# 정답 및 해설



## 수학 영역

### 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ④ | 2 | ③ | 3 | ② | 4 | ④ | 5 | ⑤ |
| 6 | ③ | 7 | ② | 8 | ① | 9 | ③ | 10 | ⑤ |
| 11 | ② | 12 | ④ | 13 | ④ | 14 | ⑤ | 15 | ⑤ |
| 16 | ③ | 17 | ① | 18 | ① | 19 | ③ | 20 | ⑤ |
| 21 | ④ | 22 | 3 | 23 | 15 | 24 | 7 | 25 | 10 |
| 26 | 8 | 27 | 91 | 28 | 121 | 29 | 17 | 30 | 82 |

### 해설

1. [출제의도] 다항식 계산하기
$A+B=(x^2-2x+1)+(2x^2+2x-2)$
$=3x^2-1$

2. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기
등식 $x^2+(a+2)x=x^2+4x+(b-1)$
$a=2$, $b=1$
따라서 $a+b=3$

3. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(a-0)^2+(3-0)^2}=4$
$a^2+9=16$ 이므로 $a^2=7$

4. [출제의도] 연립일차부등식 계산하기
$x+6\le 4x$ 에서 $x\ge 2$ ⋯ ㉠
$3x+4<x+16$ 에서 $x<6$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $2\le x<6$
정수 $x$ 는 2, 3, 4, 5
따라서 모든 정수 $x$ 의 개수는 4

5. [출제의도] 복소수 계산하기
$\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$ 이므로
$a=1$, $b=1$
따라서 $a+b=2$

6. [출제의도] 다항식의 인수분해 이해하기
$x^3+ax^2+bx+3=(x+1)^2(x+3)$ 이므로
양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a+b=12$

7. [출제의도] 선분의 외분점 이해하기
선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는
$\dfrac{2\times a-1\times(-5)}{2-1}=2a+5$
$\dfrac{2\times 1-1\times(-1)}{2-1}=3$
$(2a+5,\ 3)$이고 이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $2a+5=3$
따라서 $a=-1$

8. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기
이차방정식 $x^2+2x+7=0$ 의 서로 다른 두 근이 $\alpha$, $\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=7$
$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=(-2)^2-7=-3$

9. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기
$\begin{cases}2x-y=1 & \cdots ㉠\\ 5x^2-y^2=-5 & \cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $y=2x-1$ 을 ㉡에 대입하면
$5x^2-(2x-1)^2=-5$, $(x+2)^2=0$
$x=-2$, $y=-5$ 에서 $\alpha=-2$, $\beta=-5$
따라서 $\alpha-\beta=(-2)-(-5)=3$

10. [출제의도] 두 직선의 평행 조건 이해하기
직선 $4x-2y+1=0$ 의 기울기가 2이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기도 2이다.
기울기가 2이고 점 $(1,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=2(x-1)+a$, $2x-y+a-2=0$
$a=7$, $b=2$
따라서 $a\times b=14$

11. [출제의도] 원의 방정식 이해하기
이차함수 $y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$ 의 그래프의 꼭짓점 A의 좌표는 $(2,\ a-4)$
원 $x^2+y^2+bx+4y-17=0$ 에서
$\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+(y+2)^2=21+\dfrac{b^2}{4}$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $\left(-\dfrac{b}{2},\ -2\right)$
이차함수의 그래프의 꼭짓점 A와 원의 중심이 일치하므로 $2=-\dfrac{b}{2}$, $a-4=-2$
$a=2$, $b=-4$
따라서 $a+b=-2$

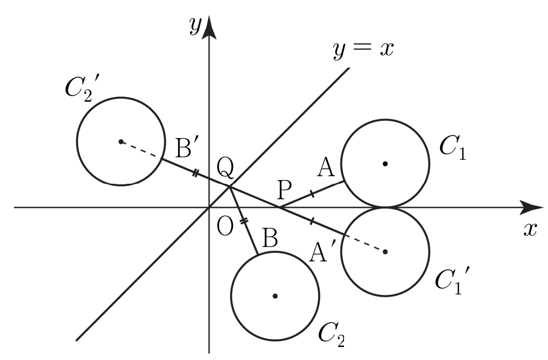
12. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기
부등식 $x^2-4x-12\le 0$ 의 해는
$(x+2)(x-6)\le 0$ 에서 $-2\le x\le 6$ ⋯ ㉠
부등식 $x^2-4x+4>0$ 의 해는
$(x-2)^2>0$ 에서 $x\ne 2$ 인 모든 실수 ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $-2\le x<2$ 또는 $2<x\le 6$
정수 $x$ 는 $-2$, $-1$, 0, 1, 3, 4, 5, 6
따라서 모든 정수 $x$ 의 개수는 8

