2026학년도 대학수학능력시험 대비

2025학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	⑤	3	④	4	①	5	①
6	⑤	7	⑤	8	②	9	③	10	②
11	③	12	②	13	④	14	①	15	④
16	6	17	14	18	120	19	11	20	3
21	81	22	63						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$\sqrt[3]{3}\times 9^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{3}}\times(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=3^1=3$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=3x^2+2$ 이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=5$

3. [출제의도] 등비수열을 이해하여 수열의 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1a_3=2a_2a_4$ 이므로

$8\times 8r^2=2\times 8r\times 8r^3$

$r^2=2r^4$

$2r^4-r^2=r^2(2r^2-1)=0$

$r\neq 0$ 이므로 $r^2=\frac{1}{2}$

따라서 $a_5=a_1\times r^4=a_1\times(r^2)^2=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=2$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수를 구한다.

$\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}(x^2+a)=9+a$

$\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(x+2a)=3+2a$

$f(3)=3+2a$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=f(3)$

$9+a=3+2a$, $a=6$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=(2x-1)(2x^2-5)+(x^2-x)\times 4x$

$f'(2)=3\times 3+2\times 8=25$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta=-2$ 에서 $\tan\theta=2$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$ 에서 $\sin\theta=2\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에서

$4\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos\theta<0$, $\sin\theta<0$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로 $\sin\theta=2\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\cos\theta-\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. [출제의도] 접선의 방정식을 이해하여 접선의 y절편을 구한다.

$f(x)=x^3-6x+7$이라 하자. $f'(x)=3x^2-6$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-3$

접선의 방정식은 $y=-3(x-1)+2$, $y=-3x+5$

따라서 접선의 y절편은 5

8. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 로그의 값을 구한다.

$a-b=(3a+b)-2(a+b)$

$=\log_3 45-2\log_9 5$

$=\log_3 45-2\times\frac{1}{2}\log_3 5$

$=\log_3\frac{45}{5}=\log_3 3^2=2$

9. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 두 점 사이의 거리를 구한다.

두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=-3t^2+14t-10$, $v_2=2t+2$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$-3t^2+14t-10=2t+2$

$3t^2-12t+12=0$

$3(t-2)^2=0$

$t=2$

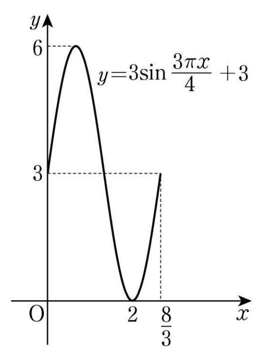
두 점 P, Q의 시각 $t=2$에서의 위치는 각각 0, 8이므로 시각 $t=2$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는 8

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 추론한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=3\sin\frac{\pi x}{a}$의 그래프를 y축의 방향으로 $b\,(b>0)$만큼 평행이동한 것이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 오직 한 점에서 만나므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다. 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3a}{2}$일 때, 최솟값 0을 가지므로 $\frac{3a}{2}=2$, $a=\frac{4}{3}$이고

$f\left(\frac{3a}{2}\right)=-3+b=0$, $b=3$

따라서 $a+b=\frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}$



11. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이해하여 함숫값을 구한다.

$(x+3)f(x)=\int_{-3}^{x}(4f(t)-2t^2)dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+3)f'(x)=4f(x)-2x^2$ …… ㉠

$(x+3)f'(x)=3f(x)-2x^2$

세 실수 $a\,(a\neq 0)$, b, c에 대하여

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$(x+3)f'(x)=(x+3)(2ax+b)$

$=2ax^2+(6a+b)x+3b$

$3f(x)-2x^2=(3a-2)x^2+3bx+3c$

㉠에서 항등식의 성질에 의해 $a=2$, $b=6$, $c=6$

따라서 $f(x)=2x^2+6x+6$이므로 $f(2)=26$

12. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 수열의 합의 최댓값과 최솟값의 차를 구한다.

$3{a_n}^2+2na_n-8n^2=0$에서 $(3a_n-4n)(a_n+2n)=0$

$a_n=\frac{4}{3}n$ 또는 $a_n=-2n$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이므로

자연수 k에 대하여

$$a_n=\begin{cases}-6k+4 & (n=3k-2)\\ -6k+2 & (n=3k-1)\\ -6k \text{ 또는 } 4k & (n=3k)\end{cases}$$

$-6k<0$, $4k>0$이므로 $1\leq k\leq 10$인 모든 자연수 k에 대하여

$a_{3k}=4k$일 때, $\sum\limits_{n=1}^{30}a_n$은 최댓값 M을 갖고

$a_{3k}=-6k$일 때, $\sum\limits_{n=1}^{30}a_n$은 최솟값 m을 갖는다.

$M=\sum\limits_{n=1}^{30}a_n=\sum\limits_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum\limits_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum\limits_{k=1}^{10}4k$이고,

$m=\sum\limits_{n=1}^{30}a_n=\sum\limits_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum\limits_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum\limits_{k=1}^{10}(-6k)$이므로

$$M-m=\left(\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}4k\right)-\left\{\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}(-6k)\right\}$$

$=\sum\limits_{k=1}^{10}4k-\sum\limits_{k=1}^{10}(-6k)$

$=\sum\limits_{k=1}^{10}\{4k-(-6k)\}$

$=\sum\limits_{k=1}^{10}10k=10\sum\limits_{k=1}^{10}k$

$=10\times\frac{10\times 11}{2}=550$

13. [출제의도] 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x(x-a)(x-a-1)$이므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표는

$x(x-a)(x-a-1)=2x$에서

$x(x-a+1)(x-a-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=a-1$ 또는 $x=a+2$

$a>1$, $\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}}$이므로 점 P의 좌표는 $(a-1, 2a-2)$

점 Q의 좌표는 $(a+2, 2a+4)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{5(a+2)^2}=5\sqrt{5}$이므로 $a=3$

$\mathrm{P}(2, 4)$, $\mathrm{Q}(5, 10)$이고 $f(x)=x^3-7x^2+12x$

$A=\int_0^2 2x\,dx+\int_2^3(x^3-7x^2+12x)dx$

$B=\int_3^4\{-(x^3-7x^2+12x)\}dx$

$A-B=\int_0^2 2x\,dx+\int_2^4(x^3-7x^2+12x)dx$

$=\left[x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_2^4=\frac{16}{3}$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{DAE}=\alpha$, $\angle\mathrm{EDA}=\beta$라 하자.

