정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	⑤	3	⑤	4	③	5	②
6	④	7	①	8	②	9	②	10	③
11	①	12	③	13	①	14	⑤	15	④
16	9	17	20	18	65	19	22	20	54
21	13	22	182						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1} = 2^{2(1-\sqrt{3})} \times 2^{2\sqrt{3}-1}$

$= 2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1}$

$= 2$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x) = 3x^2 - 7$ 이므로

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 5$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta = \dfrac{3}{5}$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \dfrac{16}{25}$

$\sin\theta\cos\theta < 0$ 이므로 $\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta + 2\cos\theta = \left(-\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{6}{5} = \dfrac{2}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 1$

따라서 $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 1-} f(x) = 0 + 1 = 1$

5. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$x = 1$ 에서 연속이다.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} (3x + a) = a + 3$

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (2x^3 + bx + 1) = b + 3$

$f(1) = a + 3$

$a + 3 = b + 3$, $a = b$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{3x + a - (a+3)}{x - 1} = 3$

$\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{(2x^3 + ax + 1) - (a+3)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{(x-1)(2x^2 + 2x + a + 2)}{x - 1} = a + 6$

$3 = a + 6$, $a = -3$, $b = -3$

따라서 $a + b = -6$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하자.

$a_n = ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)

${a_3}^2 = a_6$ 이므로 $(ar^2)^2 = ar^5$, $ar^4(a - r) = 0$,

$a = r$, $a_n = r^n$

$a_2 - a_1 = 2$ 이므로 $r^2 - r = 2$

$(r-2)(r+1) = 0$

$r = 2$ 또는 $r = -1$

모든 항이 양수이므로 $r = 2$

따라서 $a_5 = r^5 = 32$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극값을 가지므로

$f'(1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 9$ 에서

$f'(1) = 3 + 2a - 9 = 0$ 이므로 $a = 3$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $f(-3) = -27 + 27 + 27 + 4 = 31$

8. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t) = 0$

$v(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) = 0$

점 P가 $t = 1$, $t = 3$ 에서 운동 방향을

바꾸므로 $a = 3$

점 P가 시각 $t = 0$ 에서 $t = 3$ 까지

움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^3 |v(t)|\,dt$

$= \displaystyle\int_0^1 v(t)dt + \int_1^3 \{-v(t)\}dt$

$= \displaystyle\int_0^1 (t^2 - 4t + 3)dt + \int_1^3 (-t^2 + 4t - 3)dt$

$= \left[\dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right]_0^1 + \left[-\dfrac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3t\right]_1^3$

$= \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$

9. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

(i) n 이 짝수일 때

$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$ 의 실근은

$x = \pm\sqrt[n]{8}$ 또는 $x = \pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱이 양수이므로 모순

(ii) n 이 홀수일 때

$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$ 의 실근은

$x = \sqrt[n]{8}$ 또는 $x = \pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱은

$2^{\frac{3}{n}} \times 2^{\frac{3}{2n}} \times \left(-2^{\frac{3}{2n}}\right) = -2^{\frac{6}{n}} = -4$

$2^{\frac{6}{n}} = 2^2$, $\dfrac{6}{n} = 2$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $n = 3$

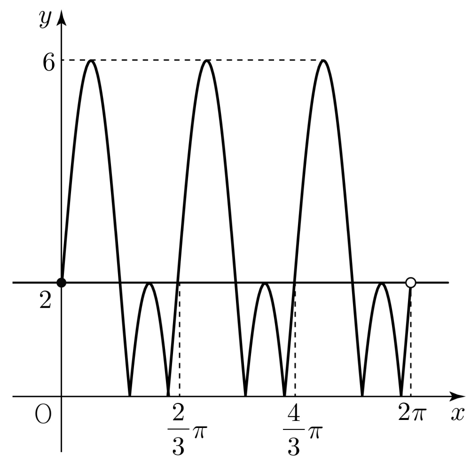
10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y = 4\sin 3x + 2$ 는

주기가 $\dfrac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2 이므로

$0 \le x < 2\pi$ 일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$ 는

다음과 같다.



따라서 $0 \le x < 2\pi$ 일 때,

곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$ 와 직선 $y = 2$ 가 만나는

서로 다른 점의 개수는 9

11. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

$f(1+x) + f(1-x) = 0$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$f(1) = 0$

$f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$ (단, a, b 는 상수)

조건 (나)에서

$\displaystyle\int_{-1}^3 f'(x)dx = f(3) - f(-1) = 12$ ⋯ ㉠

$f(1+x) + f(1-x) = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$f(3) + f(-1) = 0$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$f(3) = 6$, $f(-1) = -6$

$f(3) = 2(9 + 3a + b) = 6$, $3a + b = -6$ ⋯ ㉢

$f(-1) = -2(1 - a + b) = -6$, $a - b = -2$ ⋯ ㉣

두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a = -2$, $b = 0$

$f(x) = x(x-1)(x-2)$

따라서 $f(4) = 24$

12. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1} a_k = \dfrac{(2m+1)\{2a + 5 \times (2m+1-1)\}}{2}$

$= (2m+1)(a + 5m) < 0$

$2m + 1 > 0$ 이므로 $a + 5m = a_{m+1} < 0$

(i) $a_{m+1} = -1$ 인 경우

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 11$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1} = -1$ 이므로

$a_{m+6} = 24$, $a_{m+7} = 29$

$24 < a_{21} < 29$ 인 a_{21} 이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1} = -2$ 인 경우

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 12$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1} = -2$ 이므로 $a_{m+7} = 28$

따라서 $m + 7 = 21$ 이므로 $m = 14$

(iii) $a_{m+1} \le -3$ 인 경우

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| \ge 13$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m = 14$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle AFC = \alpha$, $\angle CDE = \beta$라 하자.
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 이므로 $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
$\angle ECD = \angle EFB = \pi - \alpha$
삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{ED}}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\overline{EC}}{\sin\beta} = 10\sqrt{2}$
$\overline{ED} = 10\sqrt{2}\times\sin\alpha = 10\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10} = 6\sqrt{5}$
$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$
$\overline{CD} = x$라 하자.
삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여
$180 = x^2 + 100 - 2\times x\times 10\times\cos(\pi-\alpha)$
$= x^2 + 100 + 2\times x\times 10\times\cos\alpha$
$= x^2 + 2\sqrt{10}x + 100$
$x^2 + 2\sqrt{10}x - 80 = 0$이고 $x > 0$이므로
$x = -\sqrt{10} + \sqrt{10+80} = 2\sqrt{10}$
$\angle ABE = \angle CDE = \frac{\pi}{4}$ 이므로
삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.
$\overline{AB} = 2\sqrt{10}$ 이므로 $\overline{BE} = \overline{AE} = 2\sqrt{5}$
두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고
닮음비가 1 : 3이다.
$\overline{AF} = \frac{2}{3}\times\overline{AB} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$
따라서 삼각형 AFE의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{AE}\times\sin\frac{\pi}{4}$
$= \frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{10}}{3}\times 2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20}{3}$

14. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to 0-} g(x)g(x-3) = -f(0)\times f(-3)$
$\lim_{x\to 0+} g(x)g(x-3) = f(0)\times\{-f(-3)\}$
$g(0)g(-3) = f(0)\times\{-f(-3)\}$
함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)
ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로
$k=-3$ 또는 $k=3$
(i) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이고, $x=3$에서 불연속인 경우
$\lim_{x\to -3-} g(x)g(x-3) = f(-3)\times f(-6)$
$\lim_{x\to -3+} g(x)g(x-3) = -f(-3)\times f(-6)$
$g(-3)g(-6) = -f(-3)\times f(-6)$이므로
$f(-3)\times f(-6) = 0$ ⋯ ㉠
$\lim_{x\to 3-} g(x)g(x-3) = f(3)\times\{-f(0)\}$
$\lim_{x\to 3+} g(x)g(x-3) = f(3)\times f(0)$
$g(3)g(0) = f(3)\times f(0)$이므로
$f(3)\times f(0) \neq 0$ ⋯ ㉡
$f(-3) = f(0)$이므로
㉠, ㉡에 의하여 $f(-6) = 0$
(ii) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이고, $x=-3$에서 불연속인 경우
(i)과 같은 방법에 의하여 $f(3) = 0$
(i), (ii)에 의하여 $f(-6) = 0$ 또는 $f(3) = 0$이므로 $f(-6)\times f(3) = 0$ (참)
ㄷ. $k=-3$이므로 $f(3) = 0$
$f(x) = (x-3)(x^2+ax+b)$라 하자.
(단, a, b는 상수)
$f(-3) = f(0)$이므로
$-6(9-3a+b) = -3b$, $b = 6a-18$
$f(x) = (x-3)(x^2+ax+6a-18)$
(i) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우
방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합은
$3+(-a) = -1$, $a = 4$
방정식 $x^2+4x+6=0$은 실근을 갖지 않으므로 모순
(ii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우
방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합은
$3+\left(-\frac{a}{2}\right) = -1$, $a = 8$
방정식 $x^2+8x+30=0$은 중근을 갖지 않으므로 모순
(iii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3과 -4를 실근으로 갖는 경우
$3+(-4) = -a$, $3\times(-4) = 6a-18$에서
$a = 1$
$f(x) = (x-3)(x^2+x-12) = (x-3)^2(x+4)$
그러므로 $g(-1) = -f(-1) = -48$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(i) $4 \le n \le 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우
$a_5 = a_4+6$, $a_6 = a_5+6 = a_4+12$,
$a_7 = a_6+6 = a_4+18$이므로
$\sum_{k=4}^{7} a_k = 4a_4+36 = 40$, $a_4 = 1$
순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은 $(27, 9, 3)$
그러므로 $a_1 = 27$
(ii) $4 \le n \le 7$인 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 n이 존재하는 경우
$a_n = 3^m$ (m은 자연수)인 n $(4 \le n \le 7)$이 존재한다.
a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m \ge 4)$가 존재하면
$\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m \ge 4)$가 존재하지 않는다.
또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면 $n = 4, 5, 6, 7$에 대하여
$\sum_{k=4}^{7} a_k < 40$
그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.
만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면
$\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 $a_4 = 27$
$a_4+a_5+a_6+a_7 = 27+9+3+1 = 40$
그러므로 $a_4 = 27$일 때 조건을 만족시킨다.
$a_1 < 300$을 만족시키는
순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은
$(69, 75, 81)$, $(237, 243, 81)$이므로
$a_1 = 69$ 또는 $a_1 = 237$
따라서 (i), (ii)에 의하여
모든 a_1의 값의 합은 $27+69+237 = 333$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수 조건에 의하여
$x-5>0$이고 $x+7>0$이므로 $x>5$ ⋯ ㉠
$\log_4(x-5)^2 = \log_4(x+7)$, $(x-5)^2 = x+7$
$x^2-10x+25 = x+7$, $x^2-11x+18 = 0$
$(x-2)(x-9) = 0$, $x=2$ 또는 $x=9$
㉠에 의하여 $x = 9$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x) = \int(9x^2-8x+1)dx$
$= 3x^3-4x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)
$f(1) = 3-4+1+C = 10$, $C = 10$
$f(x) = 3x^3-4x^2+x+10$
따라서 $f(2) = 24-16+2+10 = 20$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3) = 2\sum_{k=1}^{10}a_k + \sum_{k=1}^{10}3 = 40$, $\sum_{k=1}^{10}a_k = 5$
$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{10}a_k - \sum_{k=1}^{10}b_k = -10$
$\sum_{k=1}^{10}b_k = 15$
따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5) = \sum_{k=1}^{10}b_k + \sum_{k=1}^{10}5 = 65$

19. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = x^3-10$, $g(x) = x^3+k$라 하자.
$f'(x) = 3x^2$이므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(-2, -18)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2) = 12$
접선의 방정식은
$y-(-18) = 12\{x-(-2)\}$, $y = 12x+6$
점 Q의 좌표를 (α, α^3+k)라 하자.
(단, α는 상수)
$g'(x) = 3x^2$이므로
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $Q(\alpha, \alpha^3+k)$에서의 접선의 기울기는 $g'(\alpha) = 3\alpha^2$
접선의 방정식은 $y-(\alpha^3+k) = 3\alpha^2(x-\alpha)$,
$y = 3\alpha^2x-2\alpha^3+k$
두 접선이 일치하므로 $3\alpha^2 = 12$, $-2\alpha^3+k = 6$
$\alpha = 2$이면 $k = 22$, $\alpha = -2$이면 $k = -10$
$k > 0$이므로 $k = 22$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = |x^2-3|-2x$
$$= \begin{cases} x^2-2x-3 & (x \le -\sqrt{3} \text{ 또는 } x \ge \sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) \end{cases}$$

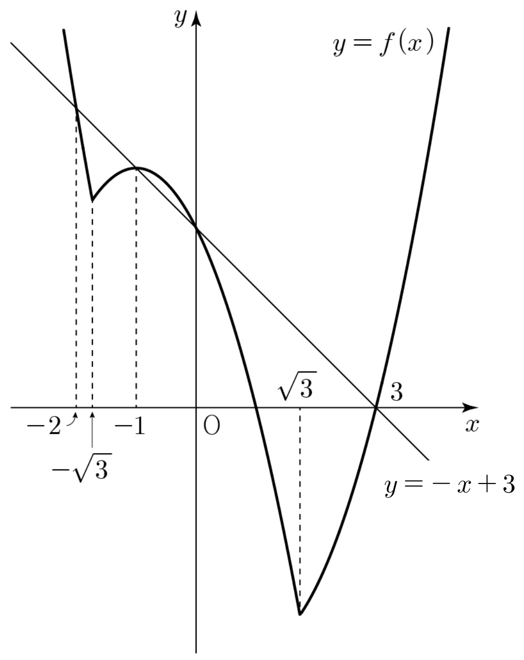
x_1, x_4는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$x_1+x_4=1$, $x_1x_4=-t-3$

$x_4-x_1=5$이므로 $x_1=-2$, $x_4=3$

$x_1x_4=-t-3=-6$, $t=3$

x_2, x_3은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$의 두 근이므로 $x_2=-1$, $x_3=0$



닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^3\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$$

따라서 $p\times q=\dfrac{27}{2}\times 4=54$

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

점 D의 좌표를 $(t,\ 0)\ (t>0)$이라 하자.

