• 2교시 수학 영역 •

1	⑤	**2**	①	**3**	③	**4**	①	**5**	④
6	⑤	**7**	②	**8**	①	**9**	④	**10**	③
11	①	**12**	③	**13**	②	**14**	④	**15**	⑤
16	10	**17**	2	**18**	23	**19**	16	**20**	110
21	200	**22**	71						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$\left(3^{1-\sqrt{2}}\right)^2 \times 9^{\sqrt{2}} = 3^{2-2\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = 3^2 = 9$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$이고

$f'(x) = 3x^2 - 2$이므로 $f'(1) = 1$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 k이므로

$a_n = k^n$

$a_2(k^2+1) = 3a_4$에서 $k^2(k^2+1) = 3k^4$

$k > 0$이므로 $k^2+1 = 3k^2$, $k^2 = \dfrac{1}{2}$에서

$k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $a_3 = k^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 + (-1) = -1$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$f'(x) = 2 \times (x^2 - 2x + 5) + (2x+1)(2x-2)$

이므로 $f'(2) = 20$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\theta\tan\theta + \cos\theta = 3$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 3\cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta < 0$이므로

$\sin\theta = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

그러므로 $\tan\theta = -2\sqrt{2}$

따라서 $\sin\theta - \tan\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - (-2\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

7. [출제의도] 부정적분 이해하기

다항함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = x^2 - kx + k - 1 \geq 0$이다.

이차방정식 $x^2 - kx + k - 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k-1)$

$\quad = k^2 - 4k + 4$

$\quad = (k-2)^2 \leq 0$

이므로 $k = 2$

$f(x) = \int (x^2 - 2x + 1)dx$

$\quad = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$ (C는 적분상수)

$f(0) = 2$에서 $C = 2$

따라서 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2$이므로 $f(3) = 5$

8. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

$2^{|x|} = t\,(t \geq 1)$이라 하면 $t + \dfrac{64}{t} \leq 20$에서

$t^2 - 20t + 64 \leq 0$, $(t-4)(t-16) \leq 0$

$4 \leq t \leq 16$

$2^2 \leq 2^{|x|} \leq 2^4$에서 밑 2가 1보다 크므로

$2 \leq |x| \leq 4$, $-4 \leq x \leq -2$ 또는 $2 \leq x \leq 4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 6

9. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$xf(x) = ax^3 + 2x - 3 + \int_0^1 f'(t)dt$의 양변에

$x = 0$을 대입하면

$0 \times f(0) = -3 + \int_0^1 f'(t)dt$에서 $\int_0^1 f'(t)dt = 3$

$xf(x) = ax^3 + 2x$, $f(x) = ax^2 + 2$

$\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = a = 3$

그러므로 $f(x) = 3x^2 + 2$

따라서 $\int_0^2 f(x)dx = \Big[x^3 + 2x\Big]_0^2 = 12$

10. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

$\dfrac{1}{a_1 \times b_1} = \sum\limits_{k=1}^{1} \dfrac{1}{a_k \times b_k} = \dfrac{1}{12}$

$n \geq 2$일 때

$\dfrac{1}{a_n \times b_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k \times b_k} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{a_k \times b_k}$

$\quad = \dfrac{n}{8n+4} - \dfrac{n-1}{8n-4} = \dfrac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{1}{a_n \times b_n} = \dfrac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 같으므로

공차를 d라 하면

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $b_n = b_1 + (n-1)d$

$a_n \times b_n = (dn + a_1 - d)(dn + b_1 - d)$

$\quad = \dfrac{(8n+4)(8n-4)}{4} = (4n+2)(4n-2)$

에서 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이

자연수이므로 $a_n = 4n+2$, $b_n = 4n-2$ 또는

$a_n = 4n-2$, $b_n = 4n+2$

따라서

$\sum\limits_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{5} 8k = 8\sum\limits_{k=1}^{5} k = 8 \times \dfrac{5 \times 6}{2} = 120$

11. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v = 3kt^2 - 12t + 1$

시각 $t = k$에서 점 P의 속도가 1이므로

$3k^3 - 12k + 1 = 1$에서

$3k^3 - 12k = 0$, $3k(k+2)(k-2) = 0$

$k > 0$이므로 $k = 2$

점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 가속도를 a라 하면

$a = 6kt - 12$

따라서 시각 $t = 2k$에서 점 P의 가속도는

$12k^2 - 12 = 12 \times 4 - 12 = 36$

12. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 같으므로

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AB}}$이다.

점 A는 선분 OB의 중점이고 점 B의 x좌표가

t이므로 점 A의 x좌표는 $\dfrac{t}{2}$이다.

직선 AB는 점 O를 지나므로

두 직선 OA, OB의 기울기가 같다.

그러므로 $\dfrac{\log_a \dfrac{t}{2} - 0}{\dfrac{t}{2} - 0} = \dfrac{\log_a t - 0}{t - 0}$에서

$\log_a t = \log_a 4$, $t = 4$

점 A는 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$가

만나는 점이므로 $\log_a 2 = -2\log_a 2 + k$에서

$k = 3\log_a 2$

점 B의 좌표는 $(4, 2\log_a 2)$,

점 C의 좌표는 $(4, -\log_a 2)$에서

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\log_a 2 - (-\log_a 2) = 3\log_a 2$

삼각형 ACB의 넓이가 2이므로

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times 2 = 3\log_a 2 = 2$에서 $a = 2\sqrt{2}$, $k = 2$

따라서 $a \times k \times t = 2\sqrt{2} \times 2 \times 4 = 16\sqrt{2}$

13. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

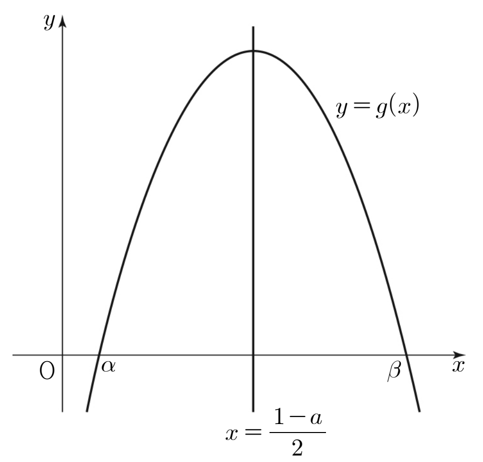
두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x) = x^2 + ax + b$(a, b는 상수),

$g(x) = x - 3 - f(x)$라 하자.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta\,(\alpha < 3 < \beta)$라

하면 $g(\alpha) = g(\beta) = 0$



$S_2 = \int_\alpha^\beta |f(x) - (x-3)|dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$이므로

직선 $x = 3$은 곡선 $y = g(x)$와 x축으로 둘러싸인

부분의 넓이를 이등분한다.

