정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	③	3	⑤	4	①	5	②
6	⑤	7	②	8	④	9	①	10	①
11	②	12	③	13	⑤	14	④	15	⑤
16	③	17	③	18	④	19	②	20	①
21	①	22	3	23	55	24	5	25	16
26	432	27	10	28	98	29	133	30	25

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2^3 \times 4^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times (2^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^3 \times 2^{-1} = 2^2 = 4$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+2}{(x+1)^2 - x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+2}{2x+1}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \dfrac{3}{2}$

3. [출제의도] 등차수열 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

a_2는 두 항 a_1, a_3의 등차중항이므로

$a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} = 8$

공차가 5이므로

$a_4 = a_2 + 2 \times 5 = 8 + 10 = 18$

4. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에서

$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$일 때,

$\sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 또는 $\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$이므로 $\sin\theta < 0$

$\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 3+} f(x) = -1$

6. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\dfrac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 18\theta = 15\pi$

$\theta = \dfrac{5}{6}\pi$

7. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

두 점 $\mathrm{A}(2, \log_a 2)$, $\mathrm{B}(4, \log_a 4)$를 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{\log_a 4 - \log_a 2}{4-2} = \dfrac{\log_a 2}{2} = -\dfrac{1}{4}$이므로

$\log_a 2 = -\dfrac{1}{2}$, $a^{-\frac{1}{2}} = 2$

$a = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

8. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$a_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}\right)$

$\sum\limits_{k=1}^{8} a_k = \dfrac{1}{3} \times \sum\limits_{k=1}^{8}\left(\dfrac{1}{3k-2} - \dfrac{1}{3k+1}\right)$

$= \dfrac{1}{3} \times \left\{\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{7}\right) + \cdots \right.$

$\left. + \left(\dfrac{1}{19} - \dfrac{1}{22}\right) + \left(\dfrac{1}{22} - \dfrac{1}{25}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{3} \times \left(1 - \dfrac{1}{25}\right) = \dfrac{8}{25}$

9. [출제의도] 로그가 포함된 부등식 이해하기

$\log(x-1)$, $\log(x+2)$가 정의되기 위해서는

$x-1>0$이고 $x+2>0$이어야 한다.

그러므로 $x > 1$ ⋯㉠

$\log(x-1) + \log(x+2) \le 1$

$\log(x-1)(x+2) \le \log 10$

$(x-1)(x+2) \le 10$

$x^2 + x - 12 \le 0$

$-4 \le x \le 3$ ⋯㉡

㉠, ㉡에 의하여 $1 < x \le 3$이므로

부등식을 만족시키는 자연수 x는 2, 3이고

그 값의 합은 5

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \le x < 4\pi)$의

그래프와 x축이 만나는 점의

x좌표를 t $(0 \le t < 4\pi)$라 하면

$\sin\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $\sin\dfrac{t}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \le \dfrac{t}{2} < 2\pi$이므로 $\dfrac{t}{2} = \dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $\dfrac{t}{2} = \dfrac{5}{3}\pi$

$t = \dfrac{8}{3}\pi$ 또는 $t = \dfrac{10}{3}\pi$

선분 AB의 길이는

$\dfrac{10}{3}\pi - \dfrac{8}{3}\pi = \dfrac{2}{3}\pi$

11. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = \log_2(x+a) + b$의 그래프가 두 점 $(0, -2)$, $(3, 0)$을 지나므로

$\log_2 a + b = -2$ ⋯㉠

$\log_2(3+a) + b = 0$ ⋯㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\log_2(3+a) - \log_2 a = 2$

