• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	②	**3**	③	**4**	③	**5**	④
6	⑤	**7**	②	**8**	⑤	**9**	①	**10**	⑤
11	①	**12**	⑤	**13**	①	**14**	②	**15**	④
16	5	**17**	7	**18**	16	**19**	11	**20**	25
21	64	**22**	114						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$4^{1-\sqrt{3}}\times 2^{1+2\sqrt{3}}=(2^2)^{1-\sqrt{3}}\times 2^{1+2\sqrt{3}}$
$=2^{(2-2\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})}=2^3=8$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+1}=2$

3. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_5-a_3=(a_3+2d)-a_3=2d=8$에서 $d=4$

따라서 $a_2=1+4=5$

4. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-4}{h}=6$이고 $\lim\limits_{h\to 0}h=0$이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\{f(1+2h)-4\}=0$, $f(1)=4$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2$
$=f'(1)\times 2=6$

이므로 $f'(1)=3$

따라서 $f(1)+f'(1)=4+3=7$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin(-\theta)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta+(-\sin\theta)$
$=-2\sin\theta=\dfrac{8}{5}$

에서 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$이고 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$

6. [출제의도] 함수의 극대와 극소 이해하기

$f(x)=x^3+ax^2+3a$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극대이므로

$f'(-2)=12-4a=0$, $a=3$

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=3a=9$

7. [출제의도] 부정적분 이해하기

다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

그러므로

$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)=3(x-1)^2$

에서 $f(1)=3$

$f(x)=\displaystyle\int(3x^2-6x+3)dx$
$=x^3-3x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1+C=3$에서 $C=2$

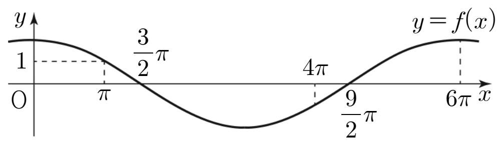
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$이므로 $f(2)=4$

8. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}=6\pi$이므로

$b=\dfrac{1}{3}$, $f(x)=a\cos\dfrac{x}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(\pi)=a\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

따라서 $a+b=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

9. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$a_{n+1}=1-4\times S_n$에서 $S_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a_{n+1}$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a_2$ ⋯ ㉠

$n\geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a_{n+1}\right)-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a_n\right)$
$=-\dfrac{1}{4}a_{n+1}+\dfrac{1}{4}a_n$

이므로 $a_{n+1}=-3a_n$ $(n\geq 2)$

즉, 수열 $\{a_{n+1}\}$은 첫째항이 a_2이고 공비가 -3인 등비수열이다.

$a_4=a_2\times(-3)^2=4$에서 $a_2=\dfrac{4}{9}$ ⋯ ㉡

$a_6=a_4\times(-3)^2=4\times 9=36$

㉠, ㉡에서 $a_1=\dfrac{5}{36}$

따라서 $a_1\times a_6=\dfrac{5}{36}\times 36=5$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^2|v_1(t)|dt=\int_0^2|3t^2+1|dt=\Big[t^3+t\Big]_0^2=10$

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^2|v_2(t)|dt=\int_0^2|mt-4|dt$

(i) $m\leq 2$일 때

$\displaystyle\int_0^2|mt-4|dt=\int_0^2(-mt+4)dt$
$=\left[-\dfrac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^2=-2m+8$

이므로 $-2m+8=10$, $m=-1$

(ii) $m>2$일 때

$\displaystyle\int_0^2|mt-4|dt$
$=\displaystyle\int_0^{\frac{4}{m}}|mt-4|dt+\int_{\frac{4}{m}}^2|mt-4|dt$
$=\displaystyle\int_0^{\frac{4}{m}}(-mt+4)dt+\int_{\frac{4}{m}}^2(mt-4)dt$
$=\left[-\dfrac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^{\frac{4}{m}}+\left[\dfrac{1}{2}mt^2-4t\right]_{\frac{4}{m}}^2$
$=2m-8+\dfrac{16}{m}$

이므로 $2m-8+\dfrac{16}{m}=10$

$m^2-9m+8=(m-1)(m-8)=0$

$m>2$이므로 $m=8$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 m의 값의 합은

$-1+8=7$

11. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하자. 조건 (나)에 의하여

$a_{m+1}-b_{m+1}=(a_m+d)-(b_m+d')$
$=d-d'<0$

$a_m-b_m=\{a_1+(m-1)d\}-\{b_1+(m-1)d'\}$
$=(a_1-b_1)+(m-1)(d-d')=0$

에서 $a_1-b_1=(m-1)(d'-d)$이고,

$m-1>0$, $d'-d>0$이므로 $a_1-b_1>0$

그러므로 조건 (가)에서 $a_1-b_1=5$

$(m-1)(d'-d)=5$

$m-1$, $d'-d$가 모두 자연수이고 $m\geq 3$이므로

$m=6$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{6}b_k=\dfrac{6\times(b_1+b_6)}{2}$
$=\dfrac{6\{(a_1-5)+a_6\}}{2}$
$=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}-15$
$=\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k-15=9-15=-6$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\left(a, \dfrac{a}{2}\right)$, $\left(b, \dfrac{b}{2}\right)$ $(0<a<b)$라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 두 점 A, B에서 만나므로

