정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	④	2	②	3	⑤	4	④	5	①
6	③	7	⑤	8	①	9	②	10	③
11	④	12	③	13	③	14	①	15	③
16	①	17	②	18	④	19	⑤	20	④
21	②	22	5	23	65	24	29	25	12
26	22	27	18	28	144	29	28	30	47

해 설

1. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$\sqrt[3]{4}\times 2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2^2}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=2$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 24+\log_3\frac{3}{8}=\log_3\left(24\times\frac{3}{8}\right)=\log_3 3^2=2$

3. [출제의도] 부채꼴의 반지름의 길이 계산하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ, 호의 길이를 l이라 하면

$l=r\theta$에서 $\frac{2}{3}\pi=r\times\frac{3}{4}\pi$이므로 $r=\frac{2}{3}\pi\times\frac{4}{3\pi}=\frac{8}{9}$

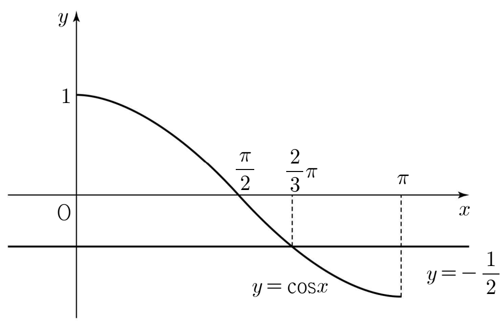
4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

$2\cos x+1=0$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\le x\le\pi$에서 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$의 해는

함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과

만나는 점의 x좌표와 같다.



따라서 $x=\frac{2}{3}\pi$

5. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

수	⋯	4	5	6	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.2	⋯	.6274	.6284	.6294	⋯
4.3	⋯	.6375	.6385	.6395	⋯
4.4	⋯	.6474	.6484	.6493	⋯

$\log 43.5=\log(4.35\times 10)=\log 4.35+1$

이고 상용로그표에서 $\log 4.35=0.6385$이므로

$\log 43.5=1.6385$

6. [출제의도] 사인법칙 이해하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times 6=12$에서 $\overline{BC}=12\sin A=12\times\frac{1}{4}=3$

7. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 함숫값 계산하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이고 $\cos\theta=-\frac{3}{4}$이므로

$\sin^2\theta=\frac{7}{16}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_3(x+a)+b$의 그래프의 점근선이 직선 $x=-4$이므로 $a=4$

한편 점 $(5,0)$이 그래프 위의 한 점이므로

$0=\log_3 9+b$, $b=-2$

따라서 $a+b=2$

9. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\tan ax+b$의 그래프가 점 $(0,2)$를 지나므로 $b=2$

$0\le x<2\pi$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하므로 $a>0$

주기가 4π이므로 $\frac{\pi}{a}=4\pi$, 즉 $a=\frac{1}{4}$

따라서 $ab=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

10. [출제의도] 지수함수의 역함수 이해하기

함수 $y=5^x+1$의 역함수의 그래프가

점 $(4,\log_5 a)$를 지나므로

함수 $y=5^x+1$의 그래프는 점 $(\log_5 a, 4)$를 지난다.

따라서 $4=5^{\log_5 a}+1$이고 로그의 성질에 의하여

$a+1=4$이므로 $a=3$

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=4^x-6$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를 나타낸 함수는 $y=4^{x-a}-6+b$이다.

이 함수의 그래프의 점근선이 직선 $y=-2$이므로

$-6+b=-2$,

$b=4$

한편 이 그래프가 원점을 지나므로

$0=4^{-a}-2$,

$a=-\frac{1}{2}$

따라서 $ab=-\frac{1}{2}\times 4=-2$

12. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최솟값 구하는 문제 해결하기

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$f(x)=2\cos^2 x+2\sin x+k$

$\quad=2(1-\sin^2 x)+2\sin x+k$

$\quad=-2\sin^2 x+2\sin x+2+k$

$\sin x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-2t^2+2t+2+k$

$\quad=-2\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}+k$

$\quad=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}+k$

함수 $y=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}+k$는 $t=\frac{1}{2}$에서 최댓값

$\frac{5}{2}+k$를 갖는다. 따라서 $\frac{5}{2}+k=\frac{15}{2}$, 즉 $k=5$

그러므로 함수 $y=-2t^2+2t+7$은 $t=-1$에서

최솟값 $-2\times(-1)^2+2\times(-1)+7=3$을 갖는다.

