• 수학 영역 •

수학 정답

1	⑤	2	③	3	②	4	①	5	④
6	⑤	7	①	8	②	9	③	10	④
11	②	12	⑤	13	②	14	③	15	③
16	3	17	16	18	113	19	80	20	36
21	13	22	2						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}}=(3^3\times 2)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}=3^1\times 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}$

$=3\times 2^2=12$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=3x^2-6x+1$ 이므로 $f'(3)=27-18+1=10$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}=\frac{1}{2}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

$=\frac{1}{2}\times f'(3)=\frac{1}{2}\times 10=5$

3. [출제의도] 삼각함수의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 계산한다.

$\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$ 에서

$\sin\theta+\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$ 이므로 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{3}{4}$ 이고 $\cos\theta>0$ 이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$

$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}(2x+a)=6+a$,

$\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)=2-a$

이므로 $6+a=2-a$, $a=-2$

5. [출제의도] 부정적분을 이해하여 적분상수의 값을 구한다.

$f'(x)=3x^2+2x$ 에서

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x)dx$

$=x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=1+1+C=6$ 이므로 $C=4$이다.

따라서 $f(0)=C=4$

6. [출제의도] 등비수열의 합을 이해하여 항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>1)$이라 하면

$S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}$, $S_2=\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$ 이므로

$\frac{S_4}{S_2}=\frac{r^4-1}{r^2-1}=r^2+1=5$, $r^2=4$

$r>1$ 이므로 $r=2$

$a_5=a_1\times r^4=a_1\times 16=48$이므로 $a_1=3$

$a_4=a_1\times r^3=3\times 8=24$

따라서 $a_1+a_4=3+24=27$

7. [출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 구간의 길이의 최댓값을 구한다.

$f'(x)=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=5$

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$-1\le a<b\le 5$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 감소한다. 따라서 $b-a$의 최댓값은 $5-(-1)=6$

8. [출제의도] 곱의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)+g(0)=1$

$f(0)=4$ 이므로 $g(0)=-3$이다.

㉠의 양변을 미분하면

$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$ … ㉡

㉡에 $x=0$을 대입하면 $f(0)+f'(0)-g(0)+g'(0)=9$

따라서 $f'(0)+g'(0)=9-f(0)+g(0)=9-4+(-3)=2$

9. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

두 점 $(0, 0)$, $(\log_2 9, k)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{k-0}{\log_2 9-0}=\frac{k}{2\log_2 3}$

직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$ 의 기울기는

$-\frac{\log_4 3}{\log_9 8}=-\frac{\frac{1}{2}\log_2 3}{\frac{3}{2}\log_3 2}=-\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}$

두 직선이 서로 수직이므로

$\frac{k}{2\log_2 3}\times\left(-\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}\right)=-1$, $k=6\log_3 2$

따라서 $3^k=3^{6\log_3 2}=3^{\log_3 2^6}=2^6=64$

10. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각 $t\,(t\ge 0)$에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(t)=t^3-3t^2-2t$, $x_2(t)=-t^2+6t$

$x_1(t)-x_2(t)=t^3-2t^2-8t=t(t+2)(t-4)=0$에서

두 점 P, Q가 다시 만날 때의 시각은 $t=4$이다.

점 Q가 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$\int_0^4|v_2(t)|dt=\int_0^4|-2t+6|dt$

$=\int_0^3|-2t+6|dt+\int_3^4|-2t+6|dt$

$=\int_0^3(-2t+6)dt+\int_3^4(2t-6)dt$

$=\left[-t^2+6t\right]_0^3+\left[t^2-6t\right]_3^4=9+1=10$

11. [출제의도] 등차수열을 이해하여 등차수열의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\,(d<0)$이라 하자.

a_6, d가 모두 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

$d=a_6-a_5=-2-a_5$이고 $d<0$이므로 $a_5>-2$

즉, $a_5=-1$ 또는 a_5는 음이 아닌 정수이다.

(i) $a_5=-1$일 때

$d=-2-a_5=-1$ 이므로 $a_n=-n+4$

$\sum_{k=1}^{8}a_k=-4$, $\sum_{k=1}^{8}|a_k|=16$ 이므로

$\sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42$ …… ㉠

이 성립하지 않는다.

(ii) a_5는 음이 아닌 정수일 때

$n\le 5$일 때 $a_n\ge 0$이고 $|a_n|=a_n$

$n\ge 6$일 때 $a_n<0$이고 $|a_n|=-a_n$

㉠에서 $-a_6-a_7-a_8=a_6+a_7+a_8+42$

$a_6+a_7+a_8=-21$

$a_6+(a_6+d)+(a_6+2d)=-21$, $a_6+d=-7$

$a_6=-2$ 이므로 $d=-5$

(i), (ii)에서 $d=-5$ 이고 $a_1=a_6-5d=-2+25=23$

이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{8\times\{2\times 23+7\times(-5)\}}{2}=44$

12. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 극댓값을 구하는 문제를 해결한다.

