• 2교시 수학 영역 •

1	①	**2**	①	**3**	④	**4**	⑤	**5**	①
6	④	**7**	②	**8**	②	**9**	②	**10**	①
11	③	**12**	③	**13**	⑤	**14**	⑤	**15**	⑤
16	③	**17**	②	**18**	⑤	**19**	④	**20**	④
21	⑤	**22**	3	**23**	15	**24**	11	**25**	8
26	5	**27**	27	**28**	25	**29**	154	**30**	36

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(2x^2+x+3)-(x^2+x+2)=x^2+1$

2. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 $(1,3)$, $(2,5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

3. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A^C=\{2,4\}$이므로 집합 A^C의 모든 원소의 곱은

$2\times4=8$

4. [출제의도] 평행이동 이해하기

직선 $y=2x+4$를 x축의 방향으로 1만큼,

y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3=2(x-1)+4$

$y=2x+5$

따라서 구하는 직선의 y절편은 5

5. [출제의도] 항등식 이해하기

주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$x^3+8=x^3+(a-3)x+4b$

항등식의 성질을 이용하여 양변에서 동류항의

계수를 비교하면

$a-3=0$, $4b=8$이므로 $a=3$, $b=2$

따라서 $a\times b=6$

6. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2+8x+y^2=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=x-2$

㉡에 $y=x-2$를 대입하면

$x^2+8x+(x-2)^2=2$

$2x^2+4x+2=2(x+1)^2=0$

에서 $x=-1$, $y=-3$

따라서 $\alpha+\beta=-1+(-3)=-4$

7. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 $P(x)$를 x^2-2x-8로 나누었을 때의

몫을 $Q(x)$라 하고 나머지 $R(x)$를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned} P(x)&=(x^2-2x-8)Q(x)+ax+b \\ &=(x+2)(x-4)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

나머지정리에 의하여 $P(-2)=0$, $P(4)=12$이므로

$P(-2)=-2a+b=0$, $P(4)=4a+b=12$

두 식을 연립하여 계산하면 $a=2$, $b=4$

따라서 $R(x)=2x+4$이므로 $R(1)=6$

8. [출제의도] 복소수의 뜻과 연산 이해하기

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

z는 실수가 아니므로 $b\neq0$

$z-3\bar{z}=z^2$에서

$(a+bi)-3(a-bi)=(a+bi)^2$

$-2a+4bi=(a^2-b^2)+2abi$

이므로 $-2a=a^2-b^2$, $4b=2ab$

$b\neq0$에서 $a=2$이고 $b^2=8$

따라서 $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=2^2+8=12$

9. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기

선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\dfrac{2\times0-3\times3}{2-3}=9$, $\dfrac{2\times a-3\times0}{2-3}=-2a$

에서 $(9,\ -2a)$

이 점이 원 $(x-3)^2+(y+8)^2=36$ 위에 있으므로

$(9-3)^2+(-2a+8)^2=36$

$(-2a+8)^2=0$

따라서 $a=4$

10. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

중심이 원점이고 직선 $y=-2x+k$와 만나는 원의

넓이가 최소가 되려면 원점과 직선 $2x+y-k=0$

사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 한다.

원점과 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2\times0+1\times0-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|-k|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}k$

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하자.

원 C의 넓이가 45π이므로

$r^2\pi=45\pi$에서 $r=3\sqrt{5}$

따라서 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}k=3\sqrt{5}$이므로 $k=15$

11. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기

점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(p,q)$라 하자.

선분 AB의 중점의 좌표가 $(6,7)$이므로

$\dfrac{1+p}{2}=6$, $\dfrac{2+q}{2}=7$에서 $p=11$, $q=12$

그러므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(11,12)$

선분 AC의 중점을 M이라 하자.

삼각형 ABC의 무게중심은 선분 BM을 $2:1$로

내분하는 점이므로

$\dfrac{2\times a+1\times11}{2+1}=5$, $\dfrac{2\times6+1\times12}{2+1}=b$

에서 $a=2$, $b=8$

따라서 $a+b=10$

12. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 추론하기

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

이므로 조건 (가)에서 $n(A\cap B)=0$, $A\cap B=\varnothing$

그러므로

$$\begin{aligned} (A\cup C)\cap(B\cup C)&=(A\cap B)\cup C \\ &=\varnothing\cup C=C \end{aligned}$$

조건 (나)에 의하여

$n(C)=2\times n(B-C)=2\times\{n(B\cup C)-n(C)\}$

$n(C)=\dfrac{2}{3}\times n(B\cup C)$

따라서 $n(B\cup C)=12$에서 $n(C)=8$

13. [출제의도] 집합의 포함 관계를 이용하여 추론하기

$n(A\cap B)=p$라 하면

$(A\cap B)\subset X\subset A$를 만족시키는 집합 X의 개수는

2^{3-p}이므로 $2^{3-p}=2$에서 $p=2$

$n(A\cap B)=2$이므로 집합 A의 세 원소 1, 3, 4 중

2개는 집합 B의 원소이고 나머지 1개는 집합 B의

원소가 아니다.

