• 수학 영역 •

수학 정답

1	②	2	④	3	③	4	②	5	⑤
6	①	7	⑤	8	③	9	③	10	⑤
11	①	12	④	13	③	14	④	15	②
16	6	17	3	18	12	19	32	20	71
21	381	22	154						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$\sqrt[3]{4}\times 2^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=2^1=2$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=3x^2-8x+1$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=27-24+1=4$

3. [출제의도] 등비수열을 계산하여 공비를 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0,\ r>0$

$ar^3=2ar^2+3ar$

$r^2-2r-3=(r+1)(r-3)=0$

$r=-1$ 또는 $r=3$

$r>0$이므로 $r=3$

4. [출제의도] 함수의 극한을 이해하여 좌극한과 우극한을 구한다.

$\lim_{x\to 0-}f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=2$ 이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)=1-2=-1$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=(2x+1)(2x^2-x)+(x^2+x)(4x-1)$

$f'(1)=3\times 1+2\times 3=9$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구한다.

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

$\sin\theta\tan\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}}=-\frac{8}{3}$

7. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3+x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

$C=f(0)=-1$ 이므로

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-1$

따라서 $f(2)=\frac{1}{4}\times 2^4+\frac{1}{2}\times 2^2-1=5$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$a=(\log 3)^2-(\log 2)^2=(\log 3-\log 2)(\log 3+\log 2)$

$=\log\frac{3}{2}\times\log 6$

$b=\log_6 10=\frac{1}{\log 6}$

$ab=\log\frac{3}{2}\times\log 6\times\frac{1}{\log 6}=\log\frac{3}{2}$

로그의 정의에 의해 $10^{ab}=\frac{3}{2}$

9. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

원점에서 출발한 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치가 0이므로

$\int_0^a v(t)dt=\int_0^a(-3t^2+6t)dt$

$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^a$

$=-a^3+3a^2$

$=-a^2(a-3)=0$

a가 양수이므로 $a=3,\ 2a=6$

시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^6\left|-3t^2+6t\right|dt$

$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^6(3t^2-6t)dt$

$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^6$

$=(-8+12)+(216-108)-(8-12)$

$=4+108+4=116$

10. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 값을 구한다.

자연수 m에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\begin{cases}9+m & (n=3m-2)\\ 19+m & (n=3m-1)\\ m & (n=3m)\end{cases}$$

$\sum_{k=1}^{3n}a_k=n$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n$

(i) $n=3m-2$ 인 경우

$9+m=3m-2$ 에서 $m=\frac{11}{2}$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $n=3m-1$ 인 경우

$19+m=3m-1$ 에서 $m=10$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 29 이다.

(iii) $n=3m$ 인 경우

$m=3m$ 에서 $m=0$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n의 값은 29

11. [출제의도] 함수의 극솟값을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f'(x)=3x^2+6ax=3x(x+2a)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2a$ 또는 $x=0$

(i) $a>0$ 인 경우

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=4a=-40$

$a=-10<0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$ 인 경우

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2a$에서 극솟값을 가지므로

$f(-2a)=(-2a)^3+3a\times(-2a)^2+4a$

$=4a^3+4a=-40$

$a^3+a+10=0,\ (a+2)(a^2-2a+5)=0$

$a=-2$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 이고 $f(x)=x^3-6x^2-8$

따라서 $f(2)=2^3-6\times 2^2-8=-24$

12. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2+4x-1$ 이므로

점 A의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y=(3t^2+4t-1)(x-t)+(t^3+2t^2-t+4)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-2t^3-2t^2+4=0,\ -2(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$t=1$

그러므로 점 A의 좌표는 $(1, 6)$이고 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=6x$이다. 구하는 부분의 넓이는

$\int_{-2}^{0}(x^3+2x^2-x+4)dx$

$+\int_0^1\{(x^3+2x^2-x+4)-6x\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-2}^{0}$

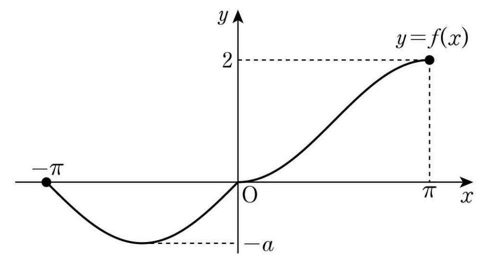
$+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_0^1$

$=\frac{34}{3}+\frac{17}{12}=\frac{153}{12}=\frac{51}{4}$

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(i) $a>0$ 인 경우

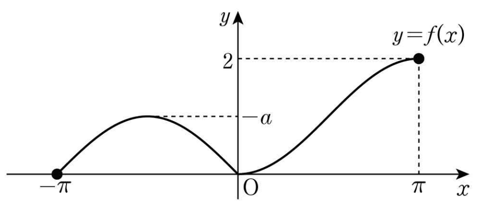
닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$M=2,\ m=-a$ 이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a의 값은 $2-(-a)=4$에서 $a=2$