$g(x)=\int_{-4}^{x}f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$이므로

$g'(x)=\begin{cases}3x^2+3x+a & (x<0)\\ 3x+a & (x\ge 0)\end{cases}$

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$g'(2)=6+a=0$ 에서 $a=-6$ 이다.

$g'(x)=\begin{cases}3(x+2)(x-1) & (x<0)\\ 3(x-2) & (x\ge 0)\end{cases}$

$g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

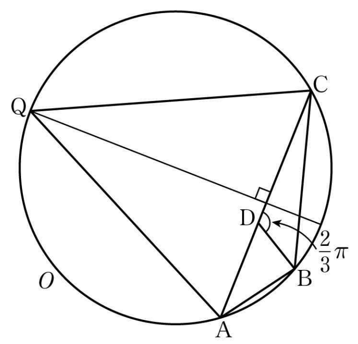
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$ 의 극댓값은

$g(-2)=\int_{-4}^{-2}(3t^2+3t-6)dt=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\right]_{-4}^{-2}=26$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원에 관한 문제를 해결한다.

점 B를 포함하지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점을 R이라 하자. P=R일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로 Q=R이다.



$\cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$ 이므로

$\cos(\angle CQA)=\cos(\pi-\angle ABC)=-\cos(\angle ABC)=\frac{5}{8}$

$\overline{QA}=\overline{QC}=6\sqrt{10}$ 이므로

삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{QA}^2+\overline{QC}^2-2\times\overline{QA}\times\overline{QC}\times\cos(\angle CQA)$

$=(6\sqrt{10})^2+(6\sqrt{10})^2-2\times 6\sqrt{10}\times 6\sqrt{10}\times\frac{5}{8}=270$

$\overline{AB}=a\,(a>0)$이라 하면 $2\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{BC}=2a$ 이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=a^2+(2a)^2-2\times a\times 2a\times\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{15}{2}a^2$

$\frac{15}{2}a^2=270$ 에서 $a=6$

삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 CDB에서 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}=\frac{2a}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$

따라서 $R=4\sqrt{3}$

14. [출제의도] 다항함수의 그래프를 이용하여 교점의 개수를 추론한다.

$x>0$에서 $f(x)=x^3-3x^2+5$ 이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=5$ 이고 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 이다.

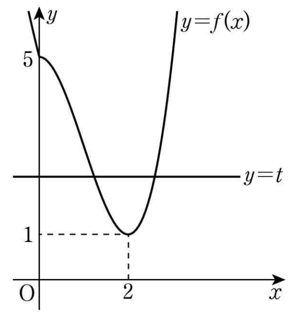
$f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(2)=1$ 이다.

$x \le 0$에서 $f(x)=x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2=(x-a)^2-\frac{3}{4}a^2+b^2$

이고 $f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2$

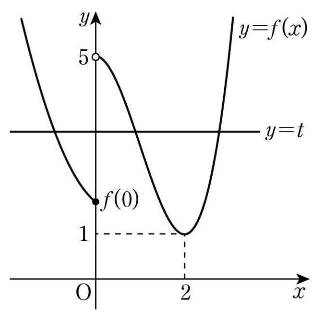
(ⅰ) $a \ge 0$인 경우

① $f(0)=5$인 경우



함수 $g(t)$는 $t=1$에서만 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는 1이다.

② $f(0) \ne 5$인 경우



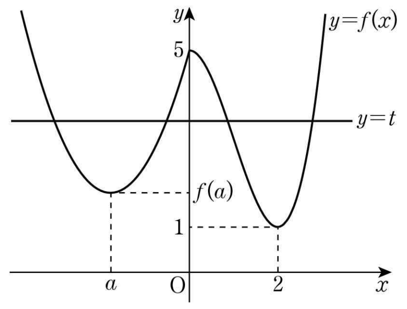
함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(0)$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되려면 $f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2=1$이다.

$\frac{a^2}{4}=0$, $b^2=1$ 또는 $\frac{a^2}{4}=1$, $b^2=0$

을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$

(ⅱ) $a<0$인 경우

① $f(0)=5$인 경우

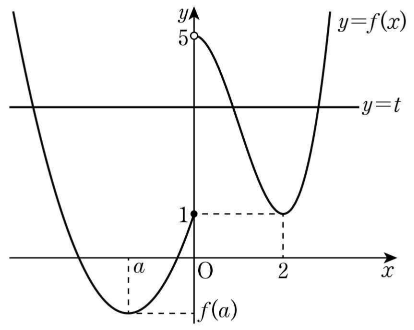


함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(a)$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되려면

$f(a)=-\frac{3}{4}a^2+b^2=1$, $f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2=5$이다.

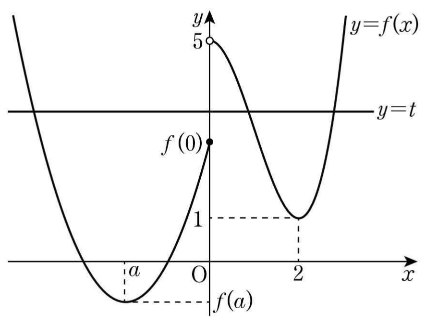
$a^2=4$, $b^2=4$를 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-2, 2)$, $(-2, -2)$

② $f(0)=1$인 경우



$f(a)<1<5$이고 함수 $g(t)$는 $t=f(a)$, $t=1$, $t=5$에서 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 3이다.

