수학 영역

정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	①	7	④	8	②	9	④	10	③
11	③	12	②	13	⑤	14	②	15	①
16	2	17	5	18	163	19	10	20	24
21	28	22	76						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[4]{3}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=3$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2+1$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$

3. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1\times a_{13}=a\times ar^{12}=a^2r^{12}=(ar^6)^2=64$

$ar^6=8$ ⋯ ㉠

$\dfrac{a_5}{a_2}=\dfrac{ar^4}{ar}=r^3=2$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$4a=8$, $a=2$

따라서 $a_4=ar^3=2\times 2=4$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax^3-5)=8a-5$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(ax+1)=2a+1$

$f(2)=2a+1$, $8a-5=2a+1$

따라서 $a=1$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$

$g'(1)=2f(1)+0\times f'(1)=2\times 5=10$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ 이므로

$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$

7. [출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$xf'(x)=3x^2$

$f'(x)=3x$

$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-x^3$

$x=1$일 때,

$0=1\times f(1)-1$, $f(1)=1$

$f(1)=\dfrac{3}{2}+C=1$ 이므로 $C=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(2)=6-\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_2 a+\log_4 ab=\log_4 a^2+\log_4 ab$

$=\log_4 a^3b=\dfrac{5}{2}$

$a^3b=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

두 수 a, b는 1이 아닌 자연수이므로

$32=2^3\times 4$

$a=2$, $b=4$

따라서 $a+b=6$

9. [출제의도] 정적분 이해하기

$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0}f'(x)dx$ 이므로

$f(0)-f(-1)+\int_0^1\{x^2+2x+f'(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{0}f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx+\int_0^1 f'(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}f'(x)dx+\int_0^1(x^2+2x)dx$

$=0+\left[\dfrac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

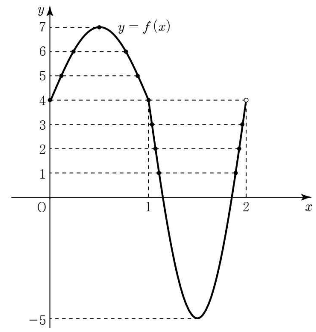
$=\left(\dfrac{1}{3}+1\right)-0=\dfrac{4}{3}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\begin{cases}3\sin\pi x+4 & (0\le x<1)\\ 9\sin\pi x+4 & (1\le x<2)\end{cases}$

두 함수 $y=3\sin\pi x+4$, $y=9\sin\pi x+4$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 자연수인 점의 개수는 13

11. [출제의도] 미분을 활용하여 속도와 가속도 문제 해결하기

시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_1-x_2|=\left|t^3-\dfrac{15}{2}t^2+12t+10\right|$

$f(t)=t^3-\dfrac{15}{2}t^2+12t+10\ (t\ge 0)$이라 하면

$f'(t)=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	⋯	1	⋯	4	⋯
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	10	↗	극대	↘	극소	↗

$t\ge 0$에서 함수 $f(t)$의 최솟값이 $f(4)=2$이므로 $f(t)>0$

$|x_1-x_2|=t^3-\dfrac{15}{2}t^2+12t+10$이고

두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=4$에서 최소이다.

시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx_1}{dt}=3t^2-10t+10$

$a(t)=v'(t)=6t-10$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a(4)=6\times 4-10=14$

12. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

$b_4=a_3+b_3$

$b_5=b_4+1=a_3+b_3+1$

$b_6=b_5+1=a_3+b_3+2$

$b_7=a_6+b_6=a_6+a_3+b_3+2$

$b_8=b_7+1=a_6+a_3+b_3+3$

$b_9=b_8+1=a_6+a_3+b_3+4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=1+2d$, $a_6=1+5d$이므로

$b_9-b_3=a_6+a_3+4=7d+6=27$

$d=3$

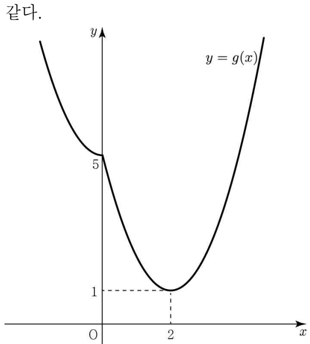
따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\times\{2\times1+(10-1)\times3\}}{2}=145$$

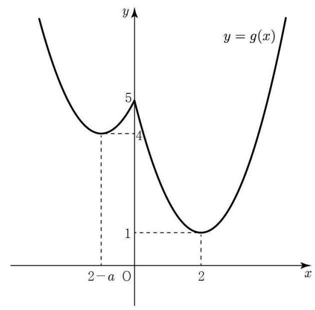
[참고]
$b_1=\alpha$ (α는 실수)라 하면
$b_3=b_1+2=\alpha+2$
$b_9=a_6+a_3+b_1+6=2+7d+\alpha+6$
$b_9-b_3=7d+6$

13. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0+} g(x)=g(0)$
$\lim_{x\to0-} g(x)=f(a)+b$
$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+} f(x)=5$
$g(0)=f(0)=5$
$f(a)+b=5$
$a^2-4a+b=0$ … ㉠
$f(x)=(x-2)^2+1$이므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 1을 갖는다.
함수 $y=f(x+a)+b$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다.
$f(x+a)+b=\{x-(2-a)\}^2+1+b$이므로
함수 $y=f(x+a)+b$는 $x=2-a$에서 최솟값 $1+b$를 갖는다.
(i) $2-a\ge0$인 경우
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



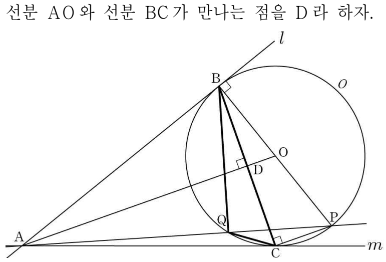
$k=4$ 또는 $k=5$일 때,
$\left|\lim_{t\to k+} h(t)-\lim_{t\to k-} h(t)\right|\ne2$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $2-a<0$인 경우
$\left|\lim_{t\to k+} h(t)-\lim_{t\to k-} h(t)\right|=2$를 만족시키는 k의 값이 1, 4, 5이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2-a)=1+b=4$, $b=3$
㉠에 의하여
$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$
$a>2$이므로 $a=3$
따라서 $g(-4)=f(-4+3)+3=10+3=13$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

직선 l과 직선 BP가 서로 수직이므로
직선 BP는 원의 중심을 지나고, 선분 BP는 원 O의 지름이다. 원 O의 중심을 O, 선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 D라 하자.