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin\beta}$이고,

$\sin\alpha:\sin\beta=1:3$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{AE}}=1:3$

$\overline{\mathrm{AE}}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{DAE}=\alpha$이므로 $\sin(\angle\mathrm{DBC})=\sin\alpha$

$\sin(\angle\mathrm{CDB})=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{DBC})}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{CDB})}$, $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\beta}$이고,

$\sin\alpha:\sin\beta=1:3$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$

$\overline{CD}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{1}{3}\times 6=2$

$\overline{AD}:\overline{DC}=4:3$ 이므로 $\overline{AD}=\frac{4}{3}\overline{DC}=\frac{8}{3}$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AE}^2=\overline{DA}^2+\overline{DE}^2-2\times\overline{DA}\times\overline{DE}\times\cos(\angle EDA)$

$(\sqrt{5})^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-2\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\cos\beta$

$\cos\beta=\frac{3}{2\sqrt{5}}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}=2R,\ \ \frac{6}{\sin\beta}=2R,\ \ \frac{6}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}}=2R$

$R=\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$

따라서 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $\frac{180}{11}\pi$

15. [출제의도] 정적분을 이용하여 함숫값을 추론한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이면

$x>0$일 때

$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt$

$g'(x)=2f(x)\ge 0$

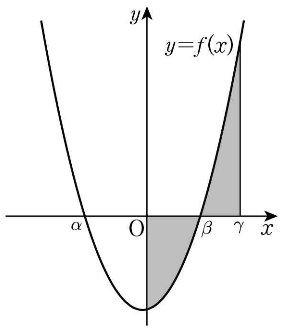
함수 $g(x)$는 $x>0$에서 증가하므로 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$를 만족시키는 세 실수 $a,\ \alpha,\ \beta\,(a>0,\ \alpha<\beta)$가 존재한다.

$\beta\le 0$이면 (나)를 만족시키지 않고, $\alpha\ge 0$이면 $x\le 0$에서 $g(x)=0$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $\alpha<0<\beta$이고 $f(0)<0$이므로

$\int_0^\gamma f(x)dx=0$을 만족시키는 실수 $\gamma\,(\beta<\gamma)$가 존재한다.



(ⅰ) $x\le 0$일 때

$\alpha\le x\le 0$인 x에 대하여

$g(x)=\int_x^0 f(t)dt-\int_x^0 f(t)dt=0$ …… ㉠

$x<\alpha$인 x에 대하여

$\int_x^\alpha f(t)dt>0,\ \int_\alpha^0 f(t)dt<0$이므로

$g(x)=-\int_x^\alpha f(t)dt+\int_\alpha^0 f(t)dt$

$\qquad+\left|\int_x^\alpha f(t)dt+\int_\alpha^0 f(t)dt\right|<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $\alpha=-7$

(ⅱ) $x>0$일 때

$0<x<\beta$인 x에 대하여

$g(x)=-\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$

$\quad=-2\int_0^x f(t)dt$

$g'(x)=-2f(x)>0$

$g(x)$는 $0<x<\beta$에서 증가한다. …… ㉢

$\beta\le x\le\gamma$인 x에 대하여

$g(x)=-\int_0^\beta f(t)dt+\int_\beta^x f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$

$\quad=-2\int_0^\beta f(t)dt$

$\beta\le x\le\gamma$에서 $g(x)=c$ (c는 상수) …… ㉣

$x>\gamma$인 x에 대하여

$g(x)=-\int_0^\beta f(t)dt+\int_\beta^x f(t)dt$

$\qquad+\left|\int_0^\gamma f(t)dt+\int_\gamma^x f(t)dt\right|$

$\quad=-\int_0^\beta f(t)dt+\int_\beta^x f(t)dt+\int_\gamma^x f(t)dt$

$\quad=-2\int_0^\beta f(t)dt+2\int_\gamma^x f(t)dt$

$g'(x)=2f(x)>0$

$g(x)$는 $x>\gamma$에서 증가한다. …… ㉤

㉢, ㉣, ㉤에 의해 $\beta=4p,\ \gamma=7p$

$-2\int_0^\beta f(t)dt=-2\int_0^{4p} f(t)dt=81$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$f(x)=a(x+7)(x-4p)=a\{x^2+(7-4p)x-28p\}$

$\int_0^\gamma f(x)dx=\int_0^{7p} f(x)dx=\frac{49}{6}ap^2(2p-3)=0$

$a>0,\ p>0$이므로 $p=\frac{3}{2},\ \beta=6$

$f(x)=a(x+7)(x-6)=a(x^2+x-42)$

$\int_0^\beta f(x)dx=\int_0^6 a(x^2+x-42)dx=-162a=-\frac{81}{2}$

이므로 $a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(x+7)(x-6)$이므로 $f(-10)=12$

16. [출제의도] 로그함수의 성질을 이해하여 방정식의 해를 구한다.

