2025학년도 10월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	②	**3**	③	**4**	①	**5**	①
6	②	**7**	⑤	**8**	③	**9**	⑤	**10**	④
11	①	**12**	④	**13**	③	**14**	④	**15**	②
16	⑤	**17**	④	**18**	②	**19**	⑤	**20**	③
21	①	**22**	2	**23**	13	**24**	6	**25**	144
26	18	**27**	20	**28**	40	**29**	133	**30**	16

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(2x^2+xy-2y)-(x^2+xy+y)=x^2-3y$

2. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 $(1,0)$, $(2,-3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{10}$

3. [출제의도] 행렬의 덧셈 이해하기

$$A+2B=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\0&4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2+2&0+4\\3+0&-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\3&3\end{pmatrix}$$

이므로 구하는 모든 성분의 합은 $4+4+3+3=14$

4. [출제의도] 항등식 이해하기

등식 $x^2+ax-1=(x-1)(x+b)+3x$가

x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a-1=0+3$에서 $a=3$

양변에 $x=0$을 대입하면 $-1=-b$에서 $b=1$

따라서 $a+b=4$

5. [출제의도] 평행이동 이해하기

점 $(3,a)$를 점 $(8,8)$로 옮기는 평행이동은

x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 $8-a$만큼 옮기는 평행이동이다.

점 $(5,5)$를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 $8-a$만큼 평행이동한 점 $(10,13-a)$의 좌표가 $(b,2)$이므로 $b=10$, $13-a=2$에서 $a=11$

따라서 $a+b=21$

6. [출제의도] 곱셈공식 이해하기

$(4x-ay+2)^2=16x^2+a^2y^2+4-8axy-4ay+16x$

x^2의 계수는 16, y의 계수는 $-4a$이므로

$16=-4a$에서 $a=-4$

7. [출제의도] 행렬의 뜻 이해하기

$a_{ij}=i+2j$, $b_{ij}=i\times j$에서

$a_{21}=4$, $a_{22}=6$, $b_{11}=1$, $b_{21}=2$이므로

행렬 AB의 $(2,1)$ 성분은 $a_{21}\times b_{11}+a_{22}\times b_{21}=16$

8. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$\begin{cases}x-y=-3 & \cdots ㉠\\ x^2-6x+4y=11 & \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $y=x+3$

㉡에 $y=x+3$을 대입하면

$x^2-6x+4(x+3)=11$, $(x-1)^2=0$

$x=1$, $y=4$

따라서 $\alpha+\beta=5$

9. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$f(x)=x^3-(a+1)x^2+(a-3)x+8$이라 하면

나머지정리에 의하여

$f(a)=a^3-(a+1)a^2+(a-3)a+8$

$\quad=-3a+8=a$

따라서 $a=2$

10. [출제의도] 합의 법칙 이해하기

(ⅰ) $a\times b$가 4의 약수인 경우

$a\times b=1$이 되는 순서쌍 (a,b)는 $(1,1)$의 1가지

$a\times b=2$가 되는 순서쌍 (a,b)는

$(1,2)$, $(2,1)$의 2가지

$a\times b=4$가 되는 순서쌍 (a,b)는

$(1,4)$, $(2,2)$, $(4,1)$의 3가지

그러므로 구하는 모든 순서쌍 (a,b)의 개수는

$1+2+3=6$

(ⅱ) $a\times b$가 12의 배수인 경우

$a\times b=12$가 되는 순서쌍 (a,b)는

$(2,6)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(6,2)$의 4가지

$a\times b=24$가 되는 순서쌍 (a,b)는

$(4,6)$, $(6,4)$의 2가지

$a\times b=36$이 되는 순서쌍 (a,b)는 $(6,6)$의 1가지

그러므로 구하는 모든 순서쌍 (a,b)의 개수는

$4+2+1=7$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a,b)의 개수는 $6+7=13$

11. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리 이해하기

점 $(m,-m)$과 직선 $3x+y+3=0$ 사이의 거리

d_1은 $d_1=\dfrac{|3\times m+1\times(-m)+3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{10}}$