$\overline{AO}^2=\overline{AB}^2+\overline{BO}^2=12^2+(3\sqrt{2})^2=162$
$\overline{AO}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$
삼각형 AOB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BO}$
$\frac{1}{2}\times9\sqrt{2}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times12\times3\sqrt{2}$
$\overline{BD}=4$
$\overline{BC}=2\times\overline{BD}=8$
원주각의 성질에 의하여
$\angle BPQ=\angle BCQ$, $\angle QPC=\angle QBC$
$\sin(\angle BCQ):\sin(\angle QBC)=3:1$
삼각형 BQC에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle BCQ)}=\frac{\overline{QC}}{\sin(\angle QBC)}$
$\overline{BQ}:\overline{QC}=3:1$
$\overline{QC}=k\ (k>0)$이라 하면, $\overline{BQ}=3k$
삼각형 BCP는
$\angle BCP=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로
$\angle BPC=\theta$라 하면 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$
직각삼각형 BCP에서
$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}=\frac{8}{6\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$
$\cos\theta=\frac{1}{3}$
사각형 BQCP는 원 O에 내접하므로
$\angle CQB=\pi-\theta$이다.
$\cos(\angle CQB)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$
삼각형 BQC에서 코사인법칙에 의하여
$8^2=k^2+(3k)^2-2\times k\times3k\times\left(-\frac{1}{3}\right)$
$k^2=\frac{16}{3}$
따라서 삼각형 BQC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{QC}\times\sin(\angle CQB)$
$=\frac{1}{2}\times3k\times k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=k^2\times\sqrt{2}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

15. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이용하여 문제 해결하기

$$g(x)=\begin{cases}|x^2+ax+b|-x^2 & (x\le0)\\(x^2+ax+b)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

구간 $(0,\infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하므로
조건 (가)에 의하여 $b\le0$
(i) $b=0$인 경우
$f(x)=x^2+ax=x(x+a)$
$$g(x)=\begin{cases}|x(x+a)|-x^2 & (x\le0)\\x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$
① $a>0$인 경우
$$g(x)=\begin{cases}ax & (x\le-a)\\-2x^2-ax & (-a<x\le0)\\x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$
$x=-a$에서의 미분가능성을 조사하면
$\lim_{x\to-a-}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$
$=\lim_{x\to-a-}\frac{ax-(-a^2)}{x+a}=a$
$\lim_{x\to-a+}\frac{g(x)-g(-a)}{x-(-a)}$
$=\lim_{x\to-a+}\frac{(-2x^2-ax)-(-a^2)}{x+a}$
$=\lim_{x\to-a+}\frac{-(2x-a)(x+a)}{x+a}=3a$
$a>0$이므로 $a\ne3a$
함수 $g(x)$는 $x=-a$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
② $a=0$인 경우
$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\x^4+x^3 & (x>0)\end{cases}$$
$x=0$에서의 미분가능성을 조사하면
$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{0-0}{x}=0$
$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^4+x^3-0}{x}=0$
$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$
함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $a<0$ 인 경우

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\le 0) \\ x^2(x+a)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

$x<0$ 인 모든 실수 x 에 대하여
$g(x)=ax\neq 0$ 이므로 조건 (나)를
만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$ 인 경우
조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는
$x=0$ 에서 미분가능하므로 연속이다.

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$$

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=|b|=-b$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=b^2$$

$g(0)=|b|=-b$
이므로 $-b=b^2$
$b<0$ 이므로 $b=-1$ 이고, 함수 $g(x)$ 는
$x=-1$ 에서만 미분가능하지 않다.

$$g(x)=\begin{cases} \left|x^2+ax-1\right|-x^2 & (x\le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

방정식 $x^2+ax-1=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α , $\beta\,(\alpha<\beta)$ 라 하면, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-1$ 이므로
$\alpha<0<\beta$

$$g(x)=\begin{cases} ax-1 & (x\le \alpha) \\ -2x^2-ax+1 & (\alpha<x\le 0) \\ (x^2+ax-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(-2x^2-ax+1)-1}{x}$$
$$=-a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\left\{(x^2+ax-1)^2+x^3\right\}-1}{x}$$
$$=-2a$$

에서 $-a=-2a$, $a=0$

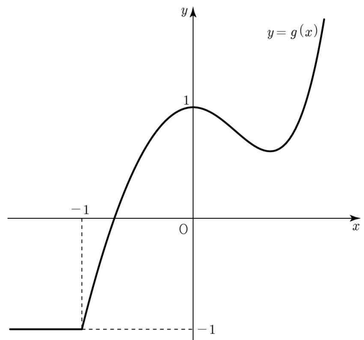
$$g(x)=\begin{cases} \left|x^2-1\right|-x^2 & (x\le 0) \\ (x^2-1)^2+x^3 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)+g(3)=\dfrac{1}{2}+91=\dfrac{183}{2}$

[참고]
$f(x)=x^2-1$

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x\le -1) \\ -2x^2+1 & (-1<x\le 0) \\ x^4+x^3-2x^2+1 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$2\log_3(x+1)=\log_3(x+7)$
$\log_3(x+1)^2=\log_3(x+7)$
$(x+1)^2=x+7$
$x^2+2x+1=x+7$
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$x=-3$ 또는 $x=2$
로그의 진수는 양수이므로
$x+1>0$, $x+7>0$
$x>-1$
따라서 $x=2$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+1)dx$
$\quad=2x^3+x+C$ (단, C 는 적분상수)
$f(0)=C=2$
$f(x)=2x^3+x+2$
따라서 $f(1)=2+1+2=5$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{19}(2a_{k+1}-b_k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{19}b_k=150 \quad \cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{19}(a_{k+1}+b_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}+\sum_{k=1}^{19}b_k=330 \quad \cdots ㉡$$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$3\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=480$, $\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=160$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{19}a_{k+1}=3+160=163$$

