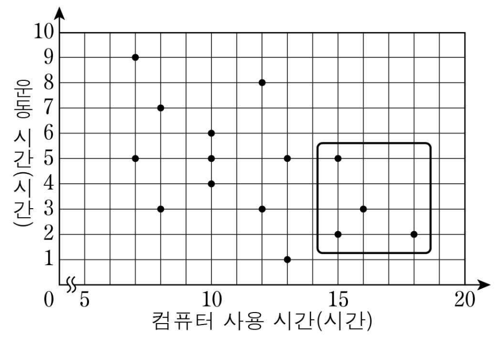
운동 시간이 3시간인 학생의 수는 3,

운동 시간이 2시간인 학생의 수는 2,

운동 시간이 1시간인 학생의 수는 1이다.

운동 시간의 최빈값은 학생의 수가 가장 큰 5시간이므로 $a=5$

컴퓨터 사용 시간이 15시간 이상인 학생들은 다음 그림에서 표시한 부분과 같다.



이 점들이 나타내는 운동 시간은

5시간, 3시간, 2시간, 2시간이다.

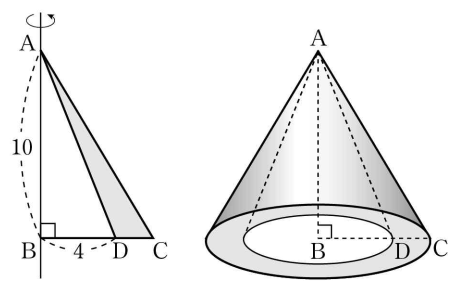
이 학생들의 운동 시간의 평균은

$\frac{5+3+2+2}{4}=3$ (시간)

이므로 $b=3$

따라서 $a+b=5+3=8$

11. [출제의도] 회전체의 성질을 이해하여 주어진 입체도형의 부피를 구한다.



삼각형 ABC의 넓이가 30이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 10\times\overline{BC}=30$

$\overline{BC}=6$

직선 AB를 회전축으로 하여 세 삼각형 ADC, ABC, ABD를 1회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 각각 V, S, T라 하면

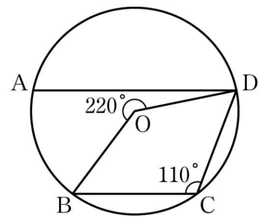
$V=S-T$

$S=\frac{1}{3}\times\pi\times 6^2\times 10=120\pi$

$T=\frac{1}{3}\times\pi\times 4^2\times 10=\frac{160}{3}\pi$

따라서 $V=120\pi-\frac{160}{3}\pi=\frac{200}{3}\pi$

12. [출제의도] 원주각의 성질을 이해하여 호의 길이를 구한다.

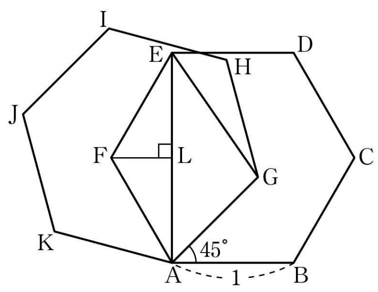


원의 중심을 O라 하자.
중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로
$\widehat{\mathrm{DAB}}$에 대한 중심각의 크기는 $2\times\angle\mathrm{DCB}=220^\circ$
$\angle\mathrm{BOD}=360^\circ-220^\circ=140^\circ$
호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로
$\angle\mathrm{BOC}:\angle\mathrm{COD}=\widehat{\mathrm{BC}}:\widehat{\mathrm{CD}}=4:3$
$\angle\mathrm{COD}=140^\circ\times\dfrac{3}{7}=60^\circ$
$\angle\mathrm{CAD}$는 호 CD에 대한 원주각이므로
$\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2}\times\angle\mathrm{COD}=\dfrac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$
$\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로
$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{CAD}$ (엇각)
$\angle\mathrm{DCA}=\angle\mathrm{DCB}-\angle\mathrm{ACB}$
$=\angle\mathrm{DCB}-\angle\mathrm{CAD}$
$=110^\circ-30^\circ=80^\circ$
$\angle\mathrm{DOA}=2\times\angle\mathrm{DCA}=2\times80^\circ=160^\circ$
따라서 $\widehat{\mathrm{DA}}=2\pi\times5\times\dfrac{160^\circ}{360^\circ}=\dfrac{40}{9}\pi$