(ii) $-2\le a<0$ 인 경우

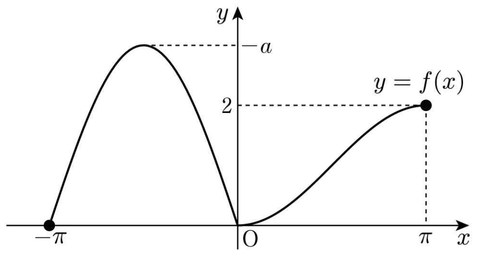
닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$M=2,\ m=0$ 이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(iii) $a<-2$ 인 경우

닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$M=-a,\ m=0$ 이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a의 값은 $-a=4$에서 $a=-4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 a의 값의 곱은 $2\times(-4)=-8$

14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)\,dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - \int_{x_1}^{x_2} f(a)\,dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)\,dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \ge \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(a)\,dt$$

$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \ge \int_{x_1}^{x_2}\{f'(a)(t-a)+f(a)\}dt$ 이므로

$x_1 \le x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \ge \int_{x_1}^{x_2}\{f'(a)(t-a)+f(a)\}dt$$

이려면 사차함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) \ge f'(a)(x-a)+f(a)$

두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(3,\ f(3))$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$(m, n은 상수)라 하면

$$m=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{f(3)-f(-1)}{4}$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge f'(a)(x-a)+f(a)$ 를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가

$a \le -1$ 또는 $a \ge 3$ 이므로

$x=-1$, $a=3$일 때 $f(-1) \ge -4f'(3)+f(3)$

$\dfrac{f(3)-f(-1)}{4} \le f'(3)$ …… ㉠

$x=3$, $a=-1$일 때 $f(3) \ge 4f'(-1)+f(-1)$

$f'(-1) \le \dfrac{f(3)-f(-1)}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f'(-1) \le m \le f'(3)$ …… ㉢

함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)-(mx+n)$ 이라 하자.

$g(a)=f(a)-ma-n$

$g'(x)=f'(x)-m$ 에서 $g'(a)=f'(a)-m$

모든 실수 x에 대하여

$f(x) \ge f'(a)(x-a)+f(a)$

$f(x)-(mx+n) \ge f'(a)(x-a)+f(a)-(mx+n)$

$f(x)-(mx+n) \ge \{f'(a)-m\}(x-a)+\{f(a)-ma-n\}$

이므로 $g(x) \ge g'(a)(x-a)+g(a)$ 를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위도 $a \le -1$ 또는 $a \ge 3$ 이다.

$g(-1)=g(3)=0$ 이므로

$g(x) \ge g'(-1)(x+1)$ …… ㉣

$g(x) \ge g'(3)(x-3)$ …… ㉤

㉢에서 $g'(-1) \le 0 \le g'(3)$ 이므로

㉣, ㉤에서 $x \le -1$ 또는 $x \ge 3$ 일 때 $g(x) \ge 0$

구간 $(-\infty,\ -1]$ 에서 $g(x)$의 최솟값은 $g(-1)=0$ 이고,

구간 $[3,\ \infty)$ 에서 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(3)=0$ 이다.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 는 최솟값을 가지고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \ge g(c)$ 를 만족시키는 실수 c가 닫힌구간 $[-1,\ 3]$ 에 존재한다.

$g(c)$ 가 극솟값이므로 $g'(c)=0$ 이고

$g(x) \ge g(c)=g'(c)(x-c)+g(c)$

실수 $a=c$가 $g(x) \ge g'(a)(x-a)+g(a)$ 를 만족시키므로 $c \le -1$ 또는 $c \ge 3$

그러므로 $c=-1$ 또는 $c=3$

즉 $g(-1)=g(3)=0$, $g'(-1)=g'(3)=0$ 이므로

$g(x)=(x+1)^2(x-3)^2$

$f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+mx+n$

$f'(x)=4(x+1)(x-3)(x-1)+m$

$f(1)=15$ 이므로

$16+m+n=15$

$m+n=-1$ …… ㉥

$f'(1)=1$ 이므로 $m=1$

$m=1$ 을 ㉥에 대입하면 $n=-2$

$f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+x-2$

따라서 $f(4)=27$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 추론한다.

함수 $y=|2^x-4|$ 의 치역이 $\{y\,|\,y \ge 0\}$,

함수 $y=a+\log_2 x$ 의 치역이 실수 전체의 집합이고 함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이므로

$p \le 0$ …… ㉠

$p<x<q$에서 $f(x)=a+\log_2 x$ 이고

함수 $f(x)$ 의 정의역이 실수 전체의 집합이므로

$p \ge 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=0$

$\{f(x)\,|\,x \le 0\}=\{y\,|\,3 \le y<4\}$

함수 $f(x)$ 가 일대일대응이므로

$\{f(x)\,|\,x>0\}=\{y\,|\,y<3$ 또는 $y \ge 4\}$ 이고

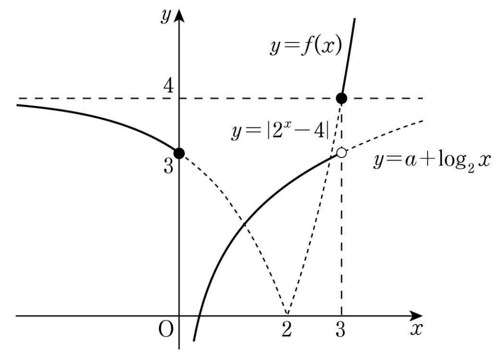
$\{f(x)\,|\,0<x<q\}=\{y\,|\,y<a+\log_2 q\}=\{y\,|\,y<3\}$,

$\{f(x)\,|\,x \ge q\}=\{y\,|\,y \ge 4\}$ 이다.

