정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	④	3	④	4	①	5	③
6	②	7	④	8	⑤	9	③	10	①
11	②	12	⑤	13	②	14	④	15	⑤
16	③	17	⑤	18	①	19	④	20	①
21	②	22	6	23	4	24	29	25	23
26	8	27	11	28	20	29	13	30	154

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기
$(1-3i)+2i=1+(-3i+2i)=1-i$
이다.

2. [출제의도] 다항식 계산하기
$A-B=(3x^2-5x+1)-(2x^2+x+3)$
$\quad=x^2-6x-2$
이다.

3. [출제의도] 나머지정리 계산하기
$P(x)=2x^3-x^2-x+4$라 하자. $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $P(1)$이므로
$P(1)=2-1-1+4=4$이다.
따라서 나머지는 4이다.

4. [출제의도] 이차부등식 계산하기
이차항의 계수가 1이고 해가 $2<x<3$인 이차부등식은 $(x-2)(x-3)<0$이다.
$x^2-5x+6<0$이므로 $a=-5$이다.

5. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기
$x(x-3)+(x+1)(x+3)$
$=x^2-3x+x^2+4x+3$
$=2x^2+x+3$
이고, 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 좌변과 우변의 계수를 비교하면 $a=1$, $b=3$이다.
따라서 $ab=3$이다.
[다른 풀이]
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=3$이고,
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$2-a+3=4$이므로 $a=1$이다.
따라서 $ab=3$이다.

6. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기
$(x+y-z)^2$
$=x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2y(-z)+2(-z)x$
$=x^2+y^2+z^2+2(xy-yz-zx)$
이므로 $5^2=x^2+y^2+z^2+2\times4$이다.
따라서 $x^2+y^2+z^2=17$이다.

7. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기
이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-22=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식
$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k^2+3k-22)=-3k+22<0$이다.
따라서 $k>\frac{22}{3}$이므로 자연수 k의 최솟값은 8이다.

8. [출제의도] 나머지정리 이해하기
다항식 x^4+x^2+1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 나머지정리에 의해
$R=2^4+2^2+1=21$이다.
그러므로 $x^4+x^2+1=(x-2)Q(x)+21$에
$x=2024$를 대입하면
$2024^4+2024^2+1=(2024-2)Q(2024)+21$이다.
따라서 2024^4+2024^2+1을 2022로 나눈 나머지는 21이다.

9. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기
부등식 $|x-1|<n$의 해는 $-n+1<x<n+1$이므로
정수 x의 개수는 $(n+1)-(-n+1)-1=2n-1$이다.
따라서 $2n-1=9$이므로 $n=5$이다.

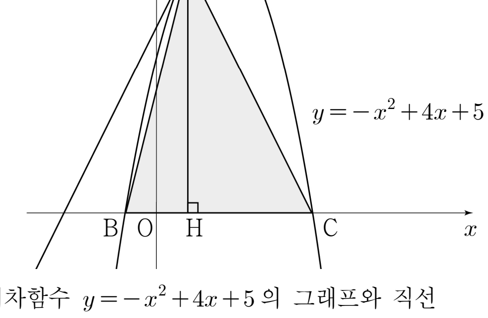
10. [출제의도] 사차방정식 문제 해결하기
$x^2-3x=X$라 하면
$X(X+6)+5=0$
$X^2+6X+5=0$
$(X+1)(X+5)=0$
$(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)=0$
이다. 이차방정식 $x^2-3x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 가지고, 이차방정식 $x^2-3x+1=0$은 서로 다른 두 실근 α, β를 가진다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha\beta=1$이다.

11. [출제의도] 인수분해를 이용하여 문제 해결하기
x^3+2x^2+3x+6
$=x^2(x+2)+3(x+2)$
$=(x+2)(x^2+3)$
이므로 $b=2$이다.
x^3+x+a가 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의해 $-8-2+a=0$이므로 $a=10$이다.
따라서 $a+b=12$이다.

12. [출제의도] 삼차방정식 이해하기
$x^3+x^2+x-3=0$에서 $(x-1)(x^2+2x+3)=0$
이므로 삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이다.
그러므로 $\alpha^2+2\alpha+3=0$, $\beta^2+2\beta+3=0$이다.
따라서 $(\alpha^2+2\alpha+6)(\beta^2+2\beta+8)$
$=(0+3)(0+5)=15$이다.

