2023학년도 이화여자대학교 편입학전형

수학 필답고사 문제지 (유형 1)

전공(학과)	수험번호		성 명	

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험시간은 100분임.
2. 감독관의 지시가 있을 때까지 문항을 보지 말 것.
3. 시험 종료후 문제지를 가져가지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안지의 ‘답안지 작성시 유의사항’을 반드시 확인할 것.
6. 답안지에 선택과목, 수험번호와 문제지 유형을 표시하고, 답은 해당 문항별로 답란에 검은색 펜으로 표시할 것.

감독확인

이 화 여 자 대 학 교

1. 행렬 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$의 역행렬 A^{-1}를 찾으시오.

① $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$　　② $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　④ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

2. 2차원 공간상의 선형변환 T 가 다음과 같이 주어져 있다.

$$T(x,y)=(2x-y,\,x+2y)$$

꼭짓점 $A(0,0)$, $B(1,-5)$, $C(2,-1)$를 가지는 삼각형을 $\triangle ABC$라 할 때, 선형변환 T 의 상(image)으로 주어지는 새로운 삼각형 $\triangle A'B'C'$의 넓이를 구하시오.

① $\frac{9}{2}$　② $\frac{15}{2}$　③ 15　④ $\frac{45}{2}$　⑤ 45

3. 원점을 지나는 두 벡터 $\vec{u}=(-3,-5,1)$, $\vec{v}=(-3,2,1)$를 포함하는 평면을 W라 한다. 3차원 공간상 한 점 $P(5,-9,5)$와 최소거리가 되게 하는 W 위의 좌표 $Q(x,y,z)$를 구하시오.

① $(3,-9,-1)$　② $(4,-9,4)$　③ $(-6,-3,2)$
④ $(9,1,-3)$　⑤ $(0,-7,2)$

4. 다음의 특이적분(improper integral) 중 수렴하는 것을 모두 찾으시오.

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$	b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$
c. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln x}$	d. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech} x\,dx$

① a,b　② a,b,c　③ a,b,d　④ a,c,d　⑤ a,b,c,d

5. 다음의 수열 $\{x_n\}$ 중, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$이 수렴하는 수열을 모두 찾으시오.

a. $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$	b. $x_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1$
c. $x_n = 2^{\sqrt{n} - n}$	d. $x_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

① a　② a,b　③ a,c　④ a,d　⑤ a,c,d

6. 실수 수열(sequence of real numbers) $\{x_n\}, \{y_n\}$에 대하여, 다음 급수에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 찾으시오.

a. $x_n \geq 0$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n}$도 수렴한다.

b. $x_n \geq 0$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$도 수렴한다.

c. $\sum_{n=1}^{\infty} n x_n$이 수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$도 수렴한다.

d. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$이 각각 수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$도 수렴한다.

① a,c　② a,b　③ c,d　④ a,d　⑤ b,c

7. 아래에 주어진 멱급수(power series)의 수렴구간(interval of convergence)이 $(a, b]$일 때, 두 수의 곱 ab를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n 4^n}$$

① -24　② -12　③ -6　④ 6　⑤ 12

8. 주어진 행렬 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$에 대하여, $\det(B^t) + \det(\text{adj}(B))$의 값을 구하시오. 단, B^t는 B의 전치행렬(transpose matrix)이고, $\text{adj}(B)$는 B의 고전적 수반행렬(classical adjoint matrix)이다.

① -18　② 36　③ -324　④ 306　⑤ -342

9. 2차원 xy-직교좌표계 상에 놓인 타원 $4x^2+y^2=4$을 원점을 중심으로 반시계 방향으로 30° 회전시켰을 때 생긴 곡선의 방정식을 구하시오.

① $13x^2+3\sqrt{3}xy+7y^2=4$
② $13x^2+3\sqrt{3}xy+7y^2=16$
③ $7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2=4$
④ $13x^2+6\sqrt{3}xy+7y^2=16$
⑤ $7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2=16$

10. 주어진 행렬 $C=\begin{bmatrix}0&0&4\\1&0&0\\0&1&-3\end{bmatrix}$에 대하여, C^t의 특성다항식 (characteristic polynomial)을 구하시오. 단, C^t는 C의 전치행렬 (transpose matrix)이다.

① $-\lambda^3-3\lambda^2+4$
② $-\lambda^3-3\lambda^2-4$
③ $-\lambda^3-3\lambda+4$
④ $-\lambda^3-3\lambda-4$
⑤ $-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1$

11. 3차원 공간상의 두 곡면 $z=x^2+y^2$, $4x^2+y^2+z^2=9$을 동시에 지나는 곡선을 C라고 한다. 이때, 곡선 C 위의 한 점 $Q(-1,1,2)$을 통과하는 접선의 방정식을 찾으시오.

① $-\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=-z-2$
② $-\frac{x+1}{4}=y-1=\frac{z-2}{2}$
③ $\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-2}{6}$
④ $\frac{x+1}{5}=\frac{z-2}{6}, y=1$
⑤ $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{8}=\frac{z+2}{6}$

12. 3차원 공간상의 네 점 $P=(0,2,-2)$, $Q=(1,2,0)$, $R=(2,-3,-1)$, $S=(0,0,0)$를 꼭짓점으로 갖는 삼각뿔의 부피를 구하시오.