점 $(0,5)$와 직선 $3x+y+3=0$ 사이의 거리 d_2는

$d_2=\dfrac{|3\times 0+1\times 5+3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}$

$d_1<d_2$이므로 $\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{10}}<\dfrac{8}{\sqrt{10}}$에서

$|2m+3|<8$, $-8<2m+3<8$

그러므로 $-\dfrac{11}{2}<m<\dfrac{5}{2}$를 만족시키는 정수 m은

-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2

따라서 구하는 정수 m의 개수는 8

12. [출제의도] 복소수의 뜻과 연산 이해하기

$z=a^2+(1+i)a-6(2+i)=(a^2+a-12)+(a-6)i$

z^2이 실수가 되려면

$a^2+a-12=0$ 또는 $a-6=0$이어야 한다.

$a^2+a-12=(a+4)(a-3)=0$에서

$a=-4$ 또는 $a=3$

$a-6=0$에서 $a=6$

따라서 z^2이 실수가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은 $-4+3+6=5$

13. [출제의도] 연립이차부등식을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{cases}x^2\geq 4n^2 & \cdots ㉠\\ x^2-nx-6n^2\leq 0 & \cdots ㉡\end{cases}$$

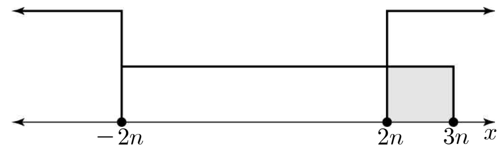
㉠에서 $x^2-4n^2\geq 0$, $(x+2n)(x-2n)\geq 0$

㉡에서 $(x+2n)(x-3n)\leq 0$

n이 자연수이므로

$x\leq -2n$ 또는 $x\geq 2n$, $-2n\leq x\leq 3n$

그러므로 $x=-2n$ 또는 $2n\leq x\leq 3n$



연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는

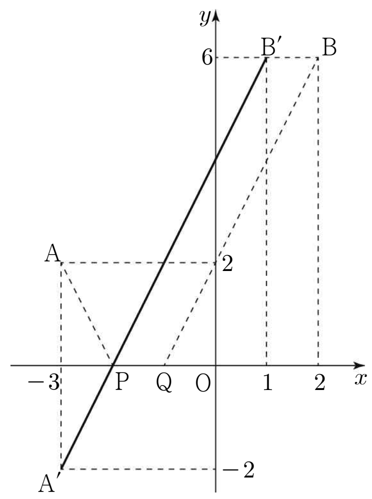
$1+(3n-2n+1)=n+2$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되도록 하는 자연수 n의 값은 8

14. [출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 점 A′의 좌표는 $(-3,-2)$이다.

점 B를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점을 B′이라 하면 점 B′의 좌표는 $(1,6)$이다.



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{PB'}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

점 P가 선분 A′B′ 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{QB}}$는 최소이고, 그 값은

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{\{1-(-3)\}^2+\{6-(-2)\}^2}=4\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $4\sqrt{5}$

15. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 문제해결하기

$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$라 하자.

조건 (가)에서

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\6b_{11}&6b_{12}\end{pmatrix}=O$$

이므로 $b_{11}=b_{12}=0$이고,

$$CA=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\6&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6c_{12}&0\\6c_{22}&0\end{pmatrix}=O$$

이므로 $c_{12}=c_{22}=0$이다.

조건 (나)에서 $b_{21}+b_{22}=3$, $c_{11}=c_{21}$

$BC=A$이므로

$$\begin{pmatrix}0&0\\b_{21}&3-b_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&0\\c_{11}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\3c_{11}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\6&0\end{pmatrix}$$

에서 $c_{11}=2$

그러므로 $C=\begin{pmatrix}2&0\\2&0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 C의 모든 성분의 합은 4

16. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기

(ⅰ) 발표하는 5명의 학생 중 1학년 학생이 3명인 경우

1학년 학생 3명의 발표 순서를 정하는

경우의 수는 $3!=6$
1학년 학생의 발표 순서를 ㉠, ㉡, ㉢이라 하고 발표 순서를 그림으로 나타내면 1학년 학생끼리는 연속해서 발표하지 않아야 하므로 ∨로 표시된 두 곳에서 2학년 또는 3학년 학생이 발표해야 한다.