즉 $f(x)$의 최솟값은 3이다.

13. [출제의도] 지수함수가 포함된 부등식 이해하기

$2^{2x+3}+2\le 17\times 2^x$,

$2^{2x+3}-17\times 2^x+2\le 0$

에서 $2^x=t\,(t>0)$이라 하면

$8t^2-17t+2\le 0$,

$(t-2)(8t-1)\le 0$,

$\frac{1}{8}\le t\le 2$,

$2^{-3}\le 2^x\le 2^1$,

$-3\le x\le 1$

이고 이를 만족시키는 모든 정수 x의 값은

-3, -2, -1, 0, 1이므로 개수는 5이다.

14. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_a(x^2+ax+a+8)$이 정의되기 위해서는

$a>0$, $a\ne 1$, $x^2+ax+a+8>0$

이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+ax+a+8>0$이 성립하기 위해서는 이차방정식 $x^2+ax+a+8=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 한다.

$D=a^2-4(a+8)=a^2-4a-32=(a+4)(a-8)<0$,

즉 $-4<a<8$이어야 한다.

따라서 $a>0$, $a\ne 1$, $-4<a<8$을 모두 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합은

$2+3+4+5+6+7=27$이다.

15. [출제의도] 삼각함수의 정의 이해하기

점 A의 좌표를 $(-2, a)\,(a>0)$이라 하면

점 B의 좌표는 $(-2,-a)$이고 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$이므로

$\cos\alpha=-\frac{2}{r}$, $\sin\beta=-\frac{a}{r}$

$2\cos\alpha=3\sin\beta$에서

$2\times\left(-\frac{2}{r}\right)=3\times\left(-\frac{a}{r}\right)$,

$a=\frac{4}{3}$

한편 $\sin\alpha=\frac{a}{r}$, $\cos\beta=-\frac{2}{r}$이므로

$r(\sin\alpha+\cos\beta)=r\left\{\frac{a}{r}+\left(-\frac{2}{r}\right)\right\}$

$\qquad=a+(-2)=\frac{4}{3}+(-2)$

$\qquad=-\frac{2}{3}$

16. [출제의도] 삼각형의 넓이와 코사인법칙을 활용하여 선분의 길이의 곱 구하는 문제 해결하기

$\angle\mathrm{DAB}=\theta$라 하면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{4^2+5^2-(\sqrt{33})^2}{2\times 4\times 5}=\frac{1}{5}$

사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로

$\angle\mathrm{BCD}=\pi-\theta$이다. 따라서

$\sin(\angle\mathrm{BCD})=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

삼각형 BCD의 넓이가 $2\sqrt{6}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}$

따라서 $\overline{BC}\times\overline{CD}=10$

17. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 미정계수 구하는 문제 해결하기

함수 $y=-\log_3 x+4$와 함수 $y=3^{-x+4}$은

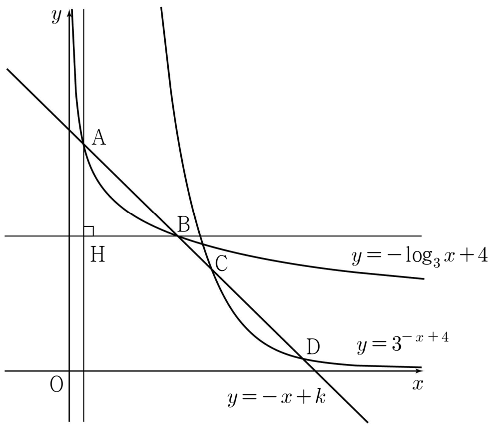
역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}$이고 $\overline{AD}-\overline{BC}=4\sqrt{2}$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$

점 A를 지나고 y축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 만나는 점을 H라 하자.