$|2^q-4|=4$ 에서 $q=3$

$a+\log_2 3=3$, $a=3-\log_2 3$

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\log_2 3+\log_2\frac{3}{2}$$
$$=3-\log_2 3+\log_2 3-1=2$$



16. [출제의도] 로그함수의 성질을 이해하여 방정식의 해를 구한다.

로그의 진수는 양수이므로

$x-2>0$, $x+10>0$

그러므로 $x>2$

$\log_9(x+10)=\log_{3^2}(x+10)=\dfrac{1}{2}\log_3(x+10)$ 이므로

$\log_3(x-2)=\log_9(x+10)$ 에서

$\log_3(x-2)=\dfrac{1}{2}\log_3(x+10)$

$2\log_3(x-2)=\log_3(x+10)$

$\log_3(x-2)^2=\log_3(x+10)$

$(x-2)^2=x+10$, $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)=0$

$x=-1$ 또는 $x=6$

$x>2$ 이므로 $x=6$

17. [출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 상수의 개수를 구한다.

$f(x)=x^3+3x^2-k$ 라 하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-2)=-8+12-k=4-k$ 이고 극솟값은 $f(0)=-k$ 이다.

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 양수이고 극솟값은 음수이다.

$f(-2)=4-k>0$ 에서 $k<4$

$f(0)=-k<0$ 에서 $k>0$

$0<k<4$ 이므로 $k=1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 자연수 k 의 개수는 3

18. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{8}(a_k+3)(a_k-1)=\sum_{k=1}^{8}\left(a_k^2+2a_k-3\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{8}a_k^2+\sum_{k=1}^{8}2a_k-\sum_{k=1}^{8}3$$
$$=\sum_{k=1}^{8}a_k^2+2\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{8}3$$
$$=20+16-24=12$$

19. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$\displaystyle\int_0^x\{f(t)+t^2\}dt=xf(x)-x^3$ …… ㉠

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x)+x^2=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$xf'(x)=4x^2$

다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 도 다항함수이므로

$f'(x)=4x$

따라서 $\displaystyle\int_0^4 f'(x)dx=\int_0^4 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_0^4=32$

20. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이에 관한 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:1$, $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2a$, $\overline{\mathrm{AC}}=a$, $\overline{\mathrm{BD}}=3b$, $\overline{\mathrm{DC}}=b$

$(a>0,\ b>0)$이라 하자.

삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos\theta$

$4a^2=2+9b^2-2\times\sqrt{2}\times3b\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ …… ㉠

$\angle\mathrm{ADC}=\pi-\theta$ 이므로 삼각형 ADC 에서

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\pi-\theta)$

$a^2=2+b^2-2\times\sqrt{2}\times b\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $9b^2-3b+2=4b^2+4b+8$

$5b^2-7b-6=(5b+3)(b-2)=0$

$b=-\dfrac{3}{5}$ 또는 $b=2$

$b>0$ 이므로 $b=2$

㉡에 $b=2$를 대입하면 $a^2=8$

$a>0$ 이므로 $a=2\sqrt{2}$

θ 는 예각이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}=2R$, $\dfrac{4\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{14}}{4}}=2R$, $R=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

삼각형 ABD 의 외접원의 넓이는 $\dfrac{64}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=64$ 이므로 $p+q=71$

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.

$a_6=2$ 이므로 $a_6=\dfrac{a_5}{5}$ 이고 $a_5=10$

(i) $a_4 \ge 3$ 인 경우

$a_5=\dfrac{a_4}{4}$ 이므로 $a_4=4a_5=40$

$a_4=\dfrac{a_3}{3}$ 이므로 $a_3=3a_4=120$

$a_3=\dfrac{a_2}{2}$ 이므로 $a_2=2a_3=240$

$a_2=\dfrac{a_1}{1}$ 이므로 $a_1=a_2=240$

(ii) $a_4<3$ 인 경우

$a_4 \ne 10$ 이므로 $a_3 \ge 3$

$a_4=\dfrac{a_3}{3}$, $a_3=3a_4<9$

그러므로 $3 \le a_3<9$

$a_3 \ne 10$ 이므로 $a_3=\dfrac{a_2}{2}$, $a_2=2a_3$ 에서

$6 \le a_2<18$ …… ㉠

① $a_1 \ge 3$이면 $a_2 = \dfrac{a_1}{1}$, $a_1 = a_2$이고

a_1이 자연수이므로 ㉠에서 $a_1 = 6, 7, \cdots, 17$

② $a_1 < 3$이면 $a_2 = 10$이므로 ㉠을 만족시킨다.