13. [출제의도] 이차부등식 이해하기
이차방정식 $x^2+(m+2)x+2m+1=0$ 의 판별식을 $D$ 라 하자. 모든 실수 $x$ 에 대하여 이차부등식 $x^2+(m+2)x+2m+1>0$ 이 성립하기 위해서는 $D<0$ 이어야 한다.
$D=(m+2)^2-4(2m+1)<0$
$m(m-4)<0$, $0<m<4$
정수 $m$ 은 1, 2, 3
따라서 모든 정수 $m$ 의 값의 합은 $1+2+3=6$

14. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제해결하기
두 점 $(6,\ 0)$, $(0,\ 3)$을 지나는 직선 $l$ 의 방정식은 $x+2y-6=0$
정사각형 ABCD의 넓이가 $\dfrac{81}{5}$ 이므로
정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$
점 $\mathrm{A}(a,\ 6)$과 직선 $l$ 사이의 거리는 정사각형 ABCD의 한 변의 길이와 같으므로
$\dfrac{|1\times a+2\times 6-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$
$|a+6|=9$ 이므로 $a=-15$ 또는 $a=3$
따라서 $a>0$ 이므로 $a=3$

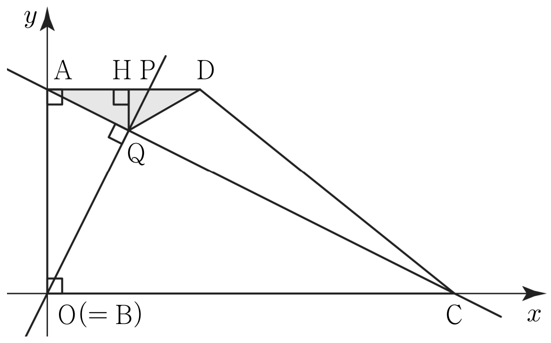
15. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기
이차함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 후, $x$ 축의 방향으로 4만큼, $y$ 축의 방향으로 $m$ 만큼 평행이동한 그래프를 함수 $y=f(x)$ 의 그래프라 하면
$f(x)=(x-4)^2+m$
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=2x+3$ 에 접하므로 이차방정식
$(x-4)^2+m=2x+3$, $x^2-10x+m+13=0$
의 판별식을 $D$ 라 하면
$D=(-10)^2-4(m+13)=0$
따라서 $m=12$

16. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기




원 $C_1$ 을 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 원을 $C_1{}'$, 원 $C_2$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 $C_2{}'$ 이라 하면
$C_1{}'$ : $(x-8)^2+(y+2)^2=4$,
$C_2{}'$ : $(x+4)^2+(y-3)^2=4$
점 A를 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 두 점 A′, B′은 각각 원 $C_1{}'$, 원 $C_2{}'$ 위의 점이다.
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QB'}}$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$ 의 값은 네 점 A′, P, Q, B′이 두 원 $C_1{}'$, $C_2{}'$ 의 중심을 연결한 선분 위에 있을 때 최소이고, 두 원 $C_1{}'$, $C_2{}'$ 의 반지름의 길이가 모두 2이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}\ge\overline{\mathrm{A'B'}}$
$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{\{8-(-4)\}^2+\{(-2)-3\}^2}-4$
$=13-4=9$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$ 의 최솟값은 9

17. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제해결하기
좌표평면에서 점 B를 원점으로 하고 점 A의 좌표를 $(0,\ 4)$, 점 C의 좌표를 $(8,\ 0)$이라 하자.




