정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	④	3	①	4	⑤	5	③
6	⑤	7	②	8	①	9	③	10	②
11	⑤	12	④	13	①	14	④	15	②
16	11	17	50	18	37	19	2	20	35
21	8	22	96						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{16}\times 2^{-\frac{1}{3}} = (2^4)^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}} = 2$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x) = 4x+5$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 9$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로

$\sin^2\theta + \left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)^2 = \dfrac{5}{4}\sin^2\theta = 1$

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\sin\theta > 0$

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 3$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) + \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 2+3 = 5$

5. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

함수 $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$\displaystyle\int_1^2 f'(x)dx = [f(x)]_1^2 = f(2)-f(1)$

모든 실수 x에 대하여

$f(x)-f(1) = x^3+4x^2-5x$

$x=2$일 때,

$f(2)-f(1) = 2^3+4\times 2^2-5\times 2 = 14$

따라서 $\displaystyle\int_1^2 f'(x)dx = 14$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$이라 하자.

$a_n = ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1+a_2 = a+ar$

$a_3+a_4 = ar^2+ar^3 = r^2(a+ar)$

$\dfrac{a_3+a_4}{a_1+a_2} = \dfrac{r^2(a+ar)}{a+ar} = r^2 = 4$, $r = 2\ (r>0)$

$a_2a_4 = a^2r^4 = 16a^2 = 1$, $a = \dfrac{1}{4}\ (a>0)$

$a_n = \dfrac{1}{4}\times 2^{n-1}$, $a_6 = 8$, $a_7 = 16$

따라서 $a_6+a_7 = 24$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$f'(x) = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(1) = 1-3+2a = a+3$ 이므로 $a=5$

$f(x) = x^3-3x+10$

따라서 $f(-1) = (-1)^3-3\times(-1)+10 = 12$

8. [출제의도] 부정적분의 성질 이해하기

모든 실수 x에 대하여

$xf'(x) = 6x^3-x+f(0)+1$

$x=0$일 때, $0 = f(0)+1$

$f(0) = -1$

$xf'(x) = 6x^3-x+(-1)+1 = x(6x^2-1)$

$f'(x) = 6x^2-1$

$f(x) = 2x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0) = C = -1$

$f(x) = 2x^3-x-1$

따라서 $f(-1) = -2+1-1 = -2$

9. [출제의도] 지수와 로그의 성질 이해하기

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0+2a+(-\log_2 9)}{3},\ \dfrac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}\right)$

$\dfrac{0+2a+(-\log_2 9)}{3} = b$, $2a-\log_2 9 = 3b$

$b = \dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{3}\log_2 9$ ⋯ ㉠

$\dfrac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3} = \log_8 7 = \dfrac{1}{3}\log_2 7$

$-\log_2 9+\log_2 7+a = \log_2 7$

$a = \log_2 9$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$b = \dfrac{2}{3}\log_2 9-\dfrac{1}{3}\log_2 9 = \dfrac{1}{3}\log_2 9$

$a+3b = \log_2 9+\log_2 9 = \log_2 81$

$2^{a+3b} = 2^{\log_2 81}$

$2^{\log_2 81} = k$라 하면

$\log_2 k = \log_2 81$, $k = 81$

따라서 $2^{a+3b} = 81$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$x(t) = x(0)+\displaystyle\int_0^t v(t)dt$

$= 16+\displaystyle\int_0^t 3t(a-t)dt$

$= 16+\displaystyle\int_0^t (-3t^2+3at)dt$

$= 16+\left[-t^3+\dfrac{3}{2}at^2\right]_0^t$

$= -t^3+\dfrac{3}{2}at^2+16$

시각 $t=2a$에서 점 P의 위치가 0이므로

$x(2a) = -(2a)^3+\dfrac{3}{2}a\times(2a)^2+16$

$= 16-2a^3 = 0$

$a^3 = 8$, $a = 2$

$v(t) = 3t(2-t) = -3t^2+6t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^5 |v(t)|dt$

$= \displaystyle\int_0^5 |-3t^2+6t|dt$

$= \displaystyle\int_0^2 (-3t^2+6t)dt+\int_2^5 (3t^2-6t)dt$

$= [-t^3+3t^2]_0^2+[t^3-3t^2]_2^5$

$= \{(-8+12)-0\}+\{(125-75)-(8-12)\}$

$= 58$

11. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

$a_n = a+(n-1)d$ (단, n은 자연수)

$a_5 = a+4d$는 자연수이다.

$S_8 = \dfrac{8(2a+7d)}{2} = 4(2a+7d) = \dfrac{68}{3}$

$2a+7d = \dfrac{17}{3}$

$2(a+4d)-d = 2a_5-d = \dfrac{17}{3}$

$a_5 = \dfrac{1}{2}d+\dfrac{17}{6}$

$0<d<1$ 이므로 $\dfrac{17}{6} < a_5 < \dfrac{10}{3}$

$a_5 = 3$, $d = \dfrac{1}{3}$

$a_5 = a+4\times\dfrac{1}{3} = 3$, $a = \dfrac{5}{3}$

$a_n = \dfrac{5}{3}+(n-1)\times\dfrac{1}{3}$

따라서 $a_{16} = \dfrac{5}{3}+15\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{20}{3}$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 4+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4-} f(x) = f(4)$

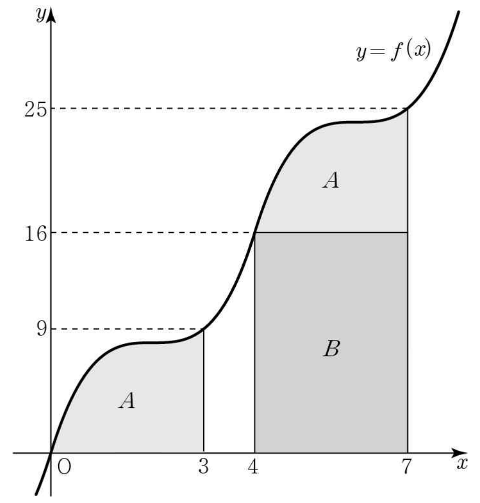
$4 \le x < 8$ 에서의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $0 \le x < 4$ 에서의 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 16 만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.
모든 실수 x 에 대하여
$f(x+4) = f(x) + 16$ 이므로

$$\lim_{x \to 4+} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x+4)$$
$$= \lim_{x \to 0+} \{f(x) + 16\} = 0 + 16 = 16$$
$$\lim_{x \to 4-} f(x) = \lim_{x \to 4-} (x^3 + ax^2 + bx)$$
$$= 64 + 16a + 4b$$

$f(4) = f(0) + 16 = 16$
$16 = 64 + 16a + 4b$
$b = -4a - 12$
함수 $f(x)$ 가 $x = 4$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \to 4+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$
$$\lim_{x \to 4+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{f(x+4) - f(4)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\{f(x) + 16\} - 16}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0+} (x^2 + ax + b) = b = -4a - 12$$
$$\lim_{x \to 4-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$
$$= \lim_{x \to 4-} \frac{(x^3 + ax^2 + bx) - 16}{x - 4}$$
$$= \lim_{x \to 4-} \frac{x^3 + ax^2 + (-4a - 12)x - 16}{x - 4}$$
$$= \lim_{x \to 4-} \frac{ax(x-4) + (x-4)(x^2 + 4x + 4)}{x - 4}$$
$$= \lim_{x \to 4-} \{x^2 + (a+4)x + 4\} = 4a + 36$$