a_1이 자연수이므로 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a_1의 값은

$1, 2, 6, 7, 8, \cdots, 16, 17, 240$

따라서 구하는 모든 a_1의 값의 합은

$1 + 2 + \sum_{n=6}^{17} n + 240 = 381$

22. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-} g(x) = -f(0)$, $\lim_{x\to0+} g(x) = |f(0)| - 8$

$-f(0) = |f(0)| - 8$

$f(0) = 4$ …… ㉠

$g(0) = |f(0)| - 8 = -4$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to0-} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to0-} \dfrac{-f(0+h)+f(0)}{h}$

$= -f'(0)$

$\lim_{h\to0+} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$

$= \lim_{h\to0+} \dfrac{|f(0+h)| + 2h^2 - 8 + 4}{h}$

$= \lim_{h\to0+} \dfrac{|f(0+h)| - f(0)}{h} + \lim_{h\to0+} \dfrac{2h^2}{h}$

$= \lim_{h\to0+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} + 0 = f'(0)$

$-f'(0) = f'(0)$

$f'(0) = 0$ …… ㉡

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to0-} \dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}$

$= \lim_{h\to0-} \dfrac{|f(2+h)| + 2(2+h)^2 - 8 - |f(2)|}{h}$

$= \lim_{h\to0-} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + \lim_{h\to0-} \dfrac{2h^2+8h}{h}$

$= \lim_{h\to0-} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$

$\lim_{h\to0+} \dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}$

$= \lim_{h\to0+} \dfrac{|f(2+h)| - 2(2+h)^2 + 8 - |f(2)|}{h}$

$= \lim_{h\to0+} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - \lim_{h\to0+} \dfrac{2h^2+8h}{h}$

$= \lim_{h\to0+} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8$

$\lim_{h\to0-} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$

$= \lim_{h\to0+} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8$ …… ㉢

즉 함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

$f(2) = 0$ …… ㉣

$\lim_{h\to0+} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = |f'(2)|$와

$\lim_{h\to0-} \dfrac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = -|f'(2)|$를 ㉢에 대입하면

$|f'(2)| = 8$ …… ㉤

㉠, ㉡, ㉣, ㉤을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$는

$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ 또는 $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$

(ⅰ) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$인 경우

$3x^3 - 7x^2 + 4 = (3x+2)(x-1)(x-2)$이므로

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(ⅱ) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$인 경우

$-x^3 + x^2 + 4 = -(x-2)(x^2+x+2)$이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$이다.

따라서 $f(-5) = 154$

[확률과 통계]

23	①	24	⑤	25	②	26	③	27	④
28	④	29	363	30	330				

23. [출제의도] 중복조합의 수를 계산한다.

${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

도로망을 따라 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 하자.

P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 4개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 $aaaabbb$인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{4!3!} - 1 = 35 - 1 = 34$

25. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$

세 문자 b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

따라서 구하는 경우의 수는 $256 - 81 = 175$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

서로 이웃한 2장의 카드에 적힌 수의 합이 모두 4 이상이 되려면 숫자 1이 적힌 카드와 이웃한 카드에는 숫자 3이 적혀 있어야 한다.

(ⅰ) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있는 경우

1, 3, □, □, □, □ 또는 □, □, □, □, 3, 1

에서 □에 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우의 수는

$2 \times \dfrac{4!}{2!2!} = 12$

(ⅱ) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있지 않은 경우

숫자 1이 적힌 카드의 양옆에 숫자 3이 적힌 카드가 있어야 하므로 3, 1, 3을 하나의 문자 a로 보고 a, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!} = 12$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$12 + 12 = 24$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (가)에서

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le f(6)$

3의 배수 a에 대하여 $f(a) = b$라 하자.

조건 (나)에서 $f(f(a)) = a$이므로 $f(b) = a$

$a > b$이면 $f(b) > f(a)$이고, $a < b$이면 $f(b) < f(a)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a) = a$, 즉 $f(3) = 3$이고 $f(6) = 6$

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 세 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 네 숫자 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 10 = 60$

28. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

검은색 접시를 배열하는 원순열의 수는 $(3-1)! = 2$

조건 (가)에서 각각의 검은색 접시 사이에 흰색 접시가 적어도 한 개 있다.

검은색 접시 사이에 놓인 흰색 접시의 개수를 각각 a, b, $c\,(a \ge b \ge c)$라 하면 $a=2$, $b=1$, $c=1$

흰색 접시를 놓는 경우의 수는 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 첫 번째와 두 번째에 있는 수가 모두 홀수인 경우와 모두 짝수인 경우를 제외한 경우의 수와 같다.

숫자 1, 2, 3, 4를 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

첫 번째와 두 번째 있는 수가 모두 홀수인 경우의 수는 $2! \times 2! = 4$

첫 번째와 두 번째 있는 수가 모두 짝수인 경우의 수는 $2! \times 2! = 4$

검은색 접시 사이에 2개, 1개, 1개의 흰색 접시를 놓는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!} = 3$

흰색 접시를 놓는 경우의 수는

$(24 - 4 - 4) \times 3 = 48$

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 48 = 96$

29. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

주사위를 네 번 던져서 나온 눈의 수인 a, b, c, d 중에서 짝수의 개수는 2 이상이어야 한다.