이때 $g(x) = -x^2 + (1-a)x - 3 - b$에서

이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 직선 $x = \dfrac{1-a}{2}$에

대하여 대칭이므로 $\dfrac{1-a}{2} = 3$, $a = -5$

$S_2 - 2S_1 = 6$에서 $\dfrac{1}{2}S_2 - S_1 = 3$

$\dfrac{1}{2}S_2 - S_1$

$= \int_\alpha^3 |f(x) - (x-3)|dx - \int_0^\alpha |f(x) - (x-3)|dx$

$= -\int_\alpha^3 \{f(x) - (x-3)\}dx - \int_0^\alpha \{f(x) - (x-3)\}dx$

$= -\int_0^3 \{f(x) - (x-3)\}dx$

$= -\int_0^3 (x^2 - 6x + b + 3)dx$

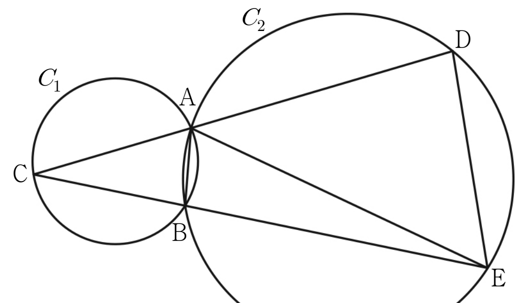
$= -\Big[\dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (b+3)x\Big]_0^3$

$= 18 - 3(b+3) = 9 - 3b = 3$

$b = 2$

따라서 $f(x) = x^2 - 5x + 2$이므로 $f(-1) = 8$

14. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기



사각형 ABED가 원 C_2에 내접하므로

$\angle \mathrm{EBA} = \pi - \angle \mathrm{ADE}$에서 $\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ADE}$

삼각형 ACB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ABC})} = \dfrac{3}{\sin(\angle \mathrm{ABC})} = 2r_1$

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle \mathrm{ADE})} = 2r_2$

$r_1 : r_2 = 1 : 2$에서

$\dfrac{3}{\sin(\angle \mathrm{ABC})} : \dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle \mathrm{ADE})} = 2r_1 : 2r_2 = 1 : 2$

이므로 $\overline{\mathrm{AE}} = 6$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle \mathrm{ADE}) = \dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\times 5\times 4} = \dfrac{1}{8}$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}^2 = 8^2+4^2-2\times 8\times 4\times \dfrac{1}{8} = 72$

따라서 선분 CE의 길이는 $6\sqrt{2}$

15. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$이므로

$g(x)=x$ 또는 $g(x)=f(x)$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서 연속이다.

$g(2)=2$ 또는 $g(2)=f(2)$에서

$f(2)\neq 2$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가

$x=2$에서 만나지 않으므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x-2} = 1$ 또는

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의

접선의 방정식은 $y=x$이다.

$h(x)=f(x)-x$라 하면

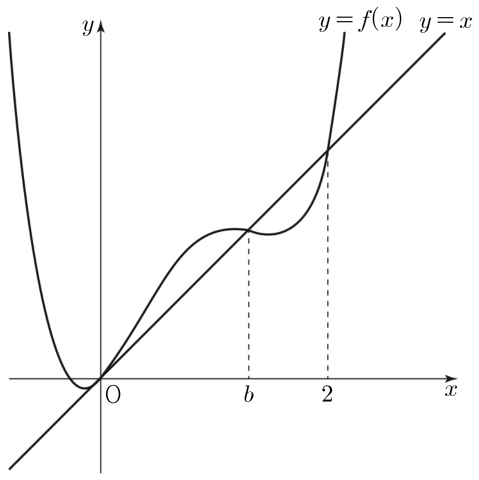
함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

$h(0)=h'(0)=h(2)=0$이므로

$h(x)=x^2(x-2)(x-b)$ (b는 상수)

$h(b)=0$이므로 $f(b)=b$

(ⅰ) $0\le b\le 2$일 때



조건 (나)에 의하여 $g(-4)=-g(4)$이므로

$g(4)=4$, $g(-4)=-4$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x\le 0$ 또는 $x\ge 2$인 모든 실수 x에 대하여

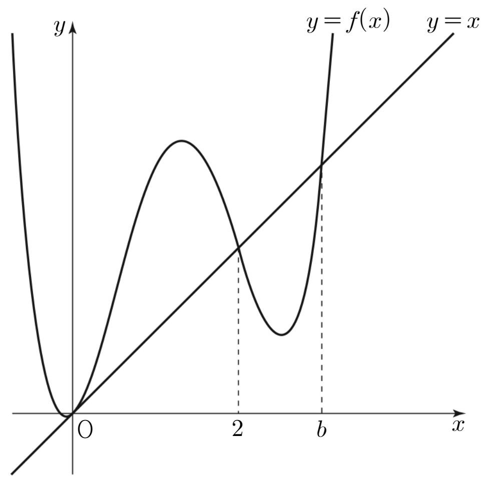
$g(x)=x$이다.

이때 $x\ge 2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $b>2$일 때



(ⅰ)과 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면

$x\le 0$ 또는 $x\ge b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이다.

$2\le x\le b$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x$이면

$x\ge 2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $2\le x\le b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이다.

이때 $0\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이면 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = f'(2)$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $0\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이다.

$x\ge b$인 모든 실수 x에 대하여

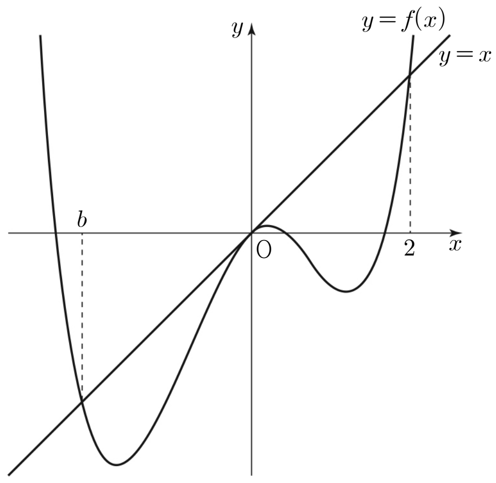
$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=4$

$f(x)=x^2(x-2)(x-4)+x$

$g(x)=\begin{cases} x & (x\le 2 \text{ 또는 } x\ge 4) \\ x^2(x-2)(x-4)+x & (2<x<4) \end{cases}$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)} = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$

(ⅲ) $b<0$일 때



(ⅱ)와 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면

$x\le b$ 또는 $x\ge 2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이고

$b<x<2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이다.