$-4a - 12 = 4a + 36$
$a = -6$, $b = 12$
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x \ (0 \le x < 4)$
함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 직선 $y = 16$ 과 x 축 및 두 직선 $x = 4$, $x = 7$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하면

$$A = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 12x)dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$B = 3 \times 16 = 48$
따라서 $\displaystyle\int_4^7 f(x)dx = A + B = \frac{81}{4} + 48 = \frac{273}{4}$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 ABC 의 외접원을 C_1,
삼각형 ADC 의 외접원을 C_2 라 하자.
원 C_1 의 반지름의 길이를 R 이라 하면
삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})} = \frac{\dfrac{36\sqrt{7}}{7}}{\dfrac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R, \ R = 9$$

원 C_2 에서 $\angle \mathrm{AO'D}$ 는 호 AD 의 중심각, $\angle \mathrm{ACD}$ 는 호 AD 의 원주각이므로

$\angle \mathrm{AO'D} = 2\angle \mathrm{ACD} = \dfrac{2}{3}\pi$

이등변삼각형 O′AD 에서 $\angle \mathrm{AO'D} = \dfrac{2}{3}\pi$ 이므로

$\angle \mathrm{DAO'} = \dfrac{\pi}{6}$

$\overline{\mathrm{OA}} = R = 9$, $\overline{\mathrm{AO'}} = 5\sqrt{3}$

$\angle \mathrm{OAO'} = \dfrac{\pi}{6}$ 이므로

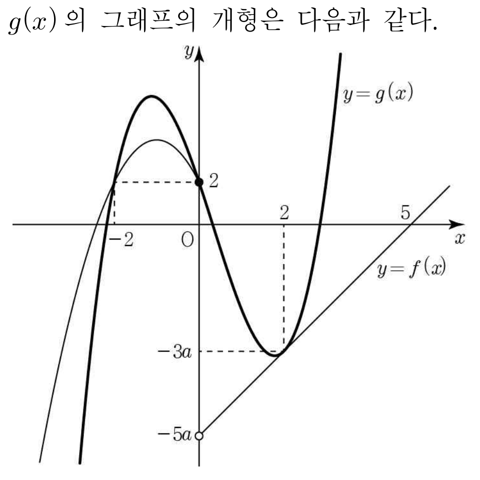
삼각형 AOO′ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{OO'}}^2 = 9^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 9 \times 5\sqrt{3} \times \cos\frac{\pi}{6}$$
$$= 81 + 75 - 135 = 21$$

따라서 $\overline{\mathrm{OO'}}^2 = 21$

14. [출제의도] 함수의 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

$f(-2) = g(-2) = 2$, $f(0) = g(0) = 2$ 이므로
삼차방정식 $g(x) = 2$ 의 서로 다른 세 실근을 -2, 0, t 라 하면
$g(x) - 2 = x(x+2)(x-t)$
$g(x) = x(x+2)(x-t) + 2$
$\quad = x^3 + (2-t)x^2 - 2tx + 2$
$f(k) = g(k)$ 를 만족시키는 양수 k 의 값은 2 뿐이므로, 이를 만족시키는 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x > 0$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$ 에서의 접선과 일치한다.
$f(2) = g(2)$ 이고 $f'(2) = g'(2)$
$f(2) = a(2-5) = -3a$
$g(2) = 8 + 4(2-t) - 4t + 2 = 18 - 8t$
$-3a = 18 - 8t$ ⋯ ㉠
$f'(2) = g'(2)$ 이므로
$f'(x) = a \ (x > 0)$ 에서
$f'(2) = a$
$g'(x) = 3x^2 + 2(2-t)x - 2t$ 에서
$g'(2) = 20 - 6t$
$a = 20 - 6t$ ⋯ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a = 2$, $t = 3$
$g(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$
따라서 $g(2a) = g(4) = 26$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

a_1 이 자연수이고 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ 또는 $a_{n+1} = (a_n - 1)^2$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 음이 아닌 정수이다.
a_{n+1} 의 값에 따라 가능한 a_n 의 값은 다음과 같다.
(Ⅰ) $a_{n+1} = (2k)^2$ 인 자연수 k 가 존재하는 경우
$\quad a_n = \sqrt{a_{n+1}} + 1$ 또는 $a_n = 2a_{n+1}$
(Ⅱ) $a_{n+1} = 1$ 인 경우, $a_n = 0$ 또는 $a_n = 2$
(Ⅲ) $a_{n+1} = 0$ 인 경우, $a_n = 1$
(Ⅳ) 그 외의 경우, $a_n = 2a_{n+1}$
(Ⅰ)~(Ⅳ)에 의하여
$a_7 = 1$ 이므로 $a_6 = 0$ 또는 $a_6 = 2$
(ⅰ) $a_6 = 0$ 인 경우
$\quad a_5 = 1$ 이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1) 은
$\quad (0, 1, 0, 1)$ 또는 $(0, 1, 2, 4)$ 또는
$\quad (2, 4, 3, 6)$ 또는 $(2, 4, 8, 16)$ 이므로
$\quad a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 4$ 또는 $a_1 = 6$ 또는
$\quad a_1 = 16$
(ⅱ) $a_6 = 2$ 인 경우
$\quad a_5 = 4$ 이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1) 은
$\quad (3, 6, 12, 24)$ 또는 $(8, 16, 5, 10)$ 또는
$\quad (8, 16, 32, 64)$ 이므로
$\quad a_1 = 24$ 또는 $a_1 = 10$ 또는 $a_1 = 64$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
모든 a_1 의 값의 합은
$1 + 4 + 16 + 6 + 24 + 10 + 64 = 125$

16. [출제의도] 로그 계산하기

로그의 진수는 양수이므로
$x + 9 > 0$, $x - 6 > 0$ 에서
$x > 6$
$\log_5(x+9) = \log_5 4 + \log_5(x-6)$
$\log_5(x+9) = \log_5\{4(x-6)\} = \log_5(4x - 24)$
$x + 9 = 4x - 24$
따라서 $x = 11$

17. [출제의도] 곱의 미분 계산하기

$f(x) = (x-3)(x^2 + x - 2)$
$f'(x) = 1 \times (x^2 + x - 2) + (x-3)(2x+1)$
따라서
$f'(5) = 1 \times (25 + 5 - 2) + (5-3) \times (10+1)$
$\quad = 50$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=3\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}2$

$=3\sum_{k=1}^{15}a_k+30=45$

$3\sum_{k=1}^{15}a_k=15$, $\sum_{k=1}^{15}a_k=5$

$2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$

$10=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$, $\sum_{k=1}^{14}a_k=-32$

따라서 $a_{15}=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{14}a_k=5-(-32)=37$

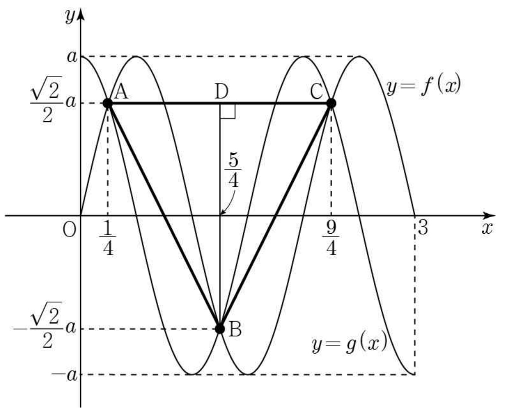
19. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y=a\sin\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$,
최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.
삼각함수 $y=a\cos\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$,
최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.
곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근이므로
$a\sin\pi x=a\cos\pi x$, $\tan\pi x=1$