$f(x)-\dfrac{1}{2}x=x^2(x-a)(x-b)$
$=x^4-(a+b)x^3+abx^2$

$S_1-S_2=\displaystyle\int_0^a\left|f(x)-\dfrac{1}{2}x\right|dx-\int_a^b\left|f(x)-\dfrac{1}{2}x\right|dx$
$=\displaystyle\int_0^a\left\{f(x)-\dfrac{1}{2}x\right\}dx+\int_a^b\left\{f(x)-\dfrac{1}{2}x\right\}dx$
$=\displaystyle\int_0^b\left\{f(x)-\dfrac{1}{2}x\right\}dx$
$=\displaystyle\int_0^b\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx$
$=\left[\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{a+b}{4}x^4+\dfrac{ab}{3}x^3\right]_0^b$
$=-\dfrac{b^5}{20}+\dfrac{ab^4}{12}=0$

에서 $5a-3b=0$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(b-a)=\sqrt{5}$

에서 $b-a=2$이므로 두 식을 연립하여 계산하면

$a=3$, $b=5$

그러므로 $f(x)=x^4-8x^3+15x^2+\dfrac{1}{2}x$

따라서 $f(1)=\dfrac{17}{2}$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

두 함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$를

$f_1(x)=2^{x+3}+b$, $f_2(x)=2^{-x+5}+3b$라 하자.

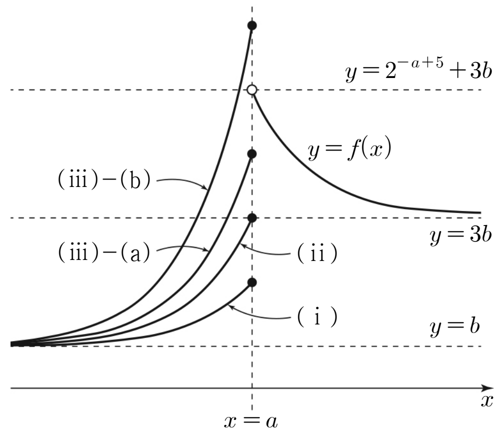
함수 $y=f_1(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, 함수 $y=f_2(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또한 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프의 점근선이 각각 $y=b$, $y=3b$이므로

$\{f_1(x)\,|\,x\le a\}=\{y\,|\,b<y\le 2^{a+3}+b\}$,

$\{f_2(x)\,|\,x>a\}=\{y\,|\,3b<y<2^{-a+5}+3b\}$

$2^{a+3}+b$와 $3b$, $2^{-a+5}+3b$의 대소 관계에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $2^{a+3}+b<3b$일 때

$2^{a+3}+b<t<3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않으므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(ii) $2^{a+3}+b=3b$일 때

$b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

또한 $t\ge 2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않는다.

(iii) $2^{a+3}+b>3b$일 때

(a) $2^{a+3}+b\le 2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{a+3}+b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(b) $2^{a+3}+b>2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이므로

(i), (ii), (iii)에 의하여

$2^{a+3}+b=3b$, $2^{-a+5}+3b=4b+8$이다.

두 식을 연립하여 계산하면

$2^a-2^{-a+3}+2=0$

$(2^a)^2+2\times 2^a-8=0$

$(2^a+4)(2^a-2)=0$

$2^a>0$이므로 $2^a=2$, $a=1$이고 $b=8$

따라서 $a+b=9$

14. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

$|f(k)|+|g(k)|=0$이려면 $f(k)=g(k)=0$이어야 한다. $f(k)=0$을 만족시키는 실수 k에 대하여

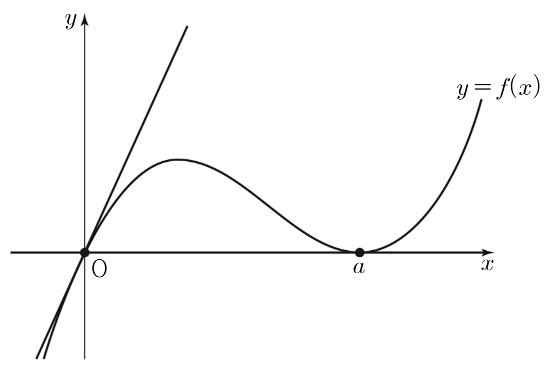
(i) $k=0$인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 y절편 $g(k)$의 값은 0이다.