③ $f(0) \ne 1$이고 $f(0) \ne 5$인 경우



$g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(0)$에서 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는 3 이상이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$로 5

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.

$a_4 \le 4$이면 $a_5=10-a_4=5$에서 $a_4=5$이므로 $a_4 \le 4$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $a_4>4$이고 $a_4=a_5$에서 $a_4=5$이다.

$a_3>3$일 때, $a_3=a_4$에서 $a_3=5$이고

$a_3 \le 3$일 때, $a_4=7-a_3=5$에서 $a_3=2$이다.

(ⅰ) $a_3=5$인 경우

① $a_2>2$이면 $a_2=a_3$에서 $a_2=5$이다.

$a_1>1$일 때, $a_1=a_2$에서 $a_1=5$이고

$a_1 \le 1$일 때, $a_2=1-a_1=5$에서 $a_1=-4$이다.

② $a_2 \le 2$이면 $a_3=4-a_2=5$에서 $a_2=-1$이다.

$a_1>1$일 때, $a_1=a_2=-1$이므로 $a_1>1$을 만족시키지 않는다.

$a_1 \le 1$일 때, $a_2=1-a_1=-1$에서 $a_1=2$이므로 $a_1 \le 1$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_3=2$인 경우

① $a_2>2$이면 $a_2=a_3$에서 $a_2=2$이므로 $a_2>2$를 만족시키지 않는다.

② $a_2 \le 2$이면 $a_3=4-a_2=2$에서 $a_2=2$이다.

$a_1>1$일 때, $a_1=a_2$에서 $a_1=2$이고

$a_1 \le 1$일 때, $a_2=1-a_1=2$에서 $a_1=-1$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=5$ 또는 $a_1=-4$ 또는 $a_1=2$ 또는 $a_1=-1$이다. 따라서 구하는 모든 a_1의 값의 곱은 $5\times(-4)\times2\times(-1)=40$

16. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구한다.

$4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$에서 $2^{2x}=(2^{-1})^{x-9}$, $2^{2x}=2^{-x+9}$

지수함수의 성질에 의하여 $2x=-x+9$, $x=3$

17. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$\int_0^2(3x^2-2x+3)dx-\int_2^0(2x+1)dx$

$=\int_0^2(3x^2-2x+3)dx+\int_0^2(2x+1)dx$

$=\int_0^2\{(3x^2-2x+3)+(2x+1)\}dx$

$=\int_0^2(3x^2+4)dx=\left[x^3+4x\right]_0^2=2^3+4\times2=16$

18. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 항을 구한다.

$\sum_{k=1}^{10}a_k=A$, $\sum_{k=1}^{9}a_k=B$라 하면 $\sum_{k=1}^{9}2a_k=2\sum_{k=1}^{9}a_k=2B$

$A+B=137$, $A-2B=101$

에서 $A=125$, $B=12$이다.

따라서 $a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k=A-B=113$

19. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(0)=2$, $f(2)=2a$

$f'(x)=3x^2-5x+a$에서 $f'(0)=a$, $f'(2)=a+2$

직선 l의 방정식은 $y=f'(0)x+f(0)$

$y=ax+2$ …… ㉠

직선 m의 방정식은 $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=(a+2)x-4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 직선 l, m이 만나는 점의 좌표는 $(3, 3a+2)$이고 이 점이 x축 위에 있으므로 $3a+2=0$

$a=-\frac{2}{3}$이므로 $f(2)=2\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

따라서 $60\times|f(2)|=60\times\left|-\frac{4}{3}\right|=80$

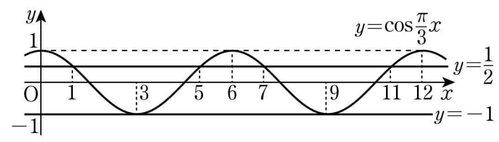
20. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구하는 문제를 해결한다.

$f(g(x))=g(x)$에서 $g(x)=t\ (-1 \le t \le 1)$이라 하면

$f(t)=t$에서 $2t^2+2t-1=t$, $(2t-1)(t+1)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=-1$이므로 $g(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $g(x)=-1$

함수 $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$의 주기는 6이고, $g(1)=g(5)=\frac{1}{2}$, $g(3)=-1$이다.



그러므로 $0 \le x < 12$에서 $g(7)=g(11)=\frac{1}{2}$, $g(9)=-1$이다. 따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은 $1+3+5+7+9+11=36$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 점 $\mathrm{C}\left(k, \frac{19}{2}\right)$라 할 때, 점 C는 선분 AB의 중점이다.

두 곡선 $y=a^x+2$, $y=\log_a x+2$를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 점 A′, B′도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 C를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 $\mathrm{C}'\left(k, \frac{15}{2}\right)$가 선분 A′B′의 중점이므로 점 C′은 직선 $y=x$ 위에 있다. 그러므로 $k=\frac{15}{2}$이다.