$\pi x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$ $(0\le\pi x\le3\pi)$

$x=\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$

곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점을 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{9}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\sqrt{2}\,a$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\,a=2$

$a=\sqrt{2}$

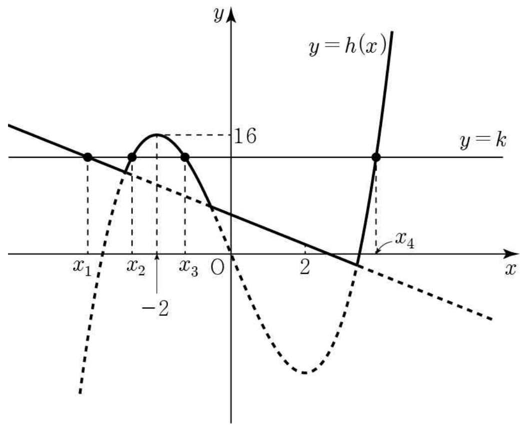
따라서 $a^2=2$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

직선 $y=k$ 가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3 , 1 이므로
함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는
직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 는
서로 다른 세 점에서 만나고
직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 는
한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$ 이므로

직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 x_1 이라 하면 $f(x_1)<g(x_1)$
직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는
서로 다른 세 점의 x 좌표를 작은 수부터
크기순으로 x_2 , x_3 , x_4 라 하면
$f(x_2)>g(x_2)$, $f(x_3)>g(x_3)$, $f(x_4)>g(x_4)$
이를 만족시키는 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=g(x)$ 가 점 $(2,\ 2)$ 를 지나고
$x_1<x_2$, $f(x_1)<g(x_1)=k$ 인 실수 x_1 이 존재하므로 직선 $y=g(x)$ 의 기울기는 음수이다.
$y=g(x)=a(x-2)+2$ 에서 $a<0$ ⋯ ㉠
$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$
함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값을 갖고
$x=-2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 함숫값은 함수 $g(x)$ 의 함숫값보다 크다.
$f(-2)>g(-2)$
$16>-4a+2$

$a>-\frac{7}{2}$ ⋯ ㉡

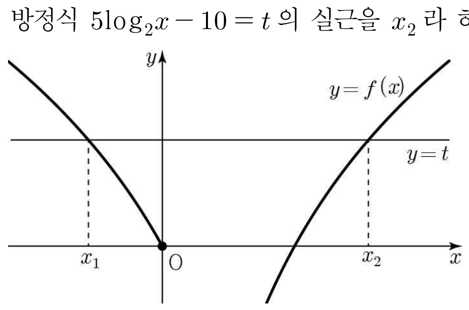
㉠, ㉡에 의하여 $-\frac{7}{2}<a<0$

$m=-\frac{7}{2}$, $M=0$

따라서 $10\times(M-m)=10\times\left\{0-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}=35$

21. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

(i) $m=-10$ 인 경우
$f(0)=|10-10|=0$
$t>0$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)-10=t$ 의 실근을 x_1 ,
방정식 $5\log_2 x-10=t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



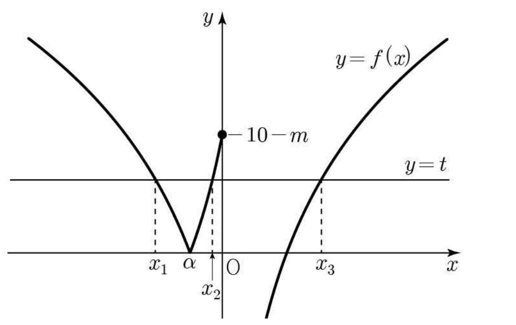
$5\log_2(4-x_1)-10=5\log_2 x_2-10$
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$
$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$
$t>0$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$g(t)=4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m<-10$ 인 경우
$x<0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 α 라 하면

$f(x)=\begin{cases} 5\log_2(4-x)+m & (x\le\alpha) \\ -5\log_2(4-x)-m & (\alpha<x\le0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$

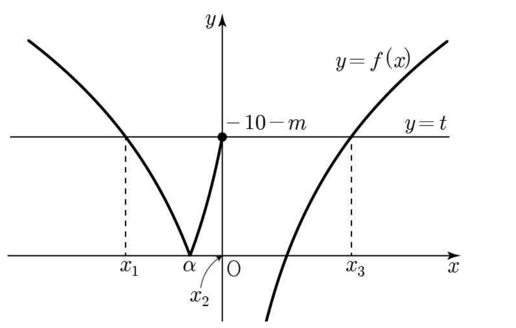
$f(0)=|10+m|=-10-m$

① $0<t<-10-m$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1 ,
방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$ 의 실근을 x_2 ,
방정식 $5\log_2 x+m=t$ 의 실근을 x_3 이라 하자.



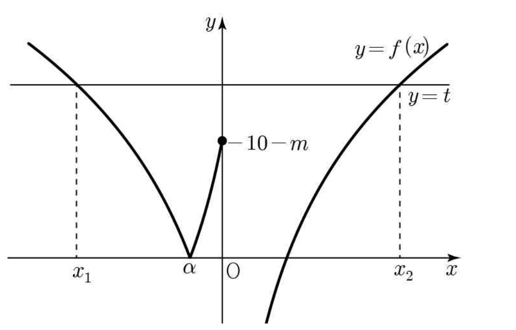
$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$
$4-x_1=x_3$, $x_1+x_3=4$
$g(t)=x_1+x_2+x_3=x_2+4<4$ 이고
$g(t)$ 의 값은 일정하지 않다.

② $t=-10-m$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1 ,
방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$ 의 실근을 x_2 ,
방정식 $5\log_2 x+m=t$ 의 실근을 x_3 이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$, $4-x_1=x_3$
$x_1+x_3=4$, $x_2=0$ 이므로
$g(t)=x_1+x_2+x_3=4$

③ $t>-10-m$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1 ,
방정식 $5\log_2 x+m=t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_2+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$

$g(t)=x_1+x_2=4$

①, ②, ③에 의하여

$t \geq -10-m$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$g(t)=4$

(i), (ii)에 의하여

$t \geq a$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$g(t)=g(a)$ 가 되도록 하는 a 의 최솟값은

$-10-m$ 이다.

$-10-m=2$, $m=-12$

따라서 $f(m)=f(-12)$

$=|5\log_2(4+12)-12|$

$=8$

22. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 함수 추론하기

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 와 $x=b$ 에서만 불연속이고, 함수 $f(x+k)$ 는 $x=a-k$ 와 $x=b-k$ 에서만 불연속이므로

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a$, $x=b$, $x=a-k$, $x=b-k$ 에서 연속이면 함수 $f(x)f(x+k)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$a-k<a$, $b-k<b$ 이므로 두 수 a 와 $b-k$ 에 대하여 다음과 같은 경우가 존재한다.