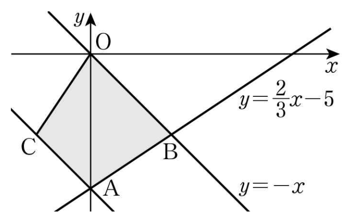
13. [출제의도] 일차부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.
$n\le50$이면
요금제 A에 가입하여 사진 n장을 편집할 때
지불하는 전체 금액은 15000원이고,
요금제 B에 가입하여 사진 n장을 편집할 때
지불하는 전체 금액은 10000원이므로
조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $n>50$
요금제 A에 가입하여 사진 n장을 편집할 때
지불하는 전체 금액은 15000원
요금제 B에 가입하여 사진 n장을 편집할 때
지불하는 전체 금액을 식으로 나타내면
$10000+150(n-50)=150n+2500$ (원)
요금제 A에 가입하여 지불하는 전체 금액이
요금제 B에 가입하여 지불하는 전체 금액보다
더 작아야 하므로
$15000<150n+2500$
$150n>12500,\ n>\dfrac{250}{3}$
$83<\dfrac{250}{3}<84$이므로 n이 84이상이면 조건을 만족시킨다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 84

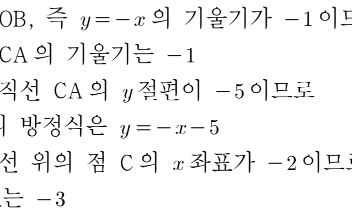
14. [출제의도] 주어진 상황을 이해하여 확률을 구한다.
두 상자 A, B에서 각각 공을 임의로 한 개씩 꺼내는 경우의 수는 $6\times3=18$
상자 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 자연수를 a, 상자 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 자연수를 b라 하자.
두 자연수 a, b가 서로소인 경우를 순서쌍 (a,b)로 나타내면
(ⅰ) $b=7$인 경우
7이 소수이므로 7은 1부터 6까지의 모든 자연수와 서로소이다.
$(1,7)$, $(2,7)$, $(3,7)$, $(4,7)$, $(5,7)$, $(6,7)$의 6가지
(ⅱ) $b=8$인 경우
$8=2^3$이므로 8은 2의 배수가 아닌 자연수와 서로소이다.
$(1,8)$, $(3,8)$, $(5,8)$의 3가지
(ⅲ) $b=9$인 경우
$9=3^2$이므로 9는 3의 배수가 아닌 자연수와 서로소이다.
$(1,9)$, $(2,9)$, $(4,9)$, $(5,9)$의 4가지
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 꺼낸 공에 적혀 있는 두 자연수가 서로소인 경우의 수는 $6+3+4=13$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{13}{18}$

15. [출제의도] 연립일차방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.
두 학생 A, B의 속력을 각각 분속 am, 분속 bm라 하자. $(a>b)$
두 학생 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여
서로 반대 방향으로 뛰어 처음으로 다시 만나는 때는 두 학생 A, B의 이동 거리의 합이 400m가 되는 때이다.
두 학생 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여
서로 반대 방향으로 뛰어 처음으로 다시 만나는 때가 출발한 시각으로부터 1분 30초 후이므로
$\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2}b=400$
$a+b=\dfrac{800}{3}$ ⋯⋯ ㉠
두 학생 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여
서로 같은 방향으로 뛰어 처음으로 다시 만나는 때는 두 학생 A, B의 이동 거리의 차가 400m가 되는 때이다.
두 학생 A, B가 같은 지점에서 동시에 출발하여
서로 같은 방향으로 뛰어 처음으로 다시 만나는 때가 출발한 시각으로부터 12분 후이므로
$12a-12b=400$
$a-b=\dfrac{400}{12}=\dfrac{100}{3}$ ⋯⋯ ㉡
㉠과 ㉡을 변끼리 더하면
$2a=\dfrac{900}{3}=300$
$a=150,\ b=\dfrac{350}{3}$
따라서 학생 A가 산책로를 한 바퀴 뛰는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{400}{a}=\dfrac{400}{150}=\dfrac{8}{3}$(분), 즉 2분 40초

16. [출제의도] 삼각비의 성질을 이해하여 주어진 도형의 넓이를 구한다.