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{32}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

13. 다음 함수 중 평등 연속(uniformly continuous)인 함수를 모두 고르시오. 단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.

a. $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$

b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=e^{\cos x}$

c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin(e^{x})$

d. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\cos(x^{2})$

e. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

① a,b ② a,e ③ a,b,c ④ a,b,d ⑤ a,b,e

14. 함수 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$에 대하여 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으시오. 단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.

a. f가 미분가능하면, f는 연속이다.

b. f가 $c\in(a,b)$에서 극값(local extremum)을 가지면 $f'(c)=0$이다.

c. f가 미분가능하고 $a<c<d<b$에 대하여 $f(c)=f(d)$이면, $f'(e)=0$을 만족하는 $e\in(c,d)$가 존재한다.

d. f가 $c\in(a,b)$에서 미분 가능하고, $f'(c)>0$이면, f는 c근방(neighborhood)에서 증가(monotone increasing)한다.

e. f가 미분가능하고 $a<c<d<b$에 대하여 $f'(c)<k<f'(d)$일 때, $f'(e)=k$을 만족하는 $e\in(c,d)$가 존재한다.

① a,b,d ② a,c,e ③ a,b,e ④ a,c,d ⑤ a,d,e

15. 뚜껑이 없는 직육면체의 상자가 $18\,\mathrm{m}^3$ 넓이의 판자로 만들어졌다. 이 상자의 부피의 최댓값을 구하시오.

① $\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ 18

16. 3차원 공간($\mathbb{R}^3$)의 벡터 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$와 스칼라 c에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르시오.

a. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$
b. $(c\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})=c(\vec{u}\times\vec{v})$
c. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
d. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{u}$
e. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}-(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}$

① a,b,c ② a,b,d ③ a,b,e ④ a,c,d ⑤ a,d,e

17. 영역 $R=\{(x,y): x^2+y^2-2x \le 0,\ x^2+y^2 \ge 1\}$에 대하여, 다음의 적분값을 구하시오.

$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

① $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{9}$　② $3\sqrt{3}-\frac{2\pi}{9}$　③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{9}$
④ $\sqrt{3}-\frac{2\pi}{9}$　⑤ $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{9}$

18. 특이적분 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$의 값을 구하시오.

① $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$　② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　④ $\sqrt{\pi}$　⑤ $2\sqrt{\pi}$

19. 포물기둥 $z=2-\frac{1}{2}x^2$과 평면 $y=0$, $z=0$, $y=x$로 둘러싸인 제1팔분 공간의 영역을 R이라 하자. 다음 적분을 구하시오.

$$\iiint_R 2xyz\,dV$$

① 0　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{2}{3}$　④ 1　⑤ $\frac{4}{3}$

20. 구면 $x^2+y^2+z^2=2$의 안쪽과 포물면 $z=x^2+y^2$ 위쪽으로 둘러싸인 영역의 부피를 구하시오.

① $\frac{(4\sqrt{2}-7)\pi}{6}$　② $\frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{6}$　③ $\frac{(8\sqrt{2}-9)\pi}{6}$
④ $\frac{(4\sqrt{2}-5)\pi}{6}$　⑤ $\frac{(8\sqrt{2}+7)\pi}{6}$

※[21-30] 21번부터 30번까지의 문제는 다음 보기에서 답을 고르시오. 동일한 보기를 여러 문제에서 중복해서 사용할 수 있음.

[보기]

① -6	② -5	③ -4	④ -3	⑤ -2
⑥ -1	⑦ 0	⑧ 1	⑨ 2	⑩ 3
⑪ 4	⑫ 5	⑬ 6	⑭ 12	⑮ $\frac{7\pi}{6}$
⑯ $\frac{11\pi}{6}$	⑰ 2π	⑱ 4π	⑲ 6π	⑳ 8π

21. xy평면에 위치한 양의 방향을 가지는 곡선 C가 중심이 원점이고 반지름이 1인 원일 때, 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy$$

22. 양의 방향을 가지는 곡면

$$S = \{(x,y,z) : z = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2\}$$

와 벡터장 $\mathbf{F} = (xz+2y)\,\mathbf{i} + (3x+2yz)\,\mathbf{j} + (x^2+y^2+z^2)\,\mathbf{k}$에 대하여 아래의 선적분을 구하시오. 단, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$는 3차원 단위벡터이고, C는 곡면 S를 둘러싼 곡선이며, $\mathbf{r}$은 곡선 C의 매개변수 방정식이다.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

23. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

24. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 한 근을 ω 라 한다. 이때, $\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)^2$의 값을 구하시오.

25. 주어진 행렬 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$에 대해, $A^n = I_4$ 를 만족하는 최소의 자연수 n을 구하시오. 단, I_4 는 4×4 항등행렬(identity matrix)이다.

26. 포물면 $z=4-x^2-y^2$와 xy평면$(z=0)$으로 둘러싸인 입체의 부피를 구하시오.

27. 포물선 $y=x-x^2$와 직선 $y=0$로 둘러싸인 영역을 $x=-3$을 중심으로 돌렸을 때 생긴 회전체의 부피를 구하시오.

28. 벡터 $\vec{v}=(1,-1,2)$, $\vec{u_1}=(3,0,-4)$, $\vec{u_2}=(4,0,3)$, $\vec{u_3}=(0,1,0)$가 주어졌다. $\vec{v}=c_1\vec{u_1}+c_2\vec{u_2}+c_3\vec{u_3}$를 만족하는 실수 c_1, c_2, c_3에 대하여, $5\times(c_1+c_2+c_3)$의 값을 구하시오.

29. 다음과 같이 정의된 수열 $\{x_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} x_n$을 구하시오.

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_{n+1}^3 = x_n^2 + 4x_n - 4, \quad n = 1, 2, \cdots$$

30. 유한합 $\sum_{k=0}^{2023} \sum_{l=0}^{2023-k} \frac{(-1)^{k+l} 2023!}{k!\,l!\,(2023-k-l)!}$ 의 값을 구하시오.