$\log_2(3+a) = \log_2 4a$

$a = 1$, $b = -2$

함수 $f(x) = \log_2(x+1) - 2$

$f(15) = \log_2(15+1) - 2 = 2$

12. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 할 때,

$S_n = \dfrac{n\{2a + (n-1) \times (-4)\}}{2}$

$= n\{a - 2(n-1)\}$

$S_{12} = 12(a - 22) = 0$, $a = 22$

$S_n = n(-2n + 24) = -2n^2 + 24n$

$= -2(n-6)^2 + 72$

$n = 6$일 때, S_n의 최댓값은 72

13. [출제의도] 로그 이해하기

$a^3 = b^2 = k$ (k는 1이 아닌 양수)라 하면

$a = k^{\frac{1}{3}}$, $b = k^{\frac{1}{2}}$

$\log_a c = \log_{k^{\frac{1}{3}}} c = 3\log_k c$,

$\log_b c = \log_{k^{\frac{1}{2}}} c = 2\log_k c$이므로

$\log_a c = \log_b c + 1$에서

$3\log_k c = 2\log_k c + 1$

$\log_k c = 1$, $c = k$

$\log_c ab = \log_k k^{\frac{1}{3}} k^{\frac{1}{2}} = \log_k k^{\frac{5}{6}} = \dfrac{5}{6}$

14. [출제의도] 거듭제곱근을 활용하여 문제 해결하기

2 이상의 자연수 n에 대하여

(ⅰ) n이 홀수인 경우

$n^2 - 12n + 27 \ge 0$이면 $f(n) = 0$

$n^2 - 12n + 27 < 0$이면 $f(n) = 1$

(ⅱ) n이 짝수인 경우

$n^2 - 12n + 27 > 0$이면 $f(n) = 1$

$n^2 - 12n + 27 \le 0$이면 $f(n) = 0$

$n^2 - 12n + 27 = (n-3)(n-9)$이므로

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\sum\limits_{n=2}^{20} f(n) = f(2) + f(5) + f(7) + f(10) + f(12)$

$+ f(14) + f(16) + f(18) + f(20) = 9$

15. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

자연수 n에 대하여 두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 α_n, β_n $(\alpha_n < \beta_n)$이라 하면

α_n, β_n은 x에 대한 방정식

$x^2 - nx - 2n^2 = x + n$의 실근이다.

$x^2 - (n+1)x - n(2n+1) = 0$

$(x+n)(x-2n-1) = 0$에서

$\alpha_n = -n$, $\beta_n = 2n+1$

두 점 $\mathrm{A}_n(-n, 0)$, $\mathrm{B}_n(2n+1, 3n+1)$에 대하여 점 B_n에서 직선 OA_n에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

$\mathrm{H}_n(2n+1, 0)$

$S_n = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OA}_n} \times \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{H}_n}$

$= \dfrac{1}{2} \times n \times (3n+1) = \dfrac{3}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} S_k = \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k\right)$

$= \dfrac{3}{2}\times\dfrac{4\times5\times9}{6} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\times5}{2}$

$= 50$

16. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

(i) $0 < x \le \dfrac{1}{3}$ 인 경우

$0 < x < 3x \le 1$ 이므로

$f(x) + f(3x) = \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} 3x$

$= \log_{\frac{1}{3}} 3x^2 = 3$

$3x^2 = \dfrac{1}{27}$

$x = -\dfrac{1}{9}$ 또는 $x = \dfrac{1}{9}$

$0 < x \le \dfrac{1}{3}$ 이므로 $x = \dfrac{1}{9}$

(ii) $\dfrac{1}{3} < x \le 1$ 인 경우

$\dfrac{1}{3} < x \le 1 < 3x$ 이므로

$f(x) + f(3x) = \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 3x$

$= \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 3 + \log_3 x = 1$

이므로 방정식 $f(x) + f(3x) = 3$ 의 실근은 존재하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 인 경우

$1 < x < 3x$ 이므로

$f(x) + f(3x) = \log_3 x + \log_3 3x$

$= \log_3 3x^2 = 3$

$3x^2 = 27$

$x = -3$ 또는 $x = 3$

$x > 1$ 이므로 $x = 3$

(i) ~ (iii) 에 의하여

방정식 $f(x) + f(3x) = 3$ 의 모든 실근은

$\dfrac{1}{9}$, 3 이고 그 합은 $\dfrac{28}{9}$

17. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$

점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t})$

점 A 에서 직선 $x = t$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\mathrm{H}(t,\ 1)$