(ⅰ) a, b, c, d 중 짝수의 개수가 2인 경우

$a \times b \times c \times d$가 16의 배수이므로 4의 개수는 2이다.

네 수 a, b, c, d 중에서 4인 수 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

남은 2개의 수가 홀수인 경우의 수는 ${}_3\Pi_2 = 9$

구하는 경우의 수는

$6 \times 9 = 54$

(ⅱ) a, b, c, d 중 짝수의 개수가 3인 경우

$a \times b \times c \times d$가 16의 배수이므로 4의 개수는 1 이상이다.

네 수 a, b, c, d 중에서 짝수인 수 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$

짝수인 수 중 4의 개수가 1 이상인 경우의 수는

${}_3\Pi_3 - {}_2\Pi_3 = 27 - 8 = 19$

남은 1개의 수가 홀수인 경우의 수는 ${}_3\Pi_1 = 3$

구하는 경우의 수는

$4 \times 19 \times 3 = 228$

(ⅲ) a, b, c, d 중 짝수의 개수가 4인 경우

구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4 = 81$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$54 + 228 + 81 = 363$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

학생 A, B, C, D, E가 받는 검은 공의 개수를 각각 a, b, c, d, e라 하고

학생 A, B, C, D, E가 받는 흰 공의 개수를 각각 a', b', c', d', e'이라 하자.

이때 a, b, c, d, e, a', b', c', d', e'은 모두 음이 아닌 정수이다.

공이 모두 8개이고 조건 (가)에서 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합이 홀수이므로

학생 D, E가 받는 공의 개수의 합 $(d+d')+(e+e')$은 홀수이다.

이때, 조건 (나)를 만족시키는 $d+d'$, $e+e'$의 값은 $d+d'=2$, $e+e'=1$ 뿐이다.

(ⅰ) $(d, d', e, e') = (2, 0, 1, 0)$인 경우

$a+b+c=1$, $a'+b'+c'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_1 \times {}_3H_4 = 45$

(ⅱ) $(d, d', e, e') = (2, 0, 0, 1)$인 경우

$a+b+c=2$, $a'+b'+c'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_2 \times {}_3H_3 = 60$

(iii) $(d, d', e, e') = (1, 1, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=2$, $a'+b'+c'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_2 \times {}_3H_3 = 60$

(iv) $(d, d', e, e') = (1, 1, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=3$, $a'+b'+c'=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_3 \times {}_3H_2 = 60$

(v) $(d, d', e, e') = (0, 2, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=3$, $a'+b'+c'=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_3 \times {}_3H_2 = 60$

(vi) $(d, d', e, e') = (0, 2, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=4$, $a'+b'+c'=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는

${}_3H_4 \times {}_3H_1 = 45$

(i) ~ (vi)에 의하여 구하는 경우의 수는

$2 \times (45+60+60) = 330$

[미적분]

23	①	24	③	25	④	26	⑤	27	②
28	④	29	13	30	25				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} = 3$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \frac{n^3}{(2n+3)(3n^2+1)}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

25. [출제의도] 등비수열의 극한을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$a_n = \left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n + \left(\frac{3}{k}\right)^n$ 에서 k가 자연수이므로

$\frac{k^2+9}{10k} > 0$, $\frac{3}{k} > 0$

두 등비수열 $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$ 중 어느 한 수열이 발산하면 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않으므로

두 등비수열 $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$ 이 모두 수렴하여야 한다.

$\frac{k^2+9}{10k} \le 1$ 에서 $k^2-10k+9 \le 0$, $1 \le k \le 9$

$\frac{3}{k} \le 1$ 에서 $k \ge 3$ 이므로

$3 \le k \le 9$

따라서 구하는 자연수 k 의 개수는 7

26. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

모든 자연수 n 에 대하여

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k-k^2}{k+1} = 2n^2-n$ 이라 하자.

$n \ge 2$ 일 때,

$$\frac{a_n-n^2}{n+1} = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2n^2-n) - \{2(n-1)^2-(n-1)\}$$

$$= 4n-3$$

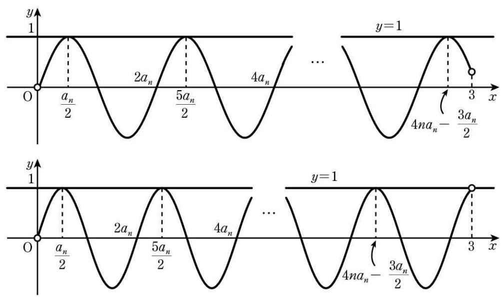
$a_n = (4n-3)(n+1)+n^2 = 5n^2+n-3$ $(n \ge 2)$ 에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n-3}{n^2+1} = 5$$

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 주기는 $2a_n$ 이고

$0 < x < 3$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식 $\sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 $2n$ 이므로 $0 < x < 3$ 에서 함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\left(4n-\frac{3}{2}\right) \times a_n < 3 \le \left(4n+\frac{1}{2}\right) \times a_n$$

$$\frac{3}{4n+\frac{1}{2}} \le a_n < \frac{3}{4n-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3n}{4n+\frac{1}{2}} \le na_n < \frac{3n}{4n-\frac{3}{2}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$ 이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{3}{4}$

28. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함숫값을 구한다.