$B=\left\{\dfrac{k+1}{2},\ \dfrac{k+3}{2},\ \dfrac{k+4}{2}\right\}$에서

집합 B의 두 원소의 차의 최댓값은 $\dfrac{3}{2}$이므로

$n(A\cap B)=2$이려면 $1\notin B$, $3\in B$, $4\in B$이어야

한다. 집합 B의 원소 중 차가 1인 두 원소는

$\dfrac{k+1}{2}$, $\dfrac{k+3}{2}$이므로 $\dfrac{k+1}{2}=3$, $\dfrac{k+3}{2}=4$

따라서 $k=5$

14. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

$$\begin{cases} (x+9)(x-a^2+6a)\le0 & \cdots ㉠ \\ (x-2a)(x-2a+16)\le0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

$(a^2-6a)-(-9)=(a-3)^2$이므로

$a=3$이면 $a^2-6a=-9$이고,

$a\neq3$이면 $a^2-6a>-9$이다.

(i) $a=3$일 때

㉠에서 $(x+9)^2\le0$이므로 $x=-9$,

㉡에서 $(x-6)(x+10)\le0$이므로 $-10\le x\le6$

그러므로 연립부등식을 만족시키는 실수 x의

값은 -9뿐이다.

(ii) $a\neq3$일 때

㉠에서 $-9\le x\le a^2-6a$,

㉡에서 $2a-16\le x\le2a$

이므로 연립부등식을 만족시키는 실수 x가

오직 하나 존재하려면 $2a=-9$이거나

$a^2-6a=2a-16$이어야 한다.

$2a=-9$이면 $a=-\dfrac{9}{2}$,

$a^2-8a+16=(a-4)^2=0$이면 $a=4$

이므로 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직

하나 존재하도록 하는 실수 a의 값은 $-\dfrac{9}{2}$, 4

따라서 (i), (ii)에 의하여 연립부등식을

만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하도록 하는

모든 실수 a의 값의 합은 $3+\left(-\dfrac{9}{2}\right)+4=\dfrac{5}{2}$

15. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기

두 점 $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(b,a)$는 직선 $y=x$에 대하여

대칭이고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$를 만족시키는

두 점 P, Q는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이다.

이때, 선분 AB의 수직이등분선은 직선 $y=x$이므로

두 점 P, Q는 원 C와 직선 $y=x$가 만나는 점이다.

선분 PQ는 원 C의 지름이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$

선분 AB와 직선 $y=x$가 만나는 점을 H라 하자.

사각형 APBQ는 넓이가 $2\sqrt{2}$이고

사각형 APBQ의 넓이는 두 삼각형 APQ, BQP의

넓이의 합과 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{AH}}+\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{BH}}&=2(\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}}) \\ &=2\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2} \end{aligned}$$

에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$

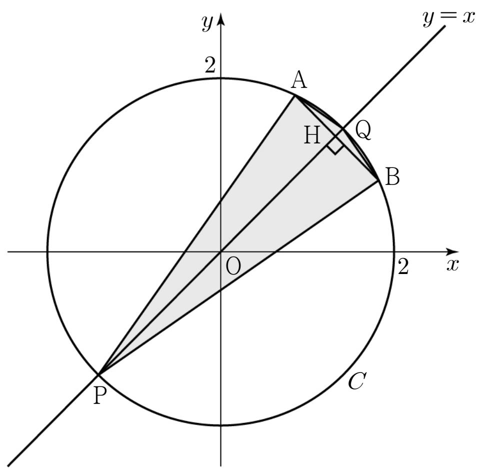
또한 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2(a-b)^2}$

이므로 $\sqrt{2(a-b)^2}=\sqrt{2}$에서 $|a-b|=1$

양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2=1$

점 $\mathrm{A}(a,b)$가 원 C 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$

따라서 두 식을 연립하여 계산하면 $a\times b=\dfrac{3}{2}$



16. [출제의도] 명제와 조건을 활용하여 문제해결하기

$P \neq \varnothing$이려면 $x^2-4x+a+2 \le 0$을 만족시키는 실수 x가 존재해야 한다.