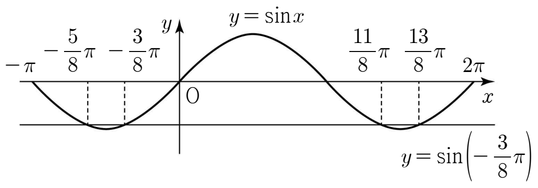
정답 및 해설



직선 AB의 기울기가 -1이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=2$
따라서 점 A의 좌표를 $(a,\ -a+k)$라 하면 점 B의 좌표는 $(a+2,\ -a+k-2)$이다. 두 점 A, B는 함수 $y=-\log_3 x+4$의 그래프 위의 점이므로
$-a+k=-\log_3 a+4$ …㉠
$-a+k-2=-\log_3(a+2)+4$ …㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2=\log_3\frac{a+2}{a}$, $a=\frac{1}{4}$
이고 ㉠에 의하여
$-\frac{1}{4}+k=-\log_3\frac{1}{4}+4$
따라서 $k=\frac{17}{4}+2\log_3 2$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 부등식의 해 추론하기

$\sin x+\cos\frac{\pi}{8}<0$에서 $\sin x<-\cos\frac{\pi}{8}$이다. 한편
$-\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{3}{8}\pi=\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$
이므로
$\sin x<-\cos\frac{\pi}{8}$의 해는 $\sin x<\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$의 해와 같다.
한편 방정식 $\sin x=\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$의 해는
함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$와 만나는 점의 x좌표와 같다.

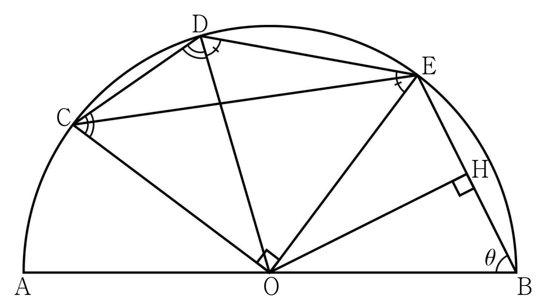


그러므로 $-\pi\le x\le 2\pi$에서
방정식 $\sin x=\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$의 해는
$x=-\frac{5}{8}\pi$ 또는 $x=-\frac{3}{8}\pi$ 또는
$x=\frac{11}{8}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{8}\pi$이다.
따라서 $-\pi\le x\le k$에서 $\sin x<\sin\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위가
$-\pi-\alpha<x<\alpha$이기 위해서는 $\alpha=-\frac{3}{8}\pi$이고
$0\le k\le\frac{11}{8}\pi$이어야 한다.
그러므로 k의 최댓값은 $\frac{11}{8}\pi$이다.

19. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

점 A는 직선 $y=4$가 곡선 $y=a^{1-x}$과 만나는 점이므로 $4=a^{1-x}$에서 $x=1-\log_a 4$
따라서 점 A의 좌표는 $(1-\log_a 4,\ 4)$이다.
점 B는 직선 $y=4$가 곡선 $y=4^{1-x}$과 만나는 점이므로 $4=4^{1-x}$에서 $x=0$
따라서 점 B의 좌표는 $(0,\ 4)$이다.
그러므로 $\overline{AB}=-1+\log_a 4$
점 C는 직선 $y=k$가 곡선 $y=a^{1-x}$과 만나는 점이므로 $k=a^{1-x}$에서 $x=1-\log_a k$
따라서 점 C의 좌표는 $(1-\log_a k,\ k)$이다.
점 D는 직선 $y=k$가 곡선 $y=4^{1-x}$과 만나는 점이므로 $k=4^{1-x}$에서 $x=1-\log_4 k$
따라서 점 D의 좌표는 $(1-\log_4 k,\ k)$이다.
그러므로 $\overline{DC}=\log_4 k-\log_a k$
사각형 ADCB는 평행사변형이므로 $\overline{AB}=\overline{DC}$
따라서 $-1+\log_a 4=\log_4 k-\log_a k$,
$\log_a 4+\log_a k=\log_4 k+1$에서
$\log_a 4k=\log_4 4k$이므로
$a=4$ 또는 $4k=1$
그런데 $1<a<4$에서 $a\neq 4$이므로 $k=\frac{1}{4}$
사각형 ADCB의 넓이가
$\overline{AB}\times(4-k)=(-1+\log_a 4)\times\frac{15}{4}=\frac{15}{2}$이므로
$-1+\log_a 4=2$
$\log_a 4=3$에서 $a^3=4$, $a=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$
따라서 $4ak=4\times 2^{\frac{2}{3}}\times\frac{1}{4}=2^{\frac{2}{3}}$

20. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 삼각함수의 값 구하는 문제 해결하기

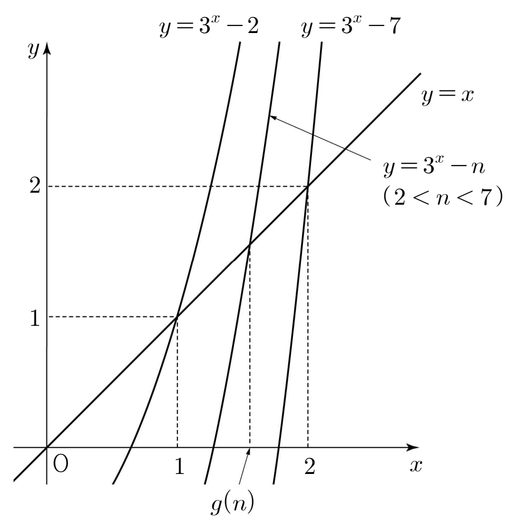


$\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OE}=1$, $\angle COE=\frac{\pi}{2}$이므로
$\overline{CE}=\sqrt{2}$, $\angle OCD=\angle ODC$, $\angle ODE=\angle OED$
사각형 COED에서
$\angle OCD+\angle CDE+\angle OED=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$,
$\angle OCD+\angle OED=\angle CDE$이므로
$2\angle CDE=\frac{3}{2}\pi$, 즉
$\angle CDE=\frac{3}{4}\pi$
한편 $\overline{CD}:\overline{DE}=1:\sqrt{2}$이므로
$\overline{CD}=a$, $\overline{DE}=\sqrt{2}a\,(a>0)$이라 하자.
삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{CE}^2=a^2+(\sqrt{2}a)^2-2\times a\times\sqrt{2}a\times\cos\frac{3}{4}\pi$
$=5a^2$
이고 $\overline{CE}=\sqrt{5}a=\sqrt{2}$, 즉
$a=\frac{\sqrt{10}}{5}$
$\angle OBE=\theta$라 하고 점 O에서 선분 EB에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{EB}=\overline{DE}=\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로
$\cos\theta=\frac{\overline{BH}}{\overline{OB}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{EB}}{\overline{OB}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