점 D는 선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{AD}}=2:3$

점 A의 x좌표는 $\dfrac{2}{5}t$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{5}t,\ \dfrac{6}{5}t\right)$

점 C의 y좌표는 $2t$, $\mathrm{C}(0,\ 2t)$

직선 BC의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{3}x+2t$

점 B는 두 직선 $y=3x$, $y=-\dfrac{1}{3}x+2t$의 교점이므로 $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{5}t,\ \dfrac{9}{5}t\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}t$

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2=\dfrac{t^2}{5}=20$

$t^2=100$이므로 $t=10$

$\mathrm{A}(4,\ 12)$, $\mathrm{B}(6,\ 18)$이므로

$12=2^{4-m}+n$, $18=2^{6-m}+n$

$18-2^{6-m}=12-2^{4-m}$

$2^{6-m}-2^{4-m}=6$

$64\times 2^{-m}-16\times 2^{-m}=6$

$48\times 2^{-m}=6$, $2^{-m}=\dfrac{1}{8}$

$m=3$, $n=10$

따라서 $m+n=13$

22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

방정식 $g(x)=0$에서

$x=t$일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$이므로 $g(t)=0$

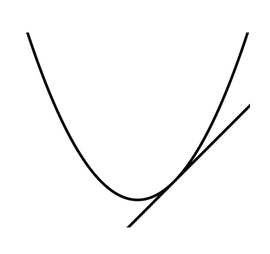
$x\neq t$일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$에서

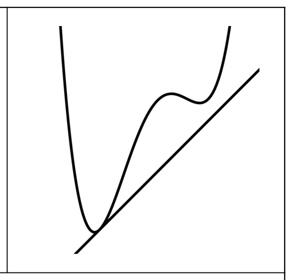
$\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$이다.

그러므로 함수 $h(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 1인 직선 l과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수이다.

임의의 실수 s에 대하여 $h(s)\geq 1$이다.

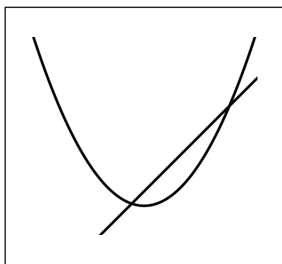
(ⅰ) $h(s)=1$인 경우

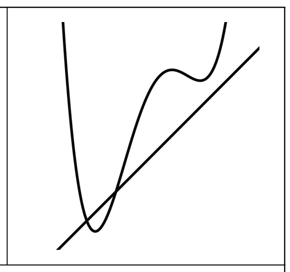




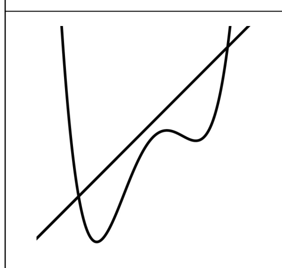
$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

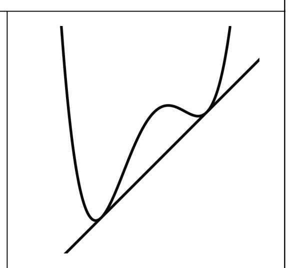
(ⅱ) $h(s)=2$인 경우





$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$





$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$	$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

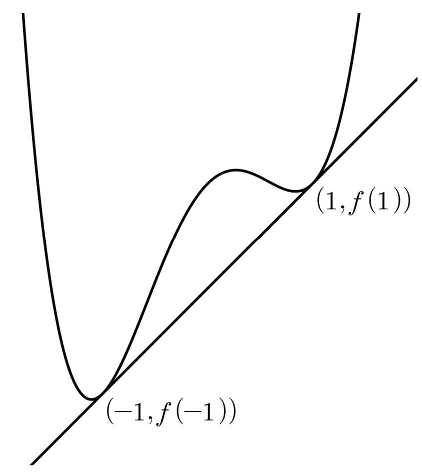
(ⅲ) $h(s)\geq 3$인 경우

$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 l이 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$에서 접할 때

$\lim\limits_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim\limits_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$를 만족시킨다.



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a,

직선 l의 방정식을 $y=x+b$라 하자.

(단, a, b는 상수)

$f(x)-(x+b)=a(x-1)^2(x+1)^2$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$

조건 (나)에서 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\{f(x)-|f(x)|\}dx=0$을 만족시키는 실수 α의 최솟값이 -1이므로

$-1\leq x\leq 0$에서 $f(x)\geq 0$, $f(-1)\geq 0$

$f(-1)>0$이면 실수 α의 최솟값이 -1이 아니므로 $f(-1)=0$

$f(-1)=-1+b=0$, $b=1$

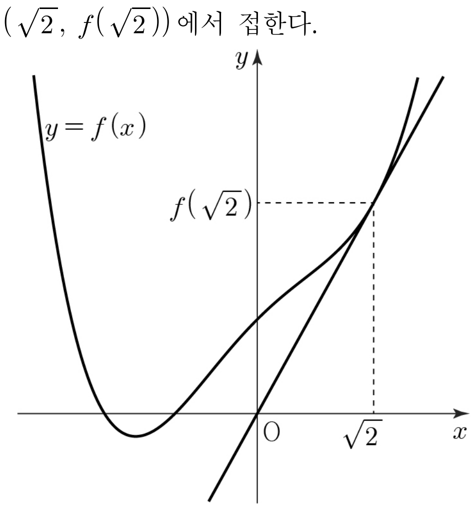
$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

조건 (다)에서

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\{f(u)-ku\}du=f(x)-kx\geq 0$

$f(x)\geq kx$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 접하거나 만나지 않는다.

실수 k의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$이므로 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(\sqrt{2})x$가 점 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$에서 접한다.