$-2\le b<0$이면 $x\ge 2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $b<-2$

$x\ge -b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=-4$

$f(x)=x^2(x-2)(x+4)+x$

$g(x)=\begin{cases} x & (x\le -4 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ x^2(x-2)(x+4)+x & (-4<x<2) \end{cases}$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)} = \dfrac{-34}{3} = -\dfrac{34}{3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

모든 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{34}{3}\right)=-11$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-3$, $5x-1$은 로그의 진수이므로

$x-3>0$, $5x-1>0$에서 $x>3$

방정식 $\log_{\sqrt{3}}(x-3)=\log_3(5x-1)$에서

$\log_3(x-3)^2=\log_3(5x-1)$

$(x-3)^2=5x-1$

$x^2-11x+10=(x-1)(x-10)=0$

따라서 $x>3$이므로 $x=10$

17. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_0^a (4x^2-3x)dx = \int_0^a (x^2+x)dx$에서

$\int_0^a (4x^2-3x)dx - \int_0^a (x^2+x)dx$

$= \int_0^a (3x^2-4x)dx$

$= \Big[x^3-2x^2\Big]_0^a$

$= a^3-2a^2 = a^2(a-2)=0$

따라서 $a>0$이므로 $a=2$

18. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{5}(a_k+3) = \sum\limits_{k=1}^{5}a_k + \sum\limits_{k=1}^{5}3$

$= \sum\limits_{k=1}^{5}a_k + 15 = 30$

에서 $\sum\limits_{k=1}^{5}a_k = 15$

$\sum\limits_{k=1}^{5}(2a_k+b_k) = 2\sum\limits_{k=1}^{5}a_k + \sum\limits_{k=1}^{5}b_k$

$$= 2\times 15+\sum_{k=1}^{5} b_k = 53$$

따라서 $\sum_{k=1}^{5} b_k = 23$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,1)$을 지나므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,1)$에서의 접선을 l이라 하면 직선 l의 기울기는 $f'(0)=b$

이때 직선 l이 두 점 $(0,1)$, $(1,0)$을 지나므로

직선 l의 기울기는 $\frac{0-1}{1-0}=-1$에서 $b=-1$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,0)$을 지나므로

$f(1)=2+a+b=a+1=0$에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1$이므로 $f(3)=16$

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$0<k<\frac{2}{t}$에서 $0<tk\pi<2\pi$

$f(k)=3k$에서 $\sin(tk\pi)=\sqrt{3}k>0$이고

$g(k)=3k$에서 $\cos(tk\pi)=-k<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<tk\pi<\pi$

$f(k)=g(k)$에서 $\tan(tk\pi)=-\sqrt{3}$이므로

$tk\pi=\frac{2}{3}\pi$, $tk=\frac{2}{3}$

$f(k)=3k$에서 $\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}=3k$이므로

$k=\frac{1}{2}$, $t=\frac{4}{3}$

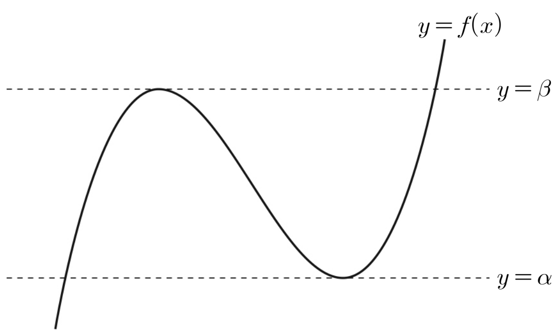
따라서 $60(t+k)=60\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=110$

21. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$

그러므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)+g(t-4)=2$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.



삼차함수 $f(x)$의 극솟값을 α, 극댓값을 β라 하자. (α, β는 $\alpha<\beta$인 상수)

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t<\alpha \text{ 또는 } t>\beta) \\ 2 & (t=\alpha \text{ 또는 } t=\beta) \\ 3 & (\alpha<t<\beta) \end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 불연속이고,

함수 $g(t-4)$는 $t=\alpha+4$와 $t=\beta+4$에서만 불연속이다.

$\lim_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to\alpha+}g(t)+\lim_{t\to\alpha+}g(t-4)=3+1=4$,

$\lim_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to\alpha-}g(t)+\lim_{t\to\alpha-}g(t-4)=1+1=2$

이므로

$\lim_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$이고,

$\lim_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\beta+4)+}g(t)+\lim_{t\to(\beta+4)+}g(t-4)=1+1=2$,

$\lim_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\beta+4)-}g(t)+\lim_{t\to(\beta+4)-}g(t-4)=1+3=4$

이므로

$\lim_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$

에서 함수 $g(t)+g(t-4)$는

$t=\alpha$, $t=\beta+4$에서 불연속이다.

조건에 의하여 함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=0$과 $t=a$에서만 불연속이고 $a>0$이므로

$\alpha=0$, $\beta+4=a$ … ㉠

함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=\alpha$, $t=\beta+4$에서만 불연속이므로 $t=\alpha+4$에서 연속이다.

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}=\lim_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=g(\alpha+4)+g(\alpha)$

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t-4)=\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3$,

$\lim_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t-4)=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1$,

$g(\alpha+4)+g(\alpha)=g(\alpha+4)+2$이므로

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1=g(\alpha+4)+2$

이때 모든 실수 t에 대하여

$g(t)=1$ 또는 $g(t)=2$ 또는 $g(t)=3$이므로

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)=1$, $\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)=3$, $g(\alpha+4)=2$

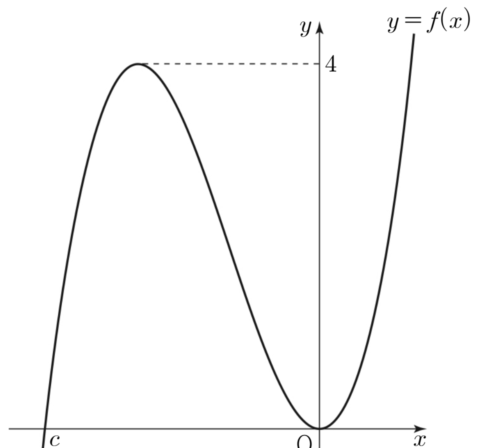
그러므로 $\beta=\alpha+4$

㉠에 의하여 $\beta=4$, $a=8$

그러므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0, 극댓값은 4이다.

함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 값을 b라 하자.

(ⅰ) $b=0$일 때



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 $c(c<0)$이라 하자.