$S(t) = \dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AH}}$

$= \dfrac{1}{2}\times(t^2 - \sqrt{t})\times(t-1)$

$\displaystyle\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{(t-1)^2} = \lim_{t\to1+}\frac{(t^2-\sqrt{t})(t-1)}{2(t-1)^2}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\times\lim_{t\to1+}\frac{(t^4-t)}{(t-1)(t^2+\sqrt{t})}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\times\lim_{t\to1+}\frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t^2+\sqrt{t})}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\times\lim_{t\to1+}\frac{t(t^2+t+1)}{t^2+\sqrt{t}} = \frac{3}{4}$

18. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

$a\cos\left(bx - \dfrac{\pi}{4}\right) = a\cos b\left(x - \dfrac{\pi}{4b}\right)$ 이므로

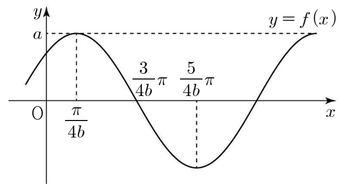
함수 $f(x) = a\cos\left(bx - \dfrac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는

함수 $y = a\cos bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\dfrac{\pi}{4b}$ 만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

함수 $y = a\cos bx$ 의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$0 \le x \le \pi$ 에서

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 음수이므로

$\dfrac{3}{4b}\pi < \pi$ $\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4 이므로 $a = 4$

$\dfrac{5}{4b}\pi \le \pi$ 일 때,

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $-4\ (\ne -2\sqrt{2})$ 이므로

$\pi < \dfrac{5}{4b}\pi$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$0 \le x \le \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 가

$x = \pi$ 일 때, 최솟값 $-2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

$\dfrac{3}{4b}\pi < \pi < \dfrac{5}{4b}\pi$ 이므로 $\dfrac{\pi}{2} < b\pi - \dfrac{\pi}{4} < \pi$

$f(\pi) = 4\cos\left(b\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$

$\cos\left(b\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$b\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{4}\pi$, $b = 1$

$a + b = 5$

19. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B는 곡선 $y = 3^x + b$ 위의 점이다.

$b > 0$ 이므로 곡선 $y = 3^x + b$ 는

직선 $y = x$ 와 만나지 않는다.

점 B를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한

점을 $\mathrm{B}'(3^{a+3} + b,\ a+3)$ 이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{B'P}} \ge \overline{\mathrm{AB'}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 값은 점 P 가 직선 AB′ 과

직선 $y = x$ 의 교점일 때 최소이다.

직선 AB′ 과 직선 $y = x$ 의 교점을 P_0 이라 하면

$\overline{\mathrm{AP_0}} + \overline{\mathrm{BP_0}} = \overline{\mathrm{AP_0}} + \overline{\mathrm{B'P_0}} = \overline{\mathrm{AB'}} = 55$

점 C 의 y 좌표가 $a + 3$ 이므로

$\log_3(x - a - b) = a + 3$, $x = 3^{a+3} + a + b$

$\mathrm{C}(3^{a+3} + a + b,\ a+3)$ 이다.

점 C는 점 B′을 x 축의 방향으로 $a\ (a > 0)$ 만큼

평행이동한 점과 일치하므로 $\overline{\mathrm{B'C}} = a$ 이고

직선 B′C는 x 축과 평행하다.

$\overline{\mathrm{AB'}} + \overline{\mathrm{B'C}} = \overline{\mathrm{AC}}$ 이므로

점 B′ 은 선분 AC 위의 점이고

직선 AB′ 은 x 축과 평행하다.