이차방정식 $x^2-4x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-4)^2-4(a+2)$이고

$D \ge 0$이어야 하므로

$(-4)^2-4(a+2) \ge 0$에서 $a \le 2$

$P \neq \varnothing$가 되도록 하는 자연수 a의 값은 1, 2

또한 $0<|x-b| \le 4$에서

$Q=\{x \mid b-4 \le x < b$ 또는 $b < x \le b+4\}$

(i) $a=1$일 때

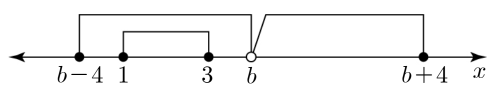
$x^2-4x+3=(x-1)(x-3) \le 0$에서

$P=\{x \mid 1 \le x \le 3\}$이므로 $P \subset Q$이려면

$P \subset \{x \mid b-4 \le x < b\}$이거나

$P \subset \{x \mid b < x \le b+4\}$이어야 한다.

(a) $P \subset \{x \mid b-4 \le x < b\}$일 때



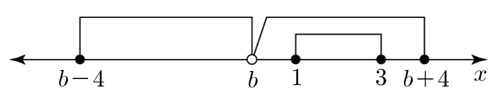
$b-4 \le 1,\ 3 < b$에서 $3 < b \le 5$이므로

$P \subset Q$가 되도록 하는 자연수 b의 값은 4, 5

그러므로 $P \neq \varnothing$, $P \subset Q$가 되도록 하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(1, 5)$

(b) $P \subset \{x \mid b < x \le b+4\}$일 때



$b<1,\ 3 \le b+4$에서 $-1 \le b < 1$이므로

$P \subset Q$가 되도록 하는 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$일 때

$x^2-4x+4=(x-2)^2 \le 0$에서 $P=\{2\}$이므로

$P \subset Q$이려면

$b-4 \le 2 < b$ 또는 $b < 2 \le b+4$

이어야 하므로

$2 < b \le 6$ 또는 $-2 \le b < 2$

$P \subset Q$가 되도록 하는 자연수 b의 값은

1, 3, 4, 5, 6

그러므로 $P \neq \varnothing$, $P \subset Q$가 되도록 하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$

따라서 (i), (ii)에 의하여

구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 7

17. [출제의도] 이차함수의 최대와 최소를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $f(p)=f(q)$(p, q는 서로 다른 정수)이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

직선 $x=\dfrac{p+q}{2}$에 대하여 대칭이다.

$n+3 \le \dfrac{p+q}{2}$이거나 $\dfrac{p+q}{2} \le n$이면

$n \le x \le n+3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱이 $f(n) \times f(n+3)$의 값과 같아지므로

$n \le x \le n+3$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱이 $f(n) \times f(n+3)$의 값과 같지 않으려면

$n < \dfrac{p+q}{2} < n+3$이어야 한다.

조건 (나)에 의하여 이 부등식이 성립하도록 하는 모든 자연수 n의 값은 4, 5, 6이므로

$6 < \dfrac{p+q}{2} < 7$

$12 < p+q < 14$에서 $p+q=13$이므로 이차함수

$y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\dfrac{13}{2}$이다.

또한 이차함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$f(x)=\left(x-\dfrac{13}{2}\right)^2+1$

따라서 $f(8)=\left(8-\dfrac{13}{2}\right)^2+1=\dfrac{13}{4}$

18. [출제의도] 이차부등식을 활용하여 문제해결하기

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(a,\ a^2-3a+3)$, $\mathrm{Q}(a,\ 2a^2-4a)$, $\mathrm{R}(a,\ 0)$

이므로 $\overline{\mathrm{PR}}=|a^2-3a+3|$, $\overline{\mathrm{QR}}=|2a^2-4a|$이다.

이차방정식 $x^2-3x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3x+3>0$

그러므로

$\overline{\mathrm{PR}}=|a^2-3a+3|=a^2-3a+3$

$2a^2-4a=2a(a-2)$에서

$0<a<2$이면 $2a^2-4a<0$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=-2a^2+4a$,

$a>2$이면 $2a^2-4a>0$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=2a^2-4a$이다.

(i) $0<a<2$일 때

$\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{QR}}=(a^2-3a+3)+(-2a^2+4a) \le 3$

에서 $a(a-1) \ge 0$이므로 $a \le 0$ 또는 $a \ge 1$

그러므로 $1 \le a < 2$

(ii) $a>2$일 때

$\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{QR}}=(a^2-3a+3)+(2a^2-4a) \le 3$

에서 $3a\left(a-\dfrac{7}{3}\right) \le 0$이므로 $0 \le a \le \dfrac{7}{3}$

그러므로 $2 < a \le \dfrac{7}{3}$

(i), (ii)에 의하여 $1 \le a < 2$ 또는 $2 < a \le \dfrac{7}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$\dfrac{7}{3}+1=\dfrac{10}{3}$

19. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제해결하기

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하자.