정육각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$
삼각형 AEF는 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{EF}}=1$인 이등변삼각형이고
$\angle\mathrm{AFE}=120^\circ$이므로
$\angle\mathrm{EAF}=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$
$\angle\mathrm{BAF}=\angle\mathrm{BAG}+\angle\mathrm{GAE}+\angle\mathrm{EAF}$
$=45^\circ+\angle\mathrm{GAE}+30^\circ=120^\circ$
$\angle\mathrm{GAE}=45^\circ$
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{EF}}=1$인 이등변삼각형 AEF에 대하여 점 F에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 L이라 하면 삼각형 ALF는 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AL}}=\overline{\mathrm{AF}}\times\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\overline{\mathrm{AE}}=2\times\overline{\mathrm{AL}}=\sqrt{3}$
$\triangle\mathrm{AEF}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin30^\circ$
$=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
$\triangle\mathrm{AGE}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{AG}}\times\sin45^\circ$
$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$
따라서 $\square\mathrm{AGEF}=\triangle\mathrm{AEF}+\triangle\mathrm{AGE}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

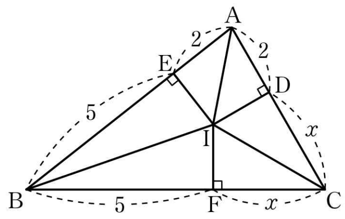
17. [출제의도] 일차함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건에 맞는 일차함수의 그래프를 추론한다.
직선 $y=\dfrac{2}{3}x-5$의 y절편이 -5이므로
$\overline{\mathrm{OA}}=5$
두 직선 $y=\dfrac{2}{3}x-5$, $y=-x$의 교점 B의 좌표는
연립방정식
$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ y=-x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
의 해와 같다.
㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면
$0=\dfrac{5}{3}x-5,\ \dfrac{5}{3}x=5$
$x=3,\ y=-3$이므로 점 B의 좌표는 $(3,-3)$
점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{BH}}=3$
$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{1}{2}\times5\times3$
$=\dfrac{15}{2}$
$\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OCA}=\square\mathrm{OCAB}$
$\dfrac{15}{2}+\triangle\mathrm{OCA}=\dfrac{25}{2}$
$\triangle\mathrm{OCA}=5$
점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
$\triangle\mathrm{OCA}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{CH'}}=\dfrac{5}{2}\times\overline{\mathrm{CH'}}=5$
$\overline{\mathrm{CH'}}=2$
그러므로 점 C의 x좌표는 -2
사각형 OCAB는 사다리꼴이므로
직선 CA가 직선 OB와 평행하거나
직선 CO가 직선 AB와 평행하다.
(ⅰ) 직선 CA가 직선 OB와 평행한 경우


직선 OB, 즉 $y=-x$의 기울기가 -1이므로
직선 CA의 기울기는 -1
이때 직선 CA의 y절편이 -5이므로
직선의 방정식은 $y=-x-5$
이 직선 위의 점 C의 x좌표가 -2이므로
y좌표는 -3
(ⅱ) 직선 CO가 직선 AB와 평행한 경우


직선 AB, 즉 $y=\dfrac{2}{3}x-5$의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$이므로
직선 CO의 기울기는 $\dfrac{2}{3}$
이때 직선 CO는 원점을 지나므로
직선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{3}x$
이 직선 위의 점 C의 x좌표가 -2이므로
y좌표는 $-\dfrac{4}{3}$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 점 C의 y좌표의 곱은 $(-3)\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=4$

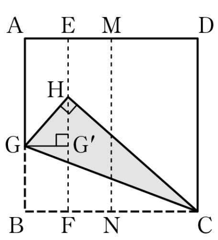
18. [출제의도] 삼각비와 삼각형의 내심의 성질을 이용

하여 길이를 구하는 문제를 해결한다.



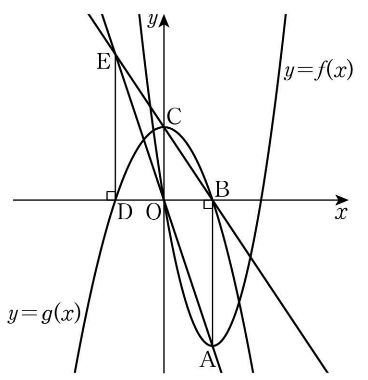
점 I에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자.
두 삼각형 IAE, IAD에서
선분 IA는 공통이고, $\angle IEA=\angle IDA=90^\circ$,
$\angle EAI=\angle DAI$이므로 두 삼각형 IAE, IAD는
서로 합동이다.
그러므로 $\overline{AE}=\overline{AD}=2$
$\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{AE}=7-2=5$
점 I에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면
같은 방법으로 $\overline{BF}=\overline{BE}=5$
$\overline{CD}=x$라 하면 같은 방법으로 $\overline{CF}=x$
$\angle AIE=\angle AID$, $\angle BIF=\angle BIE$, $\angle CID=\angle CIF$이고
$\angle AIB=\angle AIE+\angle BIE=120^\circ$이므로
$\angle CID=\frac{1}{2}\times\{360^\circ-2\times(\angle AIE+\angle BIE)\}=60^\circ$
$\angle IDC=90^\circ$이므로 $\angle DCI=90^\circ-\angle CID=30^\circ$
직각삼각형 ICD에서
$\overline{DI}=\overline{CD}\times\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$
즉, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{3}x$
이므로
$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$
$=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\times\frac{\sqrt{3}}{3}x$
$=\frac{1}{2}\times\{7+(5+x)+(x+2)\}\times\frac{\sqrt{3}}{3}x$
$=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x+7)$ ……㉠
$\angle ACB=\angle DCF=2\times\angle DCI=60^\circ$이므로
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin60^\circ$
$=\frac{1}{2}\times(5+x)\times(x+2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+2)(x+5)$ ……㉡
㉠, ㉡에서
$\frac{\sqrt{3}}{3}x(x+7)=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+2)(x+5)$
$4x^2+28x=3x^2+21x+30$
$x^2+7x-30=0$
$(x-3)(x+10)=0$
$x=3$ $(x>0)$
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=7+(5+3)+(3+2)=20$