(i) $|x| < 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty} x^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ 이므로

$g(x) = f(x)$

(ii) $|x| > 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x^2 + \frac{1}{x^n} + \frac{f(x)}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{2n}}} = 2x^2$$

(iii) $x = -1$ 인 경우

$$g(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}$$

수열 $\left\{\frac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}\right\}$ 의 값은

교대로 $1+f(-1)$ 과 $1+\frac{f(-1)}{3}$ 이 된다.

$f(-1) \ne 0$ 이면 이 수열은 발산하므로 조건을 만족시키지 않고, $f(-1) = 0$ 이면 이 수열은 수렴하므로

$f(-1) = 0$, $g(-1) = 1$

(iv) $x = 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty} x^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^n = 1$

이므로 $g(1) = \frac{3+f(1)}{3}$ 이다.

$f(1) = a+b = -f(-1) = 0$ 이므로 $b = -a$, $g(1) = 1$

(i) ~ (iv)에 의하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| < 1) \\ 1 & (|x| = 1) \\ 2x^2 & (|x| > 1) \end{cases}$$

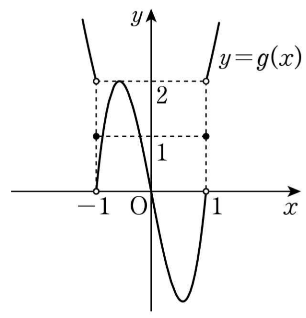
$f(x) = ax^3+bx$ $(a > 0)$ 에서 $b = -a$ 이므로

$f(x) = ax(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 3ax^2 - a = 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극대이고 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 극소이다.

이때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k 가 존재하므로 조건을 만족시키는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 의 극댓값 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 은 2이므로

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}a}{9} + \frac{\sqrt{3}a}{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{9} = 2$ 에서 $a = 3\sqrt{3}$

$f(x) = 3\sqrt{3}x(x^2-1)$ 이므로

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(2) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \times 8 = \frac{9\sqrt{3}}{8} \times 8 = 9\sqrt{3}$$

29. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 할 때, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{AB} = 2\overline{AH_1}$ 이고 $\angle CH_1A = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\angle BAC = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{CA}} = \frac{1}{n}$

각 BAD는 호 BD의 원주각이고 각 BCD는 부채꼴 CBD의 중심각이므로 $\angle BCD = 2\angle BAD = \angle BAC$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 - 2\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\cos\angle BCD = 2n^2-2n$

$\overline{BD} = \sqrt{2n^2-2n}$

$\overline{BD} : \overline{DE} = \sqrt{2} : 1$ 이므로 $\overline{DE} = \frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \sqrt{n^2-n}$

점 C 에서 선분 $\overline{DE}$ 에 내린 수선의 발을 H_2 라 하면 삼각형 CDE 는 이등변삼각형이므로 $\overline{DE} = 2\overline{DH_2}$ 이고 $\angle CH_2D = \frac{\pi}{2}$ 이다.

$\overline{CH_2}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DH_2}^2 = \frac{3n^2+n}{4}$ 이므로 $\overline{CH_2} = \frac{\sqrt{3n^2+n}}{2}$

$$S_n = \frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{CH_2} = \frac{n\sqrt{3n^2-2n-1}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n} = \frac{\sqrt{3}n - \sqrt{3n^2-2n-1}}{4}$$

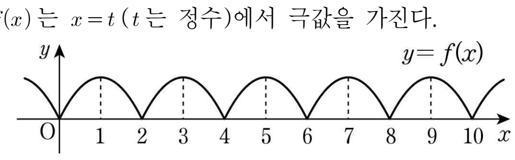
$$= \frac{2n+1}{4\left(\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}\right)}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\sqrt{3}$

따라서 $p = 12$, $q = 1$ 이므로 $p+q = 13$

30. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 등비수열의 항의 값을 구하는 문제를 해결한다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같고, 함수 $f(x)$ 는 $x = t$ (t 는 정수)에서 극값을 가진다.



등비수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $-1 < r \le 1$ 이다.

조건 (나)를 만족시키는 3개의 자연수를 i, j, l $(i < j < l)$ 이라 하면 $a_i \ne a_j$ 이므로 $r \ne 1$ 이고, $a_1 \ne 0$

서로소인 두 자연수 p $(p \ge 2)$, q 에 대하여 $|r| = \frac{q}{p}$ 라 하자.

$a_l = a_i r^{l-i}$ 이고 a_i, a_l 은 자연수, $l-i \ge 2$ 이므로

a_i 는 p^2 의 배수이다.

