한양대학교 2023학년도 편입학전형 문제지

수 학

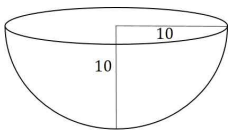
문제 유형

A

1. 문제지 상단의 문제 유형을 표시하시오.

① A형 ② B형

2. 반지름이 $10m$인 반구 모양의 수조에 $3m^3/\sec$의 속도로 물을 채운다. 수위가 $5m$일 때 물이 차오르는 속도는 $v\,m/\sec$이다. $\frac{1}{v\pi}$의 값은? [4점]



① 10 ② 15 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

3. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!}$에 대해 $\int_0^{\sqrt{\ln 4}} f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

4. 미분가능한 함수 f에 대해 $g(s,t)=f(s^3-t^3,t^3-s^3)$이다. $g_s(1,2)=3$일 때 $\frac{\partial g}{\partial t}(1,2)$의 값은? [3점]

① -12 ② -9 ③ -6 ④ -3 ⑤ 0

5. xz-평면 위에 중심이 $(2,0,0)$이고 반지름이 1인 원을 z축 중심으로 회전하여 얻은 곡면을 S라 하자. S위의 점 $\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 단위법선벡터를 $< a,b,c >$ 라 할 때 $|2a+b-c|$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

6. 점 $(1,0), (2,0), (0,1), (0,2)$를 꼭짓점으로 가지는 평면 위의 사다리꼴 영역을 D라 할 때

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA = \frac{q}{p}\left(e - e^{-1}\right)$$

이다. 서로소인 두 자연수 p와 q에 대해 $p \times q$의 값은? [4점]

① 6 ② 10 ③ 12 ④ 18 ⑤ 21

7. $\alpha(t) = < 2\sin t, 2\cos t, t >$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ 로 표현되는 매개변수 곡선 C에 대해 $\int_C 15x^3y^2\, ds$의 값은? [4점]

① $16\sqrt{5}$ ② $32\sqrt{5}$ ③ $64\sqrt{5}$

④ $84\sqrt{5}$ ⑤ $128\sqrt{5}$

8. $r(t) = < e^t \sin t,\ e^t \cos t,\ t >$, $0 \le t \le \pi$ 로 표현되는 곡선 C와 벡터장 $F(x,y,z) = < y^3, 3xy^2 + 2ye^z, y^2e^z >$ 에 대해 $(0,1,0)$에서 $(0, -e^{\pi}, \pi)$로의 선적분 $\int_C F \bullet dr$의 값은? [4점]

① $e^{3\pi} - 1$ ② $e^{4\pi} + 1$ ③ $e^{5\pi} - 1$

④ $e^{6\pi} + 1$ ⑤ $e^{7\pi} - 1$

9. 평면 $y+z=2$와 원기둥 $x^2+y^2=1$의 교차곡선 C와 벡터장 $F(x,y,z)=<y^3, x, z^4>$에 대한 선적분 $\int_C F \cdot dr$의 값은? (단, C는 xy평면 위에서 바라보았을 때 시계 반대 방향인 향을 가진다.) [5점]

① $\frac{\pi}{8}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

10. 차수가 3이하인 다항식들의 벡터공간 P_3에 대하여, P_3에서 P_3으로의 선형사상 T를

$$T(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0) = (a_0+a_1)x^3+2a_2x^2+(a_3-a_0)x+3a_1-a_2$$

라 하자. P_3의 기저 $\{x^3+x^2, x^2, x+1, 1\}$에 대한 T의 행렬표현을 A라 할 때, A의 두 번째 행의 모든 성분들의 합은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

11. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$의 영공간(null space)의 기저가 $\{(a, b, 5, 0), (c, d, 0, 1)\}$이면 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$의 값은? [3점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

12. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$와 벡터 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^3\boldsymbol{v}=a_1A\boldsymbol{v}+a_0\boldsymbol{v}$일 때, a_0-a_1의 값은? [4점]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

[13~14] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

직교행렬(orthogonal matrix) $U=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$을 이용하여

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$를 대각화할 수 있다. (단, $a, b > 0$)

행렬 A의 스펙트럼 분해(spectral decomposition)는

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$$

이고, 행렬 A^{2023}의 스펙트럼 분해는

$$A^{2023} = \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \mu_3 Q_3$$

이다. (단, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$이고 $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$)

13. $a+b+c+d$의 값은? [4점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-2+\sqrt{2}$ ③ 0
④ $2-\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