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가
모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 를
만족시키므로
$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a , b 는 상수)
$f'(x)=4x^3+2ax$
함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -6 을 가지므로
$f'(2)=32+4a=0$, $f(2)=16+4a+b=-6$
$a=-8$, $b=10$
$f(x)=x^4-8x^2+10$
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

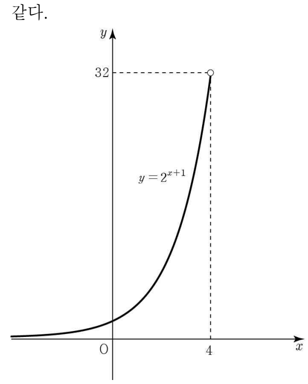
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0)=10$

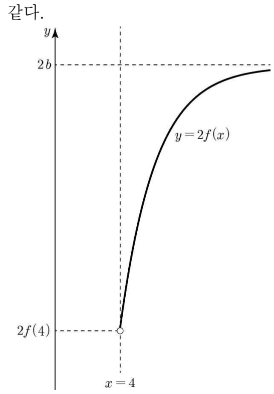
20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$$g(x)=\begin{cases} 2^{x+1} & (x<4) \\ 2f(x) & (x>4)\end{cases}$$

(i) $x<4$ 인 경우
함수 $y=2^{x+1}$ 의 그래프는
직선 $y=0$ 을 점근선으로 가지므로
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과
같다.



(ii) $x>4$ 인 경우
함수 $y=2f(x)$ 의 그래프는
직선 $y=2b$ 를 점근선으로 가지므로
함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과
같다.



조건을 만족시키기 위해서는
$2b=32$, $b=16$
$2f(4)=-2^{a-3}+2b$

$= -2^{a-3}+32=0$

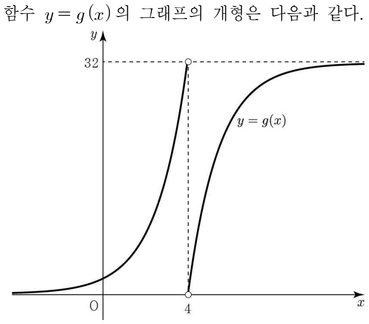
$2^{a-3}=2^5$, $a=8$

$g(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (x<4)\\ -2^{-x+9}+32 & (x>4)\end{cases}$

따라서 $g(6)=-2^3+32=24$

[참고]

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



21. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=-2x+k$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\,f(a))$에서의 접선의 방정식 $y=g(x)$는

$g(x)=(-2a+k)(x-a)-a^2+ka$

$\quad=(-2a+k)x+a^2$

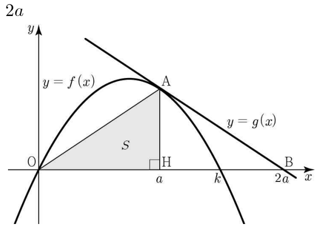
$0=(-2a+k)x+a^2$에서 $x=\dfrac{a^2}{2a-k}=b$

직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 B라 하자.

$\displaystyle\int_a^b g(x)dx=S$이므로 삼각형 BAH의 넓이와 삼각형 AOH의 넓이는 서로 같다.

점 H의 좌표는 $(a,\,0)$이고 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{BH}}$이므로

$b=2a$



$\dfrac{a^2}{2a-k}=2a$에서 $k=\dfrac{3}{2}a$

$\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}ax\right\}dx$

$\displaystyle=\int_0^a\left(-x^2+\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}ax\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^a(-x^2+ax)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a$

$=\dfrac{a^3}{6}=\dfrac{32}{3}$

$a=4$, $k=6$

$g(x)=-2x+16$

따라서 $g(-k)=g(-6)=12+16=28$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 문제 해결하기

a_n, a_{n+1}이 모두 홀수라 가정하면

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 a_{n+2}는 짝수이므로

연속하는 세 항 중 적어도 하나의 항은 짝수이다. … (★)

(ⅰ) a_4가 짝수인 경우

$a_6=6=\dfrac{1}{2}a_4$, $a_4=12$

a_4가 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2, a_3, a_5는 홀수이다.

a_2, a_3이 홀수이므로 (★)에 의하여

a_1은 짝수이다.

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$

$a_5=a_4+a_3=12+\dfrac{1}{2}a_1$

$a_4=a_3+a_2=\dfrac{1}{2}a_1+a_2=12$

$a_2=12-\dfrac{1}{2}a_1$

a_2가 홀수이므로

$\dfrac{1}{2}a_1$은 11 이하의 홀수이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	11	1	12	13	6
6	9	3	12	15	6
10	7	5	12	17	6
14	5	7	12	19	6
18	3	9	12	21	6
22	1	11	12	23	6

주어진 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은

2, 6, 10, 14, 18, 22이다.

(ⅱ) a_4가 홀수인 경우

$a_6=6=a_5+a_4$에서

a_4, a_5가 홀수이므로 (★)에 의하여

a_3은 짝수이다.

$a_5=\dfrac{1}{2}a_3$에서 $a_4=6-\dfrac{1}{2}a_3$

a_3이 짝수이므로 조건 (나)에 의하여

a_2는 홀수이다.

$a_4=a_3+a_2$에서

$6-\dfrac{1}{2}a_3=a_3+a_2$이므로 $a_3=4-\dfrac{2}{3}a_2$

a_3이 자연수이므로 $a_2=3$, $a_3=2$

a_1이 홀수이면 $a_3=a_2+a_1$

$2=3+a_1$이므로 a_1은 자연수가 아니다.