(i) $a \neq b-k\ (k \neq b-a)$ 인 경우

① $x=a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x \to (a-k)+} f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x \to (a-k)+} f(x) \times \lim_{x \to (a-k)+} f(x+k)$

$=f(a-k)\times(a-10)$

$\lim_{x \to (a-k)-} f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x \to (a-k)-} f(x) \times \lim_{x \to (a-k)-} f(x+k)$

$=f(a-k)\times(a+2)$

$f(a-k)f(a-k+k)=f(a-k)\times(a-10)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a-k$ 에서 연속이므로

$f(a-k)\times(a-10)=f(a-k)\times(a+2)$

$f(a-k)=0$

② $x=a$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x+k)=(a-10)f(a+k)$

$\lim_{x \to a-} f(x)f(x+k)=(a+2)f(a+k)$

$f(a)f(a+k)=(a-10)f(a+k)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$(a-10)f(a+k)=(a+2)f(a+k)$

$f(a+k)=0$

③ $x=b-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x \to (b-k)+} f(x)f(x+k)$

$=f(b-k)\times(-b+8)$

$\lim_{x \to (b-k)-} f(x)f(x+k)=f(b-k)\times(b-10)$

$f(b-k)f(b-k+k)=f(b-k)\times(-b+8)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b-k$ 에서 연속이므로

$f(b-k)\times(-b+8)=f(b-k)\times(b-10)$

$f(b-k)=0$

④ $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x \to b+} f(x)f(x+k)=(-b+8)f(b+k)$

$\lim_{x \to b-} f(x)f(x+k)=(b-10)f(b+k)$

$f(b)f(b+k)=(-b+8)f(b+k)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로

$(-b+8)f(b+k)=(b-10)f(b+k)$

$f(b+k)=0$

①~④에 의하여

$f(a-k)=f(a+k)=f(b-k)=f(b+k)=0$

$a+k=b-k\ (k=\frac{b-a}{2})$ 이면

$a+k=b-k=\frac{a+b}{2}$

$a<\frac{a+b}{2}<b<8$ 이므로

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)-10<0$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a+k)=f(b-k)=0$ 을 만족시키지 않는다.

$a+k \neq b-k$ 이므로 네 수 $a-k$, $a+k$, $b-k$, $b+k$ 는 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 네 실근이다.

방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근은

-4, -2, 8, 10 이므로

$\{a-k,\ a+k,\ b-k,\ b+k\}$

$=\{-4,\ -2,\ 8,\ 10\}$

$0<a+k<b+k$ 이므로

$a+k=8$, $b+k=10$

$a-k<b-k$ 이므로

$a-k=-4$, $b-k=-2$

두 식 $a-k=-4$, $a+k=8$ 을 연립하면

$a=2$, $k=6$

$b+k=b+6=10$, $b=4$

$a<b<k$ 이므로

$f(k)=f(6)=|6-9|-1=2$

$f(k)>0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=b-k\ (k=b-a)$ 인 경우

① $x=a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

(i)의 ①에 의하여 $f(a-k)=0$

$a-k=2a-b$ 이므로 $f(2a-b)=0$

② $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

(i)의 ④에 의하여 $f(b+k)=0$

$b+k=2b-a$ 이므로 $f(2b-a)=0$

③ $x=a(=b-k)$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x \to a+} f(x)f(x+b-a)$

$=(a-10)(-b+8)$

$\lim_{x \to a-} f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x \to a-} f(x)f(x+b-a)$

$=(a+2)(b-10)$

$f(a)f(a+k)=f(a)f(b)=(a-10)(-b+8)$

함수 $f(x)f(x+k)$ 가

$x=a=b-k$ 에서 연속이므로

$(a-10)(-b+8)=(a+2)(b-10)$

$a(b-9)-4b+30=0$

$a=4+\frac{6}{b-9}$

$a<b<8$ 이므로 이를 만족시키는

두 자연수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는

$(1,\ 7)$, $(2,\ 6)$ 이다.

$a=1$, $b=7$ 이면 $f(2a-b)=f(-5)=1$

이므로 $f(2a-b)=0$ 을 만족시키지 않는다.

$a=2$, $b=6$ 이면

$f(2a-b)=f(-2)=0$,

$f(2b-a)=f(10)=0$ 을 만족시킨다.

$k=6-2=4$

$a<k<b$ 이므로

$f(k)=f(4)=4-10=-6$

$f(k)<0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$, $b=6$, $k=4$ 이고

함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

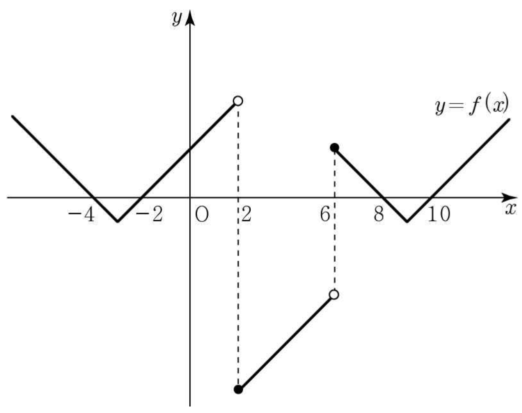
$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<2) \\ x-10 & (2 \leq x<6) \\ |x-9|-1 & (x \geq 6) \end{cases}$$

따라서

$f(a)\times f(b)\times f(k)=f(2)\times f(6)\times f(4)$

$=(-8)\times 2\times(-6)=96$

[참고] 함수 $y=f(x)$ 의 그래프



확률과 통계 정답

23	③	24	④	25	⑤	26	④	27	②
28	②	29	70	30	198				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 이항정리 계산하기

다항식 $(2x+1)^5$ 의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r \times (2x)^{5-r} \times 1^r = {}_5\mathrm{C}_r \times 2^{5-r} \times x^{5-r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

$r=3$ 일 때, ${}_5\mathrm{C}_3 \times 2^{5-3} \times x^{5-3} = 40x^2$

따라서 x^2 의 계수는 40

24. [출제의도] 서로 독립인 두 사건의 성질 이해하기

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B) = \dfrac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A) = k$ 라 하면

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이므로

$\dfrac{1}{2} = k \times \dfrac{3}{4}$, $k = \dfrac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{3}$

[다른 풀이]

두 사건 A , B가 서로 독립이므로

두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C \cap B) &= \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B) \\ &= \{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B) \\ &= \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\ &= \mathrm{P}(B) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$

25. [출제의도] 이산확률변수의 평균 이해하기

이산확률변수의 확률분포의 성질에 의하여

확률의 합이 1 이므로

$\dfrac{1}{3} + a + b = 1$, $a + b = \dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= 0 \times \frac{1}{3} + a \times a + b \times b \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X) = \dfrac{5}{18}$ 에서 $a^2 + b^2 = \dfrac{5}{18}$

따라서 $ab = \dfrac{1}{2}\left\{(a+b)^2 - \left(a^2+b^2\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{5}{18}\right\} = \dfrac{1}{12}$

26. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

시행을 3 번 반복한 후 숫자 7 이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2 이다.

시행을 3 번 반복한 후 숫자 7 이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 0 인 사건을 A 라 하자.

주사위를 3 번 던져 나온 눈의 수가 모두 다를 확률은

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3} = \dfrac{120}{216} = \dfrac{5}{9}$

따라서 여사건의 확률에 의하여

$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$

[다른 풀이]

시행을 3 번 반복한 후 숫자 7 이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2 이다.

시행을 3 번 반복한 후 숫자 7 이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상인 사건을 A 라 하자.

(i) 시행을 3 번 반복한 후 숫자 7 이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 일 확률은 두 개의 눈의 수는 같고 하나는 다른 눈의 수가 나오는 확률과 같으므로

$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times \dfrac{3!}{2!}}{6^3} = \dfrac{5}{12}$

(ii) 시행을 3 번 반복한 후 숫자 7 이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2 일 확률은 주사위를 3 번 던져 나온 눈의 수가 모두 같은 사건의 확률과 같으므로

$\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1}{6^3} = \dfrac{1}{36}$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{4}{9}$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$ 은 $(1,\ 2,\ 5)$ 또는 $(1,\ 3,\ 4)$ 이다.