직선 AC의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$

점 $B(0,\ 0)$을 지나고 직선 AC에 수직인 직선 BP의 방정식은 $y=2x$

점 D의 좌표를 $(t,\ 4)$라 하면

점 P는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{3}t,\ 4\right)$

점 P는 직선 BP 위의 점이므로

$4=2\times\dfrac{2}{3}t,\ t=3$

점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$, 점 D의 좌표는 $(3,\ 4)$

점 Q는 두 직선 AC, BP가 만나는 점이므로

점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$

점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AQD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{QH}=\dfrac{1}{2}\times3\times\left(4-\dfrac{16}{5}\right)=\dfrac{6}{5}$

**18. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여 문제해결하기**

방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 $\alpha$, 서로 다른 두 허근을 $\beta$, $\gamma$라 하면 방정식 $P(3x-1)=0$의 세 근은 $\dfrac{\alpha+1}{3}$, $\dfrac{\beta+1}{3}$, $\dfrac{\gamma+1}{3}$

조건 (가)에 의하여 $\beta\gamma=5$ … ㉠

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{\alpha+1}{3}=0$이고 $\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma+1}{3}=2$이므로

$\alpha=-1,\ \beta+\gamma=4$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

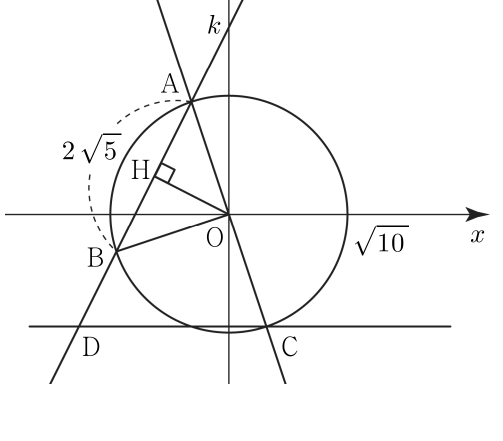
$(x+1)(x^2-4x+5)=0$

$P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$

$a=-3,\ b=1,\ c=5$

따라서 $a+b+c=3$

**19. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기**




직선 $l$의 방정식을 $2x-y+k=0$이라 하고 원점 O에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하므로 $\overline{AH}=\sqrt{5}$

$\overline{OA}=\sqrt{10}$이고 삼각형 AHO가 직각삼각형이므로 $\overline{OH}=\sqrt{5}$

$\overline{OH}$는 원점 O와 직선 $l$ 사이의 거리와 같으므로 $\dfrac{|2\times0-1\times0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$k=5$

두 점 A, B는 직선 $l:2x-y+5=0$이 원 $x^2+y^2=10$과 만나는 점이므로

$x^2+(2x+5)^2=10$, $x^2+4x+3=0$

$x=-1$ 또는 $x=-3$

두 점 A, B의 좌표는

각각 $(-1,\ 3)$, $(-3,\ -1)$이고

점 C는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점과 일치하므로 점 C의 좌표는 $(1,\ -3)$

점 C를 지나고 $x$축과 평행한 직선이 직선 $l$과 만나는 점 D의 좌표는 $(-4,\ -3)$

$a=-4$, $b=-3$

따라서 $a+b=-7$

**20. [출제의도] 원의 방정식을 활용하여 추론하기**

ㄱ. $m=n$일 때, 점 P는 선분 OA의 중점이므로 점 P의 좌표는 $(0,\ 2)$ (참)

ㄴ. 세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$\left(0,\ \dfrac{4m}{m+n}\right)$, $\left(\dfrac{4m}{m+n},\ 4\right)$, $\left(4,\ \dfrac{4n}{m+n}\right)$

직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{n}{m}$

직선 QR의 기울기는 $-\dfrac{m}{n}$

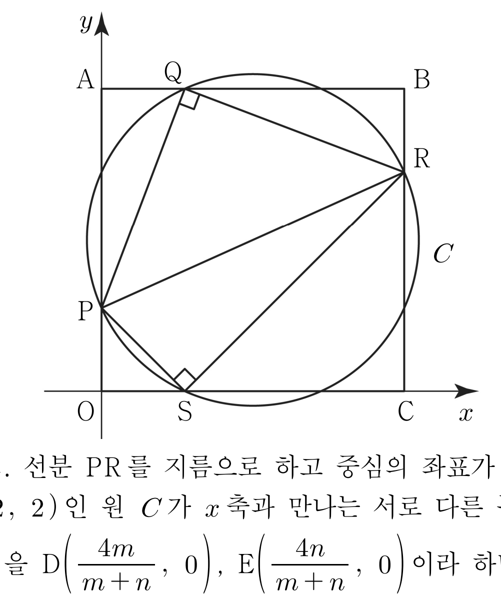
두 직선 PQ, QR의 기울기의 곱이 $-1$이므로 두 직선은 서로 수직이고 선분 PR는 원 $C$의 지름이다.