원 C의 넓이가 8π이므로 $r^2\pi=8\pi$에서

$r=2\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$

점 A를 지나고 원 C에 접하는 직선과 직선 AB는 서로 수직이므로 직선 AB의 기울기는 -1

직선 AB의 y절편을 k라 하면

직선 AB의 방정식은 $y=-x+k$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하자.

곡선 $y=-x^2+6x$와 직선 $y=-x+k$가

두 점 A, B에서 만나므로 α, β는 이차방정식

$x^2-7x+k=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

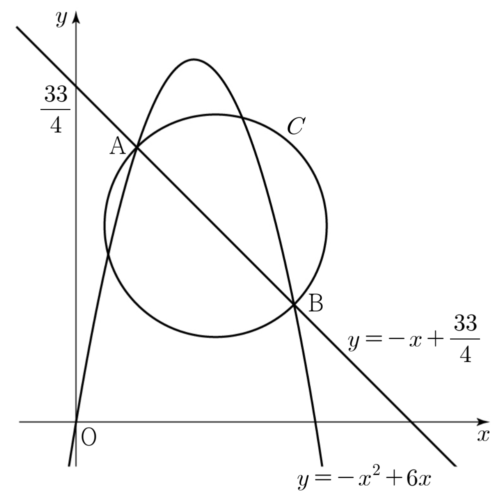
$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=k$

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$이고 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$(\beta-\alpha)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$에서 $\beta-\alpha=4$

두 식을 연립하여 계산하면 $\alpha=\dfrac{3}{2}$, $\beta=\dfrac{11}{2}$

따라서 직선 AB의 y절편은 $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{11}{2}=\dfrac{33}{4}$



20. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여 문제해결하기

점 P는 선분 AB를 $1:a$로 내분하는 점이고

점 Q는 선분 DC를 $1:a$로 내분하는 점이므로

두 선분 AP, DQ의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{DQ}}=(3a^2+10a+7)\times\dfrac{1}{1+a}=3a+7$

점 P에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 P′,

점 Q에서 선분 HG에 내린 수선의 발을 Q′이라 하자. 삼각기둥 PFB−QGC의 부피는

삼각기둥 PP′F−QQ′G의 부피와 같으므로

$V_1-V_2=V_1-$(삼각기둥 PP′F−QQ′G의 부피)

$=$(직육면체 APQD−EP′Q′H의 부피)

$=(3a+7)\times a\times a=3a^3+7a^2$

$V_1-V_2=4$에서

$3a^3+7a^2-4=0$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	3	7	0	-4
		-3	-4	4
	3	4	-4	0

$3a^3+7a^2-4=(a+1)(3a^2+4a-4)$

$=(a+1)(a+2)(3a-2)=0$

$a>0$에서 $a=\dfrac{2}{3}$

따라서 선분 AP의 길이는 $3\times\dfrac{2}{3}+7=9$

21. [출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하면 두 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$의 좌표는 각각 $\mathrm{O_1}(2, 6)$, $\mathrm{O_2}(6, 4)$이고

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 각각 1, 3이다.

두 원 C_1, C_2를 y축에 대하여 대칭이동한 원을 각각 C_1', C_2'이라 하고

네 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, P, Q를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 $\mathrm{O_1}'$, $\mathrm{O_2}'$, P′, Q′이라 하고

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하자.

ㄱ. 두 점 $\mathrm{A}(4, 2)$, $\mathrm{A}'(4, -2)$는 x축에 대하여 대칭이므로 두 선분 AR, A′R′은 x축에 대하여 대칭이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{A'R'}}$ (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{A'R'}}$

두 선분 PR′, P′R′은 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{PR'}}=\overline{\mathrm{P'R'}}$

$\overline{\mathrm{AR}}+\overline{\mathrm{PR'}}=\overline{\mathrm{A'R'}}+\overline{\mathrm{P'R'}}$