$x+2,\ x-2$는 로그의 진수이므로

$x+2>0,\ x-2>0$에서 $x>2$

방정식 $\log_4(x+2)+\log_4 2=\log_2(x-2)$에서

$\log_4 2(x+2)=\log_2(x-2)$

$\log_4(2x+4)=\log_4(x-2)^2$

$(x-2)^2=2x+4$

$x^2-4x+4=2x+4$

$x^2-6x=x(x-6)=0$

$x>2$이므로 $x=6$

17. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-2x)dx$

$\quad=2x^3-x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=1+C=3,\ C=2$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+2$이므로 $f(2)=14$

18. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 계산한다.

$\sum_{n=1}^{7}(a_n-2)(b_n-2)=\sum_{n=1}^{7}\{a_nb_n-2(a_n+b_n)+4\}$

$\qquad=\sum_{n=1}^{7}a_nb_n-2\sum_{n=1}^{7}(a_n+b_n)+4\times 7$

$\qquad=\sum_{n=1}^{7}a_nb_n-88+28=60$

따라서 $\sum_{n=1}^{7}a_nb_n=120$

19. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2-12x+a$

$f'(3)=27-36+a=0$이므로 $a=9$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	⋯	1	⋯	3	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=4+b$이고,

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(3)=b$이므로

$4+2b=8,\ b=2$

따라서 $a+b=11$

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$x<-2$에서 함수 $y=2^{x+2}+7$의 치역은 $\{y|7<y<8\}$이고,

$x\ge -2$에서 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+10$의 치역은

$\{y|-2^{a+2}+10\le x<10\}$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 존재하기 위해서는

$-2^{a+2}+10\le 7$

$2^a\ge\frac{3}{4}$ …… ㉠

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-2^{a+2}+10$ …… ㉡

직선 $x+2^ay-t=0$은 점 $(t,0)$을 지나므로 t는 이 직선의 x절편이다.

점 $(-2,8)$을 지나는 직선 $x+2^ay-t=0$의 x절편은

$t=-2+2^a\times 8=2^{a+3}-2$

점 $(-2,\ -2^{a+2}+10)$을 지나는 직선 $x+2^ay-t=0$의 x절편은

$t=-2+2^a\times(-2^{a+2}+10)=-2^{2a+2}+10\times 2^a-2$

$g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 값의 범위는

$-2^{2a+2}+10\times 2^a-2\le t<2^{a+3}-2$

t의 최솟값은 $-2^{2a+2}+10\times 2^a-2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

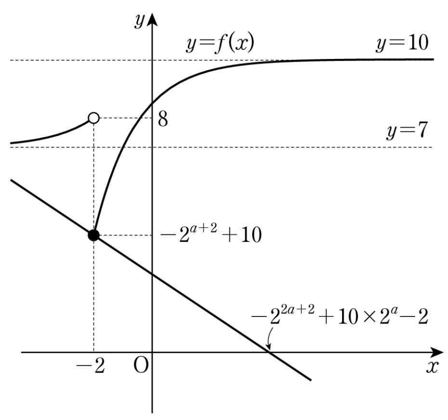
$-2^{a+2}+10=-2^{2a+2}+10\times 2^a-2$

$4\times(2^a)^2-14\times 2^a+12=0$

$2(2\times 2^a-3)(2^a-2)=0$

㉠에서 $2^a\ge\frac{3}{4}$이므로 $2^a=\frac{3}{2}$ 또는 $2^a=2$

따라서 모든 2^a의 값의 곱은 $\frac{3}{2}\times 2=3$



21. [출제의도] 함수의 극한과 미분을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$\lim_{x\to k}\frac{(f(x))^2-(f(k))^2}{x-k}$

$=\lim_{x\to k}\left\{(f(x)+f(k))\times\frac{f(x)-f(k)}{x-k}\right\}$

$=2f(k)f'(k)$

이므로 $\lim_{x\to k}\frac{2x^2f(x)-(f(k))^2}{x-k}$의 값이 존재한다.

$\lim_{x\to k}(x-k)=0$이므로 $\lim_{x\to k}\{2x^2f(x)-(f(k))^2\}=0$

$2k^2f(k)-(f(k))^2=0,\ f(k)(2k^2-f(k))=0$

이므로 $f(k)=0$ 또는 $f(k)=2k^2$

함수 $f(x)$의 최솟값이 17이므로 $f(k)=2k^2$

$\lim_{x\to k}\frac{(f(x))^2-(f(k))^2}{x-k}=4k^2f'(k)$

$\lim\limits_{x \to k}\dfrac{2x^2f(x)-\left(f(k)\right)^2}{x-k}$

$=\lim\limits_{x \to k}\dfrac{2x^2f(x)-2k^2f(k)}{x-k}$

$=\lim\limits_{x \to k}\left(2x^2 \times \dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}+f(k)\times\dfrac{2x^2-2k^2}{x-k}\right)$

$=2k^2f'(k)+4kf(k)$

$=2k^2f'(k)+8k^3$

$2k^2f'(k)+8k^3=4k^2f'(k)$

$2k^2(f'(k)-4k)=0$

$k\neq 0$ 이므로 $f'(k)=4k$

$k=t$ 일 때, $f(t)=2t^2$, $f'(t)=4t$

$k=-t$ 일 때, $f(-t)=2t^2$, $f'(-t)=-4t$

$f(t)=2t^2$, $f(-t)=2t^2$ 이므로

두 실수 a, b에 대하여

$f(x)-2t^2=(x-t)(x+t)\left(x^2+ax+b\right)$

$\qquad=\left(x^2-t^2\right)\left(x^2+ax+b\right)$

$f'(x)=2x\left(x^2+ax+b\right)+\left(x^2-t^2\right)(2x+a)$

$f'(t)=4t$, $f'(-t)=-4t$ 이므로

$f'(t)=2t\left(t^2+at+b\right)=4t$

$f'(-t)=-2t\left(t^2-at+b\right)=-4t$

$t>1$이므로 $t^2+at+b=2$, $t^2-at+b=2$

에서 $a=0$, $b=-t^2+2$

그러므로

$f(x)=\left(x^2-t^2\right)\left(x^2-t^2+2\right)+2t^2$

$\qquad=\left(x^2-t^2+1\right)^2+2t^2-1$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $2t^2-1$ 이다.