그러므로 a_1은 짝수이고

$a_3=\dfrac{1}{2}a_1$, $a_1=4$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
4	3	2	5	1	6

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+10+14+18+22)+4=76$

확률과 통계 정답

23	④	24	①	25	③	26	②	27	①
28	②	29	285	30	34				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 중복순열 계산하기

${}_4\Pi_3=4^3=64$

24. [출제의도] 배반사건의 성질 이해하기

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\quad=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$\frac{9}{10}=\frac{2}{5}+\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

25. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수 중 적어도 하나가 8의 약수인 사건을 X라 하자.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}\mathrm{C}_2=66$

8의 약수가 4개이므로 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 모두 8의 약수가 아닌 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

따라서 구하고자 하는 사건의 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)$

$\quad=1-\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=1-\frac{28}{66}=\frac{19}{33}$

26. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수 이해하기

다항식 $(2+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r\times 2^{5-r}\times x^r\ (r=0,1,2,3,4,5)$

$(1+ax)(2+x)^5$의 전개식에서

x^3의 계수는

$1\times{}_5\mathrm{C}_3\times 2^2+a\times{}_5\mathrm{C}_2\times 2^3=40+80a$

x^4의 계수는

$1\times{}_5\mathrm{C}_4\times 2+a\times{}_5\mathrm{C}_3\times 2^2=10+40a$

x^3의 계수와 x^4의 계수의 합이 290이므로

$(40+80a)+(10+40a)=290$

$50+120a=290$

따라서 $a=2$

27. [출제의도] 이산확률변수의 확률분포 이해하기

$\mathrm{P}(X=k+2)-\mathrm{P}(X=k)=\frac{(-1)^k}{4}$ 에서

$k=1$일 때, $\mathrm{P}(X=3)-\mathrm{P}(X=1)=-\frac{1}{4}$

$k=2$일 때, $\mathrm{P}(X=4)-\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=a$, $\mathrm{P}(X=2)=b$라 하면

$\mathrm{P}(X=3)=a-\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=4)=b+\frac{1}{4}$

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$a-\frac{1}{4}$	$b+\frac{1}{4}$	1

이산확률변수의 확률분포의 성질에 의하여 확률의 합이 1이므로

$a+b+\left(a-\frac{1}{4}\right)+\left(b+\frac{1}{4}\right)=1$

$a+b=\frac{1}{2}\ \cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X)$

$\quad=1\times a+2\times b+3\times\left(a-\frac{1}{4}\right)+4\times\left(b+\frac{1}{4}\right)$

$\quad=4a+6b+\frac{1}{4}=\frac{21}{8}$

$4a+6b=\frac{19}{8}\ \cdots$ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$a=\frac{5}{16}$, $b=\frac{3}{16}$

따라서 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{16}$

28. [출제의도] 중복조합의 수를 활용하여 추론하기

$n=4, 5, 6$일 때,

$f(f(n))=n$을 만족시키는 경우는

$f(n)=n$ 또는

$f(n)=m$, $f(m)=n\ (n\neq m,\ m\in X)\ \cdots$ (★)

(ⅰ) $f(4)<4$인 경우

$f(4)=a\ (a<4)$라 하면

(★)에 의하여 $f(a)=4$

$f(4)<f(a)$이므로

조건 (가)를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(4)=4$인 경우

조건 (가)에 의하여

$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le 4$이므로

세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_3$

$f(5)=b$라 하면

(★)에 의하여 $f(b)=5$이므로 $b\neq 4$

$f(b)=5>f(4)=4$이므로

조건 (가)에 의하여 $b>4$

그러므로 $b=5$ 또는 $b=6$

① $f(5)=5$인 경우

$f(6)=c$라 하면

(★)에 의하여 $f(c)=6$이므로 $c\neq 5$

$f(c)=6>f(4)=4$이므로

조건 (가)에 의하여 $c>4$

그러므로 $c=6$

$f(4)=4$, $f(5)=5$, $f(6)=6$이므로

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3\times 1={}_6\mathrm{C}_3=20$

② $f(5)=6$인 경우

(★)에 의하여 $f(6)=5$

그러므로 $f(4)=4$, $f(5)=6$, $f(6)=5$

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3\times 1={}_6\mathrm{C}_3=20$

①, ②에 의하여 $f(4)=4$일 때, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$20+20=40$

(ⅲ) $f(4)=5$인 경우

$1\le f(1)\le f(2)\le f(3)\le 5$이므로

세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$

(★)에 의하여 $f(5)=4$

$f(6)=c$라 하면

(★)에 의하여 $f(c)=6$이므로 $c\neq 5$

$f(c)=6>f(4)=5$이므로

조건 (가)에 의하여 $c>4$

그러므로 $c=6$

$f(4)=5$, $f(5)=4$, $f(6)=6$이므로

조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_3\times 1={}_7\mathrm{C}_3=35$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$40+35=75$

29. [출제의도] 정규분포의 표준화를 활용하여 문제 해결하기

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(80, 5^2)$을 따르므로 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때

$\mathrm{P}(b\le X\le 75)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{b-80}{5}\le Z\le\frac{75-80}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{b-80}{5}\le Z\le -1\right)$

$=\mathrm{P}\left(1\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)-0.3413=0.1359$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-b}{5}\right)=0.4772$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{80-b}{5}=2$, $b=70$

$Y=-2X+a$이므로

$\mathrm{P}(a-160\le Y\le b)$

$=\mathrm{P}(a-160\le -2X+a\le 70)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a-70}{2}\le X\le 80\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{a-70}{2}-80}{5}\le Z\le\frac{80-80}{5}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{a-230}{10}\le Z\le 0\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{230-a}{10}\right)=0.4332$

주어진 표준정규분포표를 이용하면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{230-a}{10}=1.5$, $a=215$

따라서 $a+b=215+70=285$

[다른 풀이]
확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 5^2)$을 따르므로
$Y=-2X+a$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(-2X+a)\\&=-2\mathrm{E}(X)+a\\&=-160+a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sigma(-2X+a)\\&=2\sigma(X)\\&=10\end{aligned}$$

이므로 확률변수 $Y=-2X+a$는
정규분포 $\mathrm{N}(a-160,\ 10^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(a-160\le Y\le b)\\&=\mathrm{P}(a-160\le Y\le 70)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{(a-160)-(a-160)}{10}\le Z\le\frac{70-(a-160)}{10}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{230-a}{10}\right)=0.4332\end{aligned}$$

주어진 표준정규분포표를 이용하면
$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로
$\frac{230-a}{10}=1.5$, $a=215$
따라서 $a+b=215+70=285$

30. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

시행을 한 번 하여 두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드 중 같은 숫자가 적힌 카드가 있는 사건을 X, 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 사건을 Y라 하자.