(i) 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$ 이 $(1,\ 2,\ 5)$ 인 경우

8 개의 문자 P, Q, Q, R, R, R, R, R 을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{2! \times 5!} = 168$

(ii) 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$ 이 $(1,\ 3,\ 4)$ 인 경우

8 개의 문자 P, Q, Q, Q, R, R, R, R 을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{3! \times 4!} = 280$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$168 + 280 = 448$

28. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

$a \times b + c + d$ 가 홀수인 사건을 A ,

두 수 a , b 가 모두 홀수인 사건을 B 라 하자.

$a \times b + c + d$ 가 홀수인 경우는

$a \times b$ 가 홀수이고 $c + d$ 가 짝수인 경우 또는

$a \times b$ 가 짝수이고 $c + d$ 가 홀수인 경우이다.

(i) $a \times b$ 가 홀수이고 $c + d$ 가 짝수인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 는

(홀수, 홀수, 홀수, 홀수) 또는

(홀수, 홀수, 짝수, 짝수)이므로

(홀수, 홀수, 홀수, 홀수)일 확률은

$\dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{126}$

(홀수, 홀수, 짝수, 짝수)일 확률은

$\dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{63}$

$a \times b$ 가 홀수이고 $c + d$ 가 짝수일 확률은

$\dfrac{5}{126} + \dfrac{5}{63} = \dfrac{5}{42}$

(ii) $a \times b$ 가 짝수이고 $c + d$ 가 홀수인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 는

(홀수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는

(홀수, 짝수, 짝수, 홀수) 또는

(짝수, 홀수, 홀수, 짝수) 또는

(짝수, 홀수, 짝수, 홀수) 또는

(짝수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는

(짝수, 짝수, 짝수, 홀수)이므로

(홀수, 짝수, 홀수, 짝수)일 확률은

$\dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{63}$

(홀수, 짝수, 짝수, 홀수)일 확률은

$\dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{63}$

(짝수, 홀수, 홀수, 짝수)일 확률은

$\dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{63}$

(짝수, 홀수, 짝수, 홀수)일 확률은

$\dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{8} \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{63}$

(짝수, 짝수, 홀수, 짝수)일 확률은

$\dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{7} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{126}$

(짝수, 짝수, 짝수, 홀수)일 확률은

$\dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{126}$

$a \times b$ 가 짝수이고 $c + d$ 가 홀수일 확률은

$\dfrac{5}{63} \times 4 + \dfrac{5}{126} \times 2 = \dfrac{20}{63} + \dfrac{5}{63} = \dfrac{25}{63}$

(i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{5}{42} + \dfrac{25}{63} = \dfrac{65}{126}$

$a \times b + c + d$ 가 홀수이고, 두 수 a , b 가 모두 홀수일 확률은 (i)에 의하여

$\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{5}{42}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$= \dfrac{\dfrac{5}{42}}{\dfrac{65}{126}} = \dfrac{3}{13}$

[다른 풀이]

$a \times b + c + d$ 가 홀수인 사건을 A ,

두 수 a , b 가 모두 홀수인 사건을 B 라 하자.

네 수 a , b , c , d 가 모두 짝수이면

조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 네 수 a , b , c , d 중 홀수의 개수는 1 이상이다.

(i) 홀수의 개수가 1 인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 는

(짝수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는
(짝수, 짝수, 짝수, 홀수)이므로
$2\times\dfrac{{}_5\mathrm{P}_1\times{}_4\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{5}{63}$

(ii) 홀수의 개수가 2인 경우
순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는
(홀수, 홀수, 짝수, 짝수) 또는
(홀수, 짝수, 홀수, 짝수) 또는
(홀수, 짝수, 짝수, 홀수) 또는
(짝수, 홀수, 홀수, 짝수) 또는
(짝수, 홀수, 짝수, 홀수)이므로
$5\times\dfrac{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{25}{63}$

(iii) 홀수의 개수가 3인 경우
조건을 만족시키지 않는다.

(iv) 홀수의 개수가 4인 경우
순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는
(홀수, 홀수, 홀수, 홀수)이므로
$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_4}{{}_9\mathrm{P}_4}=\dfrac{5}{126}$

(i)~(iv)에 의하여
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{63}+\dfrac{25}{63}+\dfrac{5}{126}=\dfrac{65}{126}$
$a\times b+c+d$가 홀수이고, 두 수 $a,\ b$가 모두 홀수인 경우는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$가
(홀수, 홀수, 짝수, 짝수) 또는
(홀수, 홀수, 홀수, 홀수)이므로
(ii), (iv)에 의하여
$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{5}{63}+\dfrac{5}{126}=\dfrac{5}{42}$
따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$
$=\dfrac{\frac{5}{42}}{\frac{65}{126}}=\dfrac{3}{13}$

29. [출제의도] 정규분포의 표준화를 활용하여 추론하기

두 확률변수 $X,\ Y$가 정규분포를 따르므로 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$\mathrm{P}(X\le 0)=\mathrm{P}(Z\le -m)$
$\mathrm{P}(Y\le 0)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{-(m^2+2m+16)}{\sigma}\right)$
$\mathrm{P}(X\le 0)=\mathrm{P}(Y\le 0)$에서
$-m=\dfrac{-(m^2+2m+16)}{\sigma}$
$\sigma=\dfrac{m^2+2m+16}{m}=m+2+\dfrac{16}{m}$
$m>0,\ \dfrac{16}{m}>0$이므로
절대부등식의 성질에 의하여
$\sigma\ge 2+2\sqrt{m\times\dfrac{16}{m}}=10$
$m=\dfrac{16}{m}$일 때, σ의 값이 최소이므로
$m_1=4$
$m=4$일 때, 두 확률변수 $X,\ Y$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 1^2)$, $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$을 따르므로
$\mathrm{P}(X\ge 1)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{1-4}{1}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge -3)$
$\mathrm{P}(Y\le k)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-40}{10}\right)$
$\mathrm{P}(X\ge 1)=\mathrm{P}(Y\le k)$에서
$\mathrm{P}(Z\ge -3)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-40}{10}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z\ge -\dfrac{k-40}{10}\right)$
$-3=-\dfrac{k-40}{10}$
따라서 $k=70$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여
$0\le f(2)-f(1)\le f(3)\le f(4)$
조건 (나)에 의하여
$f(1)+f(2)$가 짝수이므로 두 수 $f(1)$과 $f(2)$는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.
$f(2)-f(1)$은 0 또는 2 또는 4

(i) $f(2)-f(1)=0$인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2))$는
$(1,\ 1)$ 또는 $(2,\ 2)$ 또는 $(3,\ 3)$ 또는
$(4,\ 4)$ 또는 $(5,\ 5)$ 또는 $(6,\ 6)$
$0\le f(3)\le f(4)$이므로
순서쌍 $(f(3),\ f(4))$의 개수는
${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$
그러므로 $6\times 21=126$

(ii) $f(2)-f(1)=2$인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2))$는
$(1,\ 3)$ 또는 $(2,\ 4)$ 또는
$(3,\ 5)$ 또는 $(4,\ 6)$
$2\le f(3)\le f(4)$이므로
순서쌍 $(f(3),\ f(4))$의 개수는
${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$
그러므로 $4\times 15=60$

(iii) $f(2)-f(1)=4$인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2))$는
$(1,\ 5)$ 또는 $(2,\ 6)$
$4\le f(3)\le f(4)$이므로
순서쌍 $(f(3),\ f(4))$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
그러므로 $2\times 6=12$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여
$126+60+12=198$