㉠∨㉡∨㉢

2학년 학생 2명과 3학년 학생 1명 중에서 2명을 선택하여 발표 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$

(ii) 발표하는 5명의 학생 중 1학년 학생이 2명인 경우
1학년 학생 3명 중에서 2명의 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
2학년 학생 2명과 3학년 학생 1명 모두 발표해야 하므로 이 3명의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$
2학년 학생과 3학년 학생의 발표 순서를 ⓐ, ⓑ, ⓒ라 하고 발표 순서를 그림으로 나타내면 1학년 학생끼리는 연속해서 발표하지 않아야 하므로 ∨로 표시된 네 곳 중 두 곳에서 1학년 학생이 발표해야 한다.

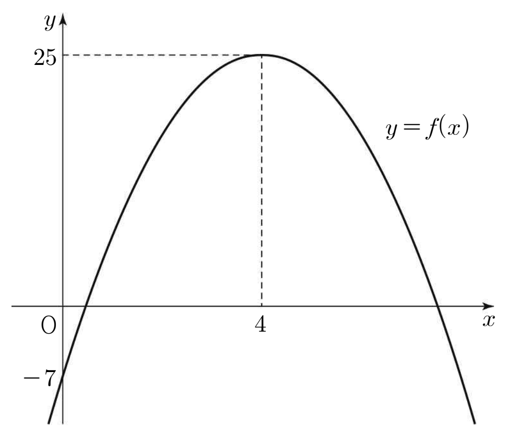
∨ⓐ∨ⓑ∨ⓒ∨

1학년 학생 2명의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$
그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times6\times12=216$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$36+216=252$

17. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 이용하여 추론하기

$f(x)=-2x^2+16x-7=-2(x-4)^2+25$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $0<a\le4$일 때
$0\le x\le a$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=-7$이므로
함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 0이려면 $f(a)=7$이어야 한다.
$f(a)=-2a^2+16a-7=7$에서
$2(a-1)(a-7)=0,\ a=1$

(ii) $a>4$일 때
$0\le x\le a$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(4)=25$이므로
함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 0이려면 $f(a)=-25$이어야 한다.
$f(a)=-2a^2+16a-7=-25$에서
$2(a+1)(a-9)=0,\ a=9$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 양수 a의 값의 합은 $1+9=10$

18. [출제의도] 인수분해를 활용하여 문제해결하기

다항식 $x^3+(2a+3)x^2+(3a+5)x+a+3$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a+3 & 3a+5 & a+3 \\ & & -1 & -2a-2 & -a-3 \\ \hline & 1 & 2a+2 & a+3 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+(2a+3)x^2+(3a+5)x+a+3$
$=(x+1)\{x^2+(2a+2)x+a+3\}$

(i) 다항식 $x^2+(2a+2)x+a+3$이 $x+1$을 인수로 가질 때
인수정리에 의하여
$(-1)^2+(2a+2)\times(-1)+a+3=0$에서 $a=2$
$(x+1)\{x^2+(2a+2)x+a+3\}$
$=(x+1)(x^2+6x+5)=(x+5)(x+1)^2$
에서 $b=5,\ c=1$
그러므로 $a+b+c=2+5+1=8$

(ii) 다항식 $x^2+(2a+2)x+a+3$이 $x+1$을 인수로 갖지 않을 때
다항식 $x^2+(2a+2)x+a+3$이 완전제곱식이어야 하므로 $(a+1)^2=a+3,\ (a+2)(a-1)=0$에서
$a=-2$ 또는 $a=1$

(a) $a=-2$일 때
$(x+1)\{x^2+(2a+2)x+a+3\}$
$=(x+1)(x^2-2x+1)=(x+1)(x-1)^2$
에서 $b=1,\ c=-1$
그러므로 $a+b+c=-2+1+(-1)=-2$