(ii) $k\ne 0$인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, 0)$에서의 접선의 y절편 $g(k)$의 값이 0이려면 $f'(k)=0$이어야 한다.

$|f(k)|+|g(k)|=0$을 만족시키는 실수 k의 개수가 2이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x\ (a\ne 0)$

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-2at^2+a^2t)=(3t^2-4at+a^2)(x-t)$

이 직선의 y절편이 $-2t^3+2at^2$이므로

$g(t)=-2t^3+2at^2$

$4f(1)+2g(1)=-1$에서

$4(1-2a+a^2)+2(-2+2a)=-1$

$4a^2-4a+1=(2a-1)^2=0$, $a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(4)=4\times\left(4-\dfrac{1}{2}\right)^2=49$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

a_n이 자연수라 하자. 자연수 k에 대하여

$a_n=3k-2$이면

$a_{n+1}=\dfrac{(3k-2)^2+5}{3}=\dfrac{9k^2-12k+9}{3}=3k^2-4k+3$,

$a_n=3k-1$이면

$a_{n+1}=\dfrac{(3k-1)^2+5}{3}=\dfrac{9k^2-6k+6}{3}=3k^2-2k+2$,

$a_n=3k$이면 $a_{n+1}=\dfrac{3k}{3}=k$

이므로 a_n이 자연수이면 a_{n+1}도 자연수이다.

a_1이 자연수이므로 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 자연수이다. … ㉠

a_4가 3의 배수이면 $a_5=\dfrac{a_4}{3}$이므로

$a_4+a_5=5$에서 $a_4+\dfrac{a_4}{3}=5$, $a_4=\dfrac{15}{4}$가 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_4는 3의 배수가 아니다.

$a_5=\dfrac{{a_4}^2+5}{3}$이므로 $a_4+a_5=5$에서

$a_4+\dfrac{{a_4}^2+5}{3}=5$

${a_4}^2+3a_4-10=(a_4+5)(a_4-2)=0$

㉠에 의하여 $a_4=2$

(i) a_3이 3의 배수인 경우

$a_4=\dfrac{a_3}{3}=2$이므로 $a_3=6$

a_2의 값을 구하면

(a) a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\dfrac{a_2}{3}=6$이므로 $a_2=18$

(b) a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\dfrac{{a_2}^2+5}{3}=6$이므로 ${a_2}^2=13$이 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=18$

a_1의 값을 구하면

(a) a_1이 3의 배수인 경우

$a_2=\dfrac{a_1}{3}=18$이므로 $a_1=54$

(b) a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\dfrac{{a_1}^2+5}{3}=18$이므로 ${a_1}^2=49$

㉠에 의하여 $a_1=7$

(ii) a_3이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=\dfrac{{a_3}^2+5}{3}=2$이므로 ${a_3}^2=1$

㉠에 의하여 $a_3=1$

a_2의 값을 구하면

(a) a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\dfrac{a_2}{3}=1$이므로 $a_2=3$

(b) a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\dfrac{{a_2}^2+5}{3}=1$이므로 ${a_2}^2=-2$가 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=3$

a_1의 값을 구하면

(a) a_1이 3의 배수인 경우

$a_2=\dfrac{a_1}{3}=3$이므로 $a_1=9$

(b) a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\dfrac{{a_1}^2+5}{3}=3$이므로 ${a_1}^2=4$

㉠에 의하여 $a_1=2$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$54+7+9+2=72$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-3$, $x-4$는 로그의 진수이므로

$x-3>0$, $x-4>0$에서 $x>4$

방정식 $\log_2(x-3)+\log_2(x-4)=1$에서

$\log_2(x-3)(x-4)=1$

$(x-3)(x-4)=2$

$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)=0$

$x>4$이므로 $x=5$

17. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$f'(x)=1\times(x^3+x^2+5)+(x-1)(3x^2+2x)$

이므로 $f'(1)=7$

18. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$f(x)=3x^2+ax+b$라 하자.

$\int_0^x f(t)dt=2x^3+\int_0^{-x} f(t)dt$에서

$$2x^3=-\int_0^{-x} f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^x f(t)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{-x}^x=2x^3+2bx$$

모든 실수 x에 대하여 $2x^3=2x^3+2bx$이므로

$b=0$이고, $f(1)=3+a+b=5$에서 $a=2$

따라서 $f(2)=12+2a+b=16$

19. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

집합 X의 원소 중 양수의 개수를 p,

음수의 개수를 q라 하자.