점 S의 좌표를 $\left(\dfrac{4m}{m+n},\ 0\right)$이라 하면

직선 PS의 기울기는 $-1$

직선 SR의 기울기는 $1$

두 직선 PS, SR의 기울기의 곱이 $-1$이므로 두 직선은 서로 수직이고 점 S는 선분 PR를 지름으로 하는 원 $C$ 위의 점이다. (참)




ㄷ. 선분 PR를 지름으로 하고 중심의 좌표가 $(2,\ 2)$인 원 $C$가 $x$축과 만나는 서로 다른 두 점을 $D\left(\dfrac{4m}{m+n},\ 0\right)$, $E\left(\dfrac{4n}{m+n},\ 0\right)$이라 하면

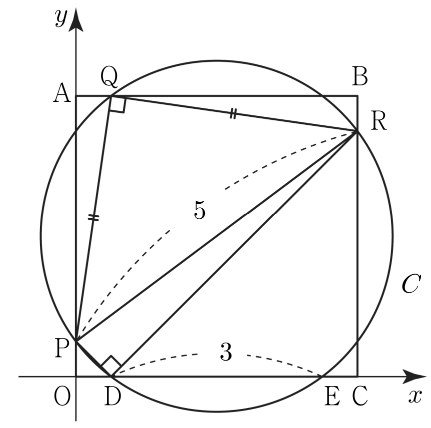
$\overline{DE}=\left|\dfrac{4(n-m)}{m+n}\right|=3$

$\overline{PR}=\sqrt{(4-0)^2+\left(\dfrac{4n}{m+n}-\dfrac{4m}{m+n}\right)^2}$

$=\sqrt{4^2+\left\{\dfrac{4(n-m)}{m+n}\right\}^2}=5$

삼각형 PQR는 $\overline{PQ}=\overline{QR}$인

직각이등변삼각형이므로 $\overline{PQ}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (참)




따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**21. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 추론하기**

$x$에 대한 이차방정식

$\{x-f(k)\}\{x-g(k)\}=0$이 서로 다른 두 실근 0, 4를 갖기 위해서는 실수 $k$에 대하여

$\begin{cases}f(k)=0\\g(k)=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}f(k)=4\\g(k)=0\end{cases}$이다.

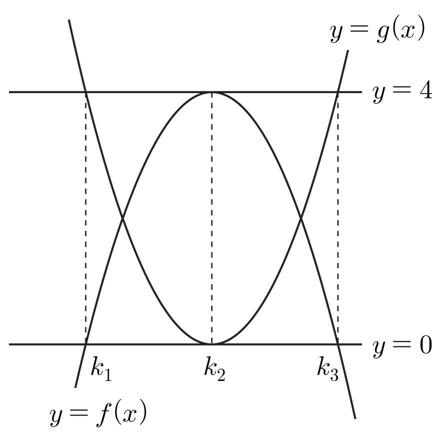
조건을 만족시키는 모든 실수 $k$의 개수가 3이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 직선 $y=0$, $y=4$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3 또는 4이다.

(ⅰ) 만나는 점의 개수가 3인 경우

만나는 점의 $x$좌표를 작은 수부터 크기 순서대로 $k_1$, $k_2$, $k_3$이라 하자.

$g(k_1)=4$, $g(k_2)=0$, $g(k_3)=4$이고

조건을 만족시키는 모든 실수 $k$의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 $(k_1,\ 0)$, $(k_2,\ 4)$, $(k_3,\ 0)$을 모두 지나야 한다.