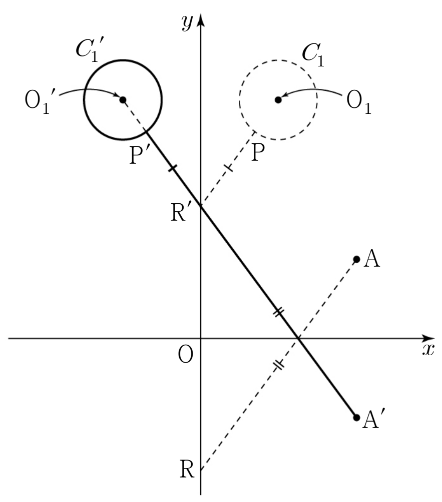
$\qquad=\left(\overline{\mathrm{A'R'}}+\overline{\mathrm{R'P'}}+\overline{\mathrm{P'O_1{}'}}\right)-1$

$\overline{\mathrm{A'R'}}+\overline{\mathrm{R'P'}}+\overline{\mathrm{P'O_1{}'}}$의 값은 두 점 R′, P′이 선분 $\mathrm{A'O_1{}'}$ 위에 있을 때 최소이고 그 값은 $\overline{\mathrm{A'O_1{}'}}$이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AR}}+\overline{\mathrm{PR'}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'O_1{}'}}-1=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{(-2)-6\}^2}-1$

$\qquad=9$ (참)



ㄷ. ㄴ과 같은 방법으로

($\overline{\mathrm{BR}}+\overline{\mathrm{PR'}}$의 최솟값)$=\overline{\mathrm{B'O_1{}'}}-1$

($\overline{\mathrm{BS}}+\overline{\mathrm{QS'}}$의 최솟값)$=\overline{\mathrm{B'O_2{}'}}-3$

이므로

($\overline{\mathrm{BR}}+\overline{\mathrm{PR'}}$의 최솟값)=($\overline{\mathrm{BS}}+\overline{\mathrm{QS'}}$의 최솟값)+2

에서

$\overline{\mathrm{B'O_1{}'}}-1=\left(\overline{\mathrm{B'O_2{}'}}-3\right)+2$

$\overline{\mathrm{B'O_1{}'}}=\overline{\mathrm{B'O_2{}'}}$

점 B′에서 두 점 $\mathrm{O_1{}'}$, $\mathrm{O_2{}'}$까지의 거리가 같으므로 점 B′은 선분 $\mathrm{O_1{}'O_2{}'}$의 수직이등분선 위에 있다.

두 점 $\mathrm{O_1{}'}$, $\mathrm{O_2{}'}$의 좌표는 각각

$\mathrm{O_1{}'}(-2, 6)$, $\mathrm{O_2{}'}(-6, 4)$이므로

선분 $\mathrm{O_1{}'O_2{}'}$의 중점의 좌표는 $(-4, 5)$

또한 직선 $\mathrm{O_1{}'O_2{}'}$의 기울기는 $\dfrac{4-6}{-6-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

이므로 선분 $\mathrm{O_1{}'O_2{}'}$의 수직이등분선은

점 $(-4, 5)$를 지나고 기울기가 -2인 직선이다.

그러므로 선분 $\mathrm{O_1{}'O_2{}'}$의 수직이등분선의 방정식은

$y-5=-2\{x-(-4)\}$

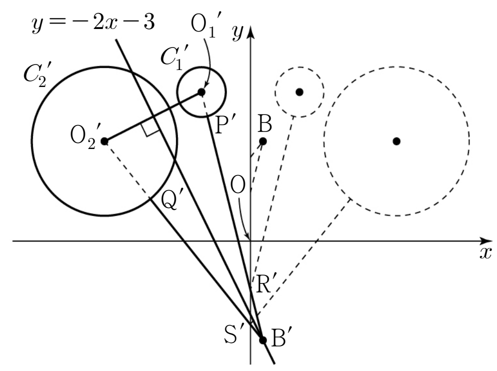
$y=-2x-3$

점 $\mathrm{B'}(a, -6a-1)$이 이 직선 위의 점이므로

$-6a-1=-2a-3$에서 $a=\dfrac{1}{2}$

점 B의 좌표가 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+4^2}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 두 직선의 위치 관계 이해하기

두 점 $(0, a)$, $(2, 2a+1)$을 지나는 직선의 기울기가 2이므로

$\dfrac{(2a+1)-a}{2-0}=\dfrac{a+1}{2}=2$

따라서 $a=3$

23. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

삼차방정식 $x^3+3x^2+(16-a)x+a-20=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	3	$16-a$	$a-20$
		1	4	$20-a$
	1	4	$20-a$	0

$x^3+3x^2+(16-a)x+a-20$

$=(x-1)(x^2+4x+20-a)=0$

이므로 방정식 $x^3+3x^2+(16-a)x+a-20=0$이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+4x+20-a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+4x+20-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D=4^2-4(20-a)<0$에서 $a<16$