19. [출제의도] 제곱근과 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



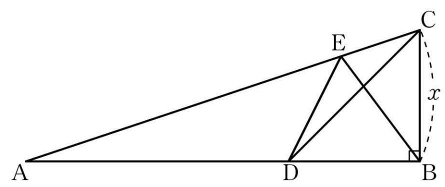
점 B가 선분 EF 위에 놓이는 점을 H라 하자.
종이가 접힌 모양에서 $\overline{HC}=\overline{BC}=4$
$\overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}=4-1=3$
직각삼각형 HFC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{HF}^2=\overline{HC}^2-\overline{FC}^2=4^2-3^2=7$
$\overline{HF}=\sqrt{7}$
$\overline{GH}=x$라 하면
종이가 접힌 모양에서 $\overline{GB}=\overline{GH}=x$
점 G에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 G′이라 하면
$\overline{G'F}=\overline{GB}=x$, $\overline{GG'}=\overline{BF}=1$
그러므로 $\overline{HG'}=\overline{HF}-\overline{G'F}=\sqrt{7}-x$
직각삼각형 GG′H에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{GH}^2=\overline{GG'}^2+\overline{HG'}^2=1^2+(\sqrt{7}-x)^2$
$x^2=1^2+(\sqrt{7}-x)^2$
$x^2=x^2-2\sqrt{7}x+8$
$2\sqrt{7}x=8$, $x=\frac{4\sqrt{7}}{7}$
즉, $\overline{GH}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$
직각삼각형 GCH에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{CG}^2=\overline{HC}^2+\overline{GH}^2$
$=4^2+\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)^2=\frac{128}{7}$
그러므로 선분 CG의 길이는 $\frac{8\sqrt{14}}{7}$ cm
따라서 $a=\frac{8\sqrt{14}}{7}$

20. [출제의도] 이차함수와 일차함수의 그래프의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.



이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축이 y축이고
점 D의 x좌표가 -2이므로 점 B의 x좌표는 2
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 제4사분면에 있는
꼭짓점 A가 직선 $x=2$ 위에 있으므로
$f(x)=a(x-2)^2+b$ $(b<0)$으로 놓을 수 있다.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점 O를 지나므로
$0=a\times(0-2)^2+b$, $b=-4a$
$f(x)=a(x-2)^2-4a$ $(a>0)$
그러므로 점 A의 좌표는 $(2, -4a)$
$g(x)=cx^2+d$ $(c<0)$이라 하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $D(-2, 0)$을 지나므로
$0=c\times(-2)^2+d$, $d=-4c$
$g(x)=cx^2-4c$
그러므로 점 C의 좌표는 $(0, -4c)$
두 점 $B(2, 0)$, $C(0, -4c)$를 지나는 직선의 기울기가
$\frac{-4c-0}{0-2}=2c$이고 y절편이 $-4c$이므로
직선의 방정식은 $y=2cx-4c$
두 점 $O(0, 0)$, $A(2, -4a)$를 지나는 직선의 기울기가
$\frac{-4a-0}{2-0}=-2a$이고 y절편이 0이므로
직선의 방정식은 $y=-2ax$
점 E에서 x축에 내린 수선의 발이 $D(-2, 0)$이므로
점 E의 x좌표는 -2
점 E가 직선 BC 위의 점이므로 점 E의 y좌표는
$2c\times(-2)-4c=-8c$
점 E가 직선 OA 위의 점이므로 점 E의 y좌표는
$-2a\times(-2)=4a$
그러므로 $-8c=4a$
$a=-2c$ ……㉠
사각형 OABC는 사다리꼴이고
$\overline{OC}=-4c$, $\overline{AB}=4a$, $\overline{OB}=2$이므로 넓이는
$\frac{1}{2}\times(\overline{OC}+\overline{AB})\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times(-4c+4a)\times2=-4c+4a$
사각형 OABC의 넓이가 9이므로
$-4c+4a=9$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $-12c=9$
$c=-\frac{3}{4}$, $a=\frac{3}{2}$
그러므로
$f(x)=\frac{3}{2}(x-2)^2-6$, $g(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$
$f(-4)=48$, $g(-4)=-9$
따라서 $f(-4)+g(-4)=48+(-9)=39$