미적분 정답

23	③	24	①	25	②	26	④	27	③
28	②	29	12	30	144				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5^{2x}-1}{2x}\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\frac{2x}{3x}\right)$$
$$=(\ln 5)\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\ln 5$$

24. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$x=3t-\dfrac{1}{t}$, $y=te^{t-1}$

$\dfrac{dx}{dt}=3+\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=e^{t-1}+te^{t-1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{t-1}+te^{t-1}}{3+\frac{1}{t^2}}=\frac{(t^2+t^3)e^{t-1}}{3t^2+1}$$

따라서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n=a_n\times\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$이고

$a_n=\dfrac{b_n}{\sqrt{n^2+4}-n}=\dfrac{b_n}{4}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{2}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)+6n^2}{\frac{nb_n}{4}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)+5}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{2}\times\frac{\sqrt{n^2+4}+n}{n^2}+6}{\frac{b_n}{4}\times\frac{\sqrt{n^2+4}+n}{n}+\frac{5}{n^2}}$$
$$=\frac{\frac{6}{2}\times 0+6}{\frac{6}{4}\times 2+0}=\frac{6}{3}=2$$

26. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\angle\mathrm{EAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{CDB}=\beta$,

$\overline{\mathrm{BE}}=x\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=2x$, $\overline{\mathrm{DB}}=1-2x$

$\tan\alpha=x$, $\tan\beta=\dfrac{1}{1-2x}$

$$\tan(\angle\mathrm{CFE})=\tan(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\times\tan\alpha}$$
$$=\frac{\frac{1}{1-2x}-x}{1+\frac{1}{1-2x}\times x}$$
$$=\frac{1-x(1-2x)}{(1-2x)+x}$$
$$=\frac{2x^2-x+1}{1-x}=\frac{16}{15}$$

$15(2x^2-x+1)=16(1-x)$

$30x^2+x-1=0$

$(5x+1)(6x-1)=0$

$0<x<\dfrac{1}{2}$이므로 $x=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\tan(\angle\mathrm{CDB})=\dfrac{1}{1-2x}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

27. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$\mathrm{Q}(t,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 2\ln(t+1))$이므로

직사각형 OQPR의 넓이는 $f(t)=2t\ln(t+1)$

따라서

$$\int_1^3 f(t)dt$$
$$=\int_1^3\{2t\ln(t+1)\}dt$$
$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\frac{t^2}{t+1}dt$$
$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right]_1^3$$
$$=(9\ln 4-\ln 2)-\left(\frac{9}{2}-3+\ln 4-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right)$$
$$=-2+16\ln 2$$

28. [출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 $h(0)=\dfrac{g(0)-k}{0-k}=1$

$g(0)=0$, $f(0)=0$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$h(k)=\lim\limits_{x\to k}h(x)=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}$

$g(k)=k$, $f(k)=k$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=\dfrac{1}{3}$

$g'(k)=\dfrac{1}{3}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(k)=\dfrac{1}{f'(g(k))}=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{3}$

$f'(k)=3$

$f(0)=0$, $f(k)=k$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)-x=x(x-k)(x-t)$ (t는 상수)

$f(x)=x(x-k)(x-t)+x$

$f(x)=x^3-(k+t)x^2+(tk+1)x$

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1$

$f'(k)=3$이므로 $k^2-tk-2=0$

$t=k-\dfrac{2}{k}$ ⋯ ㉠

역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1\geq 0$

x에 대한 이차방정식

$3x^2-2(k+t)x+tk+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4(k+t)^2-12(tk+1)\leq 0$

㉠을 대입하여 정리하면 $k^2-5+\dfrac{4}{k^2}\leq 0$이고

$k>0$이므로 양변에 k^2을 곱하면

$k^4-5k^2+4\leq 0$

$(k^2-1)(k^2-4)\leq 0$

$(k-1)(k+1)(k-2)(k+2)\leq 0$

$k+1>0$, $k+2>0$이므로

$(k-1)(k-2)\leq 0$

$1\leq k\leq 2$

$f'(0)=tk+1=k^2-1$이므로

$k=2$일 때, $f'(0)$의 값이 최대이다.

그러므로 $\alpha=2$이고 이때 $t=1$이므로

$f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$ ⋯ ㉡

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-2}{x-2} & (x\neq 2)\\[2ex] \dfrac{1}{3} & (x=2)\end{cases}$$

이다.

$h(9)=\dfrac{g(9)-2}{9-2}$ ⋯ ㉢

$g(9)=p$라 할 때, $f(p)=9$이므로

$p^3-3p^2+3p=9$

$p^3-3p^2+3p-9=0$

$(p-3)(p^2+3)=0$

$p=3$이므로 $g(9)=3$

㉢에 대입하여 정리하면 $h(9)=\dfrac{1}{7}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(9)=\dfrac{1}{f'(g(9))}=\dfrac{1}{f'(3)}$

㉡에 의하여 $f'(3)=12$이므로

$g'(9)=\dfrac{1}{12}$

따라서

$\alpha\times h(9)\times g'(9)=2\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{42}$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1=1$이므로 $a_n=r^{n-1}$ (단, n은 자연수)

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)=0$에서

$0<r<1$이면

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)>0$이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $-1<r<0$

$\{a_{2n}\}$은 공비가 r^2인 등비수열이고

$\{\left|a_{3n-1}\right|\}$은 공비가 $-r^3$인 등비수열이다.

$0 < r^2 < 1$, $-1 < -r^3 < 0$ 이므로

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n-1}|$ 은 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)$$

$$=\frac{20r}{1-r^2}+\frac{21|a_2|}{1-(-r^3)}=\frac{20r}{1-r^2}+\frac{21\times(-r)}{1+r^3}=0$$

$$20(1-r+r^2)-21(1-r)=0$$

$$20r^2+r-1=0$$

$$(5r-1)(4r+1)=0$$

$-1 < r < 0$ 이므로 $r=-\frac{1}{4}$

$$a_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$$

등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 s 라 하면

$\frac{b_n}{a_n}=b_1\times(-4s)^{n-1}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}+b_1\times(-4s)^{n-1}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^{n-1}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}\right]$$

(i) $-1 < 4s < 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}(4s)^{n-1}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}=3$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 발산한다.

(ii) $4s < -1$ 또는 $4s > 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}$ 은 발산하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 발산한다.

(iii) $4s=-1$ 인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}+b_1\}$$

$\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}\}$ 은 발산하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 발산한다.