$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^2(x-c)$

$f'(x)=3x^2-2cx=x(3x-2c)$에서 $f'\left(\frac{2}{3}c\right)=0$

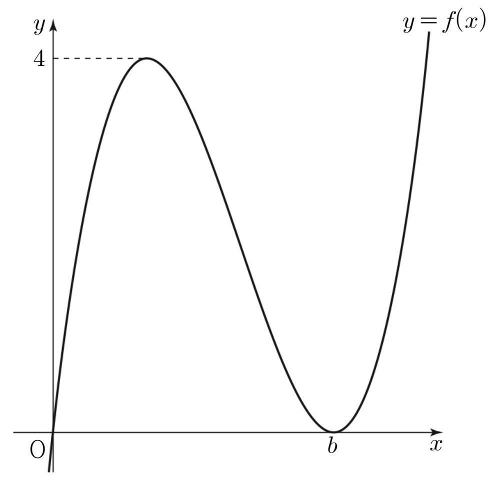
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}c$에서 극댓값 4를 갖는다.

$f\left(\frac{2}{3}c\right)=-\frac{4}{27}c^3=4$이므로 $c=-3$에서

$f(x)=x^2(x+3)$

그러므로 $f(a)=f(8)=704$

(ⅱ) $b\neq 0$일 때



$f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x-b)^2$

$f'(x)=3x^2-4bx+b^2=(3x-b)(x-b)$에서

$f'\left(\frac{b}{3}\right)=0$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값 4를 갖는다.

$f\left(\frac{b}{3}\right)=\frac{4}{27}b^3=4$이므로 $b=3$에서

$f(x)=x(x-3)^2$

그러므로 $f(a)=f(8)=200$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(a)$의 최솟값은 200

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $a_1\times a_2>0$이므로

$a_1>0$, $a_2>0$ 또는 $a_1<0$, $a_2<0$

$a_1<0$이면 $a_2=a_1^2>0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$a_1>0$이므로 $a_2=-2a_1+3$

$a_2>0$이므로 $a_3=-2a_2+3=4a_1-3$ … ㉠

(ⅰ) $a_3<0$일 때

$a_4=a_3^2>0$이므로

$a_5=-2a_3^2+3=a_3$에서 $(2a_3+3)(a_3-1)=0$

$a_3<0$이므로 $a_3=-\frac{3}{2}$

㉠에 의하여 $a_1=\frac{3}{8}$

(ⅱ) $a_3=0$일 때

$a_4=a_3^2=0$, $a_5=a_4^2=0$이므로 $a_3=a_5=0$

㉠에 의하여 $a_1=\frac{3}{4}$

(ⅲ) $a_3>0$일 때

(a) $0<a_3<\frac{3}{2}$일 때

$a_4=-2a_3+3>0$이므로

$a_5=-2a_4+3=4a_3-3=a_3$에서 $a_3=1$

㉠에 의하여 $a_1=1$

(b) $a_3\geq\frac{3}{2}$일 때

$a_4=-2a_3+3\leq 0$이므로

$a_5=a_4^2=(-2a_3+3)^2=a_3$에서

$(4a_3-9)(a_3-1)=0$

$a_3\geq\frac{3}{2}$이므로 $a_3=\frac{9}{4}$

㉠에 의하여 $a_1=\frac{21}{16}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+1+\frac{21}{16}=\frac{55}{16}$이므로 $p=16$, $q=55$

따라서 $p+q=71$

[확률과 통계]

23	⑤	**24**	④	**25**	③	**26**	①	**27**	③
28	④	**29**	720	**30**	376				

23. [출제의도] 확률의 덧셈정리 계산하기

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^8$의 전개식에서 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r x^r\left(\frac{1}{2}\right)^{8-r}$

x^5의 계수는 $r=5$일 때이므로

${}_8\mathrm{C}_5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=56\times\frac{1}{8}=7$

25. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

$a\times b\times c$의 값이 3의 배수인 사건을 A라 하자.
$a\times b\times c$의 값이 3의 배수이려면 a, b, c 중 적어도 하나가 3의 배수이어야 하므로 A^C은 a, b, c가 모두 3의 배수가 아닌 사건이다.
세 주사위 A, B, C를 동시에 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_6\Pi_3=6^3=216$
a, b, c가 모두 3의 배수가 아닌 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{64}{216}=\frac{19}{27}$

26. [출제의도] 중복조합 이해하기

조건 (가)에 의하여 네 주머니 A, B, C, D 중 어느 하나의 주머니에는 흰 공을 2개 넣고 나머지 세 주머니에는 흰 공을 1개씩 넣는다.

(ⅰ) 흰 공을 2개 넣는 주머니가 A, B, C 중 하나인 경우
흰 공을 2개 넣는 주머니를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
세 주머니 A, B, C에 넣는 흰 공의 개수의 합이 4이므로 조건 (나)에 의하여 주머니 D에 넣는 검은 공의 개수는 4이다.
세 주머니 A, B, C에 남은 6개의 검은 공을 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$
그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times28=84$

(ⅱ) 흰 공을 2개 넣는 주머니가 D인 경우
세 주머니 A, B, C에 넣는 흰 공의 개수의 합이 3이므로 조건 (나)에 의하여 주머니 D에 넣는 검은 공의 개수는 3이다.
세 주머니 A, B, C에 남은 7개의 검은 공을 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7=36$
그러므로 구하는 경우의 수는 36

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$84+36=120$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제 해결하기

$96=2^5\times3$이므로 나열한 5장의 카드에 적힌 수는 2, 2, 2, 3, 4이거나 1, 2, 3, 4, 4이다.

(ⅰ) 나열한 5장의 카드에 적힌 수가 2, 2, 2, 3, 4인 경우
(a) 오른쪽 끝에 놓인 카드에 적힌 수가 2인 경우 나머지 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 네 수 2, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!}=12$
(b) 오른쪽 끝에 놓인 카드에 적힌 수가 4인 경우 나머지 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 네 수 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{3!}=4$
(a), (b)에 의하여 구하는 경우의 수는
$12+4=16$

(ⅱ) 나열한 5장의 카드에 적힌 수가 1, 2, 3, 4, 4인 경우
(a) 오른쪽 끝에 놓인 카드에 적힌 수가 2인 경우 나머지 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 네 수 1, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!}=12$
(b) 오른쪽 끝에 놓인 카드에 적힌 수가 4인 경우 나머지 4장의 카드를 나열하는 경우의 수는 네 수 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $4!=24$
(a), (b)에 의하여 구하는 경우의 수는
$12+24=36$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$16+36=52$

28. [출제의도] 중복조합을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서
$f(6)-f(3)=2[8-\{f(1)+f(2)\}]$, $\cdots$ ㉠
조건 (나)에서 $f(6)-f(3)\geq0$이고
$f(3)$, $f(6)$은 각각 6 이하의 자연수이므로
$f(6)-f(3)=0$ 또는 $f(6)-f(3)=2$ 또는
$f(6)-f(3)=4$

(ⅰ) $f(6)-f(3)=0$인 경우
$f(3)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 6
㉠에서 $f(1)+f(2)=8$이고,
$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
조건 (나)에서 $f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq f(3)$이므로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times5\times1=30$