$0\notin X$이면 $n(A)=2p$이므로 $n(A)=9$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $0\in X$

$n(A)=2p+1=9$에서 $p=4$

$n(B)=p+q+1=7$에서 $q=2$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$X=\{-2,-1,0,2,3,4,5\}$일 때 최대이고 그 값은

$-2+(-1)+0+2+3+4+5=11$

20. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$ ⋯ ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=0$

㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=g(2)$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}$의 값이 0이 아닌 실수이고

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=f(2)-g(2)=0$이므로

$\lim_{x\to 2}g(x-1)=g(1)=0$

$g(0)=g(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 상수함수이거나 차수가 2 이상이다.

함수 $g(x)$가 상수함수이면 $g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$의 차수는 2 이상이다.

또한 $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 0이 아닌 실수이므로

함수 $\{f(x)\}^2$의 차수는 함수 $g(x)$의 차수와 같다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수를 각각 n, $2n$이라 하자.

(i) $n=1$일 때

함수 $g(x)$의 차수가 2이고 $g(0)=g(1)=0$이므로

$g(x)=ax(x-1)$ $(a\neq 0)$

㉠에서 양변의 x^3의 계수가 같아야 하므로

$0=-\frac{1}{2}\times a-1$, $a=-2$이고 $g(x)=-2x^2+2x$

또한 ㉠에서

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\times(-2x^2+2x)-x^3+2x^2$$
$$=-5x^2+6x$$

이므로 $f(x)=-5x+6$

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{(2x-3)(x-2)}=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x}=-\frac{25}{2}$$

그러므로 $k=-2\times\left(-\frac{25}{2}\right)=25$

(ii) $n\geq 2$일 때

㉠의 좌변과 우변의 차수가 각각

$n+1$, $2n+1$이고 $n+1\neq 2n+1$이므로

㉠이 성립하지 않는다.

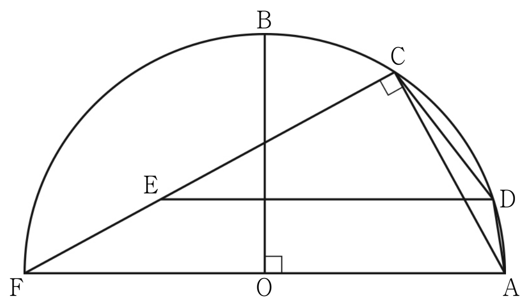
(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 값은 25

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 원을 C라 하고, 원 C와 직선 OA가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자. 선분 FA는 원 C의 지름이므로

$\angle\mathrm{FCA}=\frac{\pi}{2}$이다. 또한 $\angle\mathrm{ECA}=\frac{\pi}{2}$이므로

세 점 C, E, F는 한 직선 위에 있다.



직선 ED가 직선 OA에 평행하므로

$\sin(\angle\mathrm{DEC})=\sin(\angle\mathrm{AFC})=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

삼각형 CED에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{DEC})}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$

사각형 ADCF가 원 C에 내접하므로

$$\cos(\angle\mathrm{CDA})=\cos(\pi-\angle\mathrm{AFC})$$
$$=-\cos(\angle\mathrm{AFC})$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{2})^2=4^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times 4\times\overline{\mathrm{AD}}\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

$3\times\overline{\mathrm{AD}}^2+8\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AD}}-48=0$

$\overline{\mathrm{AD}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{7}$

따라서 $p=\frac{16}{3}$, $q=-\frac{4}{3}$이므로 $9\times|p\times q|=64$

22. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값을

α_1, α_2, $\alpha_3(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$이라 하자.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	⋯	α_1	⋯	α_2	⋯	α_3	⋯
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|=f(x)$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고,

임의의 실수 k에 대하여

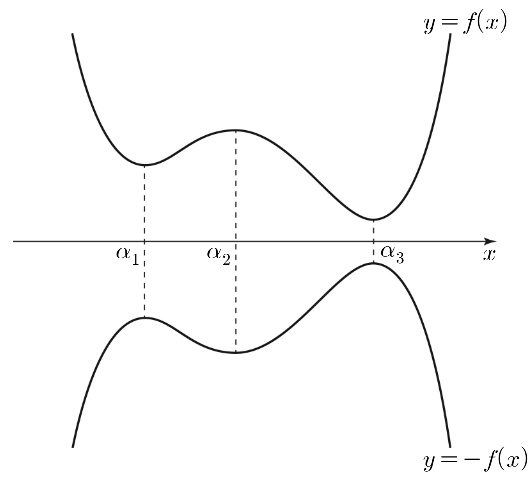
$g(k)=f(k)$ 또는 $g(k)=-f(k)$이다.