(iv) $4s=1$ 인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(-1)^{n-1}\times(3+b_1)\}$$

$b_1=-3$ 일 때,

모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}=0$

(i)~(iv)에 의하여

$b_1=-3$, $s=\frac{1}{4}$

$$b_n=(-3)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}=-4$$

따라서 $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=12$

30. [출제의도] 치환적분법을 활용하여 문제 해결하기

$$f'(x)=\ln(e^{|x|}-a)$$

조건 (가)에 의하여

$f'\left(\ln\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}-a\right)=0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\ln\left(e^{|x|}-\frac{1}{2}\right)$$

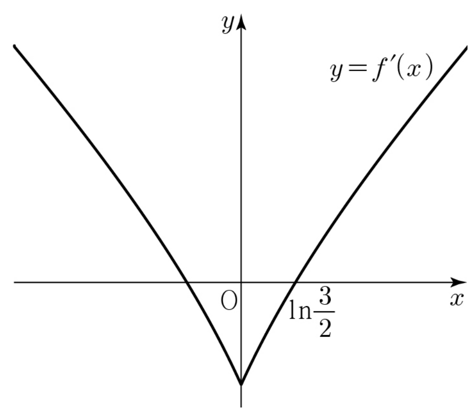
모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$ 이므로

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고,

$$f'(0)=\ln\frac{1}{2}<0$$

$x>0$ 일 때, $f''(x)=\frac{e^x}{e^x-\frac{1}{2}}>0$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$ 이므로

$f(x)=-f(-x)+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$ 이므로 $C=0$

그러므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x)=-f(x)$$

$x\geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\ln\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 의 극솟값을 m $(m<0)$이라 하면,

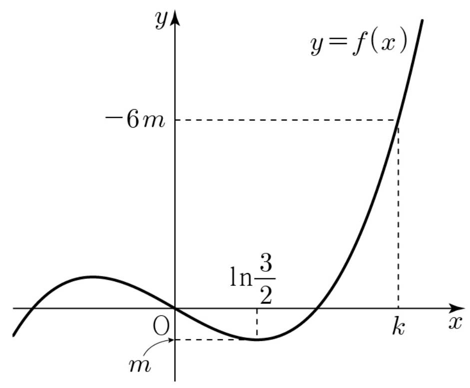
$$f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=m$$

조건 (나)에 의하여

$$f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=-f\left(\ln\frac{3}{2}\right)=-m$$

$$f(k)=-6m\ \left(k>\ln\frac{3}{2}\right)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx$$

$$=\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}dx$$

$$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{-f'(x)}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k\frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$$

$$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{-\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$$

$$+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k\frac{\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$$

$$=-\Big[\ln|f(x)+f(k)|\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}$$

$$+\Big[\ln|f(x)+f(k)|\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$$

$$=-\Big[\ln\{f(x)+f(k)\}\Big]_0^{\ln\frac{3}{2}}$$

$$+\Big[\ln\{f(x)+f(k)\}\Big]_{\ln\frac{3}{2}}^k$$

$$=-\ln(m-6m)+\ln(0-6m)$$

$$+\ln(-6m-6m)-\ln(m-6m)$$

$$=\ln\frac{-6m}{-5m}+\ln\frac{-12m}{-5m}=\ln\frac{6}{5}+\ln\frac{12}{5}=\ln\frac{72}{25}$$

이므로 $p=\ln\frac{72}{25}$

따라서 $100\times a\times e^p=100\times\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=144$

기하 정답

23	③	24	①	25	⑤	26	②	27	④
28	④	29	90	30	111				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합과 크기 계산하기

$\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 0)$

$\vec{a}+\vec{b}=(4-2,\ 1+0)=(2,\ 1)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{8}+\dfrac{ay}{2a^2}=1$

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2a}=1$

$y=-\dfrac{a}{2}x+2a$

접선의 기울기가 -3이므로

$-\dfrac{a}{2}=-3$

따라서 $a=6$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$라 하면

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$(x-4,\ y-2)\cdot(4,\ 2)=0$

$4x+2y-20=0$

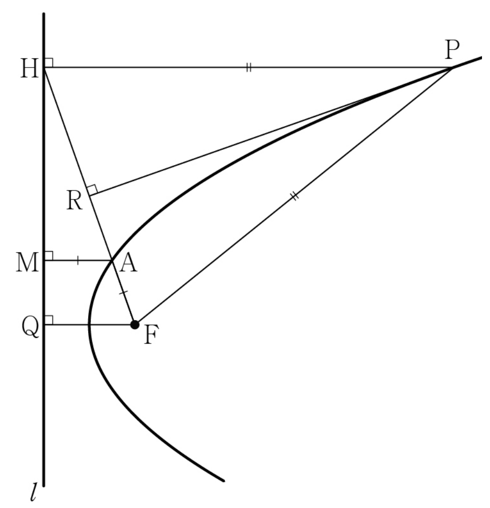
$y=-2x+10$

$\mathrm{B}(5,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 10)$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$

26. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



두 점 F, A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, M이라 하자.

$\overline{\mathrm{HA}}:\overline{\mathrm{AF}}=3:1$

$\overline{\mathrm{AF}}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{HA}}=3k$, $\overline{\mathrm{HF}}=4k$, $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{AF}}=k$

두 삼각형 HMA, HQF가 서로 닮음이고

닮음비가 $3:4$이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{3}k$

$\overline{\mathrm{FQ}}=4$, $k=3$

$\overline{\mathrm{HF}}=4k=12$

점 P에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 R이라 하자.

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로 $\overline{\mathrm{HR}}=\overline{\mathrm{RF}}=2k=6$

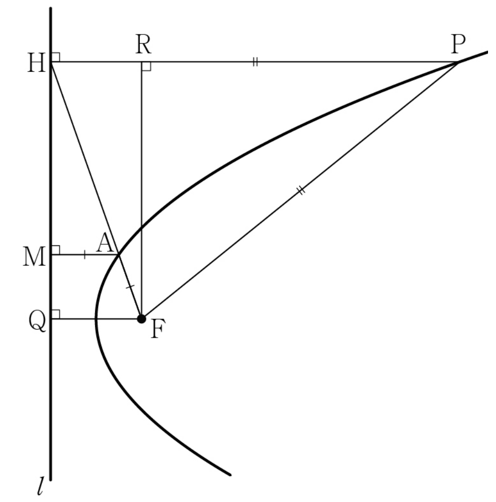
$\angle\mathrm{FHQ}=\angle\mathrm{HPR}$, $\angle\mathrm{FQH}=\angle\mathrm{HRP}=\dfrac{\pi}{2}$

두 삼각형 HQF, PRH는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{FQ}}:\overline{\mathrm{HR}}=2:3$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{3}{2}\overline{\mathrm{HF}}=\dfrac{3}{2}\times12=18$

[다른 풀이]



두 점 F, A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, M이라 하자.

$\overline{\mathrm{HA}}:\overline{\mathrm{AF}}=3:1$

$\overline{\mathrm{AF}}=k\ (k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{HA}}=3k$, $\overline{\mathrm{HF}}=4k$, $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{AF}}=k$

두 삼각형 HMA, HQF가 서로 닮음이고

닮음비가 $3:4$이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{3}k$

$\overline{\mathrm{FQ}}=4$, $k=3$

$\overline{\mathrm{HF}}=4k=12$

점 F에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 R이라 하자.

삼각형 HQF에서

$\overline{\mathrm{HQ}}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{RF}}=8\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PH}}-\overline{\mathrm{RH}}=x-4$

직각삼각형 PRF에서

$(x-4)^2+(8\sqrt{2})^2=x^2$

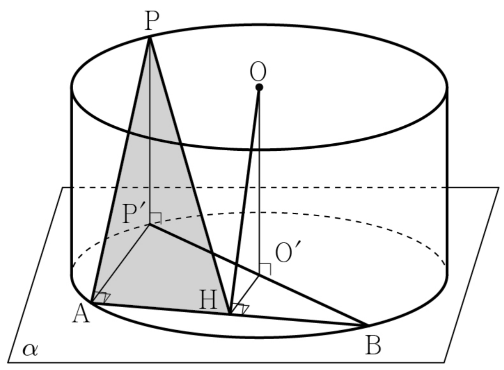
$x=18$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=18$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

$\overline{\mathrm{BP'}}=6$이므로 선분 BP′은 점 P′을 포함하는 밑면의 지름이다.