따라서 구하는 자연수 a의 개수는 15

24. [출제의도] 필요조건 이해하기

$x+5\le k$에서 $x\le k-5$이고

$x^2-8x+12=(x-2)(x-6)=0$

에서 $x=2$ 또는 $x=6$

그러므로 실수 x에 대한 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x\le k-5\}$, $Q=\{2, 6\}$

p가 q이기 위한 필요조건이 되려면

$Q\subset P$이어야 하므로

$2\le k-5$, $6\le k-5$에서 $k\ge 11$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 11

25. [출제의도] 인수분해 이해하기

$x^2+2x=X$라 하면

$(x^2+2x)(2x^2+4x+5)+3$

$=X(2X+5)+3=2X^2+5X+3$

$=(X+1)(2X+3)$

$=(x^2+2x+1)(2x^2+4x+3)$

$=(x+1)^2(2x^2+4x+3)$

따라서 $a+b+c=1+4+3=8$

26. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$, 반지름의 길이를 r이라 하자.

점 C와 직선 $2x-y+6=0$ 사이의 거리는 r이고

점 C와 직선 $2x+y-6=0$ 사이의 거리도 r이므로

$r=\dfrac{|2a-b+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2a+b-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ … ㉠

에서 $|2a-b+6|=|2a+b-6|$이고,

$2a-b+6=2a+b-6$이면 $b=6$,

$2a-b+6=-(2a+b-6)$이면 $a=0$이다.

중심이 $\mathrm{C}(a, 6)$이고 두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 원은 $(2, 0)$을 지날 수 없으므로 $b\ne 6$

그러므로 $a=0$이고, 원의 중심 C의 좌표는 $\mathrm{C}(0, b)$

점 $\mathrm{C}(0, b)$에서 점 $(2, 0)$까지의 거리가 r이므로

㉠에 의하여

$\sqrt{(2-0)^2+(0-b)^2}=\dfrac{|b-6|}{\sqrt{5}}$

$b^2+4=\dfrac{(b-6)^2}{5}$

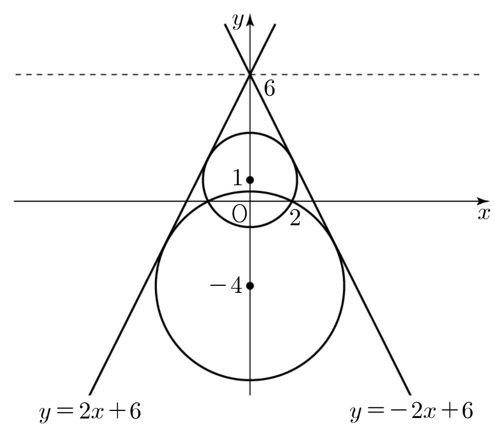
$4b^2+12b-16=4(b+4)(b-1)=0$

에서 $b=-4$ 또는 $b=1$

그러므로 두 직선 $y=2x+6$, $y=-2x+6$에 모두 접하는 두 원의 중심 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$의 좌표는

$(0, -4)$, $(0, 1)$

따라서 선분 $\mathrm{O_1O_2}$의 길이는 5



27. [출제의도] 집합의 포함 관계를 이용하여 추론하기

$A\cap B\subset A$이므로 조건 (가)에서 $\{3, 6\}\subset A$

3, 6이 모두 a의 배수이므로 $a=1$ 또는 $a=3$

$a=1$이면 $A=U$가 되어 $B-A=\varnothing$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $a=3$이고, $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

또한 $A\cap B\subset B$이므로 조건 (가)에서 $\{3, 6\}\subset B$

3, 6이 모두 b의 약수이므로

$b=6$ 또는 $b=12$ 또는 $b=18$

(ⅰ) $b=6$일 때

$B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $B-A=\{1, 2\}$가 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

$A-B=\{9, 12, 15, 18\}$이므로

집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$9+12+15+18=54$

(ⅱ) $b=12$일 때

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$B-A=\{1, 2, 4\}$가 되어

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $b=18$일 때

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

$B-A=\{1, 2\}$가 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

$A-B=\{12, 15\}$이므로

집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 $12+15=27$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

집합 $A-B$의 모든 원소의 합의 최솟값은 27

28. [출제의도] 인수정리를 활용하여 문제해결하기

$P(x)$, $Q(x)$는 각각 이차다항식이고 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$\{P(x)+Q(x)\}\times\{P(x)-Q(x)\}=x^2(x-1)(x-2)$

… ㉠

그러므로 $P(x)+Q(x)$, $P(x)-Q(x)$는 각각 이차다항식이고 $x^2(x-1)(x-2)$의 인수이다.