$3^a + b = a + 3$ $\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB'}} = 55$ 이므로

$3^{a+3} + b - a = 55$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $3^{a+3} - 3^a = 52$

$3^a = 2$, $a = \log_3 2$, $b = a + 1$

$a + b = 2a + 1 = \log_3 12$

20. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

(Ⅰ) a_2 가 홀수인 경우

조건 (나)에 의하여

$a_3 = \dfrac{a_2 + 3}{2} \ge a_2$ 이므로 $a_2 \le 3$

① $a_2 = 1$ 인 경우

$a_3 = 2$, $a_4 = 3$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $a_2 = 3$ 인 경우

$a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3$, $\cdots$

$a_1 = 3$ 또는 $a_1 = 2$

(Ⅱ) a_2 가 짝수인 경우

① $a_2 = 4k$ (k 는 자연수) 인 경우

$a_3 = 6k$, $a_4 = 9k$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $a_2 = 4k - 2$ (k 는 자연수) 인 경우

$a_3 = 6k - 3$, $a_4 = 3k$

(i) k 가 홀수인 경우

$a_5 = \dfrac{3k+3}{2}$, $a_4 + a_5 = \dfrac{9k+3}{2} \le 24$

$k \le 5$ 이므로 $k = 1$, 3, 5

ⓐ $k = 1$ 인 경우

$a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3$, $\cdots$

$a_1 = 1$ 또는 $a_1 = \dfrac{4}{3}$

조건에 의하여 $a_1 = 1$

ⓑ $k = 3$ 인 경우

$a_2 = 10$, $a_3 = 15$

$a_1 = 17$ 또는 $a_1 = \dfrac{20}{3}$

조건을 만족시키지 않는다.

ⓒ $k = 5$ 인 경우

$a_2 = 18$, $a_3 = 27$, $a_4 = 15$, $a_5 = 9$,

$a_6 = 6$, $a_7 = 9$, $a_8 = 6$, $\cdots$

$a_1 = 33$ 또는 $a_1 = 12$

조건 (나)에 의하여 $a_1 = 12$

(ii) k 가 짝수인 경우

$a_5 = \dfrac{9}{2}k$, $a_4 + a_5 = \dfrac{15}{2}k \le 24$

$k \le \dfrac{16}{5}$ 이므로 $k = 2$

$a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 6$, $a_5 = 9$, $\cdots$

$a_1 = 9$ 또는 $a_1 = 4$

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여

a_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 9, 12 이고 그 합은 31

[참고]

조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\cdots$
1	2	3	3	3	3	3	$\cdots$
2	3	3	3	3	3	3	$\cdots$
3	3	3	3	3	3	3	$\cdots$
4	6	9	6	9	6	9	$\cdots$
9	6	9	6	9	6	9	$\cdots$
12	18	27	15	9	6	9	$\cdots$

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle\mathrm{ADB}$, $\angle\mathrm{ACB}$는 호 AB에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}$ ⋯㉠

$\angle\mathrm{ABD}$, $\angle\mathrm{ACD}$는 호 AD에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ACD}$ ⋯㉡

선분 AC가 삼각형 BCD에 내접하는 원 C_2의 넓이를 이등분하므로

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ACD}$

㉠, ㉡에 의하여

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ADB}$이므로

삼각형 ABD는 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=2$

$\angle\mathrm{ACB}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$이므로

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\overline{\mathrm{BC}}=x$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+x^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times x\times\cos\theta$

$4=7+x^2-2\times\sqrt{7}\times x\times\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=3$

$\overline{\mathrm{CD}}=y$라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+y^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times y\times\cos\theta$

$4=7+y^2-2\times\sqrt{7}\times y\times\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$y^2-4y+3=0$, $(y-1)(y-3)=0$

$y=1$ 또는 $y=3$

$\overline{\mathrm{BC}}>\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=1$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{2^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2^2}{2\times2\times\overline{\mathrm{BD}}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

삼각형 BCD에서 $\angle\mathrm{BCD}=2\theta$이므로

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin2\theta}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$, $\sin2\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