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

$\quad=ax^4-2ax^2+x+a+1$

$f'(x)=4ax^3-4ax+1$

$f(\sqrt{2})=4a-4a+\sqrt{2}+a+1=a+\sqrt{2}+1$

$f'(\sqrt{2})=8\sqrt{2}a-4\sqrt{2}a+1=4\sqrt{2}a+1$

$f(\sqrt{2})=f'(\sqrt{2})\times\sqrt{2}$이므로

$a+\sqrt{2}+1=(4\sqrt{2}a+1)\times\sqrt{2}$

$\quad=8a+\sqrt{2}$

$a=\dfrac{1}{7}$, $f(x)=\dfrac{1}{7}(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

따라서 $f(6)=\dfrac{1}{7}\times 5^2\times 7^2+6+1=182$

확률과 통계 정답

23	③	24	①	25	②	26	④	27	⑤
28	①	29	24	30	150				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 이항계수 계산하기

다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\times(x^2)^{6-r}\times 2^r={}_6\mathrm{C}_r\times 2^r\times x^{12-2r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

x^8의 계수는 $r=2$일 때이다.

따라서 ${}_6\mathrm{C}_2\times 2^2=15\times 4=60$

24. [출제의도] 독립시행의 확률 이해하기

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 네 눈의 수의 곱이 27의 배수이려면 3의 배수의 눈이 세 번 또는 네 번 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때,

3의 배수의 눈이 나오는 확률은 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 $X\ (X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$라 하면

$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{8}{81}$

$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{1}{81}$

따라서 $\dfrac{8}{81}+\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{9}$

25. [출제의도] 확률분포 이해하기

주어진 확률분포에서 $a+(a+b)+b=1$

$a+b=\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=a+4(a+b)+9b=a+5$

$4a+13b=5$ $\cdots$ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{3}$

따라서 $b-a=\dfrac{1}{6}$

26. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니 A에서 임의로 꺼낸 1개의 공이 흰 공인 사건을 X, 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공인 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X^C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

(i) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 공이 흰 공일 때 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은

$1-\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=1-\dfrac{1}{35}=\dfrac{34}{35}$

(ii) 주머니 A에서 임의로 꺼낸 공이 검은 공일 때 주머니 B에서 임의로 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은

$1-\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=1-\dfrac{4}{35}=\dfrac{31}{35}$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$

$=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)+\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{34}{35}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{31}{35}=\dfrac{32}{35}$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

주어진 7장의 카드를 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하려면 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$와 $\boxed{2}$, $\boxed{2}$는 각각 서로 이웃하지 않아야 한다.

(i) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하지 않는 경우

$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$를 하나씩 넣는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$

(ii) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하는 경우

$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$을 이웃하게 넣는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

남은 자리에 $\boxed{2}$, $\boxed{2}$를 하나씩 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

그러므로 $4\times 3=12$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $6+12=18$

28. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

$a_k\le k$를 만족시키는 자연수 $k\ (1\le k\le 5)$의 최솟값이 3인 사건을 A,

$a_1+a_2=a_4+a_5$인 사건을 B라 하자.

$a_k\le k$를 만족시키는 자연수 $k\ (1\le k\le 5)$의 최솟값이 3이면, $a_1>1$, $a_2>2$, $a_3\le 3$이다.

(Ⅰ) $a_3=1$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은

$\dfrac{3\times 3\times 2!}{5!}=\dfrac{3}{20}$

(Ⅱ) $a_3=2$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은

$\dfrac{3\times 2\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{10}$

(Ⅲ) $a_3=3$이고 $a_1>1$, $a_2>2$일 확률은

$\dfrac{2\times 2\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{15}$

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{9+6+4}{60}=\dfrac{19}{60}$

$a_1+a_2=a_4+a_5$이면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$에서

$a_3=15-2(a_1+a_2)=2\{7-(a_1+a_2)\}+1$

이므로 a_3의 값은 홀수이다.

(i) $a_3=1$인 경우

$a_1+a_2=7$이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$는

$(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$

(ii) $a_3=3$인 경우

$a_1+a_2=6$이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$는 $(2,\ 4)$

(i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{(3+1)\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{19}{60}}=\dfrac{4}{19}$

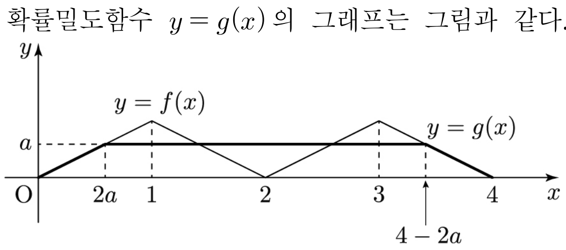
29. [출제의도] 연속확률변수의 확률밀도함수를 활용하여 추론하기

$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$이므로

$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=a$

조건 (가)와 (나)에 의하여

확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}(0\le Y\le 4)=1$이므로

$\dfrac{1}{2}\times 2a\times a+(4-4a)\times a+\dfrac{1}{2}\times 2a\times a=1$

$2a^2-4a+1=0$, $a=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$0<a<\dfrac{1}{2}$이므로 $a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, $1<5a<2$

$\mathrm{P}(0\le Y\le 5a)$

$=\mathrm{P}(0\le Y\le 2a)+\mathrm{P}(2a\le Y\le 5a)$

$=\dfrac{1}{2}\times 2a\times a+3a\times a=4a^2$

$=4\times\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2=6-4\sqrt{2}$

따라서 $p=6$, $q=4$이므로 $p\times q=24$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 순서쌍 $(f(1),\ f(7))$은

$(1,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 7)$

조건 (나)에 의하여 $f(1)\le f(3)\le f(5)\le f(7)$이고 $f(2)\le f(4)\le f(6)$

조건 (다)에 의하여 $|f(2)-f(1)|$과 $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$의 값은 모두 3의 배수인 자연수이다.

(i) $f(1)=1$, $f(7)=4$인 경우

$f(3)+f(5)=4$ 또는 $f(3)+f(5)=7$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는

$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 4)$

$f(1)=1$이므로 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=7$

$f(2)=4$이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_2$,

$f(2)=7$이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$

${}_4\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=10+1=11$

그러므로 $3\times 11=33$

(ii) $f(1)=2$, $f(7)=5$인 경우

$f(3)+f(5)=5$ 또는 $f(3)+f(5)=8$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는

$(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$

$f(1)=2$이므로 $f(2)=5$

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$

그러므로 $3\times 6=18$

(iii) $f(1)=3$, $f(7)=6$인 경우

$f(3)+f(5)=6$ 또는 $f(3)+f(5)=9$

또는 $f(3)+f(5)=12$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는

$(3,\ 3)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 5)$, $(6,\ 6)$

$f(1)=3$이므로 $f(2)=6$

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$

그러므로 $4\times 3=12$

(iv) $f(1)=4$, $f(7)=7$인 경우

$f(3)+f(5)=10$ 또는 $f(3)+f(5)=13$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$는

$(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 7)$

$f(1)=4$이므로 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=7$

$f(2)=1$이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_7\mathrm{H}_2$

$f(2)=7$이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$

${}_7\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=28+1=29$

그러므로 $3\times 29=87$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$33+18+12+87=150$