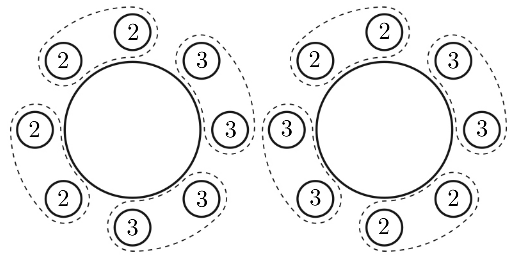
(ⅱ) $f(6)-f(3)=2$인 경우
$f(3)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 4
㉠에서 $f(1)+f(2)=7$이고,
$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 6
조건 (나)에서 $f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq f(3)+2$
$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 세 수 $f(3)$, $f(3)+1$, $f(3)+2$ 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $4\times6\times6=144$

(ⅲ) $f(6)-f(3)=4$인 경우
$f(3)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 2
㉠에서 $f(1)+f(2)=6$이고,
$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 5
조건 (나)에서 $f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq f(3)+4$
$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 다섯 수 $f(3)$, $f(3)+1$, $f(3)+2$, $f(3)+3$, $f(3)+4$ 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times5\times15=150$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$30+144+150=324$

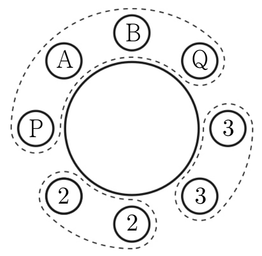
29. [출제의도] 원순열을 활용하여 문제해결하기

구하는 경우의 수는 조건 (가)를 만족시키도록 8명의 학생을 원형으로 배열하는 모든 경우에서 A와 B가 이웃하는 경우를 제외한 경우의 수이다.
조건 (가)에 의하여 각 학생은 적어도 한 명의 같은 학년 학생과 이웃한다. 그러므로 같은 학년인 4명의 학생은 모두 붙어 앉거나 2명씩 나누어 앉아야 한다.
이 두 경우는 각 학년의 학생 2명씩을 각각 한 학생으로 생각하여 4명의 학생을 원형으로 배열하는 경우와 같다.



(ⅰ) 조건 (가)를 만족시키도록 배열하는 모든 경우
A와 함께 한 학생으로 생각할 2학년 학생,
B와 함께 한 학생으로 생각할 3학년 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$
각 학년의 학생 2명씩을 각각 한 학생으로 생각하여 4명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)!=6$
이 각각에 대하여 한 학생으로 생각하고 배열한 각각의 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!\times2!\times2!\times2!=16$
그러므로 구하는 경우의 수는 $9\times6\times16=864$

(ⅱ) 조건 (가)를 만족시키도록 배열하는 모든 경우 중 A와 B가 이웃하는 경우
A와 함께 한 학생으로 생각할 2학년 학생을 P, B와 함께 한 학생으로 생각할 3학년 학생을 Q라 하자. P, Q를 정하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$
A, B, P, Q를 한 학생으로 생각하고 남은 2명의 2학년 학생, 2명의 3학년 학생을 각각 한 학생으로 생각하여 3명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(3-1)!=2$
이 각각에 대하여 한 학생으로 생각하고 배열한 네 학생 A, B, P, Q가 서로 자리를 바꾸는 경우는 PABQ 또는 QBAP의 2가지이고,
A, B, P, Q를 제외한 4명의 학생 중 한 학생으로 생각하고 배열한 각각의 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!\times2!=4$
그러므로 구하는 경우의 수는 $9\times2\times2\times4=144$



(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$864-144=720$

30. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 추론하기

5번째 시행 후 전구가 모두 켜져 있으려면 다섯 번의 시행에서 각 전구의 전원 버튼을 누른 횟수가 모두 홀수이어야 한다.
6이 적힌 전구의 전원 버튼을 누르는 횟수는 주사위를 던져 6의 눈이 나오는 횟수와 같으므로 6의 눈이 나오는 횟수는 홀수이어야 한다.
또한 6의 눈이 나오면 6 이하의 숫자가 적힌 모든 전구의 전원 버튼을 누르므로 5의 눈이 나오는 횟수는 0 또는 짝수이어야 한다. 같은 방법으로 4, 3, 2, 1의 눈이 나오는 각 횟수도 모두 0 또는 짝수이어야 한다.

(ⅰ) 6의 눈이 나온 횟수가 1인 경우
(a) 1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수의 눈만 네 번

나오는 경우
1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$
선택한 하나의 수를 p라 하면
순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$p,\ p,\ p,\ p,\ 6$을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{5!}{4!}=5$
그러므로 구하는 경우의 수는 $5\times5=25$
(b) 1, 2, 3, 4, 5 중 두 개의 수의 눈만 두 번씩 나오는 경우
1, 2, 3, 4, 5 중 두 개의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$
선택한 두 수를 p, q라 하면
순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$p,\ p,\ q,\ q,\ 6$을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$
그러므로 구하는 경우의 수는 $10\times30=300$
(a), (b)에 의하여 구하는 경우의 수는
$25+300=325$
(ii) 6의 눈이 나온 횟수가 3인 경우
1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수의 눈만 두 번 나와야 한다.
1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$
선택한 하나의 수를 p라 하면
순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$p,\ p,\ 6,\ 6,\ 6$을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{5!}{3!\times2!}=10$
그러므로 구하는 경우의 수는 $5\times10=50$
(iii) 6의 눈이 나온 횟수가 5인 경우
순서쌍 (a, b, c, d, e)는 $(6, 6, 6, 6, 6)$의 1가지이다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$325+50+1=376$

[미적분]

23	②	**24**	③	**25**	①	**26**	⑤	**27**	④
28	③	**29**	45	**30**	15				

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}=\ln4=2\ln2$$

24. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$\dfrac{dx}{dt}=2e^{2t-2}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\ln t}{2t^2e^{2t-2}}$$

따라서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 $\dfrac{1}{2}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(b-\frac{1}{n}\right)^2}{b+6+\frac{1}{n^2}}=\frac{b^2}{b+6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-bn\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+b}{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+b}=\frac{b^2}{b+6}$$

그러므로 $a-b^2=0$, $a=b^2$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{b}{n}}+b}=\frac{1}{2}=\frac{b^2}{b+6}$$

$2b^2-b-6=(2b+3)(b-2)=0$
$b>0$이므로 $b=2$, $a=4$
따라서 $a+b=6$

26. [출제의도] 급수의 뜻 이해하기

점 P_n에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 S_n, T_n이라 하면

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n}=\sqrt{2}(n^2+5n+3)$,
$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n}=\sqrt{2}n$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}&=\sqrt{2}(n^2+5n+3)-\sqrt{2}n\\&=\sqrt{2}(n^2+4n+3)\\&=\sqrt{2}(n+1)(n+3)\end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{4}$$

27. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하기

$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$2f'(x)e^{2f(x)}-2f'(2x)e^{f(2x)}-6e^{3x}=0$
$x=0$을 대입하면
$2f'(0)e^{2f(0)}-2f'(0)e^{f(0)}-6=0$
$f'(0)\left(e^{2f(0)}-e^{f(0)}\right)=3$ ⋯ ㉠
$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$에 $x=0$을 대입하면
$e^{2f(0)}-e^{f(0)}-2=0$
$e^{2f(0)}-e^{f(0)}=2$
이므로 ㉠에서 $f'(0)=\dfrac{3}{2}$

따라서 $g'(f(0))=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{2}{3}$

28. [출제의도] 삼각함수의 미분을 이용하여 추론하기

$f(x)=\sin(a+b\cos x)$에서
$f'(x)=\cos(a+b\cos x)\times(-b\sin x)$
$f'(x)=b$에서
$-b\sin x\cos(a+b\cos x)=b$
$\sin x\cos(a+b\cos x)=-1$
$-1\le\sin x\le1$, $-1\le\cos(a+b\cos x)\le1$이므로
$\sin x=1$, $\cos(a+b\cos x)=-1$이거나
$\sin x=-1$, $\cos(a+b\cos x)=1$이다.
이때 $\sin x=1$ 또는 $\sin x=-1$이면
$\cos x=0$이므로
$\cos a=-1$ 또는 $\cos a=1$
$a=(2n-1)\pi$ 또는 $a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)
조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)}{x}=\frac{b}{a}\text{이고 }\lim_{x\to0}x=0\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to0}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\sin(f(a)\pi)=0$$

$-1\le f(a)\le1$이므로
$f(a)=-1$ 또는 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=1$
(i) $f(a)=1$일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\pi+\frac{x}{4}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\frac{x}{4}}{x}=-\frac{1}{4}<0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $f(a)=0$일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(iii) $f(a)=-1$일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\frac{x}{4}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(-\pi-\frac{x}{4}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}=\frac{1}{4}$$

이므로 조건 (나)에서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}$, $a=4b$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(a)=-1$이고, $b=\dfrac{a}{4}$
$a=(2n-1)\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면
$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a-\dfrac{a}{4}\right)=\sin\dfrac{6n-3}{4}\pi$
이므로 3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(a)\ne-1$
$a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면
$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a+\dfrac{a}{4}\right)=\sin\dfrac{5n}{2}\pi$
이므로 $n=3$일 때, $f(a)=-1$을 만족시킨다.
그러므로 $a=6\pi$, $b=\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 $a+b=\dfrac{15}{2}\pi$

29. [출제의도] 음함수 미분을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AP}}=t$라 하면 삼각형 ABP의 넓이 $f(\theta)$는
$f(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\sin\theta$ ⋯ ㉠
선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은 반원의 중심이고, 직각삼각형 ABM에서
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BM}}=1$이므로 $\angle\mathrm{BAM}=\dfrac{\pi}{6}$

$\theta\ne\dfrac{\pi}{6}$일 때, $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$이므로
삼각형 APM에서 코사인법칙에 의하여
$1^2=2^2+t^2-2\times2\times t\times\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)$
$t^2-4t\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)+3=0$ ⋯ ㉡
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때, $t=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MP}}=2+1=3$이므로
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때도 ㉡이 성립한다.
㉡의 양변을 θ에 대하여 미분하면
$2t\dfrac{dt}{d\theta}-4\dfrac{dt}{d\theta}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)-4t\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=0$
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$를 대입하면 $\dfrac{dt}{d\theta}=0$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$f'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{d\theta}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}t\cos\theta$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}$

따라서 $20f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=20\times\frac{9}{4}=45$

30. [출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 수열이므로 $a_1>0,\ r>0$

(ⅰ) $0<r<1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>a_{n+1}$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

$a_{3n-2}<1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n\geq 3k-2$일 때 $b_n=(-1)^n$이므로

n이 k 이상의 짝수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=3+7+2=12$,

n이 k 이상의 홀수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=-3-7-2=-12$

수열 $\{3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}\}$이 발산하므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $r=1$일 때

(a) $0<a_1<1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=(-1)^n$이므로

n이 짝수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=3+7+2=12$,

n이 홀수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=-3-7-2=-12$

수열 $\{3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}\}$이 발산하므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b) $a_1\geq 1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=a_n=a_1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(3a_1-7a_1+2a_1)=-2a_1\neq 0$

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $r>1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이다.

$a_{3n}\geq 1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n\geq k$일 때 $b_n=a_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}(3a_{3n-2}-7a_{3n-1}+2a_{3n})$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\}$$

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$이 수렴하므로

급수 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\}$이 수렴한다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{3n-2}=\infty$이므로 $3-7r+2r^2=0$

$2r^2-7r+3=(2r-1)(r-3)=0$

$r>1$이므로 $r=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $r=3$

조건 (나)에서 $b_5{}^2\neq b_4b_6$이므로 세 수 $b_4,\ b_5,\ b_6$은 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

이때 두 수열 $\{(-1)^n\}$, $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 4)\\ a_n & (n\geq 5)\end{cases}$ 또는 $b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 5)\\ a_n & (n\geq 6)\end{cases}$

이다.

$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 5)\\ a_n & (n\geq 6)\end{cases}$일 때,

$a_5<1,\ a_6=3a_5\geq 1$이므로 $\frac{1}{3}\leq a_5<1$ ⋯ ㉠

$b_5{}^2=b_4b_6-\frac{9}{4}$에서 $(-1)^2=1\times a_6-\frac{9}{4},\ a_6=\frac{13}{4}$

$a_5=\frac{13}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{12}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 4)\\ a_n & (n\geq 5)\end{cases}$일 때,

$a_4<1,\ a_5=3a_4\geq 1$이므로 $\frac{1}{3}\leq a_4<1$ ⋯ ㉡

$b_5{}^2=b_4b_6-\frac{9}{4}$에서 $a_5{}^2=1\times a_6-\frac{9}{4}$

$4a_5{}^2-12a_5+9=(2a_5-3)^2=0$이므로 $a_5=\frac{3}{2}$

$a_4=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 $90a_3=90\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)=15$

[기 하]

23	①	24	③	25	②	26	⑤	27	④
28	⑤	29	20	30	243				

23. [출제의도] 벡터의 연산 계산하기

$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}$를 만족시키는 점을 P라 하면 점 P는 선분 CD 위의 점이고

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=1$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=2$이므로

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

24. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

$a>2$이면 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$의 장축의 길이는 $2a$,

단축의 길이는 4이므로 $2a=4\times 2,\ a=4$

$0<a<2$이면 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$의 장축의 길이는 4,

단축의 길이는 $2a$이므로 $4=2a\times 2,\ a=1$

따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은 $4+1=5$

25. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식 이해하기

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\left(\frac{1}{p},\ 2\right)$에서의 접선의