원 C_2의 반지름의 길이를 r,

삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times r\times\left(\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{BD}}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin2\theta$에서

$\frac{1}{2}\times r\times\left(3+1+\frac{8\sqrt{7}}{7}\right)=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$r=\sqrt{3}-\frac{2}{7}\sqrt{21}$

22. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 계산하기

$(5^2)^x=(5^{-1})^{x-9}$, $5^{2x}=5^{-x+9}$

$2x=-x+9$, $x=3$

23. [출제의도] $\sum$의 성질 이해하기

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{10}b_k=2\times\sum_{k=1}^{10}a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{2}\times(80+30)=55$

24. [출제의도] 로그 이해하기

$\log_3 25\times(\log_5 9+\log_{25}3)$

$=\log_3 25\times\log_5 9+\log_3 25\times\log_{25}3$

$=2\log_3 5\times2\log_5 3+1=5$

25. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{B}=\theta\ \left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$라 하면

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times12\times\sin\theta=12\sqrt{15}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\theta=-\frac{1}{4}$

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=8^2+12^2-2\times8\times12\times\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=64+144-192\times\left(-\frac{1}{4}\right)=256$

선분 AC의 길이는 16

26. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1 $(a_1>0)$,

공비를 r이라 하면

$a_2=a_1\times r=-54$ ⋯㉠

이므로 $r<0$

$6S_1+S_2+S_4=0$이므로

$6a_1+\frac{a_1\times(1-r^2)}{1-r}+\frac{a_1\times(1-r^4)}{1-r}=0$

$6+(1+r)+(1+r+r^2+r^3)=0$

$r^3+r^2+2r+8=0$

$(r+2)(r^2-r+4)=0$

$r=-2$ ⋯㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a_5=a_2\times r^3=(-54)\times(-8)=432$

27. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $y=a\sin\frac{\pi}{4}x+b$의 주기는 8,

치역은 $\{y\,|\,b-a\le y\le b+a\}$

정수 k에 대하여 $A_k=\{x\,|\,f(x)=k\}$라 할 때,

$i\ne j$이면 $A_i\cap A_j=\varnothing$

임의의 집합 $X(\ne\varnothing)$에 대하여

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하자.

$A_{b+a}=\{2\}$, $S(A_{b+a})=2$

$A_b=\{0,4,8\}$, $S(A_b)=12$

$A_{b-a}=\{6\}$, $S(A_{b-a})=6$

집합 $A=\{x\,|\,f(x)=n,\ n$은 자연수$\}$라 할 때,

$(A_b\cup A_{b+a})\subset A$, $S(A_b\cup A_{b+a})=14$

(i) $b=1$인 경우

① $a=1$일 때

$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x+1$이고

$A_b\cup A_{b+a}=A$, $S(A)=14$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

② $a\ge2$일 때

$b<m<b+a$인 정수 m에 대하여

$S(A_m)=4$,

$(b+a)-b-1=2$, $a=3$

$A_b\cup A_{b+1}\cup A_{b+2}\cup A_{b+3}=A$, $S(A)=22$

(ii) $b\ge2$인 경우

① $a=1$일 때

$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x+b$이고

$A_{b-a}\cup A_b\cup A_{b+a}=A$, $S(A)=20$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

② $a\ge2$일 때

$b-a<b-1<b$, $S(A_{b-1})=12$

$(A_{b-1}\cup A_b\cup A_{b+a})\subset A$,

$S(A_{b-1}\cup A_b\cup A_{b+a})=26$

$S(A)>22$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=3$, $b=1$

$a^2+b^2=10$

28. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여

$b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=3a_{3n-1}$

조건 (나)에 의하여 수열 $\{b_n\}$은

첫째항이 $3a_2$, 공비가 3인 등비수열이므로

모든 자연수 n에 대하여

$b_n=3a_{3n-1}=3a_2\times3^{n-1}$

$a_{3n-1}=a_2\times3^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{14}a_k=a_{13}+a_{14}+\sum_{k=1}^{4}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$=a_{13}+81a_2+\sum_{k=1}^{4}b_k$