넓이가 $\frac{121}{2}\pi$인 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{A'C'}}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$

이고 직선 A′B′의 기울기가 -1이므로

점 A′의 좌표는 $\left(\frac{15}{2}-\frac{11}{2}, \frac{15}{2}+\frac{11}{2}\right)=(2, 13)$

점 $\mathrm{A}'(2, 13)$이 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로 $a^2=13$

22. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수를 추론한다.

$h(x)=x^3-3x+8$이라 하면 $f(x)=|h(x)|$

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	1	…
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값은 $h(-1)=10$이고 극솟값은 $h(1)=6$이다.

$y=h(x)$의 극솟값이 양수이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.

즉 방정식 $h(x)=0$은 한 개의 실근 $x=a$를 갖고,

$f(x)=\begin{cases} -h(x) & (x<a) \\ h(x) & (x \ge a) \end{cases}$이다.

방정식 $f(t)=f(t+2)$ 의 해를 구하자.

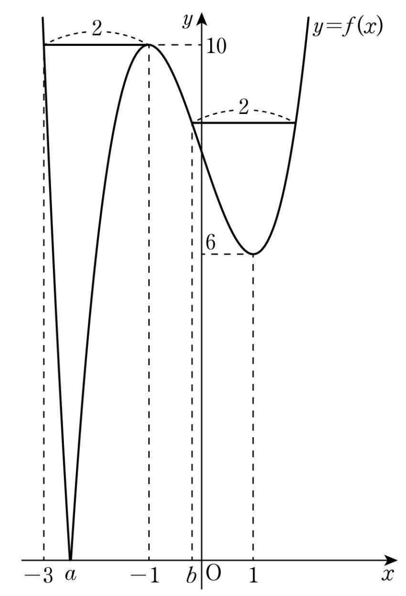
$a-2<t<a$ 일 때, $-t^3+3t-8=(t+2)^3-3(t+2)+8$

$t^3+3t^2+3t+9=(t+3)(t^2+3)=0$ 에서 $t=-3$

$t \le a-2$ 또는 $t \ge a$ 일 때,

$t^3-3t+8=(t+2)^3-3(t+2)+8$, $3t^2+6t+1=0$ 에서

$t=\dfrac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$ 이다. $\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}=b$ 라 하면 $b>-1$



$t<-3$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(t)$ 이므로 $g(t)=f(t)$ 이다.

$-3\le t\le -1$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(-1)=10$ 이므로 $g(t)=10$ 이다.

$-1<t\le b$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(t)$ 이므로 $g(t)=f(t)$ 이다.

$b<t$ 일 때, 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(t+2)$ 이므로 $g(t)=f(t+2)$ 이다.

즉 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} -t^3+3t-8 & (t<-3) \\ 10 & (-3\le t\le -1) \\ t^3-3t+8 & (-1<t\le b) \\ t^3+6t^2+9t+10 & (b<t) \end{cases}$$

$\lim\limits_{t\to -3-} g(t)=10=g(-3)=\lim\limits_{t\to -3+} g(t)$

$\lim\limits_{t\to -1-} g(t)=10=g(-1)=\lim\limits_{t\to -1+} g(t)$

$\lim\limits_{t\to b-} g(t)=g(b)=\lim\limits_{t\to b+} g(t)$

이므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\lim_{t\to -3-}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=\lim_{t\to -3-}\frac{(t+3)(-t^2+3t-6)}{t+3}=\lim_{t\to -3-}(-t^2+3t-6)=-24$$

$$\lim_{t\to -3+}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=0$$

이므로 $g(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다.

$$\lim_{t\to -1-}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=0$$

$$\lim_{t\to -1+}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=\lim_{t\to -1+}\frac{(t+1)(t^2-t-2)}{t+1}=\lim_{t\to -1+}(t^2-t-2)=0$$

이므로 $g(t)$ 는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$$\lim_{t\to b-}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}=\lim_{t\to b-}\frac{(t-b)(t^2+bt+b^2-3)}{t-b}=\lim_{t\to b-}(t^2+bt+b^2-3)=3b^2-3$$

$$\lim_{t\to b+}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}=\lim_{t\to b+}\frac{(t-b)\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}}{t-b}=\lim_{t\to b+}\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}=3b^2+12b+9$$

$b>-1$ 이므로 $3b^2-3\ne 3b^2+12b+9$

즉 $g(t)$는 $t=b$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $\alpha=-3$, $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 이고 $\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

따라서 $m=3$, $n=-1$ 이므로 $m+n=2$

[확률과 통계]

23	①	24	⑤	25	②	26	④	27	③
28	②	29	117	30	90				

23. [출제의도] 중복조합의 수를 계산한다.