13. [출제의도] 연립방정식 이해하기
$x-y=3$에서 $y=x-3$이므로 $x^2-xy-y^2=k$에 대입하면 $x^2-x(x-3)-(x-3)^2=k$에서
$x^2-9x+k+9=0$이다.
이차방정식 $x^2-9x+k+9=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식
$D=(-9)^2-4\times1\times(k+9)>0$이고
$45-4k>0$, $k<\frac{45}{4}$이다.
따라서 자연수 k의 최댓값은 11이다.

14. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제 해결하기
점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 한 점 A에서만 만나므로
$-x^2+4x+5=2x+a$,
$x^2-2x+a-5=0$ … ㉠
은 중근을 가진다.
판별식 $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(a-5)=0$에서 $a=6$이다.
$a=6$을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$,
$(x-1)^2=0$이므로 점 A의 x좌표는 1이다.
$A(1, 8)$이므로 $\overline{AH}=8$이다.
이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는
이차방정식 $-x^2+4x+5=0$의 두 실근이다.
$-x^2+4x+5=-(x+1)(x-5)=0$이므로
$B(-1, 0)$, $C(5, 0)$이고 $\overline{BC}=6$이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times6\times8=24$이다.

15. [출제의도] 인수분해 문제 해결하기
$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+k$
$=(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)+k$
$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+k$
$x^2+7x=X$라 하면
$(X+10)(X+12)+k=X^2+22X+120+k$가 완전제곱식이 되어야 하므로
$120+k=11^2=121$에서 $k=1$이다.
$X^2+22X+121=(X+11)^2$
$\qquad=(x^2+7x+11)^2$
$\qquad=(x^2+ax+b)^2$
이므로 $a=7$, $b=11$이다.
따라서 $a+b+k=7+11+1=19$이다.
[다른 풀이]
$x^2+7x+10=X$라 하면
$X(X+2)+k=X^2+2X+k$에서 $k=1$이다.
$X^2+2X+1=(X+1)^2$
$\qquad=(x^2+7x+11)^2$
$\qquad=(x^2+ax+b)^2$
이므로 $a=7$, $b=11$이다.
따라서 $a+b+k=7+11+1=19$이다.

16. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기
다항식 x^3+ax^2+bx-4를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 3이므로
$x^3+ax^2+bx-4=(x+1)Q(x)+3$ … ㉠
이다. ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1+a-b-4=3$, $a-b=8$이다.
$(x^2+a)Q(x-2)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의해 $(4+a)Q(0)=0$이다.
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $-4=Q(0)+3$,
$Q(0)=-7\neq0$이므로 $4+a=0$, $a=-4$이고
$a-b=8$이므로 $b=-12$이다.
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1-4-12-4=2Q(1)+3$이다.
따라서 $Q(1)=-11$이다.

17. [출제의도] 복소수 이해하기
$z^2=(a^2-1)^2+2(a^2-1)(a-1)i-(a-1)^2$
$\quad=(a^2-1)^2-(a-1)^2+2(a^2-1)(a-1)i$
가 음의 실수이므로 허수부분
$2(a^2-1)(a-1)=2(a+1)(a-1)^2=0$이다.
그러므로 $a=-1$ 또는 $a=1$이다.
$a=-1$이면 $z^2=-4$, $a=1$이면 $z^2=0$에서 z^2은 음의 실수이므로 $a=-1$이다.
$a=-1$을 $z=a^2-1+(a-1)i$에 대입하면 $z=-2i$

이고, $\frac{(z-\bar{z})i}{4}=\frac{\{-2i-(2i)\}i}{4}=\frac{(-4i)i}{4}=1$ 이므로

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=1$ 이다. $\alpha=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 라 하면

$\alpha^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$

$\alpha^3=\alpha^2\alpha=(-i)\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$\alpha^4=\alpha^2\alpha^2=(-i)\times(-i)=-1$