$0 < a_i < 10$ 에서 p 는 2 또는 3이므로

r의 값은 $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$

이때, 조건 (나)를 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$의 공비와 순서쌍 (a_i, a_j, a_l)은

$r=\frac{1}{2}$일 때, $(4, 2, 1)$, $r=\frac{1}{3}$일 때, $(9, 3, 1)$,

$r=\frac{2}{3}$일 때 $(9, 6, 4)$뿐이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_{n+1}+a_{2n}}{a_{n+1}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^2r^n+a_1r^{2n-1}}{a_1r^n+a_1r^{n-1}}$$

$$=\frac{a_1r}{r+1}=\frac{81}{10}=\frac{3^4}{10}$$

에서 $a_1=\frac{3^4(r+1)}{10r}$이다.

(i) $r=\frac{1}{2}$인 경우

$(a_i, a_j, a_l)=(4, 2, 1)$이고 $a_1=4$이다.

이때 $a_1=\frac{3^4(r+1)}{10r}=\frac{3^5}{10}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=\frac{1}{3}$일 때,

$(a_i, a_j, a_l)=(9, 3, 1)$이다.

$a_1=\frac{3^4(r+1)}{10r}=\frac{2\times3^4}{5}$에서

$a_l=a_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}=1$인 자연수 l이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r=\frac{2}{3}$일 때,

$(a_i, a_j, a_l)=(9, 6, 4)$이다.

$a_1=\frac{3^4(r+1)}{10r}=\frac{3^4}{4}$에서 $i=3$, $j=4$, $l=5$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $r=\frac{2}{3}$

$a_7=a_1r^6=\frac{3^4}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{16}{9}$에서

$p=9$, $q=16$이므로 $p+q=25$

[기하]

23	⑤	24	③	25	①	26	④	27	②
28	④	29	128	30	60				

23. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 단축의 길이를 계산한다.

타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$의 y축 위의 두 꼭짓점의 좌표가 $(0, 2)$, $(0, -2)$이므로 단축의 길이는 4

24. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{2}{a}x$이고 $a>0$이므로 $\frac{2}{a}=\frac{1}{3}$, $a=6$

25. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 한 점에서 포물선의 준선까지의 거리를 구한다.

원의 반지름의 길이가 5이므로 $\overline{FP}=10$

포물선의 성질에 의해 점 P에서 포물선의 준선 $x=-4$까지의 거리가 10이므로 점 P의 x좌표는 6이다. 초점 F의 x좌표는 4이고 원의 중심은 선분 FP의 중점이므로 원의 중심의 x좌표는 5이다.

따라서 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리는 $5-(-4)=9$

26. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

$\overline{F'P}=\overline{PQ}$이고 $\overline{F'Q}\perp\overline{FP}$이므로 $\overline{FF'}=\overline{FQ}$

$\overline{FQ}=\overline{F'Q}$이므로 삼각형 QF'F는 한 변의 길이가 $\overline{F'F}$인 정삼각형이다.

$\overline{F'F}=2c$이므로 $\overline{F'P}=c$, $\overline{FP}=\sqrt{3}c$

타원의 장축의 길이가 2이므로

$\overline{F'P}+\overline{FP}=(\sqrt{3}+1)c=2$

따라서 $c=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$

27. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 삼각형의 둘레의 길이를 구한다.

$\overline{F'Q}=a$라 하자.

점 Q는 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{FQ}=\overline{F'Q}+2=a+2$

$\overline{PQ}=4$이므로 $\overline{F'P}=a+4$

두 점 P, R은 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{FP}=\overline{F'P}-2=a+2$, $\overline{F'R}=\overline{FR}+2$

삼각형 F'RQ의 둘레의 길이가 16이므로

$\overline{F'R}+\overline{QR}+\overline{F'Q}=(\overline{FR}+2)+(\overline{FQ}-\overline{FR})+a$

$=2a+4=16$

즉 $a=6$

따라서 삼각형 FPQ의 둘레의 길이는

$\overline{FP}+\overline{PQ}+\overline{FQ}=(a+2)+4+(a+2)$

$=2a+8$

$=20$

28. [출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

두 포물선 C_1, C_2의 초점은 각각 $F_1(3, 0)$, $F_2\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$이고 준선의 방정식은 각각 $x=-3$, $x=\frac{3}{2}$이다.

즉 $\overline{F_1F_2}=3-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

선분 PQ가 y축과 만나는 점을 H라 하면

두 점 P, Q는 각각 포물선 C_1, C_2 위의 점이므로

$\overline{F_1P}=\overline{PH}+3$, $\overline{F_2Q}=\overline{QH}+\frac{3}{2}$

사각형 PQF_2F_1의 둘레의 길이가 41이므로

$\overline{PQ}+\overline{F_2Q}+\overline{F_1F_2}+\overline{F_1P}=\overline{PQ}+\left(\overline{QH}+\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{2}+(\overline{PH}+3)$