(Ⅰ) k가 3의 배수인 경우
주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸 후 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=36$
같은 숫자가 적힌 카드가 있는 경우의 수는
① 같은 숫자가 적힌 카드가 1쌍일 때,
${}_3\mathrm{C}_1\times({}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1-2)=21$
② 같은 숫자가 적힌 카드가 2쌍일 때,
${}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=3$
k가 3의 배수일 때
같은 숫자가 적힌 카드가 있을 확률은
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{21}{36}+\frac{3}{36}\right)=\frac{2}{9}$

(Ⅱ) k가 3의 배수가 아닌 경우
주머니 A에서 임의로 1장의 카드를 꺼낸 후 주머니 B에서 임의로 1장의 카드를 꺼내는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$
이 중 같은 숫자가 적힌 카드를 꺼내는 경우는 같은 숫자가 적힌 카드가 1쌍인 경우이므로 꺼내는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=3$
k가 3의 배수가 아닐 때
같은 숫자가 적힌 카드가 있을 확률은
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{1}{8}$

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여
$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=\frac{25}{72}$ … ㉠

(ⅰ) k가 3의 배수인 경우
같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$
k가 3의 배수일 때
같은 숫자가 적힌 카드가 있고
숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은
$\frac{1}{3}\times\frac{9}{36}=\frac{1}{12}$

(ⅱ) k가 3의 배수가 아닌 경우
같은 숫자가 적힌 카드가 있고 숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2인 경우의 수는
${}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=1$
k가 3의 배수가 아닐 때
같은 숫자가 적힌 카드가 있고
숫자 4가 적힌 카드의 개수가 2일 확률은
$\frac{2}{3}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{24}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{25}{72}}=\frac{9}{25}$$

$p=25$, $q=9$
따라서 $p+q=34$

미적분 정답

23	①	24	④	25	③	26	②	27	⑤
28	②	29	16	30	72				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{7x}-1}{7x}\times7\right)=7$

24. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$x=t+\sin t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=1+\cos t$

$y=-4\cos t+2\sin^2 t$에서

$\dfrac{dy}{dt}=4\sin t+4\sin t\cos t$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{4\sin t(1+\cos t)}{1+\cos t}=4\sin t$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{3}$일 때,

$\dfrac{dy}{dx}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n}+1}$

(ⅰ) $0<\dfrac{x}{5}<1$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n}=0$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n}+1}=2x$

$f(k)=2k=5$에서 $k=\dfrac{5}{2}$

(ⅱ) $\dfrac{x}{5}=1$인 경우

$x=5$이므로

$f(5)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2\times5}{1+1}=\dfrac{11}{2}$

$f(5)\neq5$

(ⅲ) $\dfrac{x}{5}>1$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n}=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n}}=0$

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{5}+\dfrac{2x}{\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n}}}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{5}\right)^{n}}}=\dfrac{x}{5}$

$f(k)=\dfrac{k}{5}=5$에서 $k=25$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$f(k)=5$인 모든 양수 k의 값의 합은

$\dfrac{5}{2}+25=\dfrac{55}{2}$

26. [출제의도] 부분적분법 이해하기

직선 AP의 기울기 $f(t)=\dfrac{\dfrac{\ln t}{t}-1}{t-0}=\dfrac{\ln t-t}{t^2}$

$$\begin{aligned}\int_1^e f(t)dt&=\int_1^e\frac{\ln t-t}{t^2}dt=\int_1^e\left(\frac{\ln t}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt\\&=\int_1^e\frac{\ln t}{t^2}dt-\int_1^e\frac{1}{t}dt\\&=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{t^2}dt-\Big[\ln t\Big]_1^e\\&=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^e-1\\&=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)-1=-\frac{2}{e}\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\int_1^e f(t)dt=-\frac{2}{e}$

27. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{f'(x)e^{f(x)}-\{f(x)+k\}f'(x)e^{f(x)}}{\left\{e^{f(x)}\right\}^2}\\&=\frac{f'(x)\{1-k-f(x)\}}{e^{f(x)}}\end{aligned}$$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극대이므로 $g'(3)=0$

$f'(3)=0$ 또는 $f(3)=1-k$

함수 $f(x)$가 이차함수이므로 $f'(3)=0$이면

$k\neq0$인 실수 k에 대하여

$f(3)\neq f(3-2k)$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(3)\neq0$이고 $f(3)=1-k$

$g(3)=\dfrac{f(3)+k}{e^{f(3)}}=\dfrac{1}{e^{1-k}}=e^{k-1}$

$g(3)=e$이므로 $k=2$

$f(3)=f(-1)=-1$

그러므로 $f(x)+1=(x+1)(x-3)$

$f(x)=x^2-2x-4$, $f(2)=-4$

따라서 $g(k)=g(2)=\dfrac{f(2)+2}{e^{f(2)}}=-2e^4$

28. [출제의도] 함수의 그래프 추론하기

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ln(-x)}{x^2} & (x<0)\\ -2x+2 & (x>0)\end{cases}$

$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-3+2\ln(-x)}{x^3} & (x<0)\\ -2 & (x>0)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\ln(-x)}{x}=\infty$

$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$-e$	$\cdots$	(0)
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	↘	변곡점	↖	극소	↙	

$0<t<2$인 t에 대하여 곡선 $y=\dfrac{\ln(-x)}{x}$와

직선 $y=tx+k$가 접할 때 k의 값을 b라 하자.

$x<0$에서 곡선 $y=\dfrac{\ln(-x)}{x}$와 직선

$y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는

$\begin{cases}k<b\text{일 때,} & 0\\ k=b\text{일 때,} & 1\\ k>b\text{일 때,} & 2\end{cases}$

이다.