$=a_{13}+81a_2+3a_2\times\sum_{k=1}^{4}3^{k-1}$

$=a_{13}+81a_2+3a_2\times\frac{3^4-1}{3-1}$

$=a_{13}+201a_2=500$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

$a_2=1$ 또는 $a_2=2$

(i) $a_2=1$인 경우

$a_{13}=299$, $a_{14}=81$, $a_{15}<0$

조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 = 2$ 인 경우

$a_{13} = 98$, $a_{14} = 162$, $a_{15} = 226$ 이므로

조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a_{13} = 98$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 추론하기

두 자연수 a, b에 대하여

$$f(g(x)) = f\left(\sin\frac{\pi}{b}x + 3\right)$$
$$= \frac{3}{a}\left|\left(\sin\frac{\pi}{b}x + 3\right) - 3\right| - b$$
$$= \frac{3}{a}\left|\sin\frac{\pi}{b}x\right| - b$$

함수 $y = \frac{3}{a}\left|\sin\frac{\pi}{b}x\right|$ 의 그래프를

y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하면

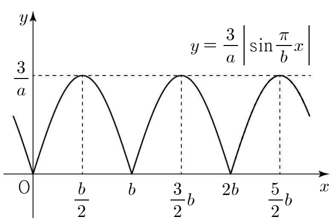
함수 $y = f(g(x))$의 그래프와 일치하므로

함수 $y = \frac{3}{a}\left|\sin\frac{\pi}{b}x\right|$ 의 그래프가

직선 $x = 3$에 대하여 대칭일 때

조건 (가)를 만족시킨다.

함수 $y = \frac{3}{a}\left|\sin\frac{\pi}{b}x\right|$ 의 주기는 b



함수 $y = \frac{3}{a}\left|\sin\frac{\pi}{b}x\right|$ 의 그래프는

직선 $x = \frac{k}{2}b$ (k는 정수)에 대하여 대칭이므로

$\frac{k}{2}b = 3$이다.

조건 (가)를 만족시키는 자연수 b는 1, 2, 3, 6

함수 $y = g(f(x))$의 그래프가 직선 $y = 3$과

만나는 점의 x좌표를 α라 할 때,

$g(f(\alpha)) = 3$

$f(\alpha) = t$라 하면 $g(t) = 3$

$\sin\frac{\pi}{b}t + 3 = 3$, $\sin\frac{\pi}{b}t = 0$

$t = 0$, $\pm b$, $\pm 2b$, $\cdots$

$0 \le x \le 6$일 때, 함수 $y = g(f(x))$의 그래프가

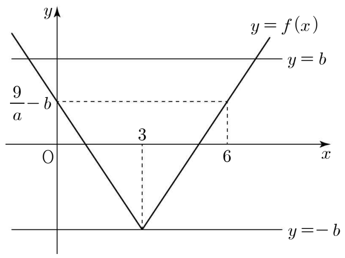
직선 $y = 3$과 만나는 서로 다른 점의 개수는

함수 $y = f(x)$의 그래프가

직선 $y = 0$, $y = \pm b$, $y = \pm 2b$, $\cdots$ 와 만나는

서로 다른 점의 개수의 합과 같으므로

$0 \le f(0) < b$, $0 \le \frac{9}{a} - b < b$



$b \le \frac{9}{a} < 2b$일 때, 조건 (나)를 만족시킨다.