$=2\overline{PQ}+9=41$

즉 $\overline{PQ}=16$

점 P의 좌표를 (x_1, a), 점 Q의 좌표를 (x_2, a)라 하면 $12x_1=-6x_2$, $2x_1=-x_2$

$\overline{PQ}=x_1-x_2=3x_1=16$에서 $x_1=\frac{16}{3}$

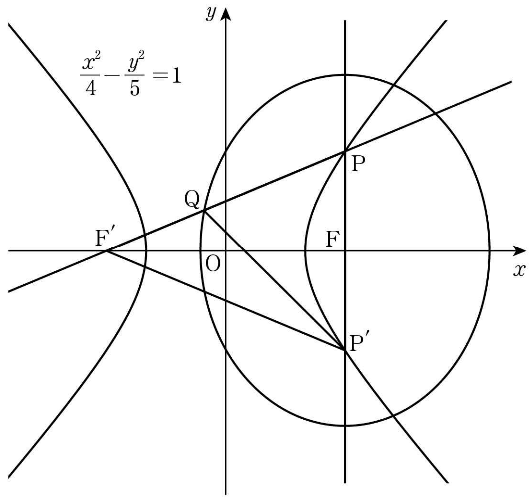
점 P는 포물선 C_1 위의 점이므로

$a^2=12x_1=64$, $a=8$

따라서 구하는 사각형 PQF_2F_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{PQ}+\overline{F_1F_2})\times a=\frac{1}{2}\times\left(16+\frac{9}{2}\right)\times8=82$

29. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



$c^2=4+5=9$이므로 $c=3$

점 P의 x좌표가 3이므로

$\frac{3^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$에서 점 P의 y좌표는 $\frac{5}{2}$

$\overline{FP}=\frac{5}{2}$이고 쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로

$\overline{F'P}=\overline{FP}+4=\frac{13}{2}$

$\overline{F'P}=\overline{F'P'}$, $\overline{PP'}=\overline{QP'}$이고 $\angle F'PP'=\angle QPP'$이므로

삼각형 F'P'P와 삼각형 P'PQ는 서로 닮음인 이등변삼각형이다.

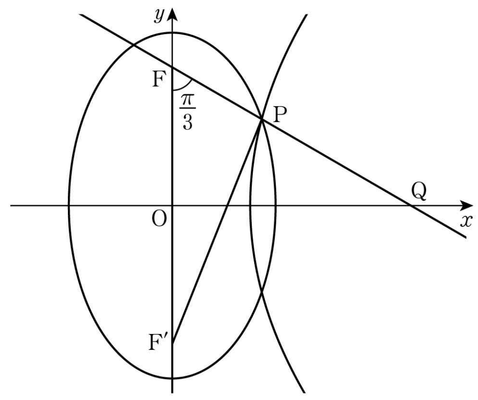
$\frac{\overline{PP'}}{\overline{F'P}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'P}}$에서 $\frac{10}{13}=\frac{\overline{PQ}}{5}$, 즉 $\overline{PQ}=\frac{50}{13}$

타원의 장축의 길이는

$\overline{P'Q}+\overline{PQ}=5+\frac{50}{13}=\frac{115}{13}$이므로 $p=13$, $q=115$

따라서 $p+q=13+115=128$

30. [출제의도] 타원과 포물선의 관계를 추론하여 선분의 길이를 구한다.



$\overline{FP}=k$라 하면 타원의 장축의 길이가 10이므로

$\overline{F'P}=10-\overline{FP}=10-k$

$\overline{FF'}=8$이고 $\angle F'FP=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 PFF'에서 코사인법칙에 의해

$\overline{F'P}^2=\overline{FP}^2+\overline{FF'}^2-2\times\overline{FP}\times\overline{FF'}\times\cos\frac{\pi}{3}$

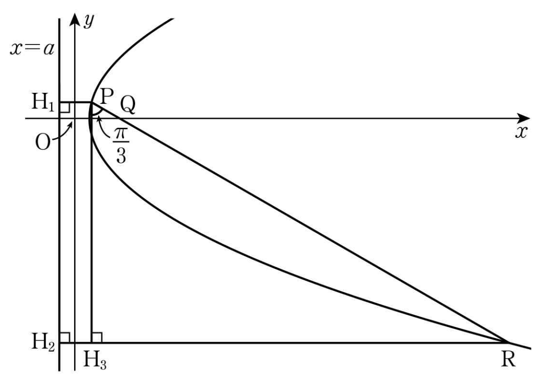
$(10-k)^2=k^2+8^2-2\times k\times8\times\frac{1}{2}$

$12k=36$, 즉 $k=3$

$\angle F'FP=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{OF}=4$이므로 $\overline{FQ}=8$

$\overline{PQ}=\overline{FQ}-\overline{FP}=8-k=5$

점 P, R에서 준선 $x=a$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, 점 P에서 직선 RH_2에 내린 수선의 발을 H_3이라 하자.



$\overline{QR}=t$라 하자. 삼각형 RPH_3에서

$\overline{RH_3}=\overline{PR}\times\sin\frac{\pi}{3}=(t+5)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

두 점 R, P는 포물선 위의 점이므로

$\overline{RH_2}=\overline{QR}=t$이고 $\overline{PH_1}=\overline{QP}=5$이다.

$\overline{H_3H_2}=\overline{PH_1}=5$

$\overline{RH_3}=\overline{RH_2}-\overline{H_3H_2}=t-5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}(t+5)=t-5$

즉 $t=\frac{10+5\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=35+20\sqrt{3}$

$\overline{PR}=t+5=40+20\sqrt{3}$이므로 $p=40$, $q=20$

따라서 $p+q=40+20=60$