또한

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$이고 $\lim_{t\to 0+}t=0$이므로

$\lim_{t\to 0+}\{g(k+t)-g(k)\}=0$,

$g(k)=\lim_{t\to 0+}g(k+t)$ ⋯ ㉠



실수 k에 대하여

(i) $k<\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\leq k<\alpha_3$일 때

(a) $k<\alpha_1$ 또는 $\alpha_2<k<\alpha_3$일 때

$g(k)=f(k)$이면 ㉠에 의하여

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=f'(k)<0$이므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(k)=-f(k)$

(b) $k=\alpha_2$일 때

(a)와 ㉠에 의하여

$g(\alpha_2)=\lim_{t\to 0+}g(\alpha_2+t)=-f(\alpha_2)$

(ii) $\alpha_1\leq k<\alpha_2$ 또는 $k\geq\alpha_3$일 때

(a) $\alpha_1<k<\alpha_2$ 또는 $k>\alpha_3$일 때

$g(k)=-f(k)$이면 ㉠에 의하여

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=-f'(k)<0$이므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(k)=f(k)$

(b) $k=\alpha_1$ 또는 $k=\alpha_3$일 때

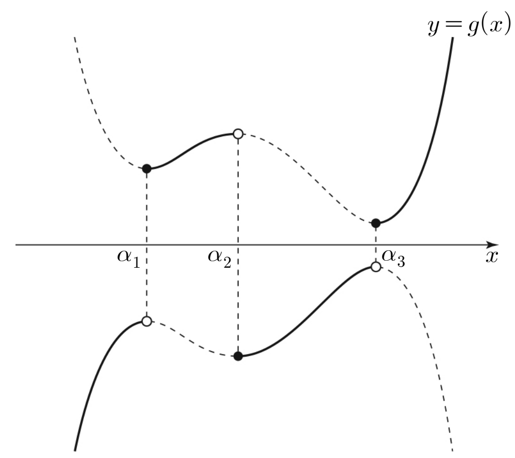
(a)와 ㉠에 의하여

$g(\alpha_1)=\lim_{t\to 0+}g(\alpha_1+t)=f(\alpha_1)$,

$g(\alpha_3)=\lim_{t\to 0+}g(\alpha_3+t)=f(\alpha_3)$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<\alpha_1 \text{ 또는 } \alpha_2\leq x<\alpha_3)\\ f(x) & (\alpha_1\leq x<\alpha_2 \text{ 또는 } x\geq\alpha_3)\end{cases}$$



함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속이면

$f'(k)=0$이고 $f(k)\neq 0$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\alpha_1)$ 또는 $f(\alpha_3)$이고

$f(\alpha_1)\neq f(\alpha_3)$이므로

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는

$f(\alpha_1)>0$이고 $f(\alpha_3)>0$이면 3,

$f(\alpha_1)=0$ 또는 $f(\alpha_3)=0$이면 2이다.

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속이라 하자.

조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)h(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$g(k)h(k)=\lim\limits_{x\to k+}g(x)h(x)=\lim\limits_{x\to k-}g(x)h(x)$

그러므로

$h(k)=\lim\limits_{x\to k+}h(x)=\lim\limits_{x\to k-}h(x)=0$ ⋯ ㉡

또는

$h(k)\neq 0$이고 $h(k)=\lim\limits_{x\to k+}h(x)=-\lim\limits_{x\to k-}h(x)$ ⋯ ㉢

㉡을 만족시키는 실수 k의 값은

$a\le -\frac{3}{2}$이면 $-\frac{3}{2}$이고

$-\frac{3}{2}<a\le -\frac{1}{2}$이면 존재하지 않으며

$a>-\frac{1}{2}$이면 $-\frac{1}{2}$이다.

실수 k가 ㉢을 만족시키면 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 불연속이므로 $k=a$이고

$4k+2=-(-2k-3)$에서 $k=a=\frac{1}{2}$

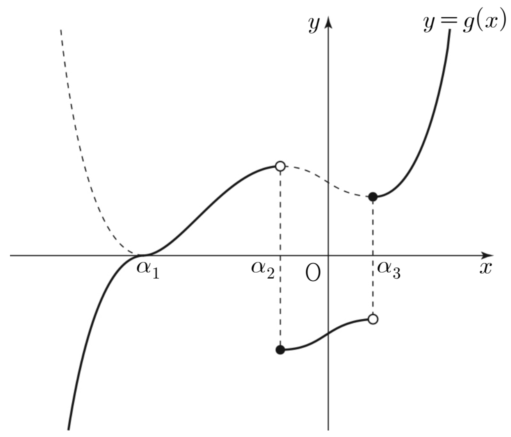
그러므로 ㉡ 또는 ㉢을 만족시키는 실수 k의 개수는 실수 a의 값에 따라서 최대 2이다.

