• 2교시 수학 영역 •

1	②	2	①	3	⑤	4	④	5	③
6	③	7	②	8	③	9	④	10	①
11	⑤	12	②	13	④	14	①	15	①
16	③	17	⑤	18	④	19	②	20	⑤
21	④	22	4	23	15	24	7	25	8
26	12	27	18	28	16	29	14	30	30

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$8^{-\frac{1}{2}} \div \sqrt{2} = (2^3)^{-\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f(x)=x^3+x^2-5$라 하면 $f'(x)=3x^2+2x$

곡선 $y=x^3+x^2-5$ 위의 점 $(1,\ -3)$에서의

접선의 기울기는 $f'(1)=5$

3. [출제의도] 등차수열 이해하기

네 수 2, a, b, 14가 이 순서대로 등차수열을

이루므로 $a-2=14-b$

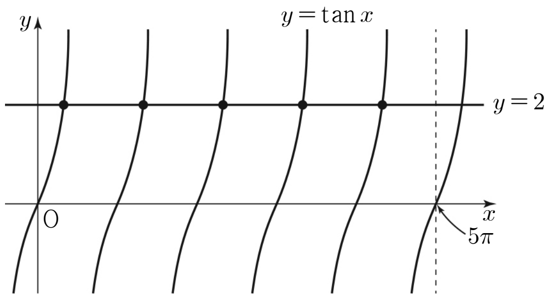
따라서 $a+b=16$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) + \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 4+2=6$

5. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $y=\tan x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0<x<5\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와

직선 $y=2$가 만나는 점의 개수는 5

6. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$에서

$a+b+1=-3b-1$

$a=-4b-2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1-}\frac{(ax^2+bx+1)-(-3b-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1-}\frac{ax^2+bx+3b+2}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1-}\frac{(-4b-2)x^2+bx+3b+2}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)\{(-4b-2)x-3b-2\}}{x-1}\\ &= -7b-4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+}\frac{(-3bx-1)-(-3b-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1+}\frac{-3b(x-1)}{x-1} = -3b\end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$-7b-4=-3b$에서 $b=-1$, $a=2$

따라서 $a+b=1$

7. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=3x^2-6x$에서

$f(x)=\int (3x^2-6x)dx$

$\quad =x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1-3+C=1$에서 $C=3$

그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=-1$

8. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

함수 $y=\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$은 x의 값이 증가하면

y의 값이 감소하고, 함수 $y=2^x+1$은 x의 값이

증가하면 y의 값도 증가한다.

곡선 $y=2^x+1$은 점 $(0,2)$를 지나므로

곡선 $y=\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$이 곡선 $y=2^x+1$과

제1사분면에서 만나기 위해서는

곡선 $y=\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$이 y축과 만나는 점의

y좌표가 2보다 커야 한다.

$\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0-m}>2$에서 $2^{m-4}>2$, $m>5$

따라서 자연수 m의 최솟값은 6

9. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$이므로

$2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\times\tan(\pi+\theta)$에서

$2\cos\theta=\sin\theta\times\tan\theta$

$2\cos\theta=\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$2\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $2(1-\sin^2\theta)=\sin^2\theta$

따라서 $\sin^2\theta=\frac{2}{3}$

10. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_0^2 f(t)dt=a$라 하면 $f(x)=x+a$

$$\begin{aligned}a=\int_0^2 f(t)dt &= \int_0^2 (t+a)dt\\ &= \left[\frac{1}{2}t^2+at\right]_0^2 = 2+2a\end{aligned}$$

에서 $a=-2$이므로 $f(x)=x-2$

따라서 $f(3)=1$

11. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$a_4+a_5=2(a_6+a_7)+3(a_8+a_9)$에서

$a_1r^3+a_1r^4=2(a_1r^5+a_1r^6)+3(a_1r^7+a_1r^8)$

$a_1r^3(1+r)=2a_1r^5(1+r)+3a_1r^7(1+r)$

$3r^4+2r^2-1=0$, $(3r^2-1)(r^2+1)=0$

$3r^2-1=0$에서 $r^2=\frac{1}{3}$

$a_3=a_1r^2$이므로 $6=a_1\times\frac{1}{3}$

따라서 $a_1=18$

12. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

$g'(0)=-2f(0)$, $g'(2)=2f(2)$

$g'(0)+g'(2)=2\{-f(0)+f(2)\}=16$

따라서 $f(2)-f(0)=8$

13. [출제의도] $\sum$의 성질 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{10}(3a_k+1)=3\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+10=40$에서 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=10$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}b_k &= \sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)-a_k\}\\ &= \sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}a_k\\ &= \frac{10\times 11}{2}-10=45\end{aligned}$$

14. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

$m-6$의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

m의 값에 관계없이 1이므로 $f(3)=1$

$f(2)+f(3)+f(4)=3$에서 $f(2)+f(4)=2$

$m-4$의 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

$m>4$이면 2, $m=4$이면 1, $m<4$이면 0이다.