$2t^2-1=17$, $t=3$

따라서 $f(x)=\left(x^2-8\right)^2+17$ 이므로 $f(4)=81$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 최댓값과 최솟값의 합을 추론한다.

$a_1=3$ 이므로 $a_2=a_1-10+k=k-7$

(ⅰ) $a_2<0$인 경우, $k-7<0$에서 $k<7$

$a_3=|a_2+2|=|k-5|$

$a_3\geq 0$ 이므로 $a_4=a_3-10+k=|k-5|-10+k$

① $k<5$일 때

$a_4=-(k-5)-10+k=-5$

$a_5=|a_4+4|=1$이므로

$a_4\times a_5=0$을 만족하는 k의 값은 존재하지 않는다.

② $5\leq k<7$일 때

$a_4=(k-5)-10+k=2k-15$에서

$-5\leq 2k-15<-1$

$a_5=|a_4+4|=|(2k-15)+4|=|2k-11|$

$a_4\neq 0$ 이므로 $a_5=0$ 이어야 한다.

$|2k-11|=0$ 에서 $k=\dfrac{11}{2}$

(ⅱ) $a_2\geq 0$인 경우, $k-7\geq 0$에서 $k\geq 7$

$a_3=a_2-10+k=2k-17$

① $7\leq k<\dfrac{17}{2}$ 일 때

$a_3<0$ 이므로

$a_4=|a_3+3|=|(2k-17)+3|=2k-14$

$a_4\geq 0$ 이므로

$a_5=a_4-10+k=(2k-14)-10+k=3k-24$

$a_4\times a_5=(2k-14)(3k-24)=0$ 이어야 하므로

$k=7$ 또는 $k=8$

② $k\geq\dfrac{17}{2}$ 일 때

$a_3\geq 0$ 이므로

$a_4=a_3-10+k=(2k-17)-10+k=3k-27$

$\dfrac{17}{2}\leq k<9$일 때, $a_4<0$ 이므로

$a_5=|a_4+4|=|(3k-27)+4|=3k-23$이고,

$\dfrac{5}{2}\leq a_5<4$

그러므로 $a_4\times a_5=0$을 만족하는 k의 값은 존재하지 않는다.

$k\geq 9$일 때, $a_4\geq 0$ 이므로

$a_5=a_4-10+k=(3k-27)-10+k=4k-37$

$a_4\times a_5=(3k-27)(4k-37)=0$ 이어야 하므로

$k=9$ 또는 $k=\dfrac{37}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 k의 값은 $\dfrac{11}{2}$, 7, 8, 9, $\dfrac{37}{4}$ 이므로

$M=\dfrac{37}{4}$, $m=\dfrac{11}{2}$ 에서 $M+m=\dfrac{59}{4}$

따라서 $p=4$, $q=59$ 이므로 $p+q=63$

[확률과 통계]

23	②	24	③	25	⑤	26	④	27	①
28	②	29	180	30	17				

23. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수를 계산한다.

$x^{12}=(x^4)^3$ 이므로 x^{12} 의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$

24. [출제의도] 배반사건을 이해하여 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$ 에서 $1-\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A)+\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{4}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

25. [출제의도] 확률의 뜻을 이해하여 확률을 구한다.

a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\times 6=36$이다.

$|a-b|=1$을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$의 10가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

26. [출제의도] 모평균의 신뢰구간을 이해하여 표준편차를 구한다.

이 농장에서 수확하는 딸기 중에서 100개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x_1}$ 이라 하면

m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}\leq m\leq\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$

즉, $82a-80a=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$

$2a=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{10}$ …… ㉠

이 농장에서 수확하는 딸기 중에서 25개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x_2}$ 라 하면

m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{25}}\leq m\leq\overline{x_2}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{25}}$

즉, $(80a+0.49)-78a=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{25}}$

$2a+0.49=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0.49=2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{10}$, $\sigma=\dfrac{5}{4}$

27. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

조건 (가)에서 $144=2^4\times 3^2$ 이므로 자연수 a, b, c를

$a=2^{x_1}\times 3^{y_1}$, $b=2^{x_2}\times 3^{y_2}$, $c=2^{x_3}\times 3^{y_3}$이라 하면

$a\times b\times c=2^{x_1+x_2+x_3}\times 3^{y_1+y_2+y_3}=2^4\times 3^2$ 에서

$x_1+x_2+x_3=4$, $y_1+y_2+y_3=2$이다.

조건 (나)에서 $x_1\geq 1$이므로

$x_1{}'=x_1-1\geq 0$이라 하면 $x_1{}'+x_2+x_3=3$이다.

$x_1{}'+x_2+x_3=3$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

$y_1+y_2+y_3=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $10\times 6=60$

28. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 추론한다.

확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(X\leq a)+\mathrm{P}(X\leq a^2)=1$ 에서 $a^2+a=2m$

$\mathrm{P}(X\leq a^2+a)=\mathrm{P}(X\leq 2m)=\mathrm{P}\left(Z\leq\dfrac{2m-m}{\frac{1}{2m}}\right)$

$\qquad=\mathrm{P}(Z\leq 2m^2)=0.9772$

$\mathrm{P}(Z\leq 2)=0.9772$이므로 $2m^2=2$

표준편차 $\dfrac{1}{2m}$ 은 양수이므로 $m=1$

$a^2+a=2$, $(a+2)(a-1)=0$에서 $a<0$ 이므로 $a=-2$

$\mathrm{P}\left(X\leq-\dfrac{a}{8}\right)=\mathrm{P}\left(X\leq\dfrac{1}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z\leq\dfrac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{2}}\right)$

$\qquad=\mathrm{P}(Z\leq-1.5)$

$\qquad=0.5-\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0)$

$\qquad=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$\qquad=0.5-0.4332=0.0668$

29. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

합성함수 $f\circ f$의 치역은 함수 f의 치역의 부분집합이므로 $B\subset A$이고, 조건 (나)에서 $A-B=\{2\}$이다.