21. [출제의도] 제곱근과 삼각형의 닮음의 성질을 이용하여 길이를 구하는 문제를 해결한다.



두 삼각형 EAD, CED의 밑변을 각각 $\overline{AE}$, $\overline{EC}$라 할 때, 두 삼각형 EAD, CED의 높이가 서로 같으므로
$\overline{AE}:\overline{EC}=\triangle EAD:\triangle CED=4:1$
$4\times\overline{EC}=\overline{AE}$
$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}$이므로
$\overline{AC}=4\times\overline{EC}+\overline{EC}$
$=5\times\overline{EC}$ ……㉠
삼각형 BCD는 $\overline{BC}=\overline{BD}$인 직각이등변삼각형이므로
$\angle BDC=45^\circ$, $\angle CDA=135^\circ$
삼각형 BCE는 $\overline{BC}=\overline{BE}$인 이등변삼각형이므로
$\angle ECB=\angle BEC$
삼각형 BED는 $\overline{BE}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이므로
$\angle BDE=\angle DEB$
사각형 BCED의 내각의 크기의 합은 360°이므로
$360^\circ=\angle CBD+\angle BDE+\angle DEC+\angle ECB$
$=\angle CBD+\angle BDE+(\angle DEB+\angle BEC)+\angle ECB$
$=90^\circ+2\times(\angle DEB+\angle BEC)$
$=90^\circ+2\angle DEC$
$\angle DEC=135^\circ$
두 삼각형 ADC, DEC에서 $\angle ACD$가 공통이고
$\angle CDA=\angle CED=135^\circ$이므로 두 삼각형 ADC, DEC는 서로 닮은 도형이다.
$\overline{AC}:\overline{DC}=\overline{DC}:\overline{EC}$, $\overline{DC}^2=\overline{AC}\times\overline{EC}$
$\overline{BC}=x$라 하면
삼각형 DBC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{DC}^2=\overline{BD}^2+\overline{BC}^2=x^2+x^2=2x^2$
$\overline{DC}=\sqrt{2}x$ ……㉡
㉠, ㉡에 의하여
$\overline{DC}^2=\overline{AC}\times\overline{EC}$
$(\sqrt{2}x)^2=(5\times\overline{EC})\times\overline{EC}$
$2x^2=5\times\overline{EC}^2$
$\overline{EC}=\frac{\sqrt{10}}{5}x$, $\overline{AC}=\sqrt{10}x$
직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=(\sqrt{10}x)^2-x^2=9x^2$
$\overline{AB}=3x$
$\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{BD}=3x-x=2x$
$\triangle ADC=\triangle EAD+\triangle CED=16+4=20$이고
$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times2x\times x=x^2$
이므로 $x^2=20$, $x=2\sqrt{5}$ $(x>0)$
따라서 삼각형 CEB의 둘레의 길이는
$\overline{CE}+\overline{EB}+\overline{BC}=\frac{\sqrt{10}}{5}x+x+x$
$=2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
$=2\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

22. [출제의도] 일차함수의 그래프를 이용하여 y절편을 계산한다.
기울기가 2이고 점 $(1, 5)$를 지나는 직선의 y절편을

k라 하면 이 직선의 방정식은 $y=2x+k$
이 직선이 점 $(1,\ 5)$를 지나므로
$5=2\times1+k,\ k=3$
따라서 구하는 직선의 y절편은 3

23. [출제의도] 제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 계산한다.