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

24. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3이므로 2가지, 남은 세 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 3가지이므로 ${}_3\Pi_3=27$

홀수의 개수는 $2\times 27=54$

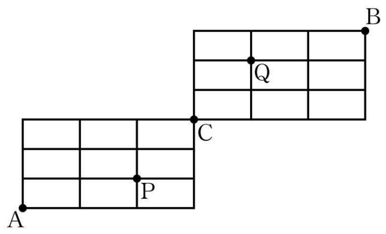
25. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

여학생 2명을 한 사람으로 보고 6명을 배열하는 원순열의 수는 $(6-1)!=120$

여학생 2명의 자리를 정하는 방법의 수는 $2!$

구하는 경우의 수는 $120\times 2!=240$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.



오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!\,1!}=3$

마찬가지 방법으로 P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{1!\,2!}=3$

A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $3\times 3=9$ …… ㉠

마찬가지 방법으로 C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!\,3!}=20$

C 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같으므로 9

C 지점에서 B 지점까지 Q 지점을 지나지 않고 최단 거리로 가는 경우의 수는 $20-9=11$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 구하는 경우의 수는

$9\times 11=99$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 3개의 상자에 적힌 수 중 홀수가 1개이거나 홀수가 3개인 경우이다.

(ⅰ) 홀수가 적힌 상자가 1개인 경우

홀수가 적힌 상자 1개와 짝수가 적힌 상자 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2=4\times 3=12$

선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{3!}=1$

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$ 이므로

$12\times 1\times 12=144$

(ⅱ) 홀수가 적힌 상자가 3개인 경우

홀수가 적힌 상자 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$

선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{3!}=1$

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$ 이므로

$4\times 1\times 12=48$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$144+48=192$

28. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

$720=2^4\times 3^2\times 5$이다.

(ⅰ) $b=1$인 경우

$ac=2^4\times 3^2\times 5$이므로 a, c는 $2^4\times 3^2\times 5$의 약수이다.

가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4\times 3^2\times 5$의 약수의 개수와 같으므로

$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=5\times 3\times 2=30$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로

2^4이 a 또는 c의 약수이고

3^2이 a 또는 c의 약수이고

5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는

${}_2\Pi_3=8$

서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $30-8=22$

(ⅱ) $b=2$인 경우

$ac=2^2\times 3^2\times 5$이므로 a, c는 $2^2\times 3^2\times 5$의 약수이다.

가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^2\times 3^2\times 5$의 약수의 개수와 같으므로

$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)=3\times 3\times 2=18$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로

2^2이 a 또는 c의 약수이고

3^2이 a 또는 c의 약수이고

5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는

${}_2\Pi_3=8$

서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $18-8=10$

(ⅲ) $b=3$인 경우

$ac=2^4\times 5$이므로 a, c는 $2^4\times 5$의 약수이다.

가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4\times 5$의 약수의 개수와 같으므로 $(4+1)\times(1+1)=5\times 2=10$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로

2^4이 a 또는 c의 약수이고

5가 a 또는 c의 약수인 순서쌍 (a, c)의 개수는

${}_2\Pi_2=4$

서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $10-4=6$

(ⅳ) $b=4$인 경우

$ac=3^2\times 5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(3, 15)$ 또는 $(15, 3)$이므로 순서쌍의 개수는 2

(ⅴ) $b=6$인 경우

$ac=2^2\times 5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(2, 10)$ 또는 $(10, 2)$이므로 순서쌍의 개수는 2

(ⅵ) $b=12$인 경우

조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.

(ⅰ) ~ (ⅵ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$22+10+6+2+2=42$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

(ⅰ) 1명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

남은 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 2개, 1개씩

나누어 주는 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_1C_1\times 2!=6$

조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 1명의 학생에게 사탕 2개, 초콜릿 1개를 받은 1명의 학생에게 사탕 1개를 나누어주고, 남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이므로 $3\times6\times6=108$

(ii) 2명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

남은 1명의 학생에게 초콜릿 3개를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 2명의 학생에게 사탕을 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 사탕 1개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_1={}_3C_1=3$

이므로 $3\times1\times3=9$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$108+9=117$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (다)를 만족시키는 a, b에 대하여 $a<b$라고 하자.

(i) $a\in\{1,2,3\}$, $b\in\{1,2,3\}$인 경우

$f(a)>f(b)$이므로 조건 (가)에 모순이다.

(ii) $a\in\{1,2,3\}$, $b\in\{4,5\}$인 경우

가능한 (a,b)의 순서쌍은

$(1,4)$, $(1,5)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$

이 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍은

$(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$뿐이다.

① $f(2)=5$, $f(5)=2$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5H_1\times{}_1H_1=5$

조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이므로 함수 f의 개수는

$5\times3=15$

② $f(3)=4$, $f(4)=3$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4H_2={}_5C_2=10$

조건 (나)에 의하여 $f(5)=2$

이므로 함수 f의 개수는 $10\times1=10$

③ $f(3)=5$, $f(5)=3$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5H_2={}_6C_2=15$

조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$이므로 함수 f의 개수는

$15\times2=30$

$f(2)=5$, $f(5)=2$이고 $f(3)=4$, $f(4)=3$이면 조건 (가)에 모순이므로 ①과 ②의 경우에서 중복되는 경우는 없다.