$m-8$의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

$m>8$이면 2, $m=8$이면 1, $m<8$이면 0이다.

$f(2)=0$ 또는 $f(2)=1$이면 $f(4)=0$이므로

$f(2)+f(4)=2$이기 위해서는 $f(2)=2$, $f(4)=0$

이어야 한다.

그러므로 $4<m<8$

따라서 구하는 모든 자연수 m의 값의 합은

$5+6+7=18$

15. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$n=1$일 때, $a_1+S_1=2a_1=k$에서 $a_1=\frac{k}{2}$

$n\ge 2$일 때,
$$\begin{aligned}a_n &= S_n-S_{n-1}\\ &= (k-a_n)-(k-a_{n-1})\\ &= -a_n+a_{n-1}\end{aligned}$$

이므로 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}\,(n\ge 2)$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{k}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인

등비수열이므로 $a_6=\frac{k}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{k}{64}$

$S_6=189$이므로 $a_6+S_6=k$에서 $\frac{k}{64}+189=k$

따라서 $k=192$

16. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$x<0$일 때, $\left|\frac{2}{x}-3\right|=-\frac{2}{x}+3>3$이므로

$x<0$에서 함수 $y=\left|\frac{2}{x}-3\right|$의 그래프와

직선 $y=t\,(0<t<3)$은 만나지 않는다.

$0<x<\frac{2}{3}$일 때, $\left|\frac{2}{x}-3\right|=\frac{2}{x}-3$

$\frac{2}{x}-3=t$에서 $x=\frac{2}{3+t}$

$x \ge \frac{2}{3}$일 때, $\left|\frac{2}{x}-3\right| = -\frac{2}{x}+3$

$-\frac{2}{x}+3=t$에서 $x=\frac{2}{3-t}$

그러므로 $f(t)=\frac{2}{3-t}-\frac{2}{3+t}=\frac{4t}{(3-t)(3+t)}$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{t}\times\frac{4t}{(3-t)(3+t)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{4}{(3-t)(3+t)}=\frac{4}{9}$$

17. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

$-4\log_a b=54\log_b c=\log_c a=k$라 하면

$k^3=-4\log_a b\times 54\log_b c\times\log_c a$

$=-\frac{4\log b}{\log a}\times\frac{54\log c}{\log b}\times\frac{\log a}{\log c}$

$=-216$

에서 $k=-6$

$b=a^{-\frac{k}{4}}=a^{\frac{3}{2}}$, $c=a^{\frac{1}{k}}=a^{-\frac{1}{6}}$

이므로 $b\times c=a^{\frac{3}{2}}\times a^{-\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{3}}$

1이 아닌 자연수 a에 대하여 $a^{\frac{4}{3}}$의 값이 자연수가 되기 위해서는 어떤 자연수 $n(n>1)$에 대하여 $a=n^3$이어야 한다.

$a^{\frac{4}{3}}=\left(n^3\right)^{\frac{4}{3}}=n^4\le 300$

에서 가능한 자연수 n의 값은 2, 3, 4뿐이다.

따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$2^3+3^3+4^3=8+27+64=99$

18. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AB}}=k$라 하면 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=2k$

점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\frac{k}{2}$

점 N은 선분 AC를 3:5로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AN}}=2k\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}k$

$\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{AB}}=k$이므로 삼각형 AMN에서

코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}k\right)^2-k^2}{2\times\frac{k}{2}\times\frac{3}{4}k}=-\frac{1}{4}$$

이므로 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 AMN의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 $\pi R^2=16\pi$에서 $R=4$

삼각형 AMN에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{MN}}}{\sin A}=2R$에서 $\frac{k}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=8$, $k=2\sqrt{15}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{15}\times 4\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=15\sqrt{15}$

19. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

$f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

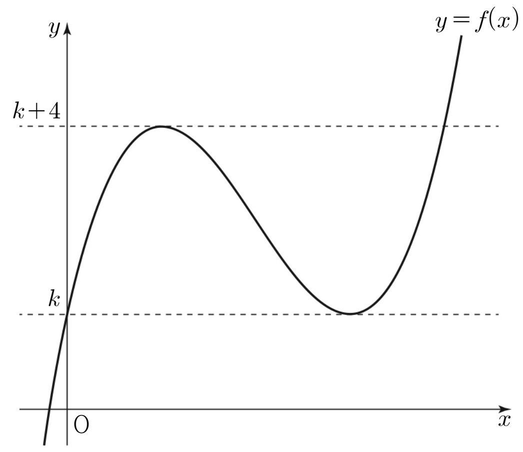
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$k+4$	↘	k	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $k+4$, $x=3$에서 극솟값 k를 갖는다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



a_n은 직선 $y=3n$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수이므로

$$a_n=\begin{cases}1 & (3n<k \text{ 또는 } 3n>k+4)\\ 2 & (3n=k \text{ 또는 } 3n=k+4)\\ 3 & (k<3n<k+4)\end{cases}$$

어떠한 실수 k에 대해서도 $k=3m$과 $k+4=3l$을 동시에 만족시키는 두 정수 m, l은 존재하지 않으므로 $a_n=2$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 1 이하이다.

또한 가능한 a_n의 값은 1, 2, 3뿐이므로

$\sum_{n=1}^{4}a_n=7$이기 위해서는 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4의 값 중 1은 2개, 2는 1개, 3은 1개이어야 한다.

그러므로 $a_n=2$를 만족시키는 n의 개수는 1이다.

(ⅰ) k의 값이 3, 6, 9, 12 중 하나인 경우

$k=3$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=2+3+1+1=7$

$k=6$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=1+2+3+1=7$

$k=9$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=1+1+2+3=7$

$k=12$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=1+1+1+2=5\ne 7$

(ⅱ) $k+4$의 값이 3, 6, 9, 12 중 하나인 경우

$k+4=3$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=2+1+1+1=5\ne 7$

$k+4=6$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=3+2+1+1=7$

$k+4=9$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=1+3+2+1=7$

$k+4=12$일 때, $\sum_{n=1}^{4}a_n=1+1+3+2=7$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $(3+6+9)+(2+5+8)=33$

20. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

ㄱ. $f(x)=x^3-11x^2+24x+36$에서

$f'(x)=3x^2-22x+24$이므로 $f'(0)=24$ (참)

ㄴ. 두 점 $(0, 0)$, $(6, f(6))$을 지나는

직선의 기울기는 $\frac{f(6)}{6}=0$

$f'(k)=\frac{f(6)}{6}=0$에서

$3k^2-22k+24=0$, $(3k-4)(k-6)=0$

$k=\frac{4}{3}$ 또는 $k=6$

$\frac{4}{3}$와 6 중 작은 값이 $\frac{4}{3}$이므로 $g(6)=\frac{4}{3}$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

양의 실수 t에 대하여 두 점 $(0, 0)$, $(t, f(t))$를 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(t)}{t}$는 $t=6$에서 최솟값 0을 갖는다.

또한 함수 $\frac{f(t)}{t}$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이고, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\infty$이므로

$\left\{\frac{f(t)}{t}\,\middle|\,t>0\right\}=\{y\,|\,y\ge 0\}$이다.

한편 $f'(0)=24$이므로

$\frac{f(t)}{t}\ge 24$이면 $f'(k)=\frac{f(t)}{t}$를 만족시키는 양의 실수 k의 개수는 1이고,

$0\le\frac{f(t)}{t}<24$이면 $f'(k)=\frac{f(t)}{t}$를 만족시키는 양의 실수 k의 개수는 2이다.