$n(A)=n(B)+1$이므로 조건 (가)에서 $n(A)=2+1=3$

$A=\{2, a, b\}$, $B=\{a, b\}$, $X-A=\{c, d\}$라 하자.

두 수 a, b를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$

$\{f(2), f(a), f(b)\}=\{a, b\}$ 이므로

$f(2)$, $f(a)$, $f(b)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3-2=2^3-2=6$

$\{f(c), f(d)\}\subset\{2, a, b\}$ 이고 $f(c)=2$ 또는 $f(d)=2$가 되도록 $f(c)$, $f(d)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2=3^2-2^2=5$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $6\times 6\times 5=180$

30. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

시행을 4번 반복한 후 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 상자 B에 들어 있는 공의 개수보다 많은 사건을 X, 주사위의 짝수의 눈이 4번 나오는 사건을 Y라 하자. 4번의 시행에서 3의 배수의 눈이 n번 나왔을 때, 상자 A에 들어 있는 공의 개수는

$8-2n+(4-n)=12-3n$

상자 B에 들어 있는 공의 개수는

$8+2n-(4-n)=4+3n$

(ⅰ) 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 상자 B에 들어 있는 공의 개수보다 많은 경우

$12-3n>4+3n$에서 $n=0$ 또는 $n=1$

주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\dfrac{1}{3}$ 이므로

$n=0$일 확률은 ${}_4\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

$n=1$일 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{32}{81}$

그러므로 $\mathrm{P}(X)=\dfrac{16}{81}+\dfrac{32}{81}=\dfrac{16}{27}$

(ⅱ) 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 상자 B에 들어 있는 공의 개수보다 많고 주사위의 짝수의 눈이 4번 나오는 경우

$n=0$이면서 주사위의 짝수의 눈이 4번 나오는

경우는 2 또는 4의 눈이 4번 나오는 경우이므로

구하는 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

$n=1$이면서 주사위의 짝수의 눈이 4번 나오는 경우는 6의 눈이 1번, 2 또는 4의 눈이 3번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

$4\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{81}$

그러므로 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{81}+\frac{2}{81}=\frac{1}{27}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{27}}{\frac{16}{27}}=\frac{1}{16}$$

따라서 $p=16$, $q=1$이므로 $p+q=17$

[미적분]

23	⑤	24	①	25	③	26	④	27	②
28	②	29	686	30	8				

23. [출제의도] 함수의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 5x}{5x}\times\frac{5}{\frac{e^x-1}{x}}\right)=1\times 5=5$$

24. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하여 급수의 합을 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\Big[\ln|2+x|\Big]_0^1=\ln\frac{3}{2}$$

25. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_n=a_1+(n-1)d$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+(n-1)d}{n}=d$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+2n}-a_n\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{a_n^{\,2}+2n}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{2}{n}}+\frac{a_n}{n}}=\frac{1}{3}$$

이므로 $d>0$

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+2n}-a_n\right)=\frac{1}{d}=\frac{1}{3}$이므로 $d=3$

26. [출제의도] 정적분을 이해하여 입체도형의 부피를 구한다.

직선 $x=t\left(\frac{1}{2}\le t\le 1\right)$을 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\left(2\sqrt{t}\,e^{-t^2}\right)^2=4te^{-2t^2}$

따라서 구하는 부피는 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}S(t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}4te^{-2t^2}dt$

$-2t^2=s$로 놓으면 $-4t=\frac{ds}{dt}$이고

$t=\frac{1}{2}$일 때 $s=-\frac{1}{2}$, $t=1$일 때 $s=-2$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}S(t)\,dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{-2}\left(-e^s\right)ds=\Big[-e^s\Big]_{-\frac{1}{2}}^{-2}=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$$

27. [출제의도] 음함수의 미분법을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\overline{\mathrm{AB}}^2=2(a-b)^2$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\times|a-b|=2\sqrt{2}$

$1<a<b$이므로 $b-a=2$ …… ㉠

$x^2-xy+y^2+k=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-y-x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq 2y$) …… ㉡

곡선 C 위의 두 점 A, B에서의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하자.

㉡에 $x=a$, $y=b$를 대입하면 $m_1=\frac{2a-b}{a-2b}$

㉠에서 $m_1=\frac{2a-b}{a-2b}=\frac{a-2}{-a-4}=\frac{6}{a+4}-1$

$a>1$이므로 $-1<m_1<\frac{1}{5}$ …… ㉢

㉡에 $x=b$, $y=a$를 대입하면 $m_2=\frac{2b-a}{b-2a}=\frac{1}{m_1}$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\times m_2}\right|=\left|\frac{m_1-\frac{1}{m_1}}{2}\right|=\left|\frac{m_1^{\,2}-1}{2m_1}\right|=\frac{4}{3}$$

(i) $\frac{m_1^{\,2}-1}{2m_1}=-\frac{4}{3}$인 경우

$3m_1^{\,2}+8m_1-3=0$에서 $m_1=-3$ 또는 $m_1=\frac{1}{3}$

이는 ㉢을 만족시키지 못한다.