곡선 $y=-x^2+2x+a$ 위의 점 $(0,\,a)$에서 접선의 기울기는 2이므로

$k\geq a$인 모든 실수 k에 대하여

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2이기 위해서는

곡선 $y=-x^2+2x+a\ (x\geq0)$과

직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가

$\begin{cases}a\leq k<b\text{일 때,} & 2\\ k=b\text{일 때,} & 1\\ k>b\text{일 때,} & 0\end{cases}$

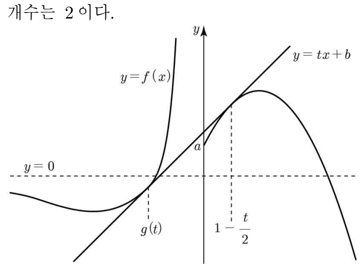
이어야 한다.

즉, 직선 $y=tx+b$가 두 곡선

$y=\dfrac{\ln(-x)}{x}\ (x<0)$, $y=-x^2+2x+a\,(x\geq0)$

에 동시에 접할 때, $k\geq a$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=tx+k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.



$x<0$에서 직선 $y=tx+b$는

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(g(t),\,f(g(t)))$에서의 접선이므로 $f'(g(t))=t$ ⋯ ㉠

$x>0$에서

$f'(x)=-2x+2=t$이므로 $f'\left(1-\dfrac{t}{2}\right)=t$

곡선 $y=-x^2+2x+a$ 위의

점 $\left(1-\dfrac{t}{2},\,a+1-\dfrac{t^2}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=tx+b$와 같다.

두 점 $(g(t),\,f(g(t)))$, $\left(1-\dfrac{t}{2},\,a+1-\dfrac{t^2}{4}\right)$을

지나는 직선의 기울기가 t이므로

$t=\dfrac{\left(a+1-\dfrac{t^2}{4}\right)-f(g(t))}{\left(1-\dfrac{t}{2}\right)-g(t)}$

$t-\dfrac{t^2}{2}-t\times g(t)=a+1-\dfrac{t^2}{4}-f(g(t))$

$h(t)=a=f(g(t))-t\times g(t)-\dfrac{t^2}{4}+t-1$

㉠에 의하여

$$\begin{aligned}h'(t)&\\&=f'(g(t))\times g'(t)-g(t)-t\times g'(t)-\frac{t}{2}+1\\&=t\times g'(t)-g(t)-t\times g'(t)-\frac{t}{2}+1\\&=-g(t)-\frac{t}{2}+1\end{aligned}$$

$g(t)+h'(t)=-\dfrac{t}{2}+1$

따라서 $g(1)+h'(1)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

[참고]

$f'(g(1))=1$ 에서 $\dfrac{1-\ln\{-g(1)\}}{\{g(1)\}^2}=1$

$g(1)=-1,\ h'(1)=\dfrac{3}{2}$

[다른 풀이]

$x\ge 0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=tx+k$ 의 접점을 $(s,\ -s^2+2s+a)$ 라 하면 접선의 방정식은

$y=(-2s+2)(x-s)-s^2+2s+a$

$\ =(-2s+2)x+s^2+a$

직선 $y=(-2s+2)x+s^2+a$ 가

직선 $y=tx+b$ 와 일치하므로

$t=-2s+2,\ b=s^2+a$ 에서

$h(t)=a=b-s^2$

$h'(t)=\dfrac{da}{dt}=\dfrac{db}{dt}-2s\dfrac{ds}{dt}$ ⋯ ㉠

점 $(g(t),\ f(g(t)))$ 는

직선 $y=tx+b$ 위의 점이므로

$f(g(t))=t\times g(t)+b$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=g(t)+t\times g'(t)+\dfrac{db}{dt}$

$f'(g(t))=t$ 이므로 $\dfrac{db}{dt}=-g(t)$

$g(t)=-\dfrac{db}{dt}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$g(t)+h'(t)=-2s\dfrac{ds}{dt}$

$x>0$ 일 때, 직선 $y=tx+b$ 가

곡선 $y=-x^2+2x+a$ 와

점 $(s,\ -s^2+2s+a)$ 에서 접하므로

$t=-2s+2$ 에서

$s=1-\dfrac{t}{2}$ 이고 $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$t=1$ 일 때, $s=\dfrac{1}{2}$

따라서 $g(t)+h'(t)=-2s\dfrac{ds}{dt}$

$$=-2\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

$b_n=|a_n+1|-(a_n+1)$이라 하면

$$b_n=\begin{cases}0 & (a_n+1\ge 0)\\ -2(a_n+1) & (a_n+1<0)\end{cases}$$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_n=a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ (단, n은 자연수)

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge -1$이면

$b_n=0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a\ge 3$

n이 홀수일 때, $b_n=0$

n이 짝수일 때, $a_n<-1$ 을 만족시키는

최대의 자연수 n을 N이라 하자.

(Ⅰ) $n>N$인 경우

$a_n+1\ge 0$ 이므로 $b_n=0$

(Ⅱ) $n\le N$인 경우

$a_n+1<0$ 이므로

$b_n=-2(a_n+1)$

$=-2\left\{a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-2$

이고

$a_N<-1\le a_{N+2}$

$a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{N-1}<-1\le a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{N+1}$

$-1\times(-2)^{N-1}<a\le -1\times(-2)^{N+1}$

$2^{N-1}<a\le 2^{N+1}$

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $N=2$ 인 경우

$2<a\le 2^3$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_2=-2(a_2+1)=a-2$

$a-2\le 2^3-2=6$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\le 6$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $N=4$ 인 경우

$2^3<a\le 2^5$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_2+b_4$

$=-2(a_2+1)-2(a_4+1)$

$=(a-2)+\left(\dfrac{1}{4}a-2\right)=\dfrac{5}{4}a-4$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{5}{4}a-4=26$ 에서 $a=24$

(ⅲ) $N\ge 6$ 인 경우

$a>2^5$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n>b_2+b_4=\dfrac{5}{4}a-4$

$\dfrac{5}{4}a-4>\dfrac{5}{4}\times 2^5-4=36$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n>36$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $a=24$

등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 24 이고 공비가 $-\dfrac{1}{2}$

$a_n=24\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{24}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=16$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=16$

30. [출제의도] 치환적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{\cos\pi t}dt$ 에서 $f(0)=0$