이때 $P(x)-Q(x)$가 $x-1$을 인수로 가지면 인수정리에 의하여 $P(1)-Q(1)=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$P(x)-Q(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않으므로 $P(x)-Q(x)$는 x^2을 인수로 갖거나 $x(x-2)$를 인수로 갖는다.

(i) $P(x)-Q(x)=ax^2$ (a는 0이 아닌 실수)일 때

$|P(2)-Q(2)|=|4a|$, $|P(1)-Q(1)|=|a|$

이고 $|4a|>|a|$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$ (a는 0이 아닌 실수) 일 때

$|P(2)-Q(2)|=0$, $|P(1)-Q(1)|=|a|$

이고 $0<|a|$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $P(x)-Q(x)=ax(x-2)$이고

㉠에 의하여 $P(x)+Q(x)=\frac{1}{a}x(x-1)$이다.

$P(3)+Q(3)=\frac{1}{a}\times3\times2=24$에서 $a=\frac{1}{4}$이므로

$P(x)-Q(x)=\frac{1}{4}x(x-2)$,

$P(x)+Q(x)=4x(x-1)$

두 식을 연립하여 계산하면

$P(x)=\frac{17}{8}x^2-\frac{9}{4}x$, $Q(x)=\frac{15}{8}x^2-\frac{7}{4}x$

따라서 $P(4)=25$

29. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 문제해결하기

세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하자.

(사각형 AO_2O_3B의 넓이)

=(삼각형 AO_1B의 넓이)−(삼각형 $O_2O_1O_3$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{O_1A}\times\overline{O_1B}-\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_1O_3}$

$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a-b)(a-c)$

$=\frac{1}{2}(ab-bc+ca)$

이고, 사각형 AO_2O_3B의 넓이가 34이므로

$ab-bc+ca=68$

또한 $\overline{O_1C}+\overline{O_1D}=6\sqrt{2}$에서

$(a-2b)+(a-2c)=6\sqrt{2}$

$a-b-c=3\sqrt{2}$

그러므로 세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이의 합은

$$\begin{aligned}a^2\pi+b^2\pi+c^2\pi&=(a^2+b^2+c^2)\pi\\&=\{(a-b-c)^2+2(ab-bc+ca)\}\pi\\&=\{(3\sqrt{2})^2+2\times68\}\pi\\&=154\pi\end{aligned}$$

따라서 $p=154$

30. [출제의도] 이차함수를 이용하여 추론하기

집합 X는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 x좌표를 원소로 갖는 집합이고

집합 Y는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 x좌표를 원소로 갖는 집합이다.

조건 (가)에서 $n(X\cap Y)=3$, $n(X\cup Y)=4$이므로

$3\le n(X)\le4$, $3\le n(Y)\le4$

또한 $n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$에서

$n(X)+n(Y)=n(X\cup Y)+n(X\cap Y)=7$이므로

$n(X)=3$, $n(Y)=4$ 또는 $n(X)=4$, $n(Y)=3$

(i) $n(X)=3$, $n(Y)=4$일 때

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이고 $n(X)=3$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는

직선 $y=-1$에 접하고

직선 $y=1$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$이 만나는 점의 x좌표를 a라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(a, -1)$이므로

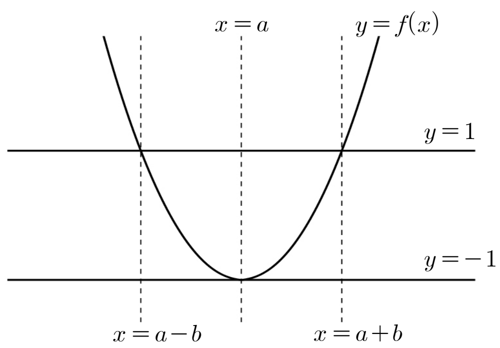
$f(x)=k(x-a)^2-1$ (k는 양의 실수)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가

직선 $y=1$과 만나는 두 점의 x좌표는

어떤 양의 실수 b에 대하여 $a-b$, $a+b$이다.

그러므로 $X=\{a-b, a, a+b\}$



$n(X)=n(X\cap Y)=3$에서 $X=X\cap Y$이므로

조건 (나)에 의하여

$(a-b)+a+(a+b)=3a=3$, $a=1$

그러므로 $f(x)=k(x-1)^2-1$이 되어

$f(2)<f(1)$을 만족시키지 않는다.