그러므로 $a=\frac{1}{2}$이고

$f(\alpha_1)=0$ 또는 $f(\alpha_3)=0$이며

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$에서만 불연속이다.

(i) $f(\alpha_1)=0$일 때

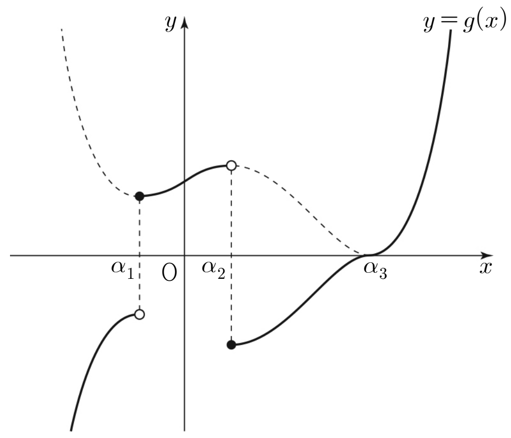


함수 $g(x)$가 $x=\alpha_2$, $x=\alpha_3$에서 불연속이므로

$\alpha_2=-\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{1}{2}$

$g(0)<0$이므로 $g(0)=\frac{40}{3}$을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(\alpha_3)=0$일 때



함수 $g(x)$가 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$에서 불연속이므로

$\alpha_1=-\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-\alpha_3)$$
$$=16x^3-16\alpha_3x^2-4x+4\alpha_3$$

에서

$$f(x)=\int\left(16x^3-16\alpha_3x^2-4x+4\alpha_3\right)dx$$
$$=4x^4-\frac{16}{3}\alpha_3x^3-2x^2+4\alpha_3x+C$$

(C는 적분상수)

$f(0)=g(0)=\frac{40}{3}$이므로 $C=\frac{40}{3}$

$f(\alpha_3)=-\frac{4}{3}{\alpha_3}^4+2{\alpha_3}^2+\frac{40}{3}=0$

$2{\alpha_3}^4-3{\alpha_3}^2-20=0$

$(\alpha_3+2)(\alpha_3-2)(2{\alpha_3}^2+5)=0$

$\alpha_3>\frac{1}{2}$이므로 $\alpha_3=2$

그러므로

$f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$,

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & \left(x<-\frac{1}{2}\ \text{또는}\ \frac{1}{2}\le x<2\right)\\ f(x) & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\ \text{또는}\ x\ge 2\right)\end{cases},$$

$$h(x)=\begin{cases}4x+2 & \left(x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x-3 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $g(1)\times h(3)=\left(-\frac{38}{3}\right)\times(-9)=114$

[확률과 통계]

23	④	**24**	②	**25**	①	**26**	⑤	**27**	③
28	②	**29**	75	**30**	40				

23. [출제의도] 확률의 덧셈정리 계산하기

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=4\times\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=3\times\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{2}{3}=3\times\mathrm{P}(A\cap B)$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식 $(ax^2+1)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(ax^2)^r={}_6\mathrm{C}_ra^rx^{2r}$

x^4의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_6\mathrm{C}_2\times a^2$

$15\times a^2=30$에서 $a^2=2$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

25. [출제의도] 중복조합 이해하기

4 이상 12 이하인 짝수는 4, 6, 8, 10, 12이므로 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 ${}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

26. [출제의도] 중복순열 이해하기

$f(1)+f(2)=4$를 만족시키는 경우는

$f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=f(2)=2$

또는 $f(1)=3$, $f(2)=1$의 3가지이다.

(i) $f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=1$인 경우

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=64$

그러므로 함수 f의 개수는 $2\times 64=128$

(ii) $f(1)=f(2)=2$인 경우

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중 적어도 하나는 1이어야 하므로 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수를 뺀 것과 같다.

그러므로 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_3-{}_3\Pi_3=64-27=37$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 함수 f의 개수는

$128+37=165$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

$108=2^2\times 3^3$이므로 조건을 만족시키는 a, b, c, d 중 2개의 수가 서로 같거나 3개의 수가 서로 같아야 한다.

(i) 2개의 수가 서로 같은 경우

$108=2\times 2\times 3\times 9=3\times 3\times 2\times 6=6\times 6\times 1\times 3$의 3가지이다.

이 각각에 대하여 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 곱해진 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!}=12$

그러므로 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $3\times 12=36$

(ii) 3개의 수가 서로 같은 경우

$108=3\times 3\times 3\times 4$의 1가지이다.

순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 3, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{3!}=4$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $36+4=40$

28. [출제의도] 확률을 이용하여 추론하기

총 7명의 학생이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉는 경우의 수는 7!