(b) $a=1$일 때
$(x+1)\{x^2+(2a+2)x+a+3\}$
$=(x+1)(x^2+4x+4)=(x+1)(x+2)^2$
에서 $b=1,\ c=2$
그러므로 $a+b+c=1+1+2=4$

(i), (ii)에 의하여 $M=8,\ m=-2$이므로
$M+m=6$

19. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 추론하기

조건 (가), (나)에 의하여 $f(x)$를 $P(x)$로 나누었을 때와 $f(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지가 모두 $P(x)+\{Q(x)\}^2$이므로
다항식 $P(x)+\{Q(x)\}^2$의 차수는 두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$의 차수보다 작다. … ㉠
$f(x)=P(x)Q(x)+P(x)+\{Q(x)\}^2$

(i) $Q(x)$의 차수가 2 이상일 때
$P(x)$의 차수는 1 이하이므로 $P(x)+\{Q(x)\}^2$의 차수가 4 이상이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $Q(x)$의 차수가 1일 때
$P(x)$의 차수가 2이고 $P(x)+\{Q(x)\}^2$은 상수이다.
$P(x)$, $Q(x)$의 최고차항의 계수를 각각 p, q라 하자.
$f(x)$의 최고차항의 계수는 $P(x)Q(x)$의 최고차항의 계수와 같으므로 $pq=1$
$P(x)+\{Q(x)\}^2$은 상수이므로 $p+q^2=0$
그러므로 $q^3=-1$에서 $q=-1,\ p=-1$
$P(0)=-2,\ Q(0)=1$이므로
$P(x)=-x^2+ax-2$(a는 상수), $Q(x)=-x+1$
$P(x)+\{Q(x)\}^2$은 상수이고

$$\begin{aligned}P(x)+\{Q(x)\}^2&=-x^2+ax-2+(-x+1)^2\\&=(a-2)x-1\end{aligned}$$

이므로 $a=2$에서 $P(x)=-x^2+2x-2$
그러므로 $f(x)=(-x^2+2x-2)(-x+1)-1$

(iii) $Q(x)$가 0이 아닌 상수일 때
$P(x)$의 차수가 3이므로 $P(x)+\{Q(x)\}^2$의 차수가 3이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(2)=1$

20. [출제의도] 선분의 내분점을 활용하여 문제해결하기

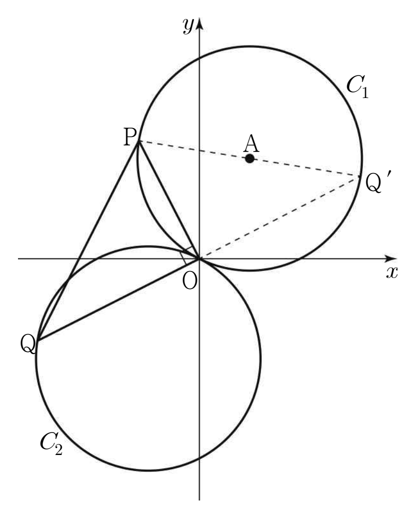
선분 BC의 중점을 $\mathrm{M}(b,c)$, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면, 점 $\mathrm{G}(0,2)$는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로
$\left(\dfrac{2\times b+1\times 2a}{2+1},\ \dfrac{2\times c+1\times 0}{2+1}\right)$에서
$2a+2b=0,\ 2c=6$
$b=-a,\ c=\boxed{3}$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 직선 AM과 직선 BC는 서로 수직이고, 직선 AM의 기울기가 $-\dfrac{1}{a}$이므로
직선 BC의 기울기는 a이다.
직선 BC는 기울기가 a이고 점 $\mathrm{M}(-a,3)$을 지나므로
직선 BC의 방정식은
$y=\boxed{a}\times\{x-(-a)\}+\boxed{3}$이다.
점 B의 x좌표를 k라 하면
점 B는 직선 BC 위의 점이므로
점 B의 y좌표는 $\boxed{a}\times(k+a)+\boxed{3}$이다.
$\mathrm{B}(k,a(k+a)+3)$, $\mathrm{M}(-a,3)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BM}}&=\sqrt{(-a-k)^2+(3-ak-a^2-3)^2}\\&=\sqrt{(a+k)^2+a^2(a+k)^2}\\&=\sqrt{(a+k)^2(a^2+1)}\end{aligned}$$