$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}=\sqrt{27}$ 이므로
$n=27$

24. [출제의도] 지수법칙을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 최댓값을 구한다.

$$\begin{aligned}(2^a\times4^a\times3^b)^n&=\{2^a\times(2^2)^a\times3^b\}^n\\&=(2^a\times2^{2a}\times3^b)^n\\&=(2^{3a}\times3^b)^n\\&=(2^{3a})^n\times(3^b)^n\\&=2^{3an}\times3^{bn}=2^{72}\times3^{36}\end{aligned}$$

$a,\ b,\ n$이 자연수이므로 $3an=72,\ bn=36$
즉, $an=24,\ bn=36$
n은 24와 36의 공약수이므로 n이 최대가 되는 경우는 24와 36의 최대공약수가 되는 경우이다.
따라서 자연수 n의 최댓값은 12

25. [출제의도] 순환소수의 표현을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 최솟값을 구한다.

$x=0.020202\cdots$ 라 하면
$100x=2.020202\cdots$
$100x-x=2,\ x=\dfrac{2}{99}$
그러므로 $p=99,\ q=2$

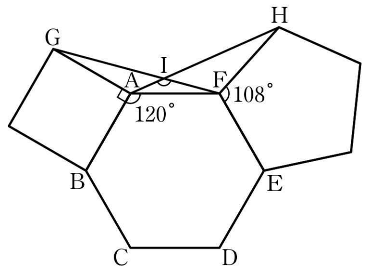
$$\begin{aligned}\frac{6}{p}\times n+\frac{q}{11}&=\frac{6}{99}n+\frac{2}{11}=\frac{2}{33}n+\frac{2}{11}=\frac{2n+6}{33}\\&=\frac{2(n+3)}{3\times11}\end{aligned}$$

자연수 n에 대하여 $\dfrac{2(n+3)}{3\times11}$이 자연수가 되기 위해서는 3과 11이 모두 $2(n+3)$의 소인수이어야 한다.
그러므로 $2(n+3)$은 33의 배수이다.
2와 33은 서로소이므로 $n+3$은 33의 배수이다.
따라서 이를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 30

26. [출제의도] 대푯값과 산포도를 이해하여 자료의 분산을 구한다.

a를 제외한 변량을 크기순으로 나열하면
$-3,\ -2,\ 1,\ 6,\ 7$
변량의 개수가 6이므로
중앙값은 세 번째 수와 네 번째 수의 평균이다.
$a\le1$이면 중앙값은 1 이하이고,
$a\ge6$이면 중앙값은 $\dfrac{1+6}{2}=3.5$이다.
그러므로 $1<a<6$이고, 중앙값은 $\dfrac{1+a}{2}$
$\dfrac{1+a}{2}=2$에서 $a=3$
자료 $-2,\ 1,\ 7,\ 6,\ -3,\ 3$의 평균은
$\dfrac{-2+1+7+6+(-3)+3}{6}=\dfrac{12}{6}=2$
편차는 각각 $-4,\ -1,\ 5,\ 4,\ -5,\ 1$
분산은 편차의 제곱의 평균이므로
$\dfrac{(-4)^2+(-1)^2+5^2+4^2+(-5)^2+1^2}{6}=\dfrac{84}{6}=14$

27. [출제의도] 평면도형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구하는 문제를 해결한다.

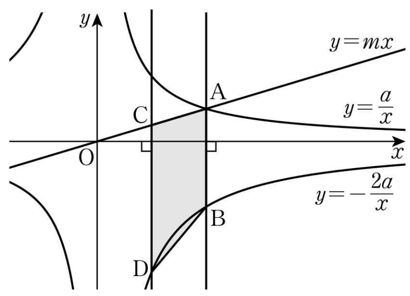


정사각형의 한 내각의 크기는 90°
정오각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$
정육각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$
$\angle\mathrm{FAG}=360^\circ-90^\circ-120^\circ=150^\circ$
$\angle\mathrm{HFA}=360^\circ-120^\circ-108^\circ=132^\circ$
주어진 정사각형과 정오각형이 각각 정육각형과 한 변을 공유하므로 주어진 정사각형, 정오각형, 정육각형의 모든 변의 길이는 같다.
그러므로 삼각형 AFG는 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AG}}$인 이등변삼각형이고, 삼각형 FHA는 $\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{FA}}$인 이등변삼각형이다.
삼각형 AFG에서
$\angle\mathrm{GFA}=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-\angle\mathrm{FAG})=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$
삼각형 FHA에서
$\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-\angle\mathrm{HFA})=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-132^\circ)=24^\circ$
삼각형 IAF에서

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{AIF}&=180^\circ-\angle\mathrm{IFA}-\angle\mathrm{FAI}\\&=180^\circ-\angle\mathrm{GFA}-\angle\mathrm{FAH}\\&=180^\circ-15^\circ-24^\circ\\&=141^\circ\end{aligned}$$

따라서 $x=141$

28. [출제의도] 정비례 관계와 반비례 관계의 그래프를 이용하여 상수의 값을 추론한다.