(ii) $n(X)=4$, $n(Y)=3$일 때

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이고 $n(Y)=3$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는

직선 $y=1$에 접하고

직선 $y=-1$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표를 a라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(a, 1)$이므로

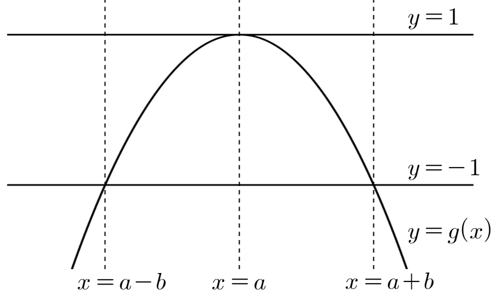
$g(x)=k(x-a)^2+1$ (k는 음의 실수)

함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가

직선 $y=-1$과 만나는 두 점의 x좌표는

어떤 양의 실수 b에 대하여 $a-b$, $a+b$이다.

그러므로 $Y=\{a-b, a, a+b\}$



$n(Y)=n(X\cap Y)=3$에서 $Y=X\cap Y$이므로

조건 (나)에 의하여

$(a-b)+a+(a+b)=3a=3$, $a=1$

그러므로 $Y=\{1-b, 1, 1+b\}$이고

$g(x)=k(x-1)^2+1$ … ㉠

$n(X)=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

두 직선 $y=1$, $y=-1$과 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 $x=m$이라 하면

$f(x)=t(x-m)^2+s$ (t는 양의 실수, s는 실수)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가

직선 $y=-1$과 만나는 두 점의 x좌표는

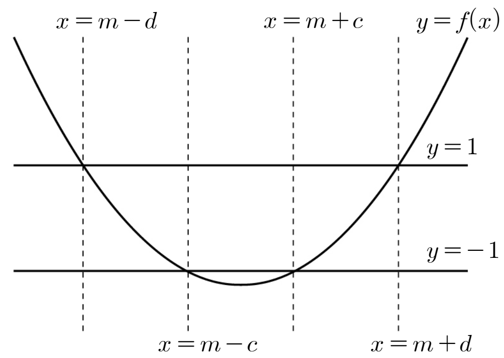
어떤 양의 실수 c에 대하여 $m-c$, $m+c$이고

직선 $y=1$과 만나는 두 점의 x좌표는

어떤 양의 실수 d에 대하여 $m-d$, $m+d$이다.

(단, $c<d$)

그러므로 $X=\{m-d, m-c, m+c, m+d\}$



$n(X)=n(X\cup Y)=4$에서 $X=X\cup Y$이므로

조건 (나)에 의하여

$(m-d)+(m-c)+(m+c)+(m+d)=4m=8$,

$m=2$

그러므로

$f(x)=t(x-2)^2+s$ … ㉡

가 되어 $f(2)<f(1)$을 만족시킨다.

$Y=\{1-b, 1, 1+b\}$,

$X=\{2-d, 2-c, 2+c, 2+d\}$이고

$Y=(X\cap Y)\subset(X\cup Y)=X$

집합 Y의 원소 중 1보다 작거나 같은 수는

$1-b$, 1뿐이고 $(1-b)\in X$, $1\in X$이므로

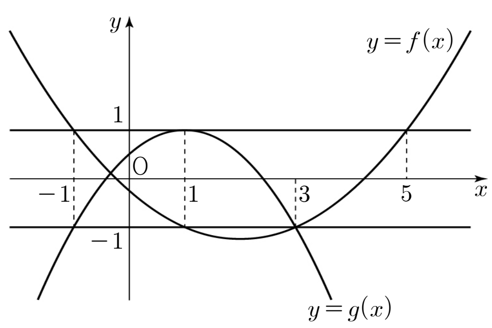
$1-b=2-d$, $1=2-c$에서 $d=b+1$, $c=1$

그러므로 $X=\{1-b, 1, 3, 3+b\}$

또한 $(1+b)\in X$에서

$1+b=3$, $b=2$이므로

$X=\{-1, 1, 3, 5\}$, $Y=\{-1, 1, 3\}$



함수 $y=f(x)$의 그래프가

두 점 $(-1, 1)$, $(1, -1)$을 지나므로 ㉡에서

$f(-1)=9t+s=1$, $f(1)=t+s=-1$

두 식을 연립하여 계산하면 $t=\frac{1}{4}$, $s=-\frac{5}{4}$이고

$f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{5}{4}$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(-1, -1)$을 지나므로 ㉠에서

$g(-1)=4k+1=-1$, $k=-\frac{1}{2}$이고

$g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$f(7)-g(9)=5-(-31)=36$