이고, $\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{a^2+1}$이므로
$\sqrt{(a+k)^2(a^2+1)}=\sqrt{a^2+1}$
$\sqrt{(a+k)^2}=1$에서 $|a+k|=1$이므로
$k=-a+1$ 또는 $k=-a-1$
점 B의 x좌표가 점 C의 x좌표보다 크므로
점 B의 x좌표는 점 M의 x좌표보다 크다.
그러므로 $k=\boxed{-a+1}$이다.
점 B의 y좌표는 $a(-a+1)+a^2+3=a+3$이므로
점 B의 x좌표와 y좌표의 합은
$(-a+1)+(a+3)=\boxed{4}$이다.
따라서 $p=3,\ q=4$이고
$f(a)=a,\ g(a)=-a+1$이므로
$f(p)\times g(q)=3\times(-4+1)=-9$

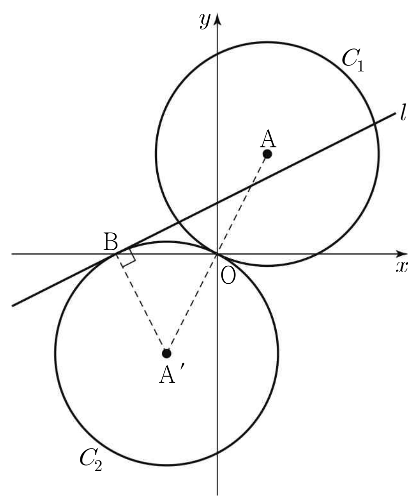
21. [출제의도] 원의 방정식을 이용하여 추론하기

삼각형 OPQ의 외접원의 중심이 선분 PQ 위에 있으려면 삼각형 OPQ는 $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$인 직각삼각형이어야 한다.



점 Q를 원점 O에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라 하면 점 Q′은 원 C_1 위의 점이고

$\overline{OQ}=\overline{OQ'}$, $\angle POQ'=180^\circ-\angle POQ=90^\circ$
이므로 두 삼각형 OPQ, OPQ'은 서로 합동이다.
그러므로 $\overline{PQ'}=\overline{PQ}=6$
또한 원 C_1은 직각삼각형 OPQ'의 외접원이므로
선분 PQ'은 원 C_1의 지름이다.
원 C_1의 중심의 좌표를 $A(a, b)\,(a>0,\ b>0)$이라 하면 원 C_1이 원점을 지나므로
$\sqrt{a^2+b^2}=3$, $a^2+b^2=9$ ⋯ ㉠



원 C_2의 중심을 A′이라 하면 점 A′은 점 A를 원점 O에 대하여 대칭이동한 점이므로
점 A′의 좌표는 $(-a, -b)$이다.
원 C_2의 방정식은 $(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2$이므로
점 B의 좌표는 $(-2a, 0)$
직선 l의 기울기는 $\frac{1}{2}$이고 직선 l과 직선 BA′이 서로 수직이므로 직선 BA′의 기울기는 -2이다.
$\frac{-b-0}{-a-(-2a)}=-\frac{b}{a}=-2$에서 $b=2a$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=\frac{3}{5}\sqrt{5}$, $b=\frac{6}{5}\sqrt{5}$
직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$
즉, $5x-10y+6\sqrt{5}=0$
따라서 점 $A\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$와 직선 l 사이의 거리는 $\frac{|3\sqrt{5}-12\sqrt{5}+6\sqrt{5}|}{\sqrt{5^2+(-10)^2}}=\frac{3}{5}$

22. [출제의도] 두 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y=(5-2k)x+2$와 직선 $y=x+3$이 서로 평행하므로 두 직선의 기울기는 같다.
$5-2k=1$에서 $k=2$