점 A의 좌표를 $(p,\ q)$ $(p>0,\ q>0)$라 하자.
점 $\mathrm{A}(p,\ q)$가 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $q=\dfrac{a}{p}$
점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같으므로 p
점 B가 반비례 관계 $y=-\dfrac{2a}{x}$의 그래프 위의 점이므로 점 B의 y좌표는 $-\dfrac{2a}{p}=-2q$
그러므로 점 B의 좌표는 $(p,\ -2q)$
두 점 A, C는 정비례 관계 $y=mx$의 그래프 위의 점이고, 점 C의 x좌표는 점 A의 x좌표의 $\dfrac{1}{2}$배이므로 점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표의 $\dfrac{1}{2}$배이다.
그러므로 점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$
두 점 B, D는 반비례 관계 $y=-\dfrac{2a}{x}$의 그래프 위의 점이고, 점 D의 x좌표는 점 B의 x좌표의 $\dfrac{1}{2}$배이므로 점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표의 2배이다.
그러므로 점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{p}{2},\ -4q\right)$
점 B에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{BH}}=p-\dfrac{p}{2}=\dfrac{p}{2}$
$\overline{\mathrm{AB}}=q-(-2q)=3q$
$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{q}{2}-(-4q)=\dfrac{9}{2}q$

$$\begin{aligned}\square\mathrm{ACDB}&=\triangle\mathrm{CDB}+\triangle\mathrm{ACB}\\&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BH}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BH}}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}q\times\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\times3q\times\frac{p}{2}=\frac{15}{8}pq\end{aligned}$$

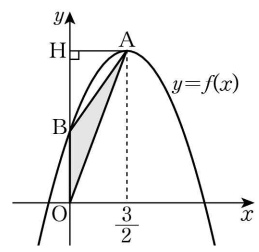
$q=\dfrac{a}{p}$에서 $pq=a$이므로
$\dfrac{15}{8}pq=\dfrac{15}{8}a=45$
따라서 $a=24$

29. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건에 맞는 이차함수의 그래프를 추론한다.

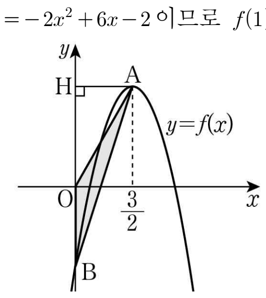
$$\begin{aligned}f(x)&=ax^2-3ax-4a^2-8a-2\\&=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-4a^2-\frac{41}{4}a-2\end{aligned}$$

그러므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점 A의 x좌표는 $\dfrac{3}{2}$
점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{3}{2}$
세 점 O, A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$
$\overline{\mathrm{OB}}=2$

(i) 점 B의 좌표가 $(0,\ 2)$인 경우
$f(0)=-4a^2-8a-2=2$
$a^2+2a+1=0,\ (a+1)^2=0$
$a=-1$
이때 $f(x)=-x^2+3x+2$이므로 $f(1)=4$

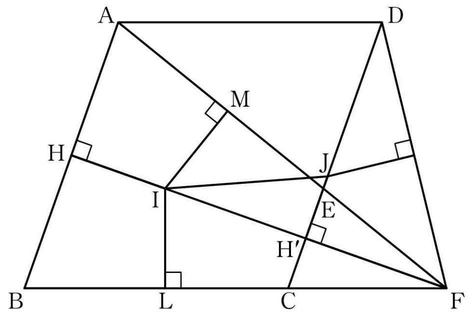


(ii) 점 B의 좌표가 $(0,\ -2)$인 경우
$f(0)=-4a^2-8a-2=-2$
$a^2+2a=0,\ a(a+2)=0$
$a=-2\ (a\neq0)$
이때 $f(x)=-2x^2+6x-2$이므로 $f(1)=2$



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값의 합은 $4+2=6$

30. [출제의도] 삼각형의 닮음과 원주각의 성질을 이용하여 삼각비의 값을 구하는 문제를 해결한다.