선분 BP′의 중점을 O′, 직선 OO′에 수직이고 점 O′을 포함하는 평면을 α라 하면,



$\overline{\mathrm{OO'}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{O'H}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{O'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2-\overline{\mathrm{OO'}}^2}=\sqrt{13-9}=2$

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BO'}}^2-\overline{\mathrm{O'H}}^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

점 A가 선분 BP′을 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{P'A}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

두 삼각형 BHO′, BAP′은 서로 닮음이고

닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{\mathrm{P'A}}=2\overline{\mathrm{O'H}}=4$

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{P'A}}^2+\overline{\mathrm{PP'}}^2}=\sqrt{16+9}=5$

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{5}$

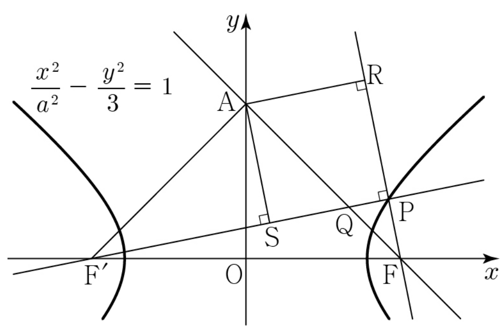
$\overline{\mathrm{PP'}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{P'A}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

따라서 삼각형 PAH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times5\times\sqrt{5}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

28. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{\mathrm{PF}}=t$라 하자.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

$\overline{\mathrm{PF'}}=t+2a$

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}$, $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AS}}$,

$\angle\mathrm{ARF}=\angle\mathrm{ASF'}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

두 삼각형 ARF, ASF′은 서로 합동이고

$\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{SF'}}$

$\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{AS}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{RF}}=t+k$, $\overline{\mathrm{SF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PS}}=t+2a-k$

$t+k=t+2a-k$

$k=a$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{a}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{QS}}=\dfrac{2a}{3}$

두 삼각형 QSA, QPF는 서로 닮음이고

닮음비가 $2:1$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AS}}=\dfrac{a}{2}$

$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2a = \frac{5}{2}a$

$\angle F'PF = \frac{\pi}{2}$, $\overline{PF} = \frac{a}{2}$, $\overline{PF'} = \frac{5}{2}a$ 이므로

$\overline{FF'} = \frac{\sqrt{26}}{2}a$ ⋯ ㉠

두 점 F, F′은

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 두 초점이므로

$\overline{FF'} = 2\sqrt{a^2+3}$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡에 의하여 $26a^2 = 16a^2 + 48$

따라서 $a^2 = \frac{24}{5}$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 이므로
점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있고
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$ 이므로 점 P의 y좌표는
0 이상이다. 그러므로 점 P는 곡선
$(x-4)^2 + y^2 = 4\ (y \geq 0)$ 위에 있다.
조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{QP}$ 이므로
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{QP}$는 방향이 서로 같고
$|\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}| = 1$ 이므로 점 Q는 점 P를
x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점과
일치한다.
그러므로 점 Q는 곡선
$(x-3)^2 + y^2 = 4\ (y \geq 0)$ ⋯ ㉠
위에 있다.
$|\overrightarrow{QA}| = 2$ 이므로 점 Q는 중심이 A이고
반지름의 길이가 2인 원
$(x-2)^2 + y^2 = 4$ ⋯ ㉡
위에 있다.
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

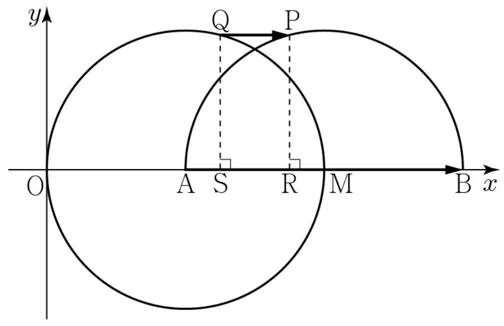
$\mathrm{Q}\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{15}{4} = \frac{9}{2}$$

따라서 $20 \times k = 90$

[다른 풀이]
조건 (가)에 의하여 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 중 y좌표가 0 이상인 점이다.
조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{QP}$ 이므로
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{QP}$는 방향이 서로 같고
$|\overrightarrow{QP}| = 1$ 이므로 점 Q는 점 P를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점과 일치한다.
$|\overrightarrow{QA}| = 2$를 만족시키는 점 Q는 중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로 조건을 만족시키는 두 점 P, Q의 위치는 다음 그림과 같다.



선분 AB의 중점을 M이라 하고 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면 $\overline{AS} = \overline{RM} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}) \cdot \overrightarrow{AQ} \\ &= |\overrightarrow{AQ}|^2 + \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{AQ} \\ &= 4 + \overrightarrow{SR} \cdot \overrightarrow{AQ} \\ &= 4 + 2\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AQ} \\ &= 4 + 2|\overrightarrow{AS}|^2 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 $20 \times k = 90$

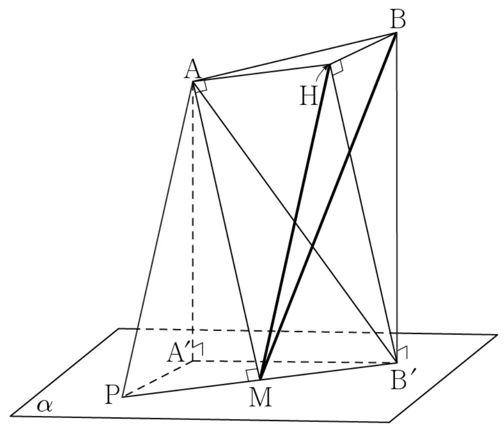
30. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기

삼각형 A′PB′은 이등변삼각형이므로
$\overline{A'M} = \sqrt{\overline{A'P}^2 - \overline{PM}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$
$\overline{AA'} \perp \alpha$, 선분 A′M은 평면 α에 포함되므로
$\overline{AA'} \perp \overline{A'M}$

$\angle AA'M = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 AA′M에서

$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AA'}^2 + \overline{A'M}^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$

$\overline{AA'} \perp \alpha$, $\overline{A'M} \perp \overline{PB'}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AM} \perp \overline{PB'}$ ⋯ ㉠



점 B의 평면 APB′ 위로의 정사영을 점 H라 하면, 선분 BM의 평면 APB′ 위로의 정사영은 $\overline{HM}$이다.
직각삼각형 MAB에서 $\overline{AM} \perp \overline{AB}$
$\overline{BH} \perp$ (평면 APB′)이므로
삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AM} \perp \overline{AH}$ ⋯ ㉡
$\overline{BH} \perp$ (평면 APB′), $\overline{PB'} \perp \overline{BB'}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PB'} \perp \overline{HB'}$ ⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의하여
사각형 AMB′H가 직사각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{HM} &= \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MB'}^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{10})^2 + 4^2} = \sqrt{106}\end{aligned}$$

두 직선 AM, HB′은 서로 평행하고
두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하므로
$\angle MAA' = \angle BB'H$ 이고

$\tan(\angle MAA') = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \tan(\angle BB'H)$

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \overline{HB'} \times \tan(\angle BB'H) \\ &= 3\sqrt{10} \times \frac{1}{3} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BM} &= \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{HM}^2} \\ &= \sqrt{10 + 106} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}\end{aligned}$$

직선 BM과 평면 APB′이 이루는 예각의 크기는 $\angle BMH$와 같으므로 $\theta = \angle BMH$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{\overline{HM}}{\overline{BM}}\right)^2 = \frac{\overline{HM}^2}{\overline{BM}^2} = \frac{106}{116} = \frac{53}{58}$$

$p = 58$, $q = 53$
따라서 $p + q = 111$