(i) $b = 1$인 경우

$1 \le \frac{9}{a} < 2$이므로 $a = 5$, 6, 7, 8, 9

(ii) $b = 2$인 경우

$2 \le \frac{9}{a} < 4$이므로 $a = 3$, 4

(iii) $b = 3$인 경우

$3 \le \frac{9}{a} < 6$이므로 $a = 2$, 3

(iv) $b = 6$인 경우

$6 \le \frac{9}{a} < 12$이므로 $a = 1$

(i) ~ (iv)에 의하여 조건을 만족시키는

두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, $(8, 1)$, $(9, 1)$,

$(3, 2)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(1, 6)$

$2a + b$의 최댓값 $M = 19$, 최솟값 $m = 7$

$M \times m = 133$

30. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 추론하기

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이면

$h(x) = g(x) + f(x)$이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가

서로 다른 두 점에서 만난다.

방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 두 실근을

x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$라 하자.

$x \le x_1$일 때, $f(x) \ge g(x)$

$x_1 < x < x_2$일 때, $f(x) < g(x)$

$x \ge x_2$일 때, $f(x) \ge g(x)$를 만족시킨다.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) + f(x) & (x \le x_1 \text{ 또는 } x \ge x_2) \\ g(x) - f(x) & (x_1 < x < x_2) \end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x = x_1$과 $x = x_2$를 제외한 모든

실수에서 극한값을 가지므로

조건 (가)에 의하여 $x_1 = 2$ 또는 $x_2 = 2$

(i) $x_1 = 2$인 경우

$\lim_{x \to x_2-} h(x) = \lim_{x \to x_2+} h(x)$이다.

$\lim_{x \to x_2-} h(x) = g(x_2) - f(x_2) = 0$,

$\lim_{x \to x_2+} h(x) = g(x_2) + f(x_2) = 2g(x_2)$이므로

$g(x_2) = 0$

직선 $y = g(x)$의 기울기가 양수이므로

$g(x_1) = g(2) < 0$이다.

$\lim_{x \to x_1-} h(x) = g(x_1) + f(x_1) = 2g(x_1) = 2g(2)$,

$\lim_{x \to x_1+} h(x) = g(x_1) - f(x_1) = 0$이므로

$\lim_{x \to x_1-} |h(x) - 1| = |2g(2) - 1| > 1$,

$\lim_{x \to x_1+} |h(x) - 1| = |0 - 1| = 1$

$\lim_{x \to x_1} |h(x) - 1|$ 의 값이 존재하지 않으므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $x_2 = 2$인 경우

$\lim_{x \to x_1-} h(x) = \lim_{x \to x_1+} h(x)$이다.

$\lim_{x \to x_1-} h(x) = g(x_1) + f(x_1) = 2g(x_1)$,

$\lim_{x \to x_1+} h(x) = g(x_1) - f(x_1) = 0$이므로

$g(x_1) = 0$

직선 $y = g(x)$의 기울기가 양수이므로

$g(x_2) = g(2) > 0$이다.

$\lim_{x \to x_2-} h(x) = g(x_2) - f(x_2) = 0$,

$\lim_{x \to x_2+} h(x) = g(x_2) + f(x_2) = 2g(x_2) = 2g(2)$

이므로

$\lim_{x \to x_2-} |h(x) - 1| = |0 - 1| = 1$,

$\lim_{x \to x_2+} |h(x) - 1| = |2g(2) - 1|$

조건 (나)에 의하여 $g(2) = 1$

(i), (ii)에 의하여 $x_2 = 2$

$g(2) = \frac{2}{3} + a = 1$, $a = \frac{1}{3}$ 이므로

$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$g(x_1) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3} = 0$, $x_1 = -1$

$f(x_1) = f(-1) = g(-1) = 0$,

$f(x_2) = f(2) = g(2) = 1$

상수 p에 대하여

$f(x) - g(x) = p(x+1)(x-2)$라 하면

$x_1 < 0 < x_2$이므로

$h(0) = g(0) - f(0) = 2p = \frac{7}{3}$

$p = \frac{7}{6}$

$f(x) = \frac{7}{6}(x+1)(x-2) + g(x)$

$x_2 < 5$이므로

$h(5) = g(5) + f(5) = 2 + (21 + 2) = 25$