평행사변형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AB}}=16,\ \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=15$
$\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{CE}}=16-6=10$
두 삼각형 FEC, AED에서

$\angle CEF = \angle DEA$ (맞꼭지각), $\angle FCE = \angle ADE$ (엇각)
이므로 두 삼각형 FEC, AED는 서로 닮은 도형이다.
닮음비는 $\overline{CE} : \overline{DE} = 6 : 10 = 3 : 5$
$\overline{FC} : \overline{AD} = 3 : 5$이고 $\overline{AD} = 15$이므로 $\overline{FC} = 9$
그러므로 삼각형 FEC는 $\overline{FE} = \overline{FC} = 9$인 이등변삼각형이다. …… ㉠
두 삼각형 FEC, FAB에서
$\angle EFC$는 공통이고, $\angle FCE = \angle FBA$ (동위각)
이므로 두 삼각형 FEC, FAB는 서로 닮은 도형이다.
닮음비는 $\overline{FC} : \overline{FB} = 9 : 24 = 3 : 8$
㉠에 의하여 삼각형 FAB는 $\overline{FA} = \overline{FB} = 24$인
이등변삼각형이므로 각 AFB의 이등분선은
선분 AB를 수직이등분한다.
각 AFB의 이등분선과 선분 AB의 교점을 H라 하면
삼각형 FAB의 내심 I는 선분 FH 위에 있다.
점 I에서 두 변 BF, FA에 내린 수선의 발을
각각 L, M이라 하자.
삼각형 FAB의 내접원의 반지름의 길이를 r이라
하면 삼각형의 내심의 성질에 의하여
$\overline{IH} = \overline{IL} = \overline{IM} = r$

$$\begin{aligned}\triangle ABF &= \triangle IAB + \triangle IBF + \triangle IFA \\ &= \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r + \frac{1}{2}\times\overline{BF}\times r + \frac{1}{2}\times\overline{FA}\times r \\ &= \frac{1}{2}\times(16+24+24)\times r \\ &= 32r \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

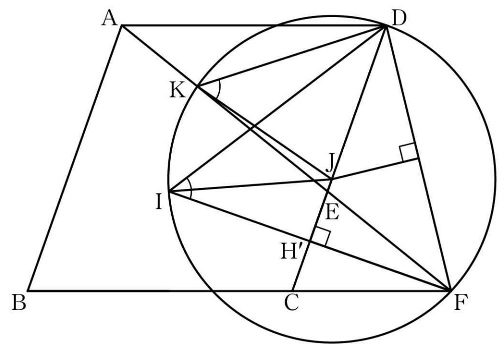
직각삼각형 FAH에서
$\overline{AH} = \frac{1}{2}\times\overline{AB} = \frac{1}{2}\times 16 = 8$, $\overline{FA} = 24$이므로
피타고라스 정리에 의하여
$\overline{FH}^2 = \overline{FA}^2 - \overline{AH}^2 = 24^2 - 8^2 = 512 = (16\sqrt{2})^2$
$\overline{FH} = 16\sqrt{2}$
그러므로

$$\begin{aligned}\triangle ABF &= \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{FH} \\ &= \frac{1}{2}\times 16\times 16\sqrt{2} = 128\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ㉢\end{aligned}$$

㉡, ㉢에서 $32r = 128\sqrt{2}$, $r = 4\sqrt{2}$
선분 FH와 선분 EC의 교점을 H′이라 할 때,
선분 FH′은 선분 EC를 수직이등분한다.
두 삼각형 FEH′, FAH에서
$\angle FH'E = \angle FHA = 90^\circ$이고, $\angle H'EF = \angle HAF$ (동위각)
이므로 두 삼각형 FEH′, FAH는 서로 닮은 도형이다.
닮음비는 $\overline{FE} : \overline{FA} = 9 : 24 = 3 : 8$
$\overline{FH'} : \overline{FH} = 3 : 8$이므로
$\overline{FH'} = \frac{3}{8}\times\overline{FH} = \frac{3}{8}\times 16\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\overline{H'I} &= \overline{FH} - \overline{IH} - \overline{FH'} = 16\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\overline{FH'} = \overline{H'I} = 6\sqrt{2}$이므로 직선 DH′은 선분 IF의
수직이등분선이다.
삼각형 DIF에서 변 FD의 수직이등분선과 변 IF의
수직이등분선의 교점이 J이므로 점 J는 삼각형 DIF
의 외심이다.



$\overline{IJ} = \overline{KJ}$이므로 점 K는 삼각형 DIF의 외접원 위에
있다. 원주각의 성질에 의하여
$\angle FKD = \angle FID$

$$\begin{aligned}\tan(\angle FKD) = \tan(\angle FID) = \tan(\angle H'ID) &= \frac{\overline{DH'}}{\overline{IH'}} \\ &= \frac{\overline{DC} - \overline{H'C}}{\overline{IH'}} \\ &= \frac{16-3}{6\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

따라서 $p = 12$, $q = 13$이므로
$p + q = 12 + 13 = 25$