$f'(x)=e^{\cos\pi x}$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x+2)=f'(x)$ ⋯ ㉠

$f'(-x)=f'(x)$ ⋯ ㉡

㉠에 의하여

$f(x+2)=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

$f(2)=f(0)+C=C$ 이므로

$f(x+2)=f(x)+f(2)$

$f(2)=\displaystyle\int_0^2 e^{\cos\pi t}dt$

$=\displaystyle\int_0^2 f'(t)dt$

$=\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt+\int_1^2 f'(t)dt$

$=f(1)+\displaystyle\int_{-1}^0 f'(t)dt$

㉡에 의하여 $\displaystyle\int_{-1}^0 f'(t)dt=\int_0^1 f'(t)dt$ 이므로

$f(2)=f(1)+\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt$

$=f(1)+f(1)=2f(1)$

$h(g(t)+2)=2t^3+6f(1)t^2+1$

$x=g(t)+2$로 치환하면 $1=g'(t)\dfrac{dt}{dx}$

$g(t)=x-2$ 에서 $t=f(x-2)$

$x=3$ 일 때 $t=f(1)$

$x=7$ 일 때 $t=f(5)$

이고

$h'(g(t)+2)g'(t)=6t^2+12f(1)t$ 이므로

$\displaystyle\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx=\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{h'(g(t)+2)}{f(g(t)+2)}g'(t)dt$

$=\displaystyle\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{6t^2+12f(1)t}{f(g(t))+f(2)}dt$

$=\displaystyle\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{6t\{t+2f(1)\}}{t+2f(1)}dt$

$=\displaystyle\int_{f(1)}^{f(5)}6tdt$

$=3\times\left[t^2\right]_{f(1)}^{f(5)}$

$=3\times\left[\{f(5)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$f(5)=f(3)+f(2)$

$=\{f(1)+f(2)\}+f(2)=5f(1)$

이므로

$\displaystyle\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx=3\times\left[\{5f(1)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$=72\times\{f(1)\}^2$

따라서 $k=72$

[다른 풀이]

$g(f(x))=x$ 이므로

$h(x+2)=2\{f(x)\}^3+6f(1)\{f(x)\}^2+1$

$h'(x+2)=6\{f(x)\}^2f'(x)+12f(1)f(x)f'(x)$

$x=t+2$ 라 하면

$\displaystyle\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx$

$=\displaystyle\int_1^5\frac{h'(t+2)}{f(t+2)}dt$

$=\displaystyle\int_1^5\frac{6\{f(t)\}^2f'(t)+12f(1)f(t)f'(t)}{f(t)+f(2)}dt$

$=\displaystyle\int_1^5\frac{6f(t)f'(t)\{f(t)+2f(1)\}}{f(t)+2f(1)}dt$

$=\displaystyle\int_1^5 6f(t)f'(t)dt$

$=3\times\left[\{f(5)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$f(5)=f(3)+f(2)$

$=\{f(1)+f(2)\}+f(2)=5f(1)$

이므로

$\displaystyle\int_3^7\frac{h'(x)}{f(x)}dx=3\times\left[\{5f(1)\}^2-\{f(1)\}^2\right]$

$=72\times\{f(1)\}^2$

따라서 $k=72$

기하 정답

23	③	24	①	25	④	26	③	27	②
28	⑤	29	12	30	25				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합 계산하기

$\vec{a}=(-6,\ 0)$, $\vec{b}=(k,\ 2)$에 대하여

$\vec{a}+2\vec{b}=(-6,\ 0)+(2k,\ 4)$

$=(-6+2k,\ 4)=(0,\ 4)$이므로

$-6+2k=0$

따라서 $k=3$

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의

접선의 방정식은 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{8}=1$

$y=-2x+4$

따라서 y절편은 4

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$\{(x,\ y)-(3,\ 4)\}\cdot(-3,\ 6)=0$

$-3(x-3)+6(y-4)=0$

$x-2y+5=0$

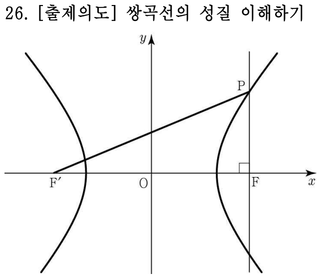
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과

직선 $x-2y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은 $\sqrt{5}$

26. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기



다른 한 초점을 $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이라 하면

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=8$

$\overline{\mathrm{PF}'}=\overline{\mathrm{PF}}+8=5+8=13$

삼각형 PFF'은 직각삼각형이므로

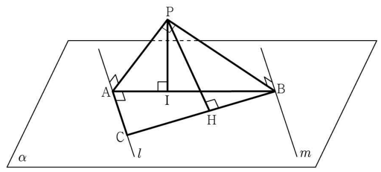
$\overline{\mathrm{FF}'}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$2c=12$, $c=6$

따라서 $b^2=6^2-4^2=20$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{\mathrm{PI}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PA}}\perp l$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IA}}\perp l$ ⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{PI}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PB}}\perp m$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IB}}\perp m$ ⋯ ㉡

평면 α 위의 두 직선 l, m이 서로 평행이므로

㉠, ㉡에 의하여

세 점 A, B, I는 한 직선 위에 있다.

$\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{BA}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BA}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$에 의하여

두 삼각형 ABP와 CBA는 서로 닮음이다.

$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{BPA}=\dfrac{\pi}{2}$

삼각형 ABP에서

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=3^2+(3\sqrt{2})^2=27$

$\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{3}$

삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PI}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PI}}\times3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PI}}=\sqrt{6}$

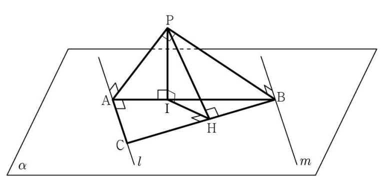
삼각형 BPI에서

$\overline{\mathrm{BI}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{PI}}^2=(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2=12$

$\overline{\mathrm{BI}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PI}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{IH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$



두 삼각형 ABP, CBA는 서로 닮음이고

두 삼각형 IBH, CBA는 서로 닮음이므로

두 삼각형 ABP, IBH는 서로 닮음이다.