23. [출제의도] 순열과 조합 이해하기

등식 ${}_nC_2={}_3P_2\times n$에서
$\frac{n\times(n-1)}{2!}=3\times2\times n$, $n(n-1)=12n$
n은 자연수이므로 $n-1=12$에서 $n=13$

24. [출제의도] 행렬의 실수배 이해하기

$$pA-B=\begin{pmatrix}4p & 3p\\ 3p & 4p\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4p-8 & 3p-2\\ 3p-2 & 4p-8\end{pmatrix}$$
이고 $q\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & q\\ q & 0\end{pmatrix}$이므로
$4p-8=0$에서 $p=2$,
$3p-2=q$에서 $q=4$
따라서 $p+q=6$

25. [출제의도] 순열 이해하기

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되려면 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 모두 홀수이어야 한다.
홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 2장의 카드를 선택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
양 끝에 놓인 카드 사이에 나머지 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_4=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times24=144$

26. [출제의도] 사차방정식을 활용하여 문제해결하기

$2x^2+kx=X$라 하면
$(2x^2+kx)^2+10(2x^2+kx)+16=0$에서
$X^2+10X+16=0$, $(X+2)(X+8)=0$
$(2x^2+kx+2)(2x^2+kx+8)=0$
모든 실수 x에 대하여
$(2x^2+kx+2)-(2x^2+kx+8)=-6\neq0$이므로
연립방정식
$\begin{cases}2x^2+kx+2=0\\ 2x^2+kx+8=0\end{cases}$
의 실근은 존재하지 않는다. ⋯ ㉠
두 이차방정식 $2x^2+kx+2=0$, $2x^2+kx+8=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면
$D_1=k^2-4\times2\times2=k^2-16$,
$D_2=k^2-4\times2\times8=k^2-64$
이므로 $D_1>D_2$
㉠에 의하여 사차방정식
$(2x^2+kx)^2+10(2x^2+kx)+16=0$의
서로 다른 실근의 개수가 2이기 위해서는
$D_1>0$, $D_2<0$이어야 한다.
$D_1=k^2-16>0$에서 $k<-4$ 또는 $k>4$,
$D_2=k^2-64<0$에서 $-8<k<8$
그러므로 $-8<k<-4$ 또는 $4<k<8$
따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은
$5+6+7=18$

27. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 문제해결하기

이차방정식 $x^2+kx-\frac{1}{2}k^2+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식
$x^2+kx-\frac{1}{2}k^2+3k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-4\left(-\frac{1}{2}k^2+3k\right)$
$=3k(k-4)>0$
$k<0$ 또는 $k>4$ ⋯ ㉠
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-\frac{1}{2}k^2+3k$
또한 α는 이차방정식 $x^2+kx-\frac{1}{2}k^2+3k=0$의 한 근이므로
$\alpha^2+k\alpha-\frac{1}{2}k^2+3k=0$에서 $\alpha^2=-k\alpha+\frac{1}{2}k^2-3k$
$\alpha^2-k\beta=-k\alpha+\frac{1}{2}k^2-3k-k\beta$
$=-k(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}k^2-3k$
$=k^2+\frac{1}{2}k^2-3k$
$=\frac{3}{2}k^2-3k=12$
에서 $\frac{3}{2}k^2-3k-12=0$, $(k+2)(k-4)=0$
㉠에 의하여 $k=-2$
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-8$
따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=2^2-2\times(-8)=20$