$\frac{f(t)}{t}=24$에서 $t^3-11t^2+36=0$

$(t-2)(t^2-9t-18)=0$

$t>0$이므로 $t=2$ 또는 $t=\frac{9+3\sqrt{17}}{2}$

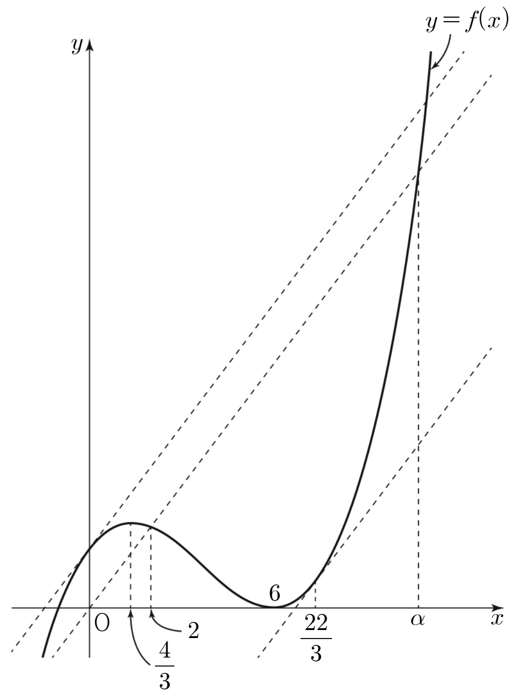
이제 $\alpha=\frac{9+3\sqrt{17}}{2}$이라 하자.

$f'(x)=24$에서

$3x^2-22x+24=24$, $3x\left(x-\frac{22}{3}\right)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{22}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $0<t\le 2$ 또는 $t\ge\alpha$일 때

$\frac{f(t)}{t}\ge 24$이므로 $f'(k)=\frac{f(t)}{t}$를 만족시키는 양의 실수 k는 오직 1개 존재한다.

그 k의 값을 k_1이라 하면 $g(t)=k_1$이며

$k_1 \ge \dfrac{22}{3}$이다.

그러므로

$\{g(t)\,|\,0<t\le 2$ 또는 $t\ge\alpha\}\subset\left\{k\,\middle|\,k\ge\dfrac{22}{3}\right\}$ … ㉠

또한 $k\ge\dfrac{22}{3}$인 실수 k에 대하여

$f'(k)\ge 24$이며 $f'(k)=\dfrac{f(t)}{t}$인

두 양의 실수 t_1, $t_2(0<t_1\le 2,\ t_2\ge\alpha)$가 존재한다.

이때 $\dfrac{f(t_1)}{t_1}=f'(x)$를 만족시키는

양의 실수 x의 값은 k뿐이므로 $g(t_1)=k$

그러므로

$\left\{k\,\middle|\,k\ge\dfrac{22}{3}\right\}\subset\{g(t)\,|\,0<t\le 2$ 또는 $t\ge\alpha\}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\left\{k\,\middle|\,k\ge\dfrac{22}{3}\right\}=\{g(t)\,|\,0<t\le 2$ 또는 $t\ge\alpha\}$

(ii) $2<t<6$ 또는 $6<t<\alpha$일 때

$0<\dfrac{f(t)}{t}<24$이므로 $f'(k)=\dfrac{f(t)}{t}$를

만족시키는 양의 실수 k가 2개 존재한다.

그 k의 값을 k_2, $k_3(k_2<k_3)$이라 하면

$g(t)=k_2$이며 $0<k_2<\dfrac{4}{3}$이다.

그러므로

$\{g(t)\,|\,2<t<6$ 또는 $6<t<\alpha\}$

$\subset\left\{k\,\middle|\,0<k<\dfrac{4}{3}\right\}$ … ㉢

또한 $0<k<\dfrac{4}{3}$인 실수 k에 대하여

$0<f'(k)<24$이며 $f'(k)=\dfrac{f(t)}{t}$인

두 양의 실수 t_3, $t_4(2<t_3<6<t_4<\alpha)$가 존재한다.

이때 $\dfrac{f(t_3)}{t_3}=f'(x)$를 만족시키는

양의 실수 x의 값은 2개이고, 그중 k가 아닌

값을 s라 하면 $6<s<\dfrac{22}{3}$이므로 $g(t_3)=k$

그러므로

$\left\{k\,\middle|\,0<k<\dfrac{4}{3}\right\}$

$\subset\{g(t)\,|\,2<t<6$ 또는 $6<t<\alpha\}$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$\left\{k\,\middle|\,0<k<\dfrac{4}{3}\right\}$

$=\{g(t)\,|\,2<t<6$ 또는 $6<t<\alpha\}$

(iii) $t=6$일 때

ㄴ에 의하여 $g(6)=\dfrac{4}{3}$이므로 $\left\{\dfrac{4}{3}\right\}=\{g(t)\,|\,t=6\}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $g(t)$의 치역은