$\alpha^5=\alpha^4\alpha=(-1)\times\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$\alpha^6=\alpha^4\alpha^2=(-1)\times(-i)=i$

$\alpha^7=\alpha^4\alpha^3=(-1)\times\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\alpha^8=\alpha^4\alpha^4=(-1)\times(-1)=1$

$\alpha^8=1$ 이므로

$\alpha=\alpha^9=\alpha^{17}=\cdots=\alpha^{97}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$\alpha^2=\alpha^{10}=\alpha^{18}=\cdots=\alpha^{98}=-i$

$\alpha^3=\alpha^{11}=\alpha^{19}=\cdots=\alpha^{99}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$\alpha^4=\alpha^{12}=\alpha^{20}=\cdots=\alpha^{100}=-1$

$\alpha^5=\alpha^{13}=\alpha^{21}=\cdots=\alpha^{93}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$\alpha^6=\alpha^{14}=\alpha^{22}=\cdots=\alpha^{94}=i$

$\alpha^7=\alpha^{15}=\alpha^{23}=\cdots=\alpha^{95}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\alpha^8=\alpha^{16}=\alpha^{24}=\cdots=\alpha^{96}=1$

이다.

따라서 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=1$ 이 되도록 하는 100 이하의 자연수 n 은 8 의 배수이므로 n 의 개수는 12 이다.

18. [출제의도] 이차함수 문제 해결하기

$f(x)=\left(x-\frac{2a-b}{2}\right)^2+a^2-4b-\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2$ 이므로

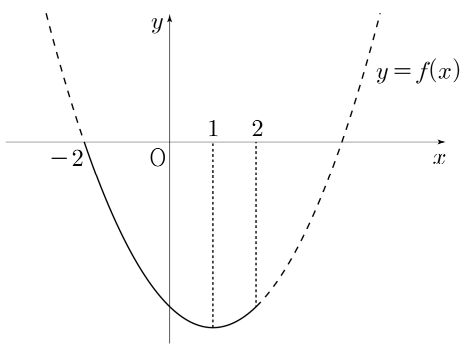
$x=\frac{2a-b}{2}$ 에서 최솟값을 가진다.

조건 (가)에 의해 $\frac{2a-b}{2}=1$ 이므로 $b=2a-2$ 이다.

그러므로 $f(x)=x^2-2x+a^2-8a+8$ 이다.

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축이 $x=1$ 이므로 $-2\le x\le 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-2)$ 이다.

조건 (나)에 의해 $f(-2)=0$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(-2)=4+4+a^2-8a+8=(a-4)^2=0$

에서 $a=4$ 이고 $b=2a-2$ 이므로 $b=6$ 이다.

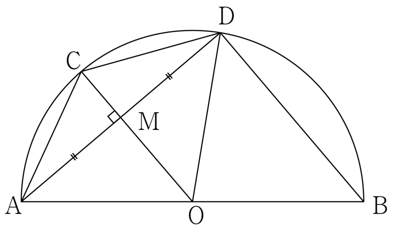
따라서 $a+b$ 의 값은 10 이다.

19. [출제의도] 다항식의 연산 문제 해결하기

선분 AB 의 중점을 O, 선분 AD 와 선분 OC 가 만나는 점을 M 이라 하자.

$\triangle AOC\equiv\triangle DOC$ 이므로 $\angle ACO=\angle DCO$ 이다.

$\overline{CM}$ 이 $\angle ACD$ 의 이등분선이고 $\triangle ACD$ 가 $\overline{AC}=\overline{CD}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{AM}=\overline{DM}$, $\angle AMC=90°$ 이다.



$\angle ADB=90°$ 이고 $\triangle AMO\backsim\triangle ADB$, $\overline{BD}=8$ 이므로 $\overline{OM}=4$ 이다.

직각삼각형 AMC 에서 $\overline{AM}^2=\overline{AC}^2-\overline{CM}^2$,

직각삼각형 AMO 에서 $\overline{AM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$ 이므로

$\overline{AC}^2-\overline{CM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$ 이다.

그러므로 $(a-1)^2-(a-4)^2=a^2-4^2$,

$a^2-6a-1=0$ 에서 $a>4$ 이므로 $a=3+\sqrt{10}$ 이다.