정답 및 해설

미적분 정답

23	③	24	②	25	①	26	④	27	③
28	②	29	12	30	208				

미적분 해설

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)\times\frac{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\{(n^2+4)-(n^2+1)\}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=3$$

24. [출제의도] 합성함수 미분법 이해하기

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$ 에서 $g(2)=4$, $g'(2)=12$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$$

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

$$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(4)g'(2)$$

$$f'(4)=\frac{8-1}{16-4+2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $h'(2)=\frac{1}{2}\times 12=6$

25. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

$2e^{x+y-1}=3e^x+x-y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left(2e^{x+y-1}\right)=\frac{d}{dx}\left(3e^x+x-y\right)$$

$$2e^{x+y-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=3e^x+1-\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^x+1-2e^{x+y-1}}{2e^{x+y-1}+1}$$

따라서 점 $(0,\ 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3+1-2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

26. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left[2(x-1)f\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^2-\int_1^2 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2f(1)-2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

$f(1)=4$ 이므로 $\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=3$

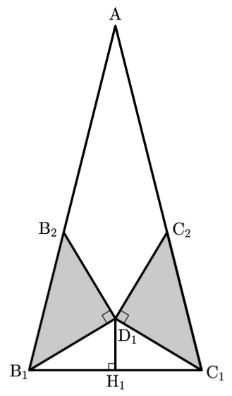
$\frac{x}{2}=t$ 라 하면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$ 일 때 $t=1$

$$\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=3$$

따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$

27. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



점 D_1 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 H_1, $\angle AB_1H_1=\alpha$, $\angle D_1B_1H_1=\beta$ 라 하자.

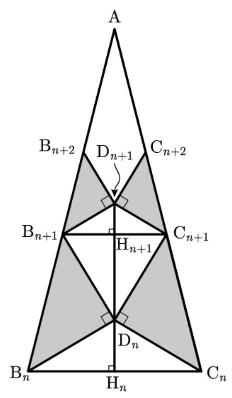
$\overline{AH_1}=\sqrt{17-1}=4$ 이므로 $\tan\alpha=4$

$$\tan\beta=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{3}{5}$$

$\overline{B_1H_1}=1$, $\overline{D_1H_1}=\frac{3}{5}$ 이므로

$$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$S_1=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right)^2\right\}=\frac{34}{25}$$



점 D_n 에서 선분 B_nC_n 에 내린 수선의 발을 H_n, 점 D_{n+1} 에서 선분 $B_{n+1}C_{n+1}$ 에 내린 수선의 발을 H_{n+1} 이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$ 과 $B_{n+1}D_nH_{n+1}$ 은 서로 합동이므로

$$\overline{B_{n+1}H_{n+1}}=\overline{D_nH_n}=\overline{B_nH_n}\times\tan\beta=\frac{3}{5}\overline{B_nH_n}$$

두 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$, $C_nD_nC_{n+1}$ 로 만들어진 ⋈ 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$, $D_{n+1}B_{n+1}H_{n+1}$ 은 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{3}{5}$ 이므로

넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 이다.

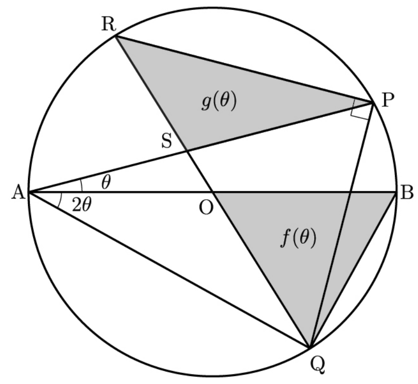
$$T_{n+1}=\frac{9}{25}T_n$$

수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{34}{25}$ 이고

공비가 $\frac{9}{25}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{17}{8}$

28. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{OA}=\overline{OQ}=1$ 이므로

$\angle OQA=2\theta$, $\angle BOQ=4\theta$

삼각형 BOQ 의 넓이는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OQ}\times\sin(\angle BOQ)$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin4\theta=\frac{1}{2}\sin4\theta$$

선분 RQ 는 원의 지름이므로 $\angle RPQ=\frac{\pi}{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle PRQ=\angle PAQ=3\theta$

$\overline{RP}=\overline{RQ}\cos3\theta=2\cos3\theta$

원주각의 성질에 의하여 $\angle RPA=\angle RQA=2\theta$

삼각형 PRS 에서 $\angle PSR=\pi-5\theta$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{RS}}{\sin2\theta}=\frac{2\cos3\theta}{\sin(\pi-5\theta)}$ 이므로

$$\overline{RS}=\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin5\theta}$$

삼각형 PRS 의 넓이는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{RP}\times\overline{RS}\times\sin(\angle PRS)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\cos3\theta\times\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin5\theta}\times\sin3\theta$$

$$=\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin5\theta}$$

따라서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin5\theta}}{\frac{1}{2}\sin4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin4\theta\times\sin5\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{24\times\cos^2(3\theta)\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}{20\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}\times\frac{\sin5\theta}{5\theta}}$$

$$=\frac{6}{5}$$

29. [출제의도] 치환적분법 이해하기

조건 (가)에 의하여

$x<1$ 일 때

$f(x)=-x^2+4x+C$ (단, C 는 적분상수)

조건 (나)에 의하여

$x>0$ 일 때

$$2xf'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$$

$$f'(x^2+1)=\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to0+}f'(x^2+1)=\lim_{x\to0+}\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$\lim_{x\to0+}2x=0$ 이므로 $\lim_{x\to0+}(2ae^{2x}+b)=0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$f'(x^2+1)=\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}=\dfrac{2ae^{2x}-2a}{2x}$

함수 $f'(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=f'(1)$

$\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=-2+4=2$

$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=\lim\limits_{s\to0+}f'(s^2+1)$

$\quad=\lim\limits_{s\to0+}\dfrac{2a(e^{2s}-1)}{2s}=2a$

$f'(1)=2$

$2=2a$, $a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1^2+4\times1+C=C+3$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{s\to0+}f(s^2+1)$

$\quad=\lim\limits_{s\to0+}(e^{2s}-2s)=1$

$f(1)=1$

$C+3=1$이므로 $C=-2$

그러므로

$x<1$일 때, $f(x)=-x^2+4x-2$

$x\ge0$일 때, $f(x^2+1)=e^{2x}-2x$

$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(-x^2+4x-2)dx=-\dfrac{1}{3}$

$\int_1^5 f(x)dx$에서

$x=t^2+1\ (t\ge0)$이라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=2t$

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx&=\int_0^2 f(t^2+1)2t\,dt\\&=\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)\,dt\\&=\int_0^2(2te^{2t}-4t^2)\,dt\\&=[te^{2t}]_0^2-\int_0^2 e^{2t}dt-\int_0^2 4t^2dt\\&=\left[te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2\\&=\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}\end{aligned}$$