$\left\{k\,\middle|\,0<k\le\dfrac{4}{3}\ \text{또는}\ k\ge\dfrac{22}{3}\right\}$

그러므로 함수 $g(t)$의 치역의 원소가 아닌

모든 자연수의 합은 $2+3+4+5+6+7=27$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (나)에서

a_n이 홀수이고 a_{n+1}이 홀수이면 a_{n+2}는 짝수,

a_n이 홀수이고 a_{n+1}이 짝수이면 a_{n+2}는 홀수,

a_n이 짝수이고 a_{n+1}이 홀수이면 a_{n+2}는 홀수,

a_n이 짝수이고 a_{n+1}이 짝수이면 a_{n+2}는 짝수이다.

조건 (가)에서 a_5가 홀수이므로

a_3과 a_4 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이어야 한다.

(i) a_3이 홀수이고 a_4가 짝수인 경우

a_2는 홀수이고 a_1은 짝수이다.

$a_1=2k$, $a_2=2l-1$(k, l은 자연수)라 하면

조건 (나)에 의하여

$a_1\times a_2$는 짝수이므로 $a_3=2k+2l-3$,

$a_2\times a_3$은 홀수이므로 $a_4=2k+4l-4$,

$a_3\times a_4$는 짝수이므로 $a_5=4k+6l-9$

$4k+6l-9=63$에서 $a_1=2k=36-3l$

이므로 가능한 a_1의 값은 6, 12, 18, 24, 30이다.

(ii) a_3이 짝수이고 a_4가 홀수인 경우

a_2는 홀수이고 a_1도 홀수이다.

$a_1=2p-1$, $a_2=2q-1$(p, q는 자연수)라 하면

조건 (나)에 의하여

$a_1\times a_2$는 홀수이므로 $a_3=2p+2q-2$,

$a_2\times a_3$은 짝수이므로 $a_4=2p+4q-5$,

$a_3\times a_4$는 짝수이므로 $a_5=4p+6q-9$

$4p+6q-9=63$에서 $a_1=2p-1=35-3q$

이므로 가능한 a_1의 값은 5, 11, 17, 23, 29이다.

(i), (ii)에 의하여 a_1의 최댓값은 30, 최솟값은 5

따라서 $M-m=30-5=25$

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}&=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}\\&=\lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2)=4\end{aligned}$$

23. [출제의도] 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r이라 하면

$12\pi=r\times\dfrac{4}{5}\pi$이므로 $r=12\pi\times\dfrac{5}{4\pi}=15$

24. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3+2x^2+2$에서 $f'(x)=3x^2+4x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f'(t)dt&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=f'(1)=7\end{aligned}$$

25. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

$\log_x 16=\dfrac{4}{\log_2 x}$이므로

$\log_2 x-3=\log_x 16$에서 $\log_2 x-3=\dfrac{4}{\log_2 x}$

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4=0$

$(\log_2 x-4)(\log_2 x+1)=0$

$\log_2 x=4$ 또는 $\log_2 x=-1$

$\log_2 x=4$에서 $x=16$, $\log_2 x=-1$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은 8

26. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

두 점 P, Q의 시각 $t(t>0)$에서의 속도를 각각

$v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면

$v_1(t)=3t^2-6t-24$, $v_2(t)=2t-a$

$v_1(t)=3(t+2)(t-4)=0$에서 $t=4$

$0<t<4$에서 $v_1(t)<0$, $t>4$에서 $v_1(t)>0$

이므로 점 P의 운동 방향은 시각 $t=4$에서만 바뀐다.

또한 두 점 P, Q의 운동 방향이 동시에 바뀌므로

점 Q의 운동 방향도 시각 $t=4$에서 바뀌어야 한다.

$v_2(4)=8-a=0$에서 $a=8$

따라서 $a+k=8+4=12$

27. [출제의도] 등차수열 이해하기

구하는 수열 $\{a_n\}$의 공차가 자연수이므로 $d>0$

조건 (가)에서

$a_1+7d=2(a_1+4d)+10$, $a_1=-d-10<0$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이므로

$a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을

k라 하면 $a_{k+1}\ge 0$

그러므로 $a_k\times a_{k+1}\le 0$

그런데 조건 (나)에서 $a_k\times a_{k+1}\ge 0$이므로

$a_{k+1}=0$

$a_{k+1}=(-d-10)+kd=0$에서 $k=\dfrac{10}{d}+1$

k가 자연수이므로 d는 10의 약수이다.