$a^2-6a-1=0$ 의 양변을 a 로 나누면 $a-\frac{1}{a}=6$ 이다.

따라서

$a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)=6^3+3\times6=234$

이다.

20. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

$x^3-(a^2+a-1)x^2-a(a-3)x+4a$

$=(x+1)\{x^2-a(a+1)x+4a\}=0$ 이므로 $x=-1$ 은 주어진 삼차방정식의 한 실근이다.

i) $\alpha=-1$ 인 경우

$-1\times\gamma=-4$ 에서 $\gamma=4$ 이므로 $-1<\beta<4$ 이다.

이차방정식 $x^2-a(a+1)x+4a=0$ 의 두 근이 β, 4 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $4\beta=4a$ 에서 $\beta=a$ 이다.

$\gamma=4$ 를 $x^2-a(a+1)x+4a=0$ 에 대입하면

$16-4a^2=0$ 에서 $a=\pm2$ 이다.

① $a=-2$ 인 경우

$\beta=-2$ 이므로 $-1<\beta<4$ 를 만족시키지 않는다.

② $a=2$ 인 경우

$\beta=2$ 이므로 $-1<\beta<4$ 를 만족시킨다.

①, ②에 의해 $a=2$ 이다.

ii) $\beta=-1$ 인 경우

α, γ 는 이차방정식 $x^2-a(a+1)x+4a=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\gamma=4a=-4$ 에서 $a=-1$ 이다. $a=-1$ 을 $x^2-a(a+1)x+4a=0$ 에 대입하면 $x^2=4$, $x=\pm2$ 이다.

$\alpha=-2$, $\gamma=2$ 이므로 $\alpha<\beta<\gamma$ 를 만족시킨다.

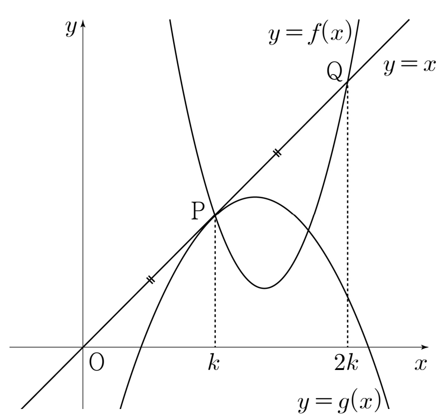
iii) $\gamma=-1$ 인 경우

$\alpha\times(-1)=-4$ 에서 $\alpha=4$ 이므로 $\alpha<\beta<\gamma$ 를 만족시키지 않는다.

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a=2$ 또는 $a=-1$ 이므로 모든 a 의 값의 합은 1 이다.

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 추론하기

조건 (다)에 의해 점 P 의 x 좌표를 $k\,(k>0)$ 이라 하면 점 Q 의 x 좌표는 $2k$ 이므로 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$ 의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



조건 (가)에 의해 이차방정식 $f(x)=x$ 는 k, $2k$ 를 두 근으로 가지므로

$f(x)-x=2(x-k)(x-2k)$,

$f(x)=2(x-k)(x-2k)+x$ 이다.

조건 (나)에 의해 이차방정식 $g(x)=x$ 는 k 를 중근으로 가지므로

$g(x)-x=-(x-k)^2$, $g(x)=-(x-k)^2+x$ 이다.

그러므로

$f(x)+g(x)=2(x-k)(x-2k)+x-(x-k)^2+x$

$\qquad=x^2+2(1-2k)x+3k^2$

이다.

이차부등식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2\ge0$ 의 해가 모든 실수이므로

이차방정식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2=0$ 의 판별식

$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-1\times3k^2=k^2-4k+1\le0$ 이고

$2-\sqrt{3}\le k\le2+\sqrt{3}$ 이다.

따라서 점 P 의 x 좌표의 최댓값은 $2+\sqrt{3}$ 이다.

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(2x+y)^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 이다.

따라서 xy^2 의 계수는 6 이다.

23. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 계산하기

이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해 $1+b=3$, $1\times b=a$ 이다.

따라서 $a=2$, $b=2$ 이므로 $ab=4$ 이다.