(iii) $a\in\{4,5\}$, $b\in\{4,5\}$인 경우

$f(4)=5$, $f(5)=4$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5H_3={}_7C_3=35$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$15+10+30+35=90$

[미적분]

23	①	24	③	25	⑤	26	④	27	②
28	③	29	270	30	84				

23. [출제의도] 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=\frac{\frac{1}{3}}{-1}=-\frac{1}{3}$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}na_n=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{2b_n}{n}}=\frac{1+3}{2\times3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

25. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$2n+3<a_n<2n+4$에서 $\frac{2n+3}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{2n+4}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1}=\frac{2}{1}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{1}=\frac{2}{1}=2$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}\right)^2+6}{\frac{a_n}{n}}=\frac{2^2+6}{2}=5$$

26. [출제의도] 수열의 극한을 이해하여 등차수열의 일반항을 구한다.

$a_{n+1}-a_n=a_1+2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 (a_1+2)인 등차수열이다.

$a_n=a_1+(n-1)\times(a_1+2)=(a_1+2)n-2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a_1+5)n-4}{(a_1+1)n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+5-\frac{4}{n}}{a_1+1-\frac{1}{n}}=\frac{2a_1+5}{a_1+1}=3$$

이므로 $a_1=2$

$a_{10}=(2+2)\times10-2=38$

27. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 3이므로

$a_n=3+(n-1)\times3=3n$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k(b_k)^2=n^3-n+3$이라 하면 $n\ge2$일 때,

$a_n(b_n)^2=S_n-S_{n-1}=(n^3-n+3)-\{(n-1)^3-(n-1)+3\}$

$=3n^2-3n=3n(n-1)$

$(b_n)^2=n-1$

$n=1$일 때, $S_1=a_1(b_1)^2=3$에서 $(b_1)^2=1$

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$b_n=\sqrt{n-1}\ (n\ge2)$, $b_1=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_nb_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n-1}\sqrt{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}\sqrt{2-\frac{1}{n}}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

28. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

$x^2+n^2-1=2nx$에서

$x^2-2nx+(n+1)(n-1)=0$

$(x-n-1)(x-n+1)=0$이므로

$A_n(n-1,\ 2n^2-2n)$, $B_n(n+1,\ 2n^2+2n)$이라 하자.

$\overline{A_nB_n}=\sqrt{2^2+(4n)^2}=\sqrt{16n^2+4}=2\sqrt{4n^2+1}$

원의 중심 $(2,0)$과 직선 $2nx-y=0$ 사이의 거리는 $\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}$이므로 점 P와 직선 $2nx-y=0$ 사이의 거리를 h라 하면 $\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}-1\le h\le\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1$

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{A_nB_n}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{4n^2+1}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)$$

$=4n+\sqrt{4n^2+1}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+\sqrt{4n^2+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1}$$

$=4+\sqrt{4}=6$

29. [출제의도] 도형의 성질을 활용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

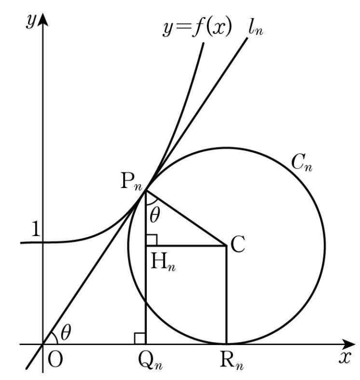
양의 실수 t에 대하여 점 $P_n(t,\ f(t))$라 하면

$f'(t)=\frac{f(t)}{t}$, $\frac{12t^3}{n^3}=\frac{4t^3}{n^3}+1$, $t^3=\frac{n^3}{8}$, $t=\frac{n}{2}$

$P_n\left(\frac{n}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 직선 l_n의 방정식은 $y=\frac{3}{n}x$

원 C_n의 중심을 C라 하고 두 점 P_n, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n이라 하자. 점 C에서 선분 P_nQ_n에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

$\angle CP_nO=\angle OQ_nP_n=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle P_nOQ_n=\angle CP_nH_n$



$\overline{OP_n}=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}$ 이고,

$\angle P_nOQ_n=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{\overline{OQ_n}}{\overline{OP_n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+9}}$

$\overline{P_nC}=\overline{CR_n}=\overline{H_nQ_n}=r_n$, $\overline{P_nQ_n}=\frac{3}{2}$ 이므로

$\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nH_n}+\overline{H_nQ_n}=r_n\times\cos\theta+r_n=\frac{3}{2}$

$$r_n=\frac{3}{2(1+\cos\theta)}=\frac{3\sqrt{n^2+9}}{2(\sqrt{n^2+9}+n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=\lim_{n\to\infty}n^2\times\left(\frac{6\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{n^2+9}+n}-3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3\sqrt{n^2+9}-3n}{\sqrt{n^2+9}+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}3n^2\left\{\frac{9}{(\sqrt{n^2+9}+n)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+1\right)^2}=\frac{27}{4}$$

이므로 $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=270$

30. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함숫값을 구한다.