28. [출제의도] 원의 방정식을 이용하여 추론하기

선분 AB는 x축 위에 있으므로 선분 AB를 $1:4$로 내분하는 점은 x축 위의 점이고,
선분 CD는 y축 위에 있으므로 선분 CD의 중점은 y축 위의 점이다.
x축 위에 있고 동시에 y축 위에 있는 점은 원점 O뿐이므로 $\overline{AO}:\overline{BO}=1:4$, $\overline{CO}=\overline{DO}$이다.
직선 AB는 선분 CD의 수직이등분선이므로
선분 AB는 원 O의 지름이다.
점 O는 두 점 A, B를 $1:4$로 내분하는 점이므로
점 A의 좌표를 $A(-a, 0)\,(a>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $B(4a, 0)$이다.
선분 AB가 원 O의 지름이므로 원 O의 중심의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}a, 0\right)$이고 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}a$이다.
조건 (나)에 의하여 원 O의 중심 $\left(\frac{3}{2}a, 0\right)$과
직선 $4x-3y+13=0$ 사이의 거리는 $\frac{5}{2}a$이다.
$\frac{|6a+13|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{5}{2}a$, $|6a+13|=\frac{25}{2}a$에서
$a=2$이므로 $A(-2, 0)$, $B(8, 0)$이고
원 O의 방정식은 $(x-3)^2+y^2=25$이다.
두 점 C, D는 원 O와 y축과의 교점이므로
$9+y^2=25$에서 $y=4$ 또는 $y=-4$
그러므로 $C(0, -4)$, $D(0, 4)$이다.
따라서 사각형 ACBD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times10\times8=40$

29. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 문제해결하기

$\overline{AB}=a$, $\overline{BF}=b\,(a>b)$라 하자.
직사각형 RSGH에서 $\overline{SG}=a-b$, $\overline{GH}=a$이므로
$\overline{SH}^2=\overline{SG}^2+\overline{GH}^2$
$=(a-b)^2+a^2$
$=2a^2-2ab+b^2$
직각삼각형 DHS에서
$\overline{SD}^2=\overline{SH}^2+\overline{DH}^2$
$=(2a^2-2ab+b^2)+b^2$
$=2(a^2-ab+b^2)$
이므로
$(\overline{AB}+\overline{BF})\times\overline{SD}^2=(a+b)\times2(a^2-ab+b^2)$
$=2(a^3+b^3)=\frac{35}{4}$
에서 $a^3+b^3=\frac{35}{8}$
$V_1=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{BF}=a^2b$,
$V_2=\overline{AB}\times\overline{BQ}\times\overline{BF}=ab^2$
이므로 $V_1+V_2=a^2b+ab^2=\frac{15}{4}$

$(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BF}})^3=(a+b)^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$=a^3+b^3+3(a^2b+ab^2)$

$=\frac{35}{8}+\frac{45}{4}=\frac{125}{8}$

이므로 $p=8$, $q=125$

따라서 $p+q=133$

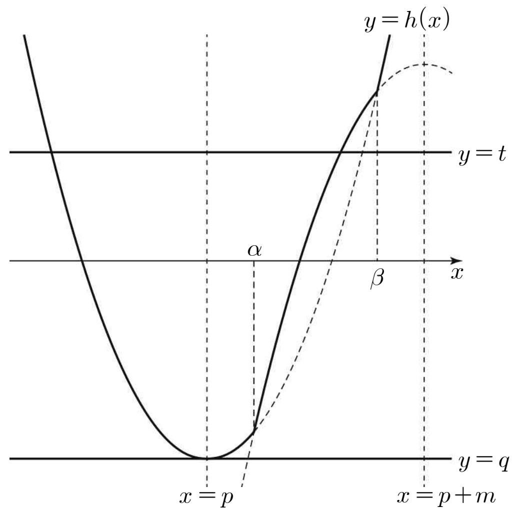
30. [출제의도] 이차함수를 이용하여 추론하기

$q \geq 0$이면 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq 0$, $g(x) \leq 0$가 되어 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근을 갖지 않으므로 $q<0$

방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$에서 만난다.

(i) $\alpha \geq p$일 때



$t>q$인 모든 실수 t에 대하여 방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$t>q$인 실수 t에 대하여

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 두 교점의 x좌표를 x_1, x_2,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 두 교점의 x좌표를 x_3, x_4라 하자.