(ii) $\frac{m_1^{\,2}-1}{2m_1}=\frac{4}{3}$인 경우

$3m_1^{\,2}-8m_1-3=0$에서 $m_1=-\frac{1}{3}$ 또는 $m_1=3$

㉢에서 $m_1=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $m_1=\frac{6}{a+4}-1=-\frac{1}{3}$, $a=5$

㉠에서 $b=7$이고 곡선 C가 점 $\mathrm{A}(5,7)$을 지나므로

$5^2-5\times 7+7^2+k=0$, $k=-39$

따라서 $k+a+b=(-39)+5+7=-27$

28. [출제의도] 적분법을 이용하여 함수를 추론한다.

$g(x)=\int_k^x f'(t)\ln f(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x)\ln f(x)$

$g'(x)=0$이면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=1$

$f(x)$가 이차함수이므로

일차방정식 $f'(x)=0$의 실근의 개수는 1이고

이차방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 최대 2이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 모든 a의 개수는 3이므로 $g'(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 개수는 3이다. 그러므로 이차방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$를 갖는다.

$f(x)-1=(x-\alpha)(x-\beta)$, $f'(x)=2x-\alpha-\beta$

방정식 $f'(x)=0$의 실근은 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$에서 $\alpha=a_1$, $\frac{\alpha+\beta}{2}=a_2$, $\beta=a_3$ …… ㉡

즉, $f(x)=(x-a_1)(x-a_3)+1$ …… ㉢

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$x\to-\infty$일 때 $g'(x)\to-\infty$이고, $x\to\infty$일 때 $g'(x)\to\infty$이다. 즉, 함수 $g(x)$는 $x=a_1$, $x=a_3$에서 극소이고 $x=a_2$에서 극대이다.

㉠의 양변에 $x=k$를 대입하면 $g(k)=0$이고 조건 (가)에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 0이므로 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 극소이다. 그러므로 $k=a_1$ 또는 $k=a_3$

㉢에서 $f(a_1)=f(a_3)=1$이므로 $f(k)=1$

$$g(x)=\int_k^x f'(t)\ln f(t)\,dt$$

$$=\Big[f(t)\ln f(t)\Big]_k^x-\int_k^x\left(f(t)\times\frac{f'(t)}{f(t)}\right)dt$$

$$=f(x)\ln f(x)-f(k)\ln f(k)-f(x)+f(k)$$

$$=f(x)\ln f(x)-f(x)+1$$

조건 (나)에서

$$\int_{a_1}^{a_3}\left(g(x)+f(x)-f(x)\ln f(x)\right)dx=\int_{a_1}^{a_3}1\,dx=a_3-a_1=\frac{3}{2}$$

㉡에서 $a_1+a_3=2a_2$이므로 $a_2-a_1=\frac{3}{4}$, $a_2-a_3=-\frac{3}{4}$

따라서 $f(a_2)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)+1=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+1=\frac{7}{16}$

29. [출제의도] 등비급수를 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$은 첫째항이 $(a+ar)$, 공비가 r인 등비급수이고 그 합이 5이므로 $-1<r<1$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\frac{a(1+r)}{1-r}=5$ …… ㉠

㉠에서 $a>0$이다.

(i) $r=0$인 경우

$n\ge 2$이면 $a_n=0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right)=0$

(ii) $r>0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=ar^{n-1}>0$이므로

$a_{n+1}+a_{n+2}>0$이다.

수열 $\left\{|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$의 항을 첫째항부터 차례로 나열하면 (a_2+a_3), 0, $-(a_4+a_5)$, 0, $\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(a_{2n}+a_{2n+1})$

$=\sum_{n=1}^{\infty}ar(1+r)(-r^2)^{n-1}=\frac{ar(1+r)}{1+r^2}=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{2}{5}=\frac{r(1-r)}{1+r^2}$, $7r^2-5r+2=0$이고

이차방정식 $7r^2-5r+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\times 7\times 2=-31<0$이므로

$r>0$인 실수 r은 존재하지 않는다.

(iii) $r<0$인 경우

$-1<r<0$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n}+a_{2n+1}=ar^{2n-1}+ar^{2n}=ar^{2n-1}(1+r)<0$

수열 $\left\{|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$의 항을 첫째항부터 차례로 나열하면 $-(a_2+a_3)$, 0, (a_4+a_5), 0, $\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_{n+1}+a_{n+2}|\times\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(a_{2n}+a_{2n+1})$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}ar(1+r)(-r^2)^{n-1}=-\frac{ar(1+r)}{1+r^2}=2$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $-\frac{2}{5}=\frac{r(1-r)}{1+r^2}$, $3r^2-5r-2=0$

$r=-\frac{1}{3}$ 또는 $r=2$, $-1<r<0$이므로 $r=-\frac{1}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $r=-\frac{1}{3}$이고 ㉠에서 $a=10$

수열 $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 $a_3=ar^2=\frac{10}{9}$이고

공비가 $r^3=-\frac{1}{27}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(100a_n-ma_{3n})=100\times\frac{10}{1+\frac{1}{3}}-m\times\frac{\frac{10}{9}}{1+\frac{1}{27}}$$

$$=15\times\frac{700-m}{14}$$

14와 15는 서로소이므로 $15\times\frac{700-m}{14}$의 값이 자연수가 되려면 자연수 $k\,(k<50)$에 대하여 $m=700-14k$

따라서 자연수 m의 최댓값은 $k=1$일 때 686

30. [출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$는 일대일함수이므로

$\left|\frac{\pi}{4}(f(2)-f(0))\right|\le\pi$ 즉, $|f(2)-f(0)|\le 4$

$f(0)=-b-2$, $f(2)=b-2$이므로 $|2b|\le 4$, $-2\le b\le 2$

$0\le x_1\le 2$, $0\le x_2\le 2$인 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)=f(x_2)$라 하면 $g(x_1)=g(x_2)$이고

함수 $g(x)$가 역함수를 가지므로 $x_1=x_2$

그러므로 함수 $f(x)$는 $0 \le x \le 2$에서 증가하거나 $0 \le x \le 2$에서 감소한다.