따라서 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은

$1+2+5+10=18$

28. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 함수 $\{f(x)\}^2g(x)$의 차수가 5이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 아래의 경우 중 하나이다.

(i) $f(x)$: 상수함수, $g(x)$: 오차함수

(ii) $f(x)$: 일차함수, $g(x)$: 삼차함수

(iii) $f(x)$: 이차함수, $g(x)$: 일차함수

조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}=2$이고

$\displaystyle\lim_{x\to0}x^5=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)\{g(x)\}^2=0$

그러므로 어떤 다항함수 $h(x)$에 대하여

$f(x)\{g(x)\}^2=x^k h(x)$ (단, k는 자연수, $h(0)\ne0$)

이때

$k<5$이면 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}$의 값이 존재하지 않고

$k>5$이면 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}=0\ne2$이므로 $k=5$

그러므로 $f(x)\{g(x)\}^2=x^5h(x)$ $(h(0)\ne0)$ … ㉠

(i) $f(x)$: 상수함수, $g(x)$: 오차함수인 경우

다항식 $f(x)\{g(x)\}^2$에서 오직 $g(x)$만이 x를

인수로 가지므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$: 일차함수, $g(x)$: 삼차함수인 경우

㉠을 만족시키기 위해서는

$f(x)=ax$, $g(x)=x^2(bx+c)$

(단, a, b, c는 음이 아닌 정수, $a\ne0$, $b\ne0$)

(iii) $f(x)$: 이차함수, $g(x)$: 일차함수인 경우

다항식 $f(x)\{g(x)\}^2$의 차수가 4이므로 ㉠을

만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$f(x)=ax$, $g(x)=x^2(bx+c)$

(단, a, b, c는 음이 아닌 정수, $a\ne0$, $b\ne0$)

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2g(x)}{x^5}&=\lim_{x\to\infty}\frac{a^2x^4(bx+c)}{x^5}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(a^2b+\frac{a^2c}{x}\right)\\&=a^2b=4\end{aligned}$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^5(bx+c)^2}{x^5}$$
$$=\lim_{x\to 0}a(bx+c)^2$$
$$=ac^2=2$$

$a^2b=4$, $ac^2=2$를 만족시키는 음이 아닌 세 정수 a, b, c는 $a=2$, $b=1$, $c=1$

그러므로 $f(x)=2x$, $g(x)=x^2(x+1)$

따라서 $f(2)+g(2)=4+4\times 3=16$

29. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

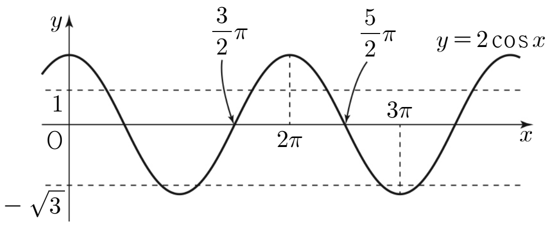
$\frac{\pi}{2}\le x\le a$인 x에 대하여

$\frac{3}{2}\pi+b\le 3x+b\le 3a+b$이므로

닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2}, a\right]$에서 함수 $f(x)=2\cos(3x+b)$의 최댓값, 최솟값은 각각

닫힌구간 $\left[\frac{3}{2}\pi+b, 3a+b\right]$에서 함수 $y=2\cos x$의 최댓값, 최솟값과 같다.

함수 $y=2\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le b\le \pi$인 b에 대하여

$\frac{3}{2}\pi\le\frac{3}{2}\pi+b\le\frac{5}{2}\pi$이므로

닫힌구간 $\left[\frac{3}{2}\pi+b, 3a+b\right]$에서 함수 $y=2\cos x$의 최댓값이 1, 최솟값이 $-\sqrt{3}$이 되도록 하는 a, b는

$2\pi<\frac{3}{2}\pi+b<\frac{5}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi<3a+b<3\pi$를 만족시켜야 한다.