이때 $t>q$인 모든 실수 t에 대하여

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 두 교점의 x좌표의 합은 $2p$이므로

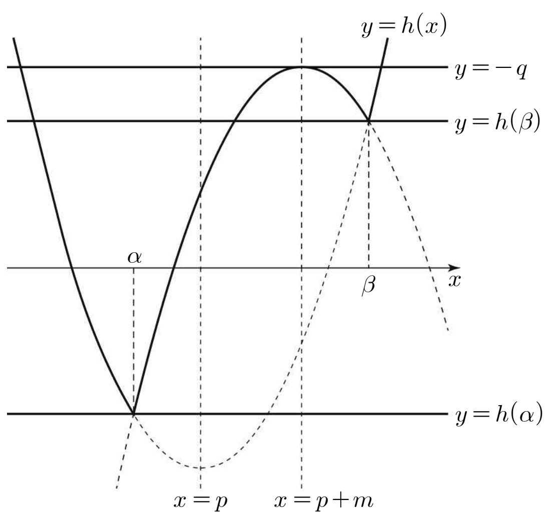
방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 두 실근의 합

x_1+x_2는

$x_1+x_2 \leq x_3+x_4=2p$

$p>0$, $m>0$이므로 $x_1+x_2<4p+2m$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha<p$일 때



$h(\alpha)<t<h(\beta)$ 또는 $t>-q$인 모든 실수 t에 대하여 방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고,

$t=h(\beta)$ 또는 $t=-q$인 실수 t에 대하여

방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고,

$h(\beta)<t<-q$인 모든 실수 t에 대하여

방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(a) $h(\alpha)<t<h(\beta)$ 또는 $t>-q$일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면

방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 두 실근의 합은 $2p$보다 작거나 같으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $t=h(\beta)$ 또는 $t=-q$일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면

방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 세 실근의 합은 $3p+m$보다 작거나 같으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(c) $h(\beta)<t<-q$일 때

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 네 교점의 x좌표를 작은 수부터 차례로 x_5, x_6, x_7, x_8이라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 두 교점의 x좌표는 x_5, x_8이고

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 두 교점의 x좌표는 x_6, x_7이다.

이때 $x_5+x_8=2p$, $x_6+x_7=2p+2m$이므로

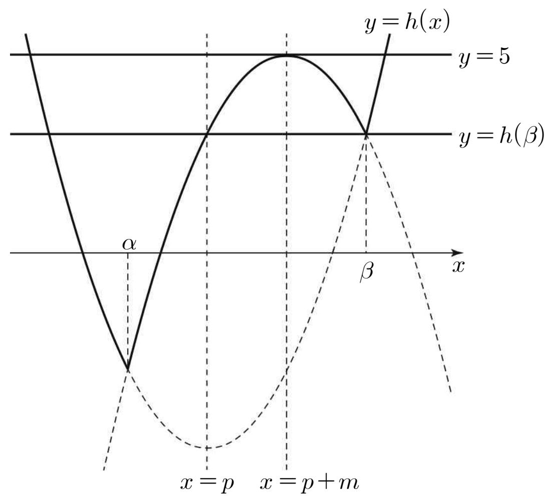
방정식 $h(x)=t$의 서로 다른 네 실근의 합

$x_5+x_6+x_7+x_8$은

$x_5+x_6+x_7+x_8=4p+2m$

그러므로 조건을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 범위는 $h(\beta)<t<-q$

조건에 의하여 $h(\beta)=g(p)$이고 $-q=5$, $q=-5$



이때 $h(\beta)=f(\beta)=g(\beta)$이므로 $g(p)=f(\beta)$

이차함수 $y=g(x)$의 그래프는

직선 $x=p+m$에 대하여 대칭이므로

$p+\beta=2(p+m)$, $\beta=p+2m$

$f(\beta)=f(p+2m)$

$=\frac{1}{2}(2m)^2-5=2m^2-5$

이고

$g(p)=-\frac{1}{2}(-m)^2+5=-\frac{1}{2}m^2+5$

이므로 $2m^2-5=-\frac{1}{2}m^2+5$에서

$m^2=4$, $m=2$

그러므로 $f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2-5$,

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-2-p)^2+5$

$f(m)+g(m)=f(2)+g(2)$

$=\left\{\frac{1}{2}(2-p)^2-5\right\}+\left(-\frac{1}{2}p^2+5\right)$

$=-2p+2$

$-2p+2=-4$이므로 $p=3$

(i), (ii)에 의하여

$m \times (p-q)=2 \times \{3-(-5)\}=16$