A열의 좌석에 1학년 학생들이 이웃하여 앉거나 2학년 학생들이 이웃하여 앉는 사건을 X,

A열의 좌석에 3학년 학생들이 이웃하여 앉는 사건을 Y라 하자.

(i) A열의 좌석에 1학년 학생들이 이웃하여 앉거나 2학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우

조건 (나)에 의하여 3학년 학생 3명 모두 B열의 좌석에 앉을 수 없으므로 3학년 학생 중 1명은 반드시 A열의 좌석에 앉아야 한다.

A열의 좌석에 이웃하여 앉는 학생들의 학년을 정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$

이 정해진 학년의 두 학생이 A열의 두 좌석에 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2\times 2!$

A열의 남은 한 좌석에 앉을 3학년 학생 한 명을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

그러므로 A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times(2\times 2!)\times{}_3\mathrm{C}_1=24$ ⋯ ㉠

B열에는 1, 2학년 중 A열에 앉지 않은 한 개 학년의 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉아야 한다.

이제 남은 2개 학년의 학생들이 앉는 자리를 △, □라 하면 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 앉는 상황은

△□△□, □△□△

의 2가지이다.

이 각각에 대하여 2개 학년의 학생 두 명씩 총 4명의 학생이 앉는 경우의 수는 $2!\times 2!$

그러므로 B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는 $2\times(2!\times 2!)=8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\mathrm{P}(X)=\dfrac{24\times 8}{7!}$

(ii) A열의 좌석에 3학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우

A열의 좌석에 앉을 3학년 학생 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$

선택된 3학년 학생 2명이 A열의 두 좌석에 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2\times 2!$

A열의 남은 한 좌석에 앉을 학생 한 명을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1$

그러므로 A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times(2\times 2!)\times{}_4\mathrm{C}_1=48$ ⋯ ㉢

A열에 학생 3명이 앉은 후 남은 4명의 학생은 1학년 1명, 2학년 2명, 3학년 1명으로 구성되거나 1학년 2명, 2학년 1명, 3학년 1명으로 구성된다.

어느 경우라도 학년이 같은 학생이 2명이므로 남은 4명의 학생들이 조건 (나)를 만족시키면서 B열의 4개의 좌석에 앉는 경우의 수는 같다.

4명의 학생이 B열의 4개의 좌석에 조건과 상관없이 앉는 경우의 수는 $4!$

이 4명의 학생이 B열의 4개의 좌석에 앉되 같은 학년의 학생 2명이 이웃하면서 앉는 경우의 수는 $2\times 3!$

그러므로 B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는 $4!-2\times 3!=12$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $\mathrm{P}(Y)=\dfrac{48\times 12}{7!}$

이때 두 사건 X와 Y는 서로 배반사건이므로

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\cup Y)&=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)\\&=\frac{24\times 8}{7!}+\frac{48\times 12}{7!}\\&=\frac{16}{105}\end{aligned}$$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 추론하기

구하는 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)에서 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 중 짝수가 2개 미만인 순서쌍 (a, b, c, d, e)를 제외한 것의 개수와 같다.

(i) $a+b+c+d+e=11$, $a+b$는 짝수인 경우

$c=c'+1,\ d=d'+1,\ e=e'+1$

($c',\ d',\ e'$은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=11$

$a+b+c'+d'+e'=8$

(a) $a+b=2$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$의 1가지이고,

$c'+d'+e'=6$인 순서쌍 (c', d', e')의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$

그러므로 구하는 경우의 수는 $1\times 28=28$

(b) $a+b=4$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지이고, $c'+d'+e'=4$인 순서쌍 (c', d', e')의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times 15=45$

(c) $a+b=6$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지이고,

$c'+d'+e'=2$인 순서쌍 (c', d', e')의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $5\times 6=30$

(d) $a+b=8$인 경우

순서쌍 (a, b)는 $(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$의 7가지이고,

$c'+d'+e'=0$인 순서쌍 (c', d', e')의 개수는 1

그러므로 구하는 경우의 수는 $7\times 1=7$

(a) ~ (d)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 $28+45+30+7=110$

(ii) $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 중 짝수가 2개 미만이면서 $a+b+c+d+e=11$이고 $a+b$는 짝수인 경우

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 모두 홀수이어야 하므로 $a+b+c+d+e=11$에서

$a=2a'+1,\ b=2b'+1,\ c=2c'+1,\ d=2d'+1,\ e=2e'+1$ ($a',\ b',\ c',\ d',\ e'$은 음이 아닌 정수)라 하면

$a'+b'+c'+d'+e'=3$인 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는 ${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 $110-35=75$

30. [출제의도] 원순열을 활용하여 문제해결하기

문제에서 깃발을 놓는 상황은 1부터 7까지의 숫자 중 하나를 원의 중심에 놓고, 나머지 6개의 숫자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 것과 같다.