$f(2)=4$이므로 $k_2=2$이고 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$에서 직선 $y=0$에 접하므로

$g(x)=(x-2)^2$

함수 $y=g(x)$의 그래프가

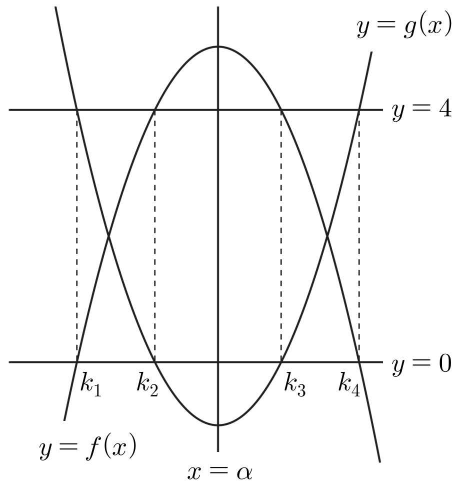
두 점 $(k_1,\ 4)$, $(k_3,\ 4)$를 지나므로

$(x-2)^2=4$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

$k_1=0$, $k_3=4$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$에서 직선 $y=4$에 접하므로

$f(x)=a(x-2)^2+4\ (a<0)$ 이고
두 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$을 지나므로
$f(0)=f(4)=4a+4=0$, $a=-1$
$f(x)=-(x-2)^2+4$
(ii) 만나는 점의 개수가 4인 경우




만나는 점의 $x$좌표를 작은 수부터 크기 순서대로 $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$라 하자.
$g(k_1)=4$, $g(k_2)=0$, $g(k_3)=0$, $g(k_4)=4$이고
함수 $y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 $x$좌표를 $\alpha$라 하면 $\dfrac{k_1+k_4}{2}=\dfrac{k_2+k_3}{2}=\alpha$ ⋯ ㉠
$k_1<k_2<\alpha<k_3<k_4$
조건을 만족시키는 모든 실수 $k$의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 네 점 $(k_1,\ 0)$, $(k_2,\ 4)$, $(k_3,\ 4)$, $(k_4,\ 0)$ 중 세 점만을 지나야 한다.
(ㄱ) 두 점 $(k_1,\ 0)$, $(k_4,\ 0)$을 지나는 경우
㉠에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 $x$좌표는 $\alpha$이고 이차함수의 그래프의 성질에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(k_2,\ 4)$, $(k_3,\ 4)$ 중 한 점만을 지날 수 없으므로 모든 실수 $k$의 값이 $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$로 4개가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(ㄴ) 두 점 $(k_2,\ 4)$, $(k_3,\ 4)$를 지나는 경우
㉠에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 $x$좌표는 $\alpha$이고 이차함수의 그래프의 성질에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(k_1,\ 0)$, $(k_4,\ 0)$ 중 한 점만을 지날 수 없으므로 모든 실수 $k$의 값이 $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$로 4개가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의하여
$g(x)=(x-2)^2$, $f(x)=-(x-2)^2+4$
따라서 $g(8)-f(8)=36-(-32)=68$

22. [출제의도] 나머지정리 이해하기
$f(x)=x^3-3x^2+3x-6$이라 하면 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(3)=3^3-3\times3^2+3\times3-6=3$

23. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 계산하기
부등식 $|x-5|<2$에서
$-2<x-5<2$, $3<x<7$
정수 $x$는 4, 5, 6
따라서 모든 정수 $x$의 값의 합은 $4+5+6=15$

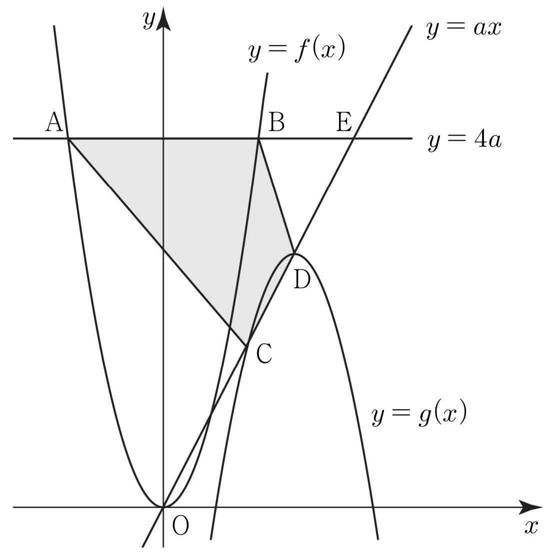
24. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기
이차방정식 $x^2+2ax+a^2+4a-28=0$의 판별식을 $D$라 하면 주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는
$D=(2a)^2-4(a^2+4a-28)\ge0$
$4a-28\le0$, $a\le7$
자연수 $a$는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
따라서 모든 자연수 $a$의 개수는 7