닫힌구간 $\left[\frac{3}{2}\pi+b, 3a+b\right]$에서 함수 $y=2\cos x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

닫힌구간 $\left[\frac{3}{2}\pi+b, 3a+b\right]$에서

함수 $y=2\cos x$의 최댓값은 $2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+b\right)$,

최솟값은 $2\cos(3a+b)$이다.

$2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+b\right)=1$에서 $\frac{3}{2}\pi+b=\frac{7}{3}\pi$, $b=\frac{5}{6}\pi$

$2\cos(3a+b)=-\sqrt{3}$에서 $3a+b=\frac{17}{6}\pi$, $a=\frac{2}{3}\pi$

$a\times b=\frac{2}{3}\pi\times\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{9}\pi^2$

따라서 $p=9$, $q=5$이며 $p+q=14$

30. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면

$F(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

$$g(x)=\begin{cases}F(x)-4 & (x<2)\\ -F(x)+4 & (x\ge 2)\end{cases}$$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-4}{x-2}=g'(0)$이고 $\lim_{x\to 2-}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2-}\{g(x)-4\}=\lim_{x\to 2-}\{F(x)-8\}=F(2)-8=0$

그러므로 $F(2)=8$ ⋯ ㉠

또한

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{F(x)-8}{x-2}=F'(2)=f(2)$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)+4}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{-\{F(x)-8\}}{x-2}$$
$$=-F'(2)=-f(2)$$

$g'(0)=F'(0)=f(0)$

조건 (가)에 의하여 $f(2)=-f(2)=f(0)$에서

$f(2)=f(0)=0$

$f(x)=ax(x-2)(x-b)$ (a, b는 상수, $a>0$)

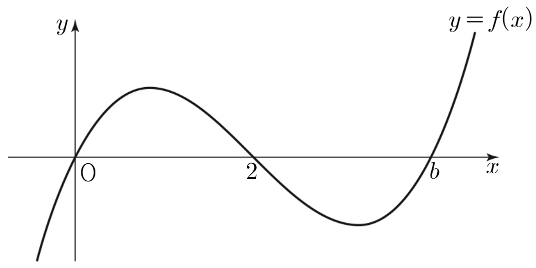
$f(x)=a\{x^3-(b+2)x^2+2bx\}$에서

$f'(x)=a\{3x^2-2(b+2)x+2b\}$

$f'(2)=a(-2b+4)<0$에서

$a>0$이므로 $-2b+4<0$, $b>2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$g'(x)=\begin{cases}f(x) & (x<2)\\ -f(x) & (x>2)\end{cases}$$

$f(x)=ax(x-2)(x-b)$ ($a>0$, $b>2$)에 대하여

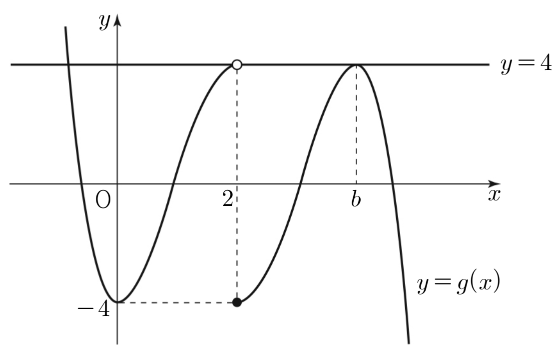
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	b	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	-4	↗		↗	$g(b)$	↘

$\lim_{x\to 2-}g(x)=4$, $\lim_{x\to 2+}g(x)=g(2)=-4$

조건 (나)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 두 점에서 만나야 하므로 $g(b)=4$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g(b)=-\int_0^b f(t)dt+4=4$에서 $\int_0^b f(t)dt=0$

$$\int_0^b at(t-2)(t-b)dt$$
$$=\int_0^b a\{t^3-(b+2)t^2+2bt\}dt$$
$$=a\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{b+2}{3}t^3+bt^2\right]_0^b$$
$$=a\left(\frac{b^4}{4}-\frac{b+2}{3}\times b^3+b^3\right)$$
$$=ab^3\left(\frac{b}{4}-\frac{b+2}{3}+1\right)=0$$

$3b-4(b+2)+12=0$에서 $b=4$

㉠에 의하여 $\int_0^2 f(t)dt=8$

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 at(t-2)(t-4)dt$$
$$=a\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+4t^2\right]_0^2$$
$$=4a=8$$

에서 $a=2$이므로 $f(x)=2x(x-2)(x-4)$

따라서 $f(5)=30$