$x>0$일 때, 함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0<x<m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n=0$이므로 $g(x)=x$

(ii) $x=m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n=1$이므로

$$g(m)=\frac{f(m)+m}{2}$$

(iii) $x>m$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{x}\right)^n=0$이므로

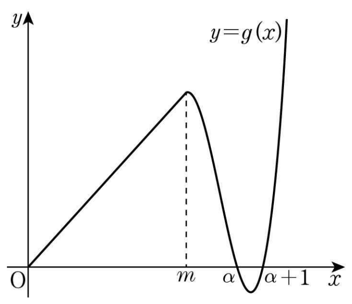
$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+x\times\left(\frac{m}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{m}{x}\right)^n}=f(x)$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} x & (0<x<m) \\ \dfrac{f(m)+m}{2} & (x=m) \\ f(x) & (x>m) \end{cases}$$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x=m$에서 미분가능하고 연속이므로 $1=f'(m)$, $m=f(m)$

조건 (나)에서 $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로 $g(x)=0$을 만족시키는 자연수 x는 연속된 2개의 자연수이다. 이 두 자연수를 α, $\alpha+1$이라 하면 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, $\alpha+1$, β라 하자.

(i) $g(m)<g(m+1)$일 때,

$g'(m+1)\le 0$이므로 조건 (다)에서 $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은 $m+1$, $m+2$, $m+3$이므로 $\alpha=m+3$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta)\\&=(x-m-3)(x-m-4)(x-\beta)\\&=\{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}(x-\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)=&(2x-2m-7)(x-\beta)\\&+\{x^2-(2m+7)x+m^2+7m+12\}\end{aligned}$$

$f'(m)=-7(m-\beta)+12$

$f'(m)=1$이므로 $-7(m-\beta)+12=1$, $m-\beta=\dfrac{11}{7}$

$m=f(m)=12(m-\beta)=\dfrac{132}{7}$이므로 모순이다.

(ii) $g(m)\ge g(m+1)$일 때,

조건 (다)에서 $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은 m, $m+1$, $m+2$이므로 $\alpha=m+2$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\beta)\\&=(x-m-2)(x-m-3)(x-\beta)\\&=\{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}(x-\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)=&(2x-2m-5)(x-\beta)\\&+\{x^2-(2m+5)x+m^2+5m+6\}\end{aligned}$$

$f'(m)=-5(m-\beta)+6$

$f'(m)=1$이므로 $-5(m-\beta)+6=1$, $m-\beta=1$

$m=f(m)=6(m-\beta)=6$

$m=6$일 때, $f(x)=(x-5)(x-8)(x-9)$에서

$g'(m+1)=f'(m+1)=-4$이므로 조건 (가)를 만족시키고, $g(m)=f(m)\ge f(m+1)=g(m+1)$이다.

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=(x-5)(x-8)(x-9)$이므로

$g(12)=f(12)=7\times4\times3=84$

[기하]

23	③	24	②	25	⑤	26	④	27	①
28	③	29	29	30	150				

23. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 초점 사이의 거리를 계산한다.

타원 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=17-8=9$에서 $c=3$

두 초점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$이므로

두 초점 사이의 거리는 6

24. [출제의도] 포물선의 정의를 이해하여 점의 좌표를 구한다.

포물선 $y^2=20x$의 초점의 좌표를 $(p, 0)$이라 하면 $4p=20$에서 $p=5$이므로 초점의 좌표는 $(5, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-5$이다.

포물선 $y^2=20x$ 위의 점 P의 x좌표를 t라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=15$이므로 포물선의 정의에 의하여

$15=5+t$, $t=10$

25. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 주축의 길이를 구한다.

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하자. 점근선의 방정식에서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$이므로

$a=4k$, $b=3k$ $(k>0)$이라 하자.

쌍곡선의 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면, $2c=30$, $c=15$

$c^2=a^2+b^2=25k^2=15^2$에서 $k^2=9$, $k=3$

$a=4k=4\times3=12$이므로 주축의 길이는 $2a=24$

26. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

포물선 C가 원점을 지나므로

$(a-1)^2=1$, $a=0$ 또는 $a=2$ …… ㉠

포물선 C의 초점의 x좌표는 $\dfrac{a+b}{4}-\dfrac{1}{a+b}$이고, 준선의 방정식은 $x=-\dfrac{a+b}{4}-\dfrac{1}{a+b}$이므로 이 포물선의 초점과 준선 사이의 거리는

$\left|\dfrac{a+b}{4}-\left(-\dfrac{a+b}{4}\right)\right|=2$, $\left|\dfrac{a+b}{2}\right|=2$, $|a+b|=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=0$인 경우 $b=4$ 또는 $b=-4$

$a=2$인 경우 $b=2$ 또는 $b=-6$

$a-b$의 최댓값 M은 $M=2-(-6)=8$

$a-b$의 최솟값 m은 $m=0-4=-4$

이므로 $M-m=8-(-4)=12$

27. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하여 선분의 길이를 구한다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=-1$의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$ $(c>0)$이라 하면 $c^2=7+9=16$에서 $c=4$