[다른 풀이]
$\overline{OB}=\overline{OD}$, $\overline{EB}=\overline{ED}$, $\overline{OE}$는 공통이므로
삼각형 OBE와 삼각형 ODE는 합동이다.
$\angle OBE=\theta$라 하면
$\angle OEB=\angle OED=\angle ODE=\theta$,
$\angle EOB=\angle DOE=\pi-2\theta$,
$\angle COD=\frac{\pi}{2}-\angle DOE=\frac{\pi}{2}-(\pi-2\theta)=2\theta-\frac{\pi}{2}$,
$\angle ODC=\frac{1}{2}(\pi-\angle COD)=\frac{3}{4}\pi-\theta$,
$\angle CDE=\angle ODC+\angle ODE=\left(\frac{3}{4}\pi-\theta\right)+\theta=\frac{3}{4}\pi$
한편 $\overline{OC}=\overline{OE}=1$, $\angle COE=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{CE}=\sqrt{2}$
$\overline{CD}:\overline{DE}=1:\sqrt{2}$이므로
$\overline{CD}=a$, $\overline{DE}=\sqrt{2}a\,(a>0)$이라 하자.
삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{CE}^2=a^2+(\sqrt{2}a)^2-2\times a\times\sqrt{2}a\times\cos\frac{3}{4}\pi=5a^2$
이고 $\overline{CE}=\sqrt{5}a=\sqrt{2}$, $a=\frac{\sqrt{10}}{5}$, 즉
$\overline{EB}=\overline{DE}=\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{5}}{5}$
삼각형 OBE에서 코사인법칙에 의하여
$$\cos\theta=\frac{1^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-1^2}{2\times1\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 자연수 추론하기

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $g(n)$은 직선 $y=x$가 함수 $f(x)=3^x-n$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값과 같다.
또한 2 이상의 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$가 함수 $f(x)=3^x-n$의 그래프와 만나는 두 점 중 한 점의 x좌표는 양수이고 다른 한 점의 x좌표는 음수이다. 따라서 $g(n)$은 직선 $y=x$가 함수 $f(x)=3^x-n$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표와 같다.
곡선 $y=3^x-n$이 점 $(1,\ 1)$을 지나면 $1=3^1-n$에서 $n=2$이므로 $g(2)=1$
(i) 곡선 $y=3^x-n$이 점 $(2,\ 2)$를 지나면
$2=3^2-n$에서 $n=7$이므로 $g(7)=2$



$1=g(2)<g(3)<\cdots<g(6)<g(7)=2$
따라서 $2\le n\le 6$일 때,
$1\le g(n)<2$이므로 $h(n)=1$
(ii) 곡선 $y=3^x-n$이 점 $(3,\ 3)$을 지나면
$3=3^3-n$에서 $n=24$이므로 $g(24)=3$
$2=g(7)<g(8)<\cdots<g(23)<g(24)=3$
따라서 $7\le n\le 23$일 때,
$2\le g(n)<3$이므로 $h(n)=2$

(iii) 곡선 $y=3^x-n$ 이 점 $(4,4)$ 를 지나면
$4=3^4-n$ 에서 $n=77$ 이므로 $g(77)=4$
$3=g(24)<g(25)<\cdots<g(76)<g(77)=4$
따라서 $24\le n\le 76$ 일 때,
$3\le g(n)<4$ 이므로 $h(n)=3$

(iv) 곡선 $y=3^x-n$ 이 점 $(5,5)$ 를 지나면
$5=3^5-n$ 에서 $n=238$ 이므로 $g(238)=5$
$4=g(77)<g(78)<\cdots<g(237)<g(238)=5$
따라서 $77\le n\le 237$ 일 때,
$4\le g(n)<5$ 이므로 $h(n)=4$

(i)~(iv)에 의하여 $h(n)<h(n+1)$ 을 만족시키는 $2\le n\le 100$ 인 모든 n 의 값의 합은 $6+23+76=105$ 이다.

22. [출제의도] 지수 계산하기

$\left(5^{2-\sqrt{3}}\right)^{2+\sqrt{3}}=5^{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=5^1=5$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

$\log_4(x-1)=3$ 에서 $x-1=4^3=64$ 이므로
$x=65$

24. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$0\le x\le 6$ 에서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)+30$ 은 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 감소하므로 $x=0$ 에서 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은
$\log_{\frac{1}{3}}3+30=\log_{3^{-1}}3+30=-\log_3 3+30=29$ 이다.