24. [출제의도] 복소수 이해하기

복소수 z 를 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$3z-2\bar{z}=3(a+bi)-2(a-bi)=a+5bi$

이다.

$a+5bi=5+10i$ 에서 $a=5$, $b=2$ 이므로

$z=5+2i$, $\bar{z}=5-2i$

이다.

따라서 $z\bar{z}=(5+2i)(5-2i)=5^2+2^2=29$ 이다.

25. [출제의도] 다항식의 나눗셈 이해하기

$$\begin{array}{r|l} & x^2\qquad\quad -3 \\ \hline x^2+2x+3 & x^4+2x^3\qquad\ +11x-4 \\ & x^4+2x^3+3x^2 \\ \hline & \qquad\ -3x^2+11x-4 \\ & \qquad\ -3x^2-\ 6x-9 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 17x+5 \end{array}$$

이므로 $Q(x)=x^2-3$, $R(x)=17x+5$ 이다.

따라서 $Q(2)=1$, $R(1)=22$ 이고

$Q(2)+R(1)=1+22=23$ 이다.

26. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{k}{3}$ 이다.

$(3\alpha-k)(\alpha-1)+(3\beta-k)(\beta-1)$

$=3\alpha^2-(k+3)\alpha+k+3\beta^2-(k+3)\beta+k$

$=3(\alpha^2+\beta^2)-(k+3)(\alpha+\beta)+2k$

$=3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-(k+3)(\alpha+\beta)+2k$

$=\frac{25}{3}-2k-\frac{5}{3}(3+k)+2k$

$=-10$

$5k=40$ 이다.

따라서 $k=8$ 이다.

[다른 풀이]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{5}{3}$ 이다.

$3\alpha^2+k=5\alpha$, $3\beta^2+k=5\beta$ 이므로

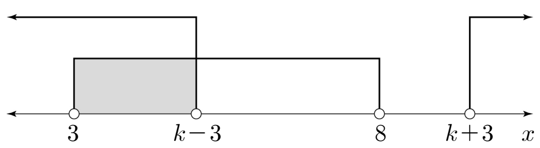
$(3\alpha-k)(\alpha-1)+(3\beta-k)(\beta-1)$

$=3\alpha^2-(k+3)\alpha+k+3\beta^2-(k+3)\beta+k$

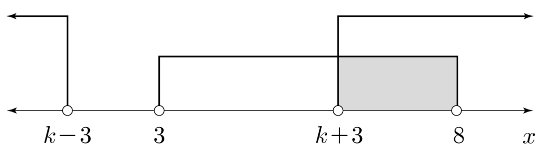
$= 3\alpha^2 + k - (k+3)\alpha + 3\beta^2 + k - (k+3)\beta$
$= 5\alpha - (k+3)\alpha + 5\beta - (k+3)\beta$
$= 5(\alpha+\beta) - (k+3)(\alpha+\beta)$
$= (\alpha+\beta)(2-k)$
$= \dfrac{5}{3}(2-k)$
$= -10$
이고 $2-k=-6$ 이다.
따라서 $k=8$ 이다.

27. [출제의도] 연립부등식 문제 해결하기

$x^2-11x+24=(x-3)(x-8)<0$ 이므로
$3<x<8$ 이다.
$x^2-2kx+k^2-9$
$=x^2-2kx+(k-3)(k+3)$
$=\{x-(k-3)\}\{x-(k+3)\}>0$ 이므로
$x<k-3$ 또는 $x>k+3$ 이다.
ⅰ) $3<k-3<8$ 인 경우
$k>6$ 이므로 $k+3>9$ 이다.



연립부등식의 해가 $3<x<k-3$ 이므로
$(k-3)-3=2$, $k=8$ 이다.
ⅱ) $3<k+3<8$ 인 경우
$k<5$ 이므로 $k-3<2$ 이다.