방정식은 $2y=2p\left(x+\frac{1}{p}\right),\ y=px+1$

이고, 포물선의 준선의 방정식은 $x=-p$이므로

포물선 위의 점 $\left(\frac{1}{p},\ 2\right)$에서의 접선이

준선 $x=-p$와 만나는 점의 y좌표는 $-p^2+1$

$-p^2+1=-\frac{5}{4}$에서 $p^2=\frac{9}{4}$

따라서 양수 p의 값은 $\frac{3}{2}$

26. [출제의도] 쌍곡선의 점근선 이해하기

$c^2=4+5=9$에서 $c=3$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$이므로

점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 두 점의 좌표는

$\left(3,\ \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(3,\ -\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

따라서 삼각형 F′PQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 6=9\sqrt{5}$

27. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 추론하기

두 포물선 $C_1,\ C_2$의 준선을 l이라 하자.

점 F를 지나고 준선 l과 수직인 직선을 m이라 하면 직선 m은 두 포물선 $C_1,\ C_2$의 축이고,

두 점 A, B는 직선 m에 대하여 서로 대칭이다.

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.

포물선 C_1의 꼭짓점을 C라 하고 두 직선 $l,\ m$이 만나는 점을 D라 하면

$\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{HA}},\ \overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{CF}}$ ⋯ ㉠

또한 포물선 C_2의 초점을 E라 하면

$\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{HA}},\ \overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{FE}}$ ⋯ ㉡

선분 AB와 직선 m이 만나는 점을 G라 하자.

두 점 A, B가 직선 m에 대하여 서로 대칭이므로 선분 AB와 직선 m이 서로 수직이고

삼각형 AFE는 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AE}}$인 이등변삼각형이므로

점 G는 선분 EF의 중점이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{GE}}$이고, ㉠, ㉡에 의하여

$\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{FG}}=\overline{\mathrm{GE}}$

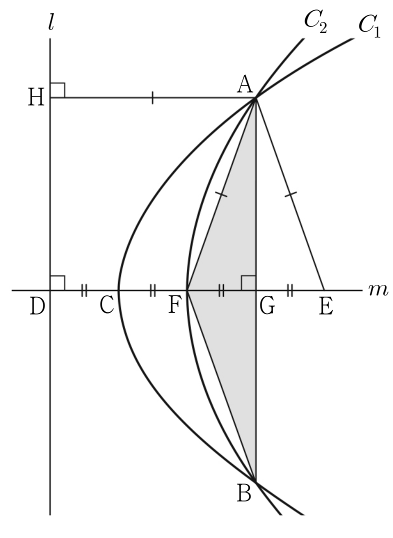
이고 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{DC}}+\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{FG}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{FG}}=2$

직각삼각형 AFG에서

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{2}$

따라서 삼각형 AFB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 8\sqrt{2}=8\sqrt{2}$



28. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

두 양수 $p,\ q$에 대하여 주어진 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$이라 하자.

타원의 두 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-1,\ 0)$이고

단축의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 $q=\sqrt{5}$

$p^2=q^2+1^2=6$에서 $p=\sqrt{6}$

그러므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$

네 선분 AB, BF, FP, PA로 둘러싸인 도형의 넓이는 두 삼각형 ABF, AFP의 넓이의 합과 같고, 삼각형 ABF의 넓이는 점 P의 위치에 관계없이 일정하므로 삼각형 AFP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P가 P_0이다.

또한 삼각형 AFP의 넓이가 최대이려면 타원 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AF의 기울기와 같아야 한다.

타원 위의 점 $P_0(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{6}+\frac{by}{5}=1$, $y=-\frac{5a}{6b}x+\frac{5}{b}$

이고, 점 A의 y좌표를 k라 하면 직선 AF의 기울기는 $-k$이므로

$-\frac{5a}{6b}=-k$, $\frac{5a}{6b}=k$ ⋯ ㉠

점 A와 점 B는 x축에 대하여 서로 대칭이고 점 F와 점 F′은 y축에 대하여 서로 대칭이므로 $\overline{BF}=\overline{AF'}$이다. 그러므로

$\overline{BF}+\overline{FP_0}+\overline{P_0A}=\overline{AF'}+\overline{FP_0}+\overline{P_0A}$

$=\overline{F'A}+\overline{AP_0}+\overline{FP_0}=2\sqrt{6}$

또한 타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{6}$이므로

$\overline{F'P_0}+\overline{FP_0}=2\sqrt{6}$

두 식을 연립하여 계산하면

$\overline{F'P_0}=\overline{F'A}+\overline{AP_0}$

이므로 세 점 $F'(-1, 0)$, $A(0, k)$, $P_0(a, b)$는 한 직선 위에 있다. 그러므로

$\frac{k-0}{0-(-1)}=\frac{b-0}{a-(-1)}$

에서 $k=\frac{b}{a+1}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{5a}{6b}=\frac{b}{a+1}$, $5a^2+5a-6b^2=0$

이고 점 $P_0(a, b)$가 타원 위의 점이므로

$\frac{a^2}{6}+\frac{b^2}{5}=1$에서 $5a^2+6b^2=30$

두 식을 연립하여 계산하면

$2a^2+a-6=(2a-3)(a+2)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{3}{2}$이고,

$5\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+6b^2=30$에서 $b^2=\frac{25}{8}$, $b=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

따라서 $a\times b=\frac{3}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{15\sqrt{2}}{8}$

29. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 활용하여 문제해결하기

$\overline{OF'}=\overline{OF}=\overline{OP}$에서 점 P는 선분 FF′을 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$

$\angle F'PQ=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 F′Q는 세 점 P, F′, Q를 지나는 원의 지름이고, 원의 넓이가 25π이므로

$\overline{F'Q}=10$

$\overline{F'Q}:\overline{FQ}=5:3$에서 $\overline{FQ}=6$

$\overline{F'Q}-\overline{FQ}=4$이므로

$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{F'P}=k+4$, $\overline{PQ}=k+6$

직각삼각형 PF′Q에서

$10^2=(k+4)^2+(k+6)^2$이므로

$k^2+10k-24=(k+12)(k-2)=0$, $k=2$

직각삼각형 PF′F에서

$(2c)^2=2^2+6^2=40$, $c^2=10$

따라서 $c^2\times\overline{PF}=10\times2=20$

30. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 추론하기

점 G에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H_1, 선분 BC에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.