그러므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{IH}}}{\overline{\mathrm{IB}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$

$\overline{\mathrm{IH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{IB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{3\times2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=2$

삼각형 PIH에서

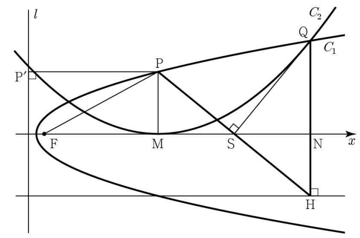
$\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{PI}}^2+\overline{\mathrm{IH}}^2=(\sqrt{6})^2+2^2=10$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{10}$

28. [출제의도] 포물선의 성질을 활용하여 문제 해결하기

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 M,

선분 QH와 x축의 교점을 N이라 하자.



점 Q가 포물선 C_2 위의 점이므로

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QH}}$

그러므로 삼각형 PHQ는

$\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QH}}=5\sqrt{6}$인 이등변삼각형이다.

점 Q에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{HS}}=2\sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{QS}}^2=\overline{\mathrm{QH}}^2-\overline{\mathrm{HS}}^2=(5\sqrt{6})^2-(2\sqrt{15})^2=90$

$\overline{\mathrm{QS}}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

삼각형 QPH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{QS}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QH}}\times\overline{\mathrm{MN}}$

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{15}\times3\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{6}\times\overline{\mathrm{MN}}$

$\overline{\mathrm{MN}}=12$ ⋯ ㉠

두 삼각형 PMS, HNS에서

$\angle\mathrm{PMS}=\angle\mathrm{HNS}=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{HS}}$,

$\angle\mathrm{PSM}=\angle\mathrm{HSN}$이므로

두 삼각형 PMS, HNS는 서로 합동이다.

$\overline{\mathrm{MS}}=\overline{\mathrm{NS}}=6$, $\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{HS}}=2\sqrt{15}$

이므로

$\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PS}}^2-\overline{\mathrm{MS}}^2=(2\sqrt{15})^2-6^2=24$

$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{HN}}=2\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{QN}}=\overline{\mathrm{QH}}-\overline{\mathrm{HN}}=5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

두 점 M, N의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자.

두 점 P, Q는 포물선 C_1 위의 점이므로

$24=4px_1$, $54=4px_2$에서 $x_1=\dfrac{6}{p}$, $x_2=\dfrac{27}{2p}$

㉠에 의하여

$x_2-x_1=\dfrac{15}{2p}=12$에서 $p=\dfrac{5}{8}$

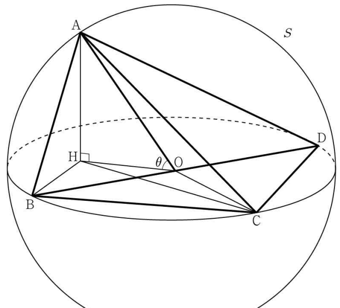
포물선 C_1의 준선을 l이라 할 때,

점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 P′이라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PP}'}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PP}'}=p+x_1=\dfrac{5}{8}+\dfrac{48}{5}=\dfrac{409}{40}$

29. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기



점 A 에서 평면 BCD 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 ABD 의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 HBD 이다.

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{5} = \dfrac{3}{5}$

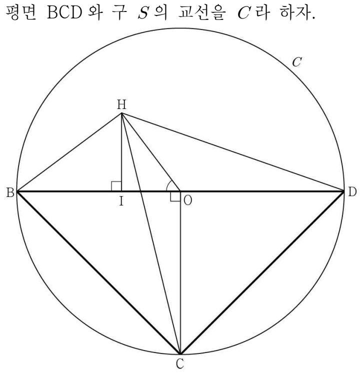
$\overline{\mathrm{OH}} = 3$, $\overline{\mathrm{AH}} = 4$

$\angle\mathrm{AHC} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{CH}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2 = (\sqrt{74})^2 - 4^2 = 58$

$\overline{\mathrm{CH}} = \sqrt{58}$

평면 BCD 와 구 S 의 교선을 C 라 하자.



삼각형 OHC 에서

$\cos(\angle\mathrm{HOC}) = \dfrac{3^2+5^2-(\sqrt{58})^2}{2\times3\times5} = -\dfrac{24}{30} = -\dfrac{4}{5}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}}$ 이므로

삼각형 BCD 는 직각이등변삼각형이고

$\angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{HOB} = \angle\mathrm{HOC} - \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\sin(\angle\mathrm{HOB}) = \sin\left(\angle\mathrm{HOC} - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos(\angle\mathrm{HOC}) = \dfrac{4}{5}$

점 H 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 I 라 하면

$\overline{\mathrm{HI}} = \overline{\mathrm{OH}} \times \sin(\angle\mathrm{HOB}) = 3\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{12}{5}$

따라서 삼각형 HBD 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{HI}} = \dfrac{1}{2}\times10\times\dfrac{12}{5} = 12$

30. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

두 선분 AC 와 BD 의 교점을 O 라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$

$= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}-4\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$

$= |(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})-4\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$

$= |-4\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 4|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 = (\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})$

$= |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2$

$-2|\overrightarrow{\mathrm{CD}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos(\angle\mathrm{BCD})$

$= 6^2+4^2-2\times6\times4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

$= 64$

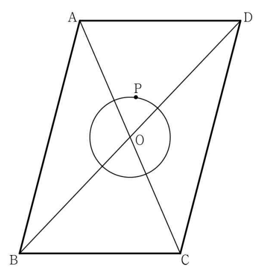
$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = 8$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ 에서

$4|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = 4$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 1$

점 P 는 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원 위의 점이다.



$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$= \overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$= \overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$

$= \overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$= (\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - 2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}) + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$

$= 16 - 2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}) + 1$

$= 17 - 2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})$

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = 8$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ 라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}} = 17 - 2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$

$= 17 - 2\times4\times1\times\cos\theta$

$= 17 - 8\cos\theta$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ 의 최댓값은 $\theta = \pi$ 일 때,

$17 - 8\cos\pi = 25$

[참고]

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} - (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\overrightarrow{\mathrm{OP}}$