$\int_0^5 f(x)dx=\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{3}{2}e^4-\dfrac{61}{6}\right)=\dfrac{3}{2}e^4-\dfrac{21}{2}$

에서 $p=\dfrac{3}{2}$, $q=\dfrac{21}{2}$

따라서 $p+q=12$

30. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 추론하기

모든 자연수 n에 대하여

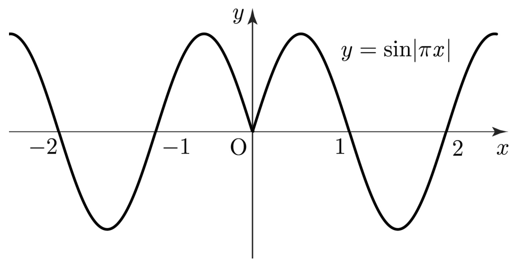
$g(a_n)=\sin|\pi f(a_n)|=0$이므로

$f(a_n)$의 값은 정수이다.

$$\cos\{\pi f(a_n)\}=\begin{cases}1 & (f(a_n)=2p)\\-1 & (f(a_n)=2p-1)\end{cases}\quad\cdots\ ㉠$$

(단, p는 정수)

함수 $y=\sin|\pi x|$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<x<0$ 또는 $0<x<1$일 때

$\sin|\pi x|>0$

$f(a_4)=0$이면 $g(a_4)=\sin|\pi f(a_4)|=0$이고,

$f(a_3)$과 $f(a_5)$의 값은 각각 -1 또는 0 또는 1

$a_3<x<a_4$ 또는 $a_4<x<a_5$일 때

$0<|f(x)|<1$이므로 $g(x)=\sin|\pi f(x)|>0$

함수 $g(x)$는 $x=a_4$에서 극대가 아니므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a_4)\ne0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 미분가능하고

조건 (가)에 의하여 $g'(a_4)=0$

$$g(x)=\begin{cases}\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)\ge0)\\-\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\-\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases}\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}-\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\-\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}+\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

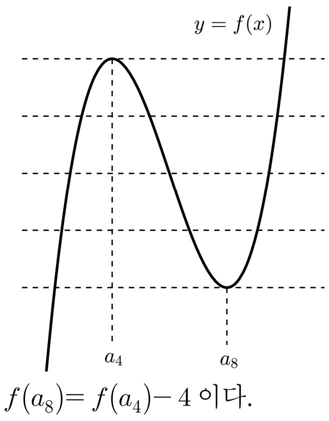
에서 $f'(a_4)=0$

위와 같은 방법으로 $f(a_8)\ne0$이고 $f'(a_8)=0$

그러므로 $f'(x)=3(x-a_4)(x-a_8)$

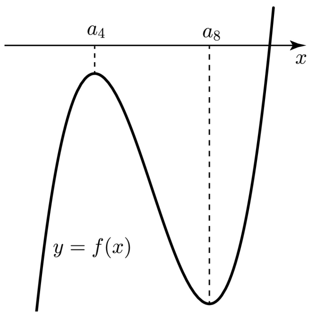
$f''(a_4)<0$, $f''(a_8)>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $f(a_8)=f(a_4)-4$이다.

(i) $f(a_4)<0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=-1$

$f(a_4)=2q+1$ (단, q는 음의 정수)

$f(a_8)=f(a_4)-4=2q-3$에서

$\cos\{\pi f(a_8)\}=-1$이고

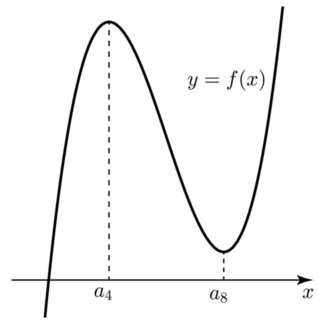
$f''(a_8)>0$이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(a_8)>0$인 경우



함수 $g(x)$가 $x=a_8$에서 극대이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}<0$

$f''(a_8)>0$이므로 $\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_8)\}=1$

$f(a_8)=2r$ (단, r는 자연수)

$f(a_4)=f(a_8)+4=2r+4$에서

$\cos\{\pi f(a_4)\}=1$이고

$f''(a_4)<0$이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(a_8)<0<f(a_4)$인 경우

$f(a_4)-4=f(a_8)<0<f(a_4)$이므로

$0<f(a_4)<4$

$f(a_4)=1$ 또는 $f(a_4)=2$ 또는 $f(a_4)=3$

함수 $g(x)$가 $x=a_4$에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

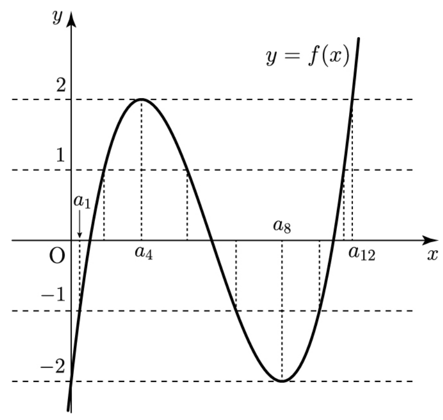
㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=1$

$f(a_4)=2s$ (단, s는 자연수)

그러므로 $f(a_4)=2$이고 $f(a_8)=-2$

조건 (나)에 의하여 $f(a_8)=f(0)=-2$

$m=8$



$f(x)=x(x-a_8)^2-2$

$f'(x)=(x-a_8)^2+2x(x-a_8)=3(x-a_8)\left(x-\dfrac{a_8}{3}\right)$

$f'(a_4)=0$에서 $a_4=\dfrac{a_8}{3}$

$f(a_4)=a_4(a_4-a_8)^2-2=2$이므로

$\dfrac{a_8}{3}\left(-\dfrac{2a_8}{3}\right)^2-2=2$, $a_8=3$

$f(x)=x(x-3)^2-2$

$f(m)=f(8)=8\times5^2-2=198$이고

$k\ge8$일 때 $f(a_k)=k-10$이므로

따라서 $f(a_k)\le f(8)$인 k의 최댓값은 208

정답 및 해설

기하 정답

23	②	24	③	25	⑤	26	①	27	④
28	②	29	15	30	27				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 덧셈 계산하기

$2\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 6)+(4,\ -2)$

$=(4+4,\ 6+(-2))$

$=(8,\ 4)$

따라서 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은 12

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중

제1사분면에 있는 점 $(a,\ b)$에서의

접선의 방정식은 $\dfrac{ax}{32}+\dfrac{by}{8}=1$

접선이 점 $(8,\ 0)$을 지나므로 $\dfrac{8a}{32}=1$, $a=4$

점 $(4,\ b)$가 타원 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{16}{32}+\dfrac{b^2}{8}=1$, $b^2=4$

$b>0$이므로 $b=2$

따라서 $a+b=4+2=6$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

직선 l이 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행하므로

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하자.