점 G는 선분 EF를 $1:2$로 내분하는 점이므로 삼각형 EH_1G와 삼각형 FH_2G는 서로 닮음이고 닮음비는 $1:2$이다. 그러므로 $\overline{GH_2}=2\overline{GH_1}$이고,

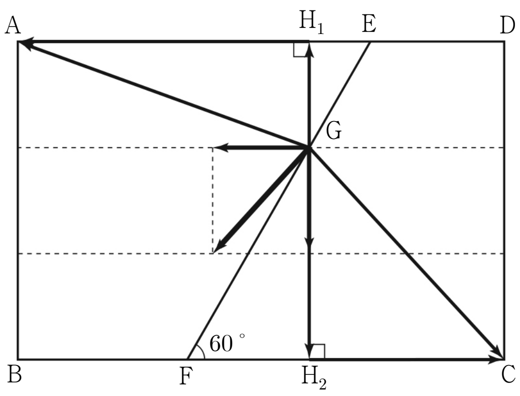
$\overline{GH_1}+\overline{GH_2}=\overline{AB}$이므로 $\overline{GH_1}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{GH_2}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|=|(\overrightarrow{GH_1}+\overrightarrow{H_1A})+(\overrightarrow{GH_2}+\overrightarrow{H_2C})|$

$=|(\overrightarrow{GH_1}+\overrightarrow{GH_2})+(\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C})|$

$=\left|\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)+(\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C})\right|$

$=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C})\right|$

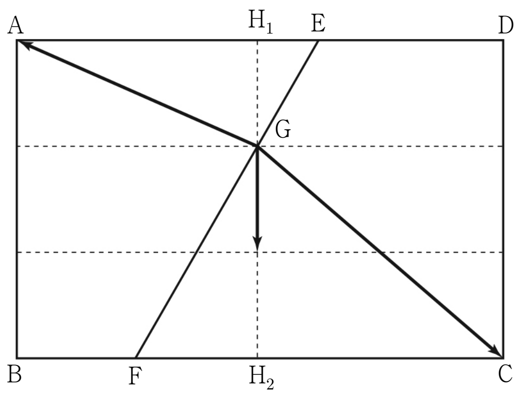


벡터 $\overrightarrow{AB}$와 벡터 $\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C}$는 서로 수직이므로

$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|=\sqrt{\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right|^2+|\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C}|^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\overline{AB}\right)^2+|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|^2}$ ⋯ ㉠

그러므로 $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|$의 값은 $\overline{H_1A}=\overline{H_2C}$일 때 최소이고, 그 값은 $\frac{1}{3}\overline{AB}$이다. 즉, $m=\frac{1}{3}\overline{AB}$



또한 $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|$는 $|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|$의 값이 최대일 때 최댓값 M을 갖는다.

(i) $\overline{H_1A}\le\overline{H_2C}$일 때

$|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|=\overline{H_2C}-\overline{H_1A}$

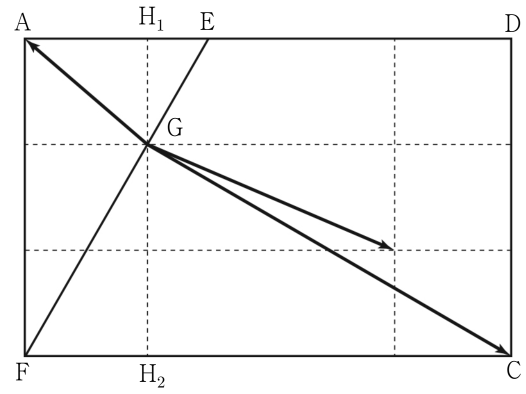
$=(8\sqrt{3}-\overline{H_1A})-\overline{H_1A}$

$=8\sqrt{3}-2\overline{H_1A}$

$\overline{H_1A}$의 값은 점 F가 점 B와 일치할 때 최소이고 그 값은 $\overline{FH_2}$와 같으므로 $\frac{2\sqrt{3}}{3}m$이다.

그러므로 $\overline{H_1A}\le\overline{H_2C}$일 때

$|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|$의 최댓값은 $8\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}m$



(ii) $\overline{H_1A}>\overline{H_2C}$일 때

$|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|=\overline{H_1A}-\overline{H_2C}$

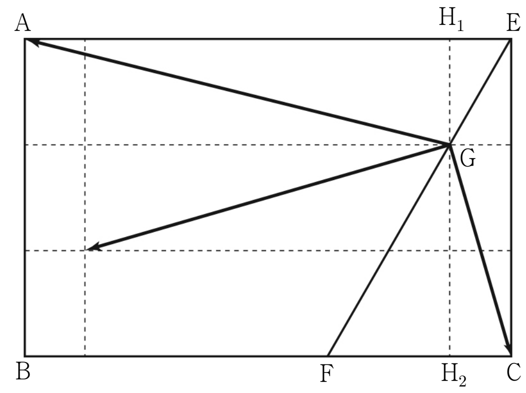
$=(8\sqrt{3}-\overline{H_2C})-\overline{H_2C}$

$=8\sqrt{3}-2\overline{H_2C}$

$\overline{H_2C}$의 값은 점 E가 점 D와 일치할 때 최소이고 그 값은 $\overline{EH_1}$과 같으므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}m$이다.

그러므로 $\overline{H_1A}>\overline{H_2C}$일 때

$|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|$의 최댓값은 $8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}m$



(i), (ii)에 의하여 점 E가 점 D와 일치할 때 $|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|$는 최댓값 $8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}m$을 가진다.

이때 $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|=M$이고, ㉠에서

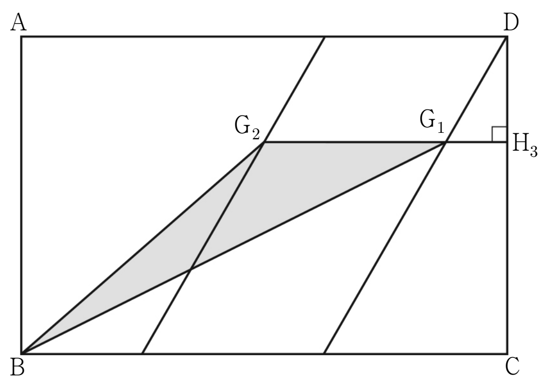
$|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}|=\sqrt{|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|^2-m^2}$이므로

$8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}m=\sqrt{M^2-m^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{13}m)^2-m^2}=2\sqrt{3}m$

그러므로 $m=3$, $\overline{AB}=3m=9$

두 점 G_1, G_2의 위치는 그림과 같다.



점 G_1에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H_3이라 하면

$\overline{G_1G_2}=\overline{G_2H_3}-\overline{G_1H_3}=4\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$,

$\overline{H_3C}=\overline{CD}-\overline{DH_3}=9-3=6$

그러므로 삼각형 BG_1G_2의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times6=9\sqrt{3}$

따라서 $S^2=(9\sqrt{3})^2=243$