25. [출제의도] 이차방정식의 허근 이해하기
이차방정식 $x^2-px+p+19=0$의 한 허근을 $\alpha=a+2i$ ($a$는 실수, $i=\sqrt{-1}$)이라 하면 켤레복소수 $\overline{\alpha}=a-2i$도 주어진 이차방정식의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p$ ⋯ ㉠
$\alpha\overline{\alpha}=a^2+4=p+19$ ⋯ ㉡
㉠에서 $a=\dfrac{p}{2}$를 ㉡에 대입하면
$p^2-4p-60=0$
$p=-6$ 또는 $p=10$
따라서 양의 실수 $p$의 값은 10

26. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기
원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3,\ -4)$에서의 접선의 방정식은 $3x-4y-25=0$
이 접선이 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=r^2$과 만나려면 원의 중심 $(6,\ 8)$과 직선 $3x-4y-25=0$ 사이의 거리 $d$가 반지름의 길이 $r\ (r>0)$보다 작거나 같아야 한다.
$d=\dfrac{|3\times6-4\times8-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{39}{5}\le r$이므로
자연수 $r$의 최솟값은 8

27. [출제의도] 나머지정리를 활용하여 문제해결하기
다항식 $(x-2)P(x)-x^2$을 $P(x)-x$로 나누었을 때의 나머지가 $P(x)-3x$이므로
나머지 $P(x)-3x$의 차수는 $P(x)-x$의 차수보다 낮아야 한다.
다항식 $P(x)$의 차수가 1이 아니면 $P(x)-x$의 차수와 $P(x)-3x$의 차수는 같아지므로 $P(x)$의 차수는 1이다.
$P(x)=ax+b$ ($a\ne0$, $a$, $b$는 실수)라 하자.
$P(x)-3x=(a-3)x+b$는 상수이므로 $a=3$
$P(x)=3x+b$에 대하여
$(x-2)P(x)-x^2$
$=\{P(x)-x\}Q(x)+P(x)-3x$
위 식을 정리하면
$\{P(x)-x\}Q(x)$
$=(x-2)P(x)-x^2-\{P(x)-3x\}$
$=\{P(x)-x\}(x-3)$
이므로 $Q(x)=x-3$
$P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 10이므로
나머지정리에 의하여
$P(3)=9+b=10$, $b=1$
$P(x)=3x+1$
따라서 $P(30)=91$

28. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 문제해결하기



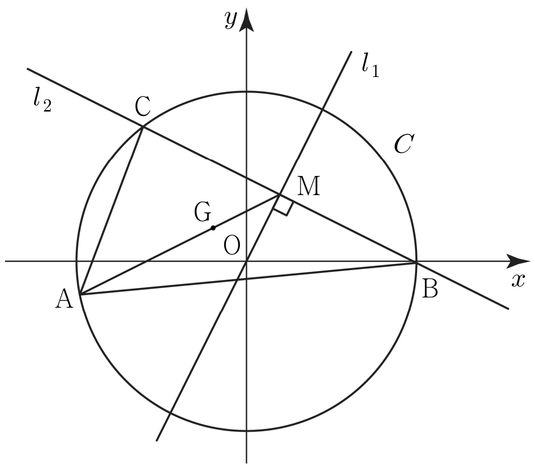

두 점 A, B는 직선 $y=4a$와 함수 $f(x)=ax^2$의 그래프가 만나는 점이므로
$4a=ax^2$, $x^2=4$
$x=-2$ 또는 $x=2$
두 점 A, B의 좌표는 각각
$(-2,\ 4a)$, $(2,\ 4a)$
두 점 C, D는 직선 $y=ax$와 함수 $g(x)=-a(x-a)^2+a^2$의 그래프가 만나는 점이므로
$ax=-a(x-a)^2+a^2$
$x^2-(2a-1)x+a(a-1)=0$
$(x-a+1)(x-a)=0$
$x=a-1$ 또는 $x=a$
두 점 C, D의 좌표는 각각
$(a-1,\ a^2-a)$, $(a,\ a^2)$
직선 $y=4a$와 직선 $y=ax$가 만나는 점을 E라 하면
$4a=ax$, $x=4$
점 E의 좌표는 $(4,\ 4a)$
$\overline{AE}=|4-(-2)|=6$
$\overline{BE}=|4-2|=2$
점 $C(a-1,\ a^2-a)$와 직선 $y=4a$ 사이의 거리를 $h_1$이라 하면
$h_1=|4a-(a^2-a)|=-a^2+5a$
삼각형 ACE의 넓이를 $S_1$이라 하면
$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{AE}\times h_1=\dfrac{1}{2}\times6\times(-a^2+5a)$
$=-3a^2+15a$
점 $D(a,\ a^2)$과 직선 $y=4a$ 사이의 거리를 $h_2$라 하면
$h_2=|4a-a^2|=-a^2+4a$
삼각형 BDE의 넓이를 $S_2$라 하면
$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{BE}\times h_2=\dfrac{1}{2}\times2\times(-a^2+4a)$
$=-a^2+4a$
사각형 ACDB의 넓이를 $S$라 하면
$S=S_1-S_2=(-3a^2+15a)-(-a^2+4a)$
$=-2a^2+11a=-2\left(a-\dfrac{11}{4}\right)^2+\dfrac{121}{8}$

$2 < a < 4$ 에서 사각형 ACDB 의 넓이는

$a = \frac{11}{4}$ 일 때, 최댓값 $M = \frac{121}{8}$ 을 갖는다.

따라서 $8 \times M = 121$

**29. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제해결하기**




삼각형 ABC 에서 변 BC 의 중점을 M$(a,\ b)$,
삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 하면
점 G$(-1,\ 1)$은 선분 AM 을 $2:1$ 로 내분하는 점이다.

$\frac{2\times a+1\times(-5)}{2+1} = \frac{2a-5}{3} = -1$ 에서 $a=1$

$\frac{2\times b+1\times(-1)}{2+1} = \frac{2b-1}{3} = 1$ 에서 $b=2$

이므로 점 M 의 좌표는 $(1,\ 2)$
중심이 원점 O 이고
세 점 A$(-5,\ -1)$, B, C 를 지나는
원을 $C$ 라 하면 $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{26}$ 이므로
$C : x^2 + y^2 = 26$
원점 O, M$(1,\ 2)$를 지나는 직선을 $l_1$ 이라 하면
$l_1 : y = 2x$
점 M$(1,\ 2)$를 지나고 직선 $l_1$ 과 수직인 직선을 $l_2$ 라 하면

$l_2 : y = -\frac{1}{2}(x-1)+2 = -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분하므로 삼각형 ABC 의
두 점 B, C 는 직선 $l_2$ 와 원 $C$ 가 만나는 점이다.

$\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{26}$, $\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{5}$

삼각형 OMB 는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BM}} = \sqrt{21}$

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\overline{\mathrm{BM}} = 2\sqrt{21}$

점 A$(-5,\ -1)$과 직선 $l_2 : x+2y-5=0$
사이의 거리를 $h$ 라 하면

$h = \frac{|1\times(-5)+2\times(-1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

이므로 삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{21}\times\frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{12}{5}\sqrt{105}$

$p=5$, $q=12$
따라서 $p+q = 5+12 = 17$

**30. [출제의도] 평행이동을 활용하여 추론하기**

중심이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있고
반지름의 길이가 1 인 원의 중심의 좌표를
$(t,\ f(t))$라 하자. $x$ 축의 방향으로 $m$ 만큼,
$y$ 축의 방향으로 $m$ 만큼 평행이동한 원이 $x$ 축과
$y$ 축에 동시에 접하기 위해서는 평행이동한 원의
중심의 좌표가 $(1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$,
$(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$ 중 하나가 되어야 한다.

(ⅰ) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(1,\ 1)$인 경우

$\begin{cases} t+m=1 \\ f(t)+m=1 \end{cases}$ 이므로 $f(t)=t$

따라서 점 $(t,\ f(t))$는 직선 $y=x$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점이다.