(i) $b=-1$인 경우 $f(0)=-1$, $f(1)=-a-2$, $f(2)=-3$
$-3<-a-2<-1$인 $a\,(a \ne 0)$은 존재하지 않는다.

(ii) $b=0$인 경우 $f(0)=f(2)$, $g(0)=g(2)$이므로
함수 $g(x)$는 일대일함수가 아니다.

(iii) $b=1$인 경우 $f(0)=-3$, $f(1)=-a-2$, $f(2)=-1$
$-3<-a-2<-1$인 $a\,(a \ne 0)$은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $b=-2$ 또는 $b=2$

$b=-2$이면 $f(0)=0$, $f(2)=-4$에서 $g(0)=-2$, $g(2)=2$이므로 함수 $g(x)$는 $0 \le x \le 2$에서 증가한다.

$b=2$이면 $f(0)=-4$, $f(2)=0$에서 $g(0)=2$, $g(2)=-2$이므로 함수 $g(x)$는 $0 \le x \le 2$에서 감소한다.

$h(-\sqrt{2})=c$라 하면 $g(c)=-\sqrt{2}$이므로 $0<c<2$이다.

$h'(-\sqrt{2})=\dfrac{1}{g'\left(h(-\sqrt{2})\right)}=\dfrac{1}{g'(c)}$에서

$b=-2$일 때 $g'(c) \ge 0$이고 $b=2$일 때 $g'(c) \le 0$이므로 $b=-2$일 때 $h'(-\sqrt{2})$의 값이 최대이다.

$g(0)=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}f(0)\right)=-2$, $\lim\limits_{x \to 0-} g(x)=f(0)+2=2$

이고 함수 $g(x)$가 역함수를 가지므로

$x<0$에서 함수 $g(x)=f(x)+2$는 감소한다.

$x \to -\infty$일 때 $f(x) \to \infty$이므로 $a<0$에서

$x>2$일 때 함수 $g(x)=f(x)+2$는 감소한다.

함수 $f(x)$는 $0 \le x \le 2$에서 증가하거나 $0 \le x \le 2$에서 감소하고, $f(0)>f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $0 \le x \le 2$에서 감소한다.

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

$b=-2$에서 $f(x)=ax^3-2ax^2-2x$, $f'(x)=3ax^2-4ax-2$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \le 0$이므로

이차방정식 $3ax^2-4ax-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-3a\times(-2) \le 0$, $2a(2a+3) \le 0$, $-\dfrac{3}{2} \le a \le 0$

a는 음의 정수이므로 $a=-1$

$g(c)=-\sqrt{2}\ (0<c<2)$이므로 $-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}f(c)\right)=-\sqrt{2}$

$-4<f(c)<0$이므로 $f(c)=-1$

$-c^3+2c^2-2c=-1$, $(c-1)(c^2-c+1)=0$, $c=1$

$h'(-\sqrt{2})=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}f(1)\right)\times\dfrac{\pi}{4}f'(1)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

따라서 $k=2\sqrt{2}$, $k^2=8$

[기하]

23	⑤	24	②	25	④	26	①	27	③
28	③	29	48	30	320				

23. [출제의도] 두 벡터의 합을 계산한다.

$\vec{a}+2\vec{b}=(-1,\,2)+(2,\,2)=(1,\,4)$

따라서 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은 $1+4=5$

24. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 이해하여 접선의 기울기를 구한다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4,\,4)$에서의 접선의 방정식은 $4y=2(x+4)$, $y=\dfrac{1}{2}x+2$에서 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$

25. [출제의도] 정사영을 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 A′이라 하면 $\overline{\mathrm{A'C}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EC}}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

직선 AC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{A'C}}=\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AHC에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{HC}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{7}$

26. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점 및 구의 방정식을 이해하여 미지수를 구한다.

점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times2+1\times a}{2+1},\ \dfrac{2\times1+1\times(-5)}{2+1},\ \dfrac{2\times1+1\times2}{2+1}\right)$

즉, $\left(\dfrac{a+4}{3},\,-1,\,\dfrac{4}{3}\right)$

점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times2-1\times a}{2-1},\ \dfrac{2\times1-1\times(-5)}{2-1},\ \dfrac{2\times1-1\times2}{2-1}\right)$

즉, $(4-a,\,7,\,0)$

선분 PQ의 중점 $\left(\dfrac{8-a}{3},\,3,\,\dfrac{2}{3}\right)$를 중심으로 하는 구가 yz평면과 zx평면에 모두 접하므로

$\left|\dfrac{8-a}{3}\right|=3$ 즉, $\dfrac{8-a}{3}=3$ 또는 $\dfrac{8-a}{3}=-3$

$a=-1$ 또는 $a=17$에서 $a>0$이므로 $a=17$

27. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

y축이 선분 FF′의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}$

두 점 P, F′이 원 C 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}=2c$

즉, 삼각형 PF′F는 한 변의 길이가 $2c$인 정삼각형이다. 점 R이 선분 PQ를 $1:3$으로 내분하고, 점 F가 선분 PQ의 중점이므로 $\overline{\mathrm{FR}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{1}{2}\times2c=c$

점 R은 정삼각형 PF′F의 변 PF의 중점이므로

삼각형 FRF′은 $\angle\mathrm{FRF'}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\angle\mathrm{F'FR}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{FR}}:\overline{\mathrm{F'R}}=1:\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{F'R}}=\sqrt{3}c$

점 R은 타원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{F'R}}+\overline{\mathrm{FR}}=12$

$\sqrt{3}c+c=12$, $c=6\sqrt{3}-6$

$\angle\mathrm{OFR}=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{FO}}=c$이므로

삼각형 ROF는 한 변의 길이가 c인 정삼각형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OR}}=c=6\sqrt{3}-6$

28. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 추론한다.