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$y=6\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+k=-6\sin x+k$ 이고
이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{6}\pi, 9\right)$ 를 지나므로
$9=-6\sin\frac{5}{6}\pi+k$,
$9=-3+k$, 즉
$k=12$

26. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 자연수의 합 추론하기

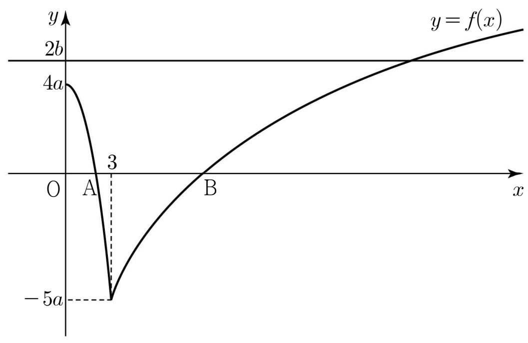
자연수 n 에 대하여 $\sqrt[n+1]{8}$ 이 어떤 자연수의 네제곱근이 되려면
$\left(\sqrt[n+1]{8}\right)^4=\left\{\left(2^3\right)^{\frac{1}{n+1}}\right\}^4=2^{\frac{12}{n+1}}$ 이 자연수이어야 한다.
따라서 $n+1$ 은 12 의 약수이어야 하므로
$n+1$ 이 될 수 있는 값은 2, 3, 4, 6, 12 이고
이를 만족시키는 모든 n 의 값의 합은
$1+2+3+5+11=22$ 이다.

27. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

주어진 식에서 로그의 밑을 c 로 모두 변환하면
$\log_a b=81$ 에서 $\frac{\log_c b}{\log_c a}=81$ 이므로
$\log_c b=81\times\log_c a$ ⋯ ㉠
$\log_c\sqrt{a}=\log_{\sqrt{b}}c$ 에서
$\frac{1}{2}\log_c a=\frac{1}{\log_c\sqrt{b}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\log_c b}$ 이므로
$4=\log_c a\times\log_c b$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $(\log_c b)^2=4\times 81$ 이고
b 와 c 는 1 보다 큰 실수이므로 $\log_c b>0$
따라서 $\log_c b=18$

28. [출제의도] 이차함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

$0\le x<3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $a(4-x^2)=0$ 의 실근과 같으므로 점 A 의 좌표는 $(2,0)$ 이다.
$\overline{AB}=10$ 이므로 점 B 의 좌표는 $(12,0)$ 이다.
$f(12)=0$ 이므로
$b\log_2\frac{12}{3}-5a=0$,
$2b=5a$



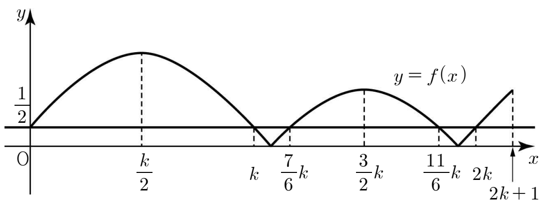
$0\le x<3$ 에서 $-5a<f(x)\le 4a$ 이고
$f(b)=2b=5a>4a$ 이므로 $b>3$
그러므로 $f(b)=b\log_2\frac{b}{3}-5a=2b$,
$b\log_2\frac{b}{3}-2b=2b$, $\log_2\frac{b}{3}=4$,
$b=3\times 2^4=48$, $5a=2b=96$
따라서 $5a+b=96+48=144$

29. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 선분의 길이의 합 구하는 문제 해결하기

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R_1$, $R_1=\frac{\overline{BC}}{2\sin A}$
삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=2R_2$, $R_2=\frac{\overline{BD}}{2\sin A}$
$R_1:R_2=4:3$ 이므로
$\frac{\overline{BC}}{2\sin A}:\frac{\overline{BD}}{2\sin A}=4:3$, 즉
$\overline{BC}:\overline{BD}=4:3$
$\overline{BC}=4k$, $\overline{BD}=3k\ (k>0)$이라 하면
삼각형 BCD 에서 코사인법칙에 의하여
$\cos(\angle\mathrm{CDB})=\frac{(2\sqrt{7})^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times 2\sqrt{7}\times 3k}=\frac{-7k^2+28}{12\sqrt{7}k}$
이고
$\cos(\angle\mathrm{CDB})=\cos(\pi-\angle\mathrm{BDA})$
$=-\cos(\angle\mathrm{BDA})=-\frac{\sqrt{7}}{4}$
이므로
$\frac{-7k^2+28}{12\sqrt{7}k}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$,
$7k^2-21k-28=7(k+1)(k-4)=0$
$k>0$ 이므로 $k=4$
따라서 $\overline{BC}+\overline{BD}=4k+3k=28$