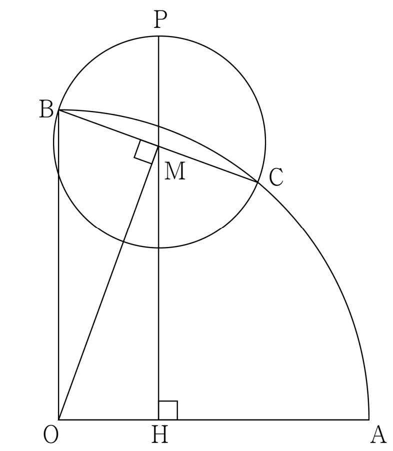
연립부등식의 해가 $k+3<x<8$ 이므로
$8-(k+3)=2$, $k=3$ 이다.
따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 모든 k의 값의 합은
$8+3=11$ 이다.

28. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 이용하여 다항식 추론하기

$f(x)g(x)$ 를 $f(x)-2x^2$ 으로 나누었을 때의 몫은
x^2-3x+3 이고 나머지는 $f(x)+xg(x)$ 이므로
$f(x)g(x)$
$=\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)+f(x)+xg(x)$ ⋯ ㉠
이다.
㉠의 좌변이 삼차식이므로 우변도 삼차식이다.
$\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)$ 이 삼차식이므로
$f(x)-2x^2$ 은 일차식이고
나머지 $f(x)+xg(x)$ 는 상수이다.
$f(x)-2x^2=ax+b$ 라 하면
나머지 $f(x)+xg(x)=(2x^2+ax+b)+xg(x)$ 는
상수이므로 $g(x)=-2x-a$ 이고 $f(x)+xg(x)=b$ 이다.
㉠에 $f(x)=2x^2+ax+b$, $g(x)=-2x-a$ 를
대입하면
$(2x^2+ax+b)(-2x-a)$
$=(ax+b)(x^2-3x+3)+b$ ⋯ ㉡
이다.
㉡의 좌변의 최고차항의 계수가 -4 이므로 $a=-4$ 이다.
㉡의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
$0=(-8+b)\times 1+b$ 에서 $b=4$ 이다.
따라서 $f(x)=2x^2-4x+4$ 이므로 $f(-2)=20$ 이다.

29. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

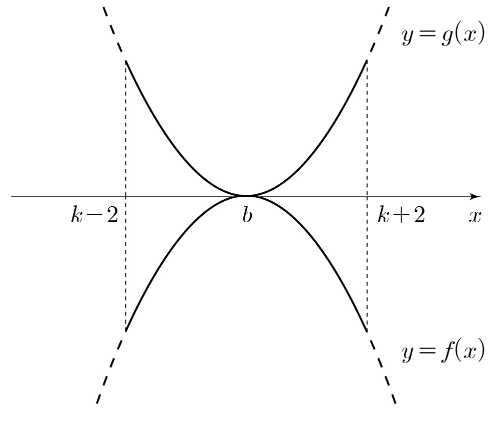
선분 BC 의 중점을 M 이라 하고 점 M 을 지나고
직선 OB 에 평행한 직선이 선분 OA 와 만나는 점을
H 라 하자.
$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$ 인 이등변삼각형 OBC 에서
점 M 이 선분 BC 의 중점이므로 $\angle \mathrm{OMB}=90^\circ$ 이다.



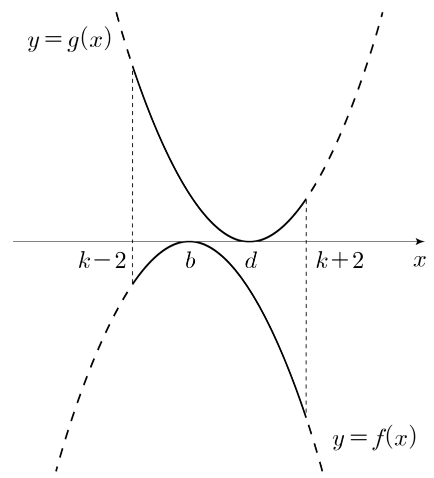
삼각형 OAP 의 넓이 $S(x)$ 는
$S(x)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PH}}$
$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times(\overline{\mathrm{MH}}+\overline{\mathrm{PM}})$ ⋯ ㉠
이다.
$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{x}{2}$ 이므로
직각삼각형 OMB 에서
$\overline{\mathrm{OM}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{BM}}^2$
$=1-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=1-\dfrac{x^2}{4}$ 이다.
$\angle \mathrm{OMH}=\angle \mathrm{BOM}$ 이므로
$\triangle\mathrm{OHM}\backsim\triangle\mathrm{BMO}$
이다. 그러므로
$\overline{\mathrm{MH}}:\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{OM}}:\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OM}}:1$ 이고
$\overline{\mathrm{MH}}=\overline{\mathrm{OM}}^2=1-\dfrac{x^2}{4}$ ⋯ ㉡
이다. ㉠, ㉡에서
$S(x)=\dfrac{1}{2}\times 1\times\left(1-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$
$=-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+\dfrac{5}{8}$ $(0<x<\sqrt{2})$
$S(x)$ 의 최댓값은 $\dfrac{5}{8}$ 이므로 $p=8$, $q=5$ 이다.
따라서 $p+q=13$ 이다.