14. $\det Q_1 - \lambda_2 + \mu_3$의 값은? (단, $\det Q_1$은 Q_1의 행렬식이다.) [4점]

① $3^{2023}-5$ ② $3^{2023}-4$ ③ $3^{2023}-3$
④ $3^{2023}-2$ ⑤ $3^{2023}-1$

15. 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$의 행렬식의 값은? [4점]

① -720 ② -360 ③ -180
④ 180 ⑤ 360

16. 미분방정식 $3x^2 + 4xy + (2y+2x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$의 해 $y(x)$가 초기조건 $y(0)=1$을 만족할 때, $\{y(2)\}^2 + 8y(2)$의 값은? [4점]

① -12 ② -7 ③ -2 ④ 3 ⑤ 8

17. 미분방정식 $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=e^{-t}$의 해 $y(t)$가 조건 $y(0)=3$, $y'(0)=3$을 만족할 때, $y(1)$의 값은? [4점]

① $5e^{-1}$ ② $\frac{13}{2}e^{-1}$ ③ $8e^{-1}$
④ $\frac{19}{2}e^{-1}$ ⑤ $11e^{-1}$

18. 길이가 1이고, 일정한 단면을 갖는 균질한 철사의 양 끝의 온도가 0℃로 고정된다고 하자.

철사의 열 확산율은 $\frac{1}{\pi^2}$이고, 초기 온도가

$$2\sin(3\pi x)+5\sin(8\pi x),\ (0\le x\le 1)$$

이라고 한다. 열 방정식의 해가 $u(x,t)$일 때, $u(\frac{1}{2},1)$의 값은? [4점]

① $-3e^{-9}$ ② $-2e^{-9}$ ③ $-e^{-8}$
④ $2e^{-3}$ ⑤ $5e^{-3}$

19. 미분방정식 $x^2y''+xy'+y=\ln x$, $(x>0)$의 해 $y(x)$가 조건 $y(1)=e$, $y(e^{\pi/2})=\pi$를 만족할 때, $y(e^{\pi})$의 값은? [5점]

① $\pi-2e$ ② $\pi-e$ ③ $\pi+2e$
④ $2\pi+e$ ⑤ $2\pi+2e$

20. 미분방정식 $ty''-ty'+y=2$의 해 $y(t)$가 조건 $y(0)=2$, $y'(0)=-4$를 만족할 때, $y(-5)+y(5)$의 값은? [4점]

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

21. 미분방정식 $y' = 0.02y + 10^5 \sin t$의 해 $y(t)$가 초기조건 $y(0) = 10^6$을 만족할 때, $\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{10^5 \times e^{0.02t}}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{27450}{2503}$ ② $\frac{27485}{2503}$ ③ $\frac{27485}{2501}$

④ $\frac{27500}{2501}$ ⑤ $\frac{27510}{2501}$

※ 아래 주관식 문제 [22-26]의 정답 표기는 답안지의 「주관식 답란 표기방법」을 참조하시오.

22. $\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx = ae^{\pi} - b$ 일 때 $(a^2 + b^2) \times 100$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

23. 곡면 $z = 1 - x^2$과 세 평면 $z = 0$, $y = 0$, $z = 2 - y$에 의해 둘러싸인 유한한 입체의 경계면 S와 벡터장 $F(x,y,z) = \langle 2xy^2, y^3 + e^{xz}, \cos(xy) \rangle$에 대해 $\iint_S F \cdot dS = \frac{q}{p}$라 하자. p, q가 서로소인 자연수일 때 p의 값을 구하시오. [5점]

24. 4×4 행렬 A, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$가 $B = P^{-1}AP$를 만족한다. $f(x)$를 행렬 $A + 2I$의 특성다항식(characteristic polynomial)이라 할 때, $f(2)$의 절댓값을 구하시오. [4점]

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$의 고윳값 $1, 2, 3$에 대응하는 고유벡터를 각각 $\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$이라 할 때, $c+f+i$의 값을 구하시오. [4점]

26. 연립미분방정식 $\begin{cases} x'(t)=7x(t)-y(t)+6z(t) \\ y'(t)=-10x(t)+4y(t)-12z(t) \\ z'(t)=-2x(t)+y(t)-z(t) \end{cases}$의 해 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$가 초기조건 $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$를 만족할 때,

$x(1)+y(1)+z(1)$의 값은 $ae^l+be^m+ce^n$이다.

$a+b+c+l+m+n$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, l, m, n은 모두 정수이다.) [5점]

수고하셨습니다.