직선 m의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(7,\ 1)$

$|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

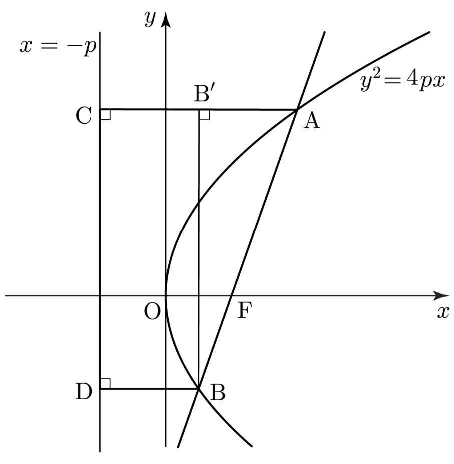
$|\vec{v}|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,\ -1)\cdot(7,\ 1)=3\times7+(-1)\times1=20$

따라서

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|20|}{\sqrt{10}\times\sqrt{50}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

26. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



$\overline{AC}=2k$, $\overline{BD}=k\ (k>0)$이라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AC}+\overline{BD}=2k+k=3k$

점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 B′이라 하자.

$\overline{BB'}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

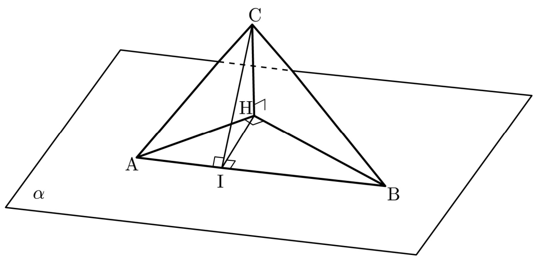
사각형 ACDB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(2k+k)\times2\sqrt{2}k=3\sqrt{2}k^2=12\sqrt{2}$

$k^2=4$, $k=2$

따라서 선분 AB의 길이는 $3k=6$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기



$\overline{CH}=a\ (a>0)$이라 하자.

직각삼각형 CAH에서

$\overline{AC}=\sqrt{3}a$, $\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2-a^2}=\sqrt{2}a$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{6}a$, $\overline{BH}=\sqrt{(\sqrt{6}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}=2a$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{CH}\perp\alpha$, $\overline{CI}\perp\overline{AB}$

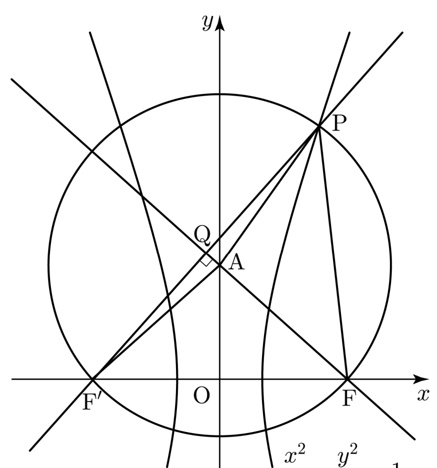
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 HBI에서 $\overline{HI}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{CI}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}a$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{HI}}{\overline{CI}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

28. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=4k\ (k>0)$이라 하자.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=k=2a$

$\overline{AF}=\overline{AF'}$이므로

삼각형 APF′은 $\overline{AP}=\overline{AF'}$인 이등변삼각형이고

$\overline{QP}=\overline{QF'}=4a$

$\overline{QF}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{QP}^2}=\sqrt{(6a)^2-(4a)^2}=2\sqrt{5}a$

삼각형 FPF′에서 선분 FQ가 선분 PF′을 수직이등분하므로 삼각형 FPF′은

이등변삼각형이고 $\overline{FF'}=\overline{PF}=6a$

$\overline{OF}=c=3a$ (단, O는 원점)

$\angle AFF'=\theta$라 하면 직각삼각형 QFF′에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{QF'}}{\overline{QF}}=\dfrac{4a}{2\sqrt{5}a}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

직각삼각형 OFA에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF}}=\dfrac{6}{c}=\dfrac{2}{a}$

$\dfrac{2}{5}\sqrt{5}=\dfrac{2}{a}$, $a=\sqrt{5}$

$c^2=a^2+b^2=9a^2$, $b^2=8a^2$

따라서 $b^2-a^2=7a^2=35$

29. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 추론하기

두 점 C, D는 원 위의 점이므로

$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=27$에서 $\overline{AC}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=9$에서 $\overline{AD}=3$

그러므로 $\overline{BC}=3$, $\overline{BD}=3\sqrt{3}$

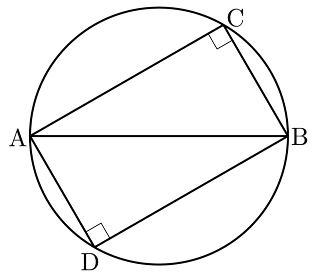
$\overline{CD}>3$이므로 $\overline{CD}=6$

$\overline{AC}=\overline{DB}=3\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\overline{CB}=3$,

$\angle ACB=\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$이므로

사각형 ADBC는 직사각형이다.

그러므로 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$



조건 (가)에 의하여

$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$에서

$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}-(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})=k\overrightarrow{BC}$

$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$

$=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}$

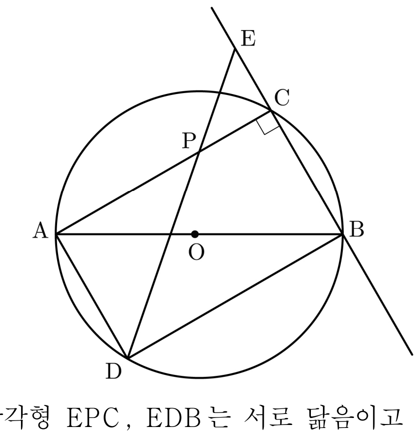
$=(k-1)\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}$를 만족시키는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}=(k-1)\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BE}=(k-1)\overrightarrow{BC}$

그러므로 점 E는 직선 BC 위에 있다.