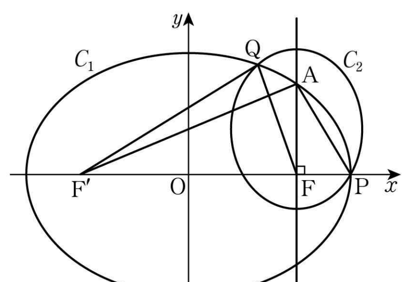
점 $(0, 1)$을 A라 하면 $\overline{\mathrm{FA}}=3$, $\overline{\mathrm{F'A}}=5$

각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{F'P}}=3:5$

$\overline{\mathrm{FP}}=3l$, $\overline{\mathrm{F'P}}=5l$ $(l>0)$이라 하면, 쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로 $\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}=5l-3l=2l=6$, $l=3$

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=8l=8\times3=24$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



$\cos(\angle\mathrm{FF'A})=\dfrac{12}{13}$이므로 양의 실수 a에 대하여

$\overline{\mathrm{F'A}}=13a$, $\overline{\mathrm{F'F}}=12a$라 하면 $\overline{\mathrm{FA}}=5a$

타원 C_1의 장축의 길이가 18이므로 $\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{F'A}}=18$

$13a+5a=18$, $18a=18$, $a=1$

$\overline{\mathrm{FA}}=5a=5$, $\overline{\mathrm{FP}}=\dfrac{18-12a}{2}=3$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FA}}^2+\overline{\mathrm{FP}}^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

타원 C_2의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{34}+3$

점 Q는 타원 C_1 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}}=18$

점 Q는 타원 C_2 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{34}+3$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{AQ}}&=(\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}})-(\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{FQ}})\\&=18-(\sqrt{34}+3)=15-\sqrt{34}\end{aligned}$$

29. [출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

포물선 $y^2=-x$의 준선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{4}$이다.

점 P의 x좌표를 s라 하면 점 P는 포물선 $x^2=ay$ 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $\left(s,\ \dfrac{1}{a}s^2\right)$

점 Q의 x좌표를 t라 하면 점 Q는 포물선 $x^2=ay$ 위의 점이므로 점 Q의 좌표는 $\left(t,\ \dfrac{1}{a}t^2\right)$

직선 PQ의 기울기가 $2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{\frac{1}{a}s^2-\frac{1}{a}t^2}{s-t}=2\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{a}(s+t)=2\sqrt{2}$ …… ㉠

점 P는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$\left(\dfrac{1}{a}s^2\right)^2=8s$, $s^3=8a^2$ …… ㉡

점 Q는 포물선 $y^2=-x$ 위의 점이므로

$\left(\dfrac{1}{a}t^2\right)^2=-t$, $t^3=-a^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $s^3=-8t^3$, $s=-2t$, $t=-\dfrac{1}{2}s$

㉠에서 $\dfrac{s}{2a}=2\sqrt{2}$, $s=4\sqrt{2}a$

㉡에서 $(4\sqrt{2}a)^3=8a^2$, $a=\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$

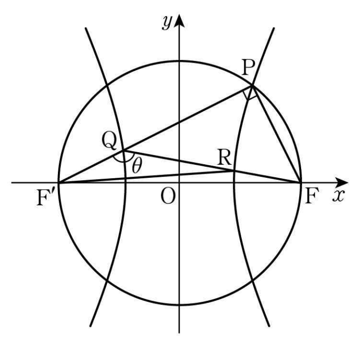
$s=\dfrac{1}{4}$, $t=-\dfrac{1}{8}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F_1P}}+\overline{\mathrm{F_2Q}}&=|s-(-2)|+\left|\frac{1}{4}-t\right|\\&=\left|\frac{1}{4}-(-2)\right|+\left|\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right|=\frac{21}{8}\end{aligned}$$

이므로 $p=8$, $q=21$

$p+q=8+21=29$

30. [출제의도] 쌍곡선과 원의 관계를 추론하여 삼각형의 넓이를 구한다.



$\overline{\mathrm{F'Q}}=k$ $(k>0)$이라 하자.

점 Q가 선분 F′P를 $1:2$로 내분하므로

$\overline{\mathrm{QP}}=2k$, $\overline{\mathrm{F'P}}=3k$

점 P와 Q는 초점이 F′, F이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{FP}}=3k-6$, $\overline{\mathrm{FQ}}=k+6$

$\angle\mathrm{F'PF}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 PQF에서

$(2k)^2+(3k-6)^2=(k+6)^2$, $k=4$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$, $\overline{\mathrm{FP}}=6$, $\overline{\mathrm{FQ}}=10$

$\overline{\mathrm{QR}}=t$ $(t>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{FR}}=10-t$

점 R은 초점이 F′, F이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{F'R}}=16-t$

$\angle\mathrm{F'QR}=\theta$라 하자.

$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{\overline{\mathrm{QP}}}{\overline{\mathrm{FQ}}}=\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

삼각형 QF′R에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{4^2+t^2-(16-t)^2}{2\times4\times t}=-\dfrac{4}{5}$, $t=\dfrac{25}{4}$

삼각형 QF′R의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{25}{4}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{25}{4}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{15}{2}$

$20S=150$