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 조건에 맞는 함수 추론하기

함수 $y=2\sin\frac{\pi}{k}x$ 의 주기가 $2k$ 이고,
$-2\le 2\sin\frac{\pi}{k}x\le 2$ 이므로
$-\frac{3}{2}\le 2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}\le\frac{5}{2}$
한편 $k>1$ 이므로 $3k>2k+1$ 이고
$0\le x\le 2k+1$ 에서
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$0\le t<k$ 또는 $t>2k-1$ 이면
$t\le x\le t+1$ 에서 $f(x)>\frac{1}{2}$ 인 x 의 값이 존재하므로
$f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 보다 크다.
$t=\alpha$, $t=\beta$ 일 때 $t\le x\le t+1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $k\le\alpha<\beta\le 2k-1$
한편 $f(x)=\frac{1}{2}$, 즉 $\left|2\sin\frac{\pi}{k}x+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ 에서
$\sin\frac{\pi}{k}x=0$ 또는 $\sin\frac{\pi}{k}x=-\frac{1}{2}$ 이므로
$k\le x\le 2k$ 에서 $f(x)=\frac{1}{2}$ 의 해는
$x=k$ 또는 $x=2k$ 또는 $x=\frac{7}{6}k$ 또는 $x=\frac{11}{6}k$이다.
따라서 직선 $y=\frac{1}{2}$ 이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나는 점의 x 좌표는 k, $\frac{7}{6}k$, $\frac{11}{6}k$, $2k$이다.
$\frac{7}{6}k-k=2k-\frac{11}{6}k=\frac{k}{6}$ 이고
$t\le x\le t+1$ 에서 $(t+1)-t=1$ 이므로 다음과 같은 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\frac{k}{6}>1$ 일 때,
$k\le x\le k+1$ 에서 $f(x)\le f(k)=\frac{1}{2}$,
$\frac{7}{6}k-1\le x\le\frac{7}{6}k$ 에서 $f(x)\le f\left(\frac{7}{6}k\right)=\frac{1}{2}$,
$\frac{11}{6}k\le x\le\frac{11}{6}k+1$ 에서 $f(x)\le f\left(\frac{11}{6}k\right)=\frac{1}{2}$,
$2k-1\le x\le 2k$ 에서 $f(x)\le f(2k)=\frac{1}{2}$ 이므로
$t\le x\le t+1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이 되도록 하는 서로 다른 t 의 값은
k, $\frac{7}{6}k-1$, $\frac{11}{6}k$, $2k-1$ 이다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{k}{6}=1$ 일 때,
$k=6$, $\frac{7}{6}k=7$, $\frac{11}{6}k=11$, $2k=12$ 이므로
$6\le x\le 7$ 에서 $f(x)\le f(6)=\frac{1}{2}$,
$11\le x\le 12$ 에서 $f(x)\le f(11)=\frac{1}{2}$
따라서 $t\le x\le t+1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이 되도록 하는 모든 t 의 값은 6, 11 이다.

(iii) $\frac{k}{6}<1$ 일 때,
$k+1>\frac{7}{6}k$, $\frac{7}{6}k-1<k$,
$\frac{11}{6}k+1>2k$, $2k-1<\frac{11}{6}k$ 이므로
$t\le x\le t+1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이 되도록 하는 t 의 값은 존재하지 않는다.
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $k=6$, $\alpha=6$, $\beta=11$ 이므로
$k\alpha+\beta=6\times 6+11=47$