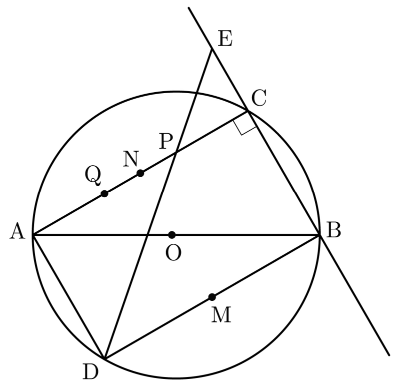


두 삼각형 EPC, EDB는 서로 닮음이고 닮음비가 $1:3$이므로

$\overline{BE}=\dfrac{3}{2}\overline{BC}$이므로 $k-1=\dfrac{3}{2}$에서 $k=\dfrac{5}{2}$

$\overline{PC}=\frac{1}{3}\overline{DB}=\sqrt{3}$

그러므로 $\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{PC}=2\sqrt{3}$ … ㉠



선분 BD 의 중점을 M 이라 하면

조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}=3$

$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QD}$

$=(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MD})$

$=|\overrightarrow{QM}|^2+\overrightarrow{QM}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$

$=|\overrightarrow{QM}|^2+\overrightarrow{QM}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{MB}|^2$

$=|\overrightarrow{QM}|^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=|\overrightarrow{QM}|^2-\frac{27}{4}$

이므로 $|\overrightarrow{QM}|^2=\frac{39}{4}$

선분 AC 의 중점을 N 이라 하면

$\overline{MN}=\overline{BC}=3$

$|\overrightarrow{QM}|^2=|\overrightarrow{QN}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2$

$\qquad=|\overrightarrow{QN}|^2+9$

$|\overrightarrow{QN}|^2=|\overrightarrow{QM}|^2-9=\frac{3}{4}$

$|\overrightarrow{QN}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AQ}=\overline{AC}-\overline{QC}$ 이므로

$|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{3}$ 또는 $|\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{AQ}|=2\sqrt{3}$ 이면 ㉠에 의하여

점 P 는 점 Q 와 같으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{3}$

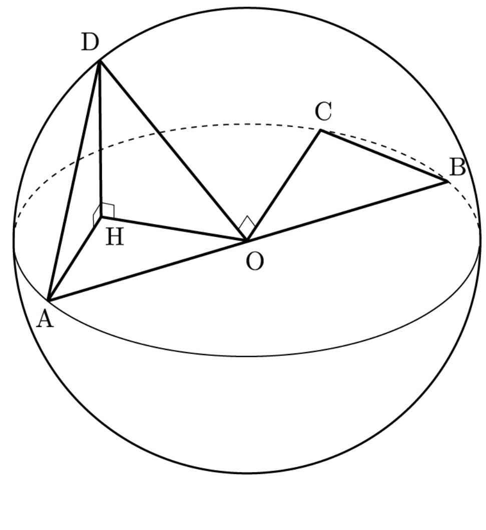
$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP}=|\overrightarrow{AQ}|\times|\overrightarrow{DP}|\times\cos(\angle DPA)$

$\qquad=|\overrightarrow{AQ}|\times|\overrightarrow{AP}|$

$\qquad=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$

따라서 $k\times(\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP})=\frac{5}{2}\times6=15$

30. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제 해결하기



조건 (가)에 의하여

$\overline{OC}\perp\overline{OD}$, $\overline{DH}\perp$(평면 COH) 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp\overline{OC}$

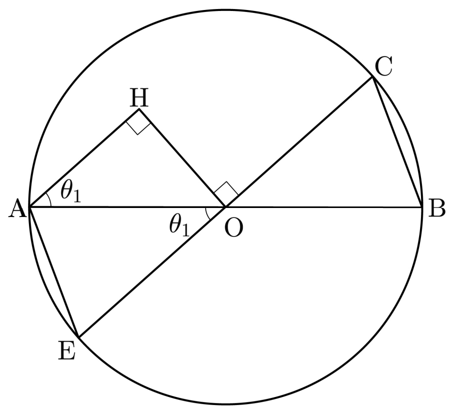
$\overline{DH}\perp$(평면 ABC) 이므로 $\overline{DH}\perp\overline{OH}$

조건 (나)에 의하여

$\overline{AD}\perp\overline{OH}$, $\overline{OH}\perp\overline{DH}$ 이므로

$\overline{OH}\perp$(평면 DAH)

그러므로 $\overline{OH}\perp\overline{AH}$



직선 OC 와 구가 만나는 점 중 점 C 가 아닌 점을 E 라 하면 $\overline{AE}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

$\angle AOE=\theta_1$ 이라 하면 $\angle OAH=\angle AOE=\theta_1$

삼각형 OAE 에서

$\cos\theta_1=\frac{4^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times4\times4}=\frac{3}{4}$

그러므로 $\overline{AH}=\overline{OA}\cos\theta_1=4\times\frac{3}{4}=3$

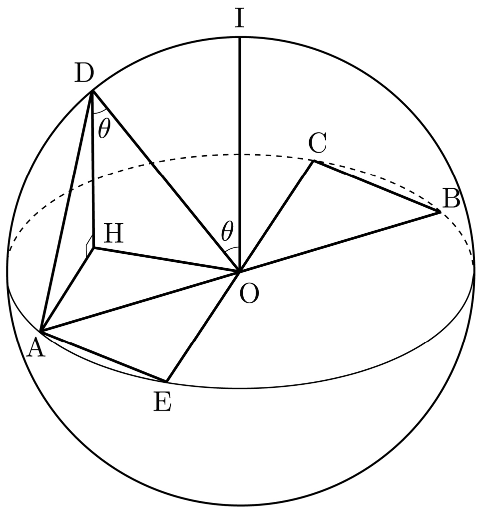
$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

삼각형 DHO 에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{16-7}=3$

삼각형 DAH 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{DH}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$



점 O 를 지나고 평면 ABC 에 수직인 직선과 구가 만나는 점 중 점 D 에 가까운 점을 I 라 하자.

$\overline{DH}\,/\!/\,\overline{OI}$ 이므로 $\overline{DH}\,/\!/$(평면 IEC)

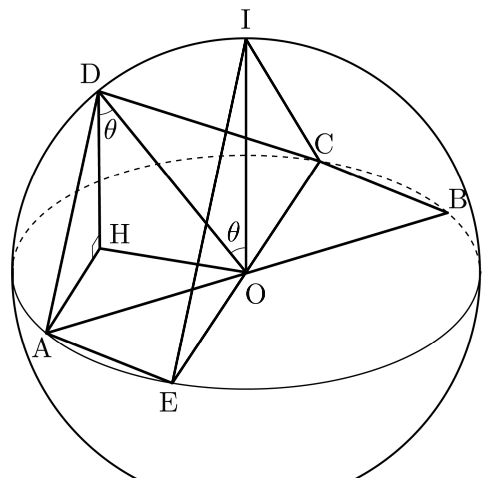
$\overline{AH}\,/\!/\,\overline{EC}$ 이므로 $\overline{AH}\,/\!/$(평면 IEC)

그러므로 두 직선 DH, AH 를 포함하는 평면 DAH 는 평면 IEC 와 평행하다.

직선 CE 는 두 평면 IEC, DOC 의 교선이고

$\overline{CE}\perp\overline{OI}$, $\overline{CE}\perp\overline{OD}$ 이므로

두 평면 IEC, DOC 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\angle DOI=\theta$



$\angle ODH=\angle DOI=\theta$ 이므로

$\cos\theta=\cos(\angle ODH)=\frac{\overline{DH}}{\overline{OD}}=\frac{3}{4}$

삼각형 DAH 의 넓이를 S_1 이라 하면

$S=S_1\times\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{8}$

따라서 $8S=27$