(ⅱ) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(-1,\ -1)$인 경우

$\begin{cases} t+m=-1 \\ f(t)+m=-1 \end{cases}$ 이므로 $f(t)=t$

따라서 점 $(t,\ f(t))$는 직선 $y=x$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점이다.

(ⅲ) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(-1,\ 1)$인 경우

$\begin{cases} t+m=-1 \\ f(t)+m=1 \end{cases}$ 이므로 $f(t)=t+2$

따라서 점 $(t,\ f(t))$는 직선 $y=x+2$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점이다.

(ⅳ) 평행이동한 원의 중심의 좌표가 $(1,\ -1)$인 경우

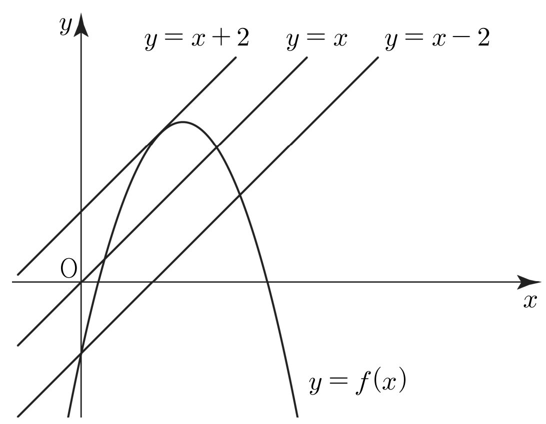
$\begin{cases} t+m=1 \\ f(t)+m=-1 \end{cases}$ 이므로 $f(t)=t-2$

따라서 점 $(t,\ f(t))$는 직선 $y=x-2$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 세 직선 $y=x+2$, $y=x$, $y=x-2$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 5 이다.

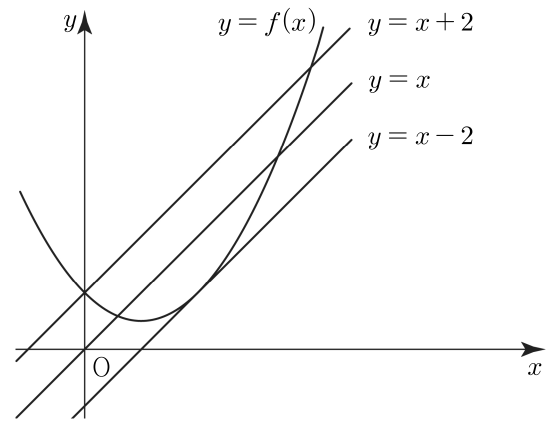
$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$, $a$, $b$, $c$ 는 실수)라 하자.

(ㄱ) $a<0$ 인 경우




함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 세 직선 $y=x+2$, $y=x$, $y=x-2$ 가 만나는 점의 개수가 5 이고 $x_1=0$ 을 만족시키는 경우
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-2$ 가 점 $(0,\ -2)$에서 만나고 $x_5$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-2$ 가 만나는 점의 $x$ 좌표이므로 $x_1 \le x \le x_5$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-2$ 가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ㄴ) $a>0$ 인 경우




$x_1$, $x_5$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x+2$ 가 만나는 점의 $x$ 좌표이므로 방정식 $ax^2+bx+c=x+2$ 의 근이다.
$x_1=0$ 이므로 $c=2$ 이고
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_5 = -\frac{b-1}{a}$ … ㉠

$x_2$, $x_4$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 $x$ 좌표이므로 방정식 $ax^2+bx+2=x$ 의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_2+x_4 = -\frac{b-1}{a}$ … ㉡

$x_3$ 은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-2$ 가 접하는 점의 $x$ 좌표이므로 방정식 $ax^2+bx+2=x-2$ 의 중근이다.

$x_3 = -\frac{b-1}{2a}$ … ㉢

방정식 $ax^2+(b-1)x+4=0$ 의 판별식을 $D$ 라 하면 $D=(b-1)^2-4\times 4a=0$ … ㉣
㉠, ㉡, ㉢ 과 $x_1=0$,
$x_2+x_3+x_4+x_5=20$ 이므로
$b-1=-8a$ … ㉤
㉣, ㉤ 에서

$a=\frac{1}{4}$, $b=-1$

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+2=\frac{1}{4}(x-2)^2+1$

따라서 $f(20)=82$