구 S의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=3$, $\overline{\mathrm{QH_2}}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=3$

점 P의 평면 β 위로의 정사영을 P′이라 하자.

삼각형 POQ의 평면 β 위로의 정사영은

삼각형 $\mathrm{P'H_2Q}$이다. 삼각형 $\mathrm{P'H_2Q}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P'H_2}}\times\overline{\mathrm{QH_2}}\times\sin(\angle\mathrm{P'H_2Q})$이므로

$\angle\mathrm{P'H_2Q}=\dfrac{\pi}{2}$일 때 최대이다.

직선 PO가 평면 β와 만나는 점을 R이라 하자.

선분 P′R은 구 S가 평면 β와 만나서 생기는 원의 지름이므로 $\overline{\mathrm{P'Q}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이다. $\overline{\mathrm{PP'}}\perp\beta$, $\overline{\mathrm{P'Q}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$이고 직선 QR이 평면 POQ와 평면 β의 교선이므로 $\theta=\angle\mathrm{PQP'}$

직각삼각형 $\mathrm{P'H_2Q}$에서 $\overline{\mathrm{P'Q}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

직각삼각형 PP′Q에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{34}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{P'Q}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{34}}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$

29. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

쌍곡선 C의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

이라 하면 쌍곡선 C의 점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

점 P가 제1사분면 위에 있으므로

직선 PF와 직선 $y=\dfrac{b}{a}x$는 서로 평행하지 않다.

그러므로 직선 PF의 기울기는 $-\dfrac{b}{a}$

$\angle\mathrm{QPF'}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 직선 PF′의 기울기는 $\dfrac{a}{b}$

$\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=b:a$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=bt$, $\overline{\mathrm{PF}}=at\ (t>0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{FF'}}=2c$이므로 직각삼각형 FPF′에서

$\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{FF'}}^2$, $(at)^2+(bt)^2=(2c)^2$

$t^2(a^2+b^2)=4c^2$ …… ㉠

쌍곡선 C의 초점 F의 x좌표가 c이므로

$a^2+b^2=c^2$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면 $t^2c^2=4c^2$, $t^2=4$

$t>0$이므로 $t=2$, 즉, $\overline{\mathrm{PF'}}=2b$, $\overline{\mathrm{PF}}=2a$

점 P가 쌍곡선 C 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

$2b-2a=2a$, $b=2a$

㉡에 $b=2a$를 대입하면 $a^2+(2a)^2=c^2$, $c=\sqrt{5}a$

직선 PF의 기울기가 $-\dfrac{b}{a}=-2$이므로 $\overline{\mathrm{OF}}:\overline{\mathrm{OQ}}=1:2$

$\overline{\mathrm{OF}}=c=\sqrt{5}a$에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{5}a$

직각삼각형 QOF에서

$\overline{\mathrm{OF}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{QF}}^2$, $(\sqrt{5}a)^2+(2\sqrt{5}a)^2=20^2$, $a=4$

$\overline{\mathrm{PF}}=2a=8$, $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=20-8=12$이므로

점 P는 선분 QF를 $3:2$로 내분하는 점이다.

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times8\sqrt{5}=48$

30. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 이용하여 평면벡터의 내적을 구하는 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$에서 점 E는 $\overline{\mathrm{DE}}=4$, $\angle\mathrm{ADE}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ADE의 한 꼭짓점이다.

선분 BC를 지름으로 하는 원을 C, 점 A를 지나면서 직선 AE에 수직인 직선을 l이라 하자.

직선 l이 선분 BC와 만나는 점을 O라 하면

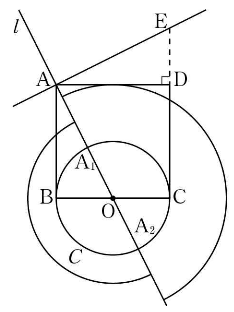
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}=2:1$이므로 점 O는 선분 BC의 중점이다. 즉, 점 O는 원 C의 중심이다.

직선 l이 원 C와 만나는 두 점 중 점 A와 가까운 점을 $\mathrm{A_1}$, 다른 한 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$라 하자.

(i) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \ge 0$인 경우
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta \ge 0$을 만족시키는
θ의 값의 범위는 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$
점 P는 점 C를 포함하는 호 $\mathrm{A_1A_2}$ 위의 점이다.
$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$에서
$(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=4(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하자. 점 P는 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점이므로 점 Q는 중심이 O이고 반지름의 길이가 8인 원 위의 점 중 $0 \le \theta_1 \le \dfrac{\pi}{2}$를 만족시키는 점이다.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}<0$인 경우
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta<0$을 만족시키는
θ의 값의 범위는 $\dfrac{\pi}{2}<\theta \le \pi$
점 P는 점 B를 포함하는 호 $\mathrm{A_1A_2}$ 위의 점이다.
$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=6\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$에서
$(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=6(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하자. 점 P는 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점이므로 점 Q는 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 원 위의 점 중 $\dfrac{\pi}{2}<\theta_2 \le \pi$를 만족시키는 점이다.



$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$가 서로 평행하고 방향이 같을 때 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값이 최대이고,

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$가 서로 평행하고 방향이 반대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값이 최소이므로

(ⅰ)에서 $M=\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=4\sqrt{5}\times 8=32\sqrt{5}$

(ⅱ)에서 $m=-\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\times\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=-4\sqrt{5}\times 6=-24\sqrt{5}$

따라서 $(M+m)^2=\left(8\sqrt{5}\right)^2=320$