30. [출제의도] 이차함수 추론하기

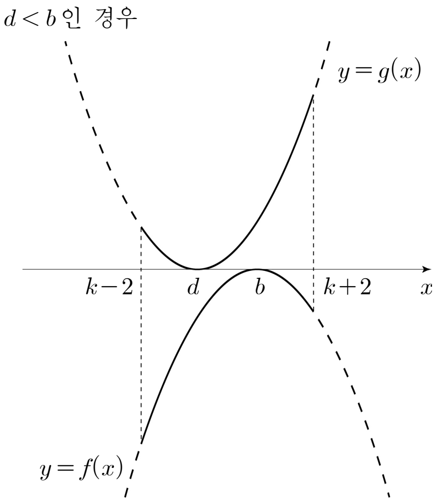
조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\le 0$ 이므로
함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수이고 최댓값은
0 보다 작거나 같다.
조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\ge 0$ 이므로
함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값은
0 보다 크거나 같다.
조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 함수 $g(x)$ 의
최솟값이 같아지기 위해서는 함수 $f(x)$ 의 최댓값과
함수 $g(x)$ 의 최솟값이 모두 0 이어야 한다. 그러므로
$f(x)=a(x-b)^2$ $(a<0)$ ⋯ ㉠
$g(x)=c(x-d)^2$ $(c>0)$ ⋯ ㉡
이라 하자.
ⅰ) $b=d$ 인 경우



$k-2\le b\le k+2$ 에서 $b-2\le k\le b+2$ 이므로 k 의
최솟값이 0, 최댓값이 1 이 되도록 하는 실수 b 는
존재하지 않는다.
ⅱ) $b<d$ 인 경우



k 의 최솟값이 0, 최댓값이 1 이고
$k-2\le b$, $d\le k+2$ 에서 $d-2\le k\le b+2$ 이므로
$b=-1$, $d=2$ 이다.
㉠에 $b=-1$ 을 대입하고 ㉡에 $d=2$ 를 대입하면
$f(x)=a(x+1)^2$, $g(x)=c(x-2)^2$ 이다.
방정식 $f(x)=f(0)$ 은 $a(x+1)^2=a$ 이고
$(x+1)^2=1$, $x^2+2x=0$ 에서 모든 실근의 합은
-2 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.
$f(1)=4a=-2$ 에서 $a=-\dfrac{1}{2}$ 이고 $g(1)=c=2$ 이다.
$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2$, $g(x)=2(x-2)^2$ 이므로
$f(3)=-8$, $g(11)=162$ 이다.
그러므로 $f(3)+g(11)=154$ 이다.
ⅲ) $d<b$ 인 경우



k 의 최솟값이 0, 최댓값이 1 이고
$k-2\le d$, $b\le k+2$ 에서 $b-2\le k\le d+2$ 이므로
$b=2$, $d=-1$ 이다.
㉠에 $b=2$ 를 대입하고 ㉡에 $d=-1$ 을 대입하면
$f(x)=a(x-2)^2$, $g(x)=c(x+1)^2$ 이다.
방정식 $f(x)=f(0)$ 은 $a(x-2)^2=4a$ 이고
$(x-2)^2=4$, $x^2-4x=0$ 에서 모든 실근의 합은
4 이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.
따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $f(3)+g(11)=154$ 이다.
[참고] 조건 (다)에 의해 b 는 음수이므로 함수
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.