이제 원의 중심에 놓인 깃발에 적힌 수를 c라 하자.

(i) $c=1$인 경우

나머지 6개의 숫자는 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

6개의 수 중 서로 이웃하는 두 수의 합이 11 이하이어야 하므로 7과 이웃하는 두 수는 2, 3, 4 중 두 개이어야 하고, 7과 이웃하지 않는 세 수는 어떤 수이어도 조건을 만족시킨다.

2, 3, 4 중 두 개의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$

7과 이웃하는 두 수를 a, b라 할 때, 7, a, b를 하나로 보고 나머지 세 수와 합친 4개의 수를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)!$

이 각각에 대하여 a, b가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times(4-1)!\times 2!=36$

(ii) $c=2$인 경우

나머지 6개의 숫자는 1, 3, 4, 5, 6, 7이다.

6개의 수 중 서로 이웃하는 두 수의 합이 10 이하이어야 하므로 7과 이웃하는 두 수는 1, 3이어야 한다.

또한 5, 6은 서로 이웃할 수 없으므로 4는 5와 6 사이에 배열되어야 한다.

7의 양 옆에 1, 3을 배열하는 경우의 수는 $2!$

4의 양 옆에 5, 6을 배열하는 경우의 수는 $2!$

그러므로 구하는 경우의 수는 $2!\times 2!=4$

(iii) $c=3$인 경우

나머지 6개의 숫자는 1, 2, 4, 5, 6, 7이다.

6개의 수 중 서로 이웃하는 두 수의 합이 9 이하이어야 하므로 7과 이웃하는 두 수는 1, 2이어야 한다.

이때 6은 4, 5 중 하나의 수와 반드시 이웃할 수밖에 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $c\geq 4$인 경우

c를 제외한 6개의 숫자 중 가장 큰 수를 k라 하면 $c+k\geq 11$이다.

k와 이웃하는 두 수가 동시에 1 이하일 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i) ~ (iv)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는 $36+4=40$

[미적분]

23	①	**24**	③	**25**	④	**26**	④	**27**	⑤
28	②	**29**	40	**30**	138				

23. [출제의도] 이계도함수 계산하기

$f'(x)=2\cos 2x,\ f''(x)=-4\sin 2x$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-4\sin\dfrac{\pi}{2}=-4\times 1=-4$

24. [출제의도] 급수의 뜻 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=1+(n-1)d$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{a_k}-\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_2}\right)+\left(\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{dn+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1+\frac{1}{n}}{d+\frac{1}{n}}\right)\\&=1-\frac{1}{d}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $d=3$

25. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(t, e^{2t}-1)$, $\mathrm{Q}(f(t), 0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로

$\{f(t)-t\}^2+(e^{2t}-1)^2=\{f(t)\}^2$에서

$f(t)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{(e^{2t}-1)^2}{2t}$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}&=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)^2\right\}\\&=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times 2\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1\times 2)^2=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

26. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

(i) $0<x<\dfrac{4}{x}$일 때,

$0<x<2$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=0$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+\frac{4}{x}}=\frac{x}{4}$$

$f(x)=2x-3$에서 $x=\dfrac{12}{7}$

(ii) $x=\dfrac{4}{x}$일 때,

$x=2$이므로 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2^n}{2^n+2^{n+1}}=1$

그러므로 $x=2$는 방정식 $f(x)=2x-3$의 실근이다.

(iii) $0<\dfrac{4}{x}<x$일 때,

$x>2$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)^n=0$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}{1+\frac{4}{x}\times\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}=x$$

$f(x)=2x-3$에서 $x=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 실근의 합은

$\frac{12}{7}+2+3=\frac{47}{7}$

27. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$g(3)=k$라 하면 $f(k)=k^3+k+1=3$에서 $k=1$

$f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(1)=4$

$g'(3)=g'(f(1))=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$

$\frac{dx}{dt}=g'(t)+1$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)-1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)-1}{g'(t)+1}$$

따라서 $t=3$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{g'(3)-1}{g'(3)+1}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{3}{5}$$

28. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

$f(x)=0$에서 $a\sin x-\cos x=0$, $\tan x=\frac{1}{a}$

$\tan x=\frac{1}{a}$을 만족시키는 실수 x는 열린구간

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 오직 하나뿐이므로

$\tan k=\frac{1}{a}$ ⋯ ㉠

$g(k)=0$이므로 $e^{2k-b}-1=0$에서 $2k=b$ ⋯ ㉡

$\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$에서

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-2f(x)=0$

$f'(x)g(x)+f(x)\{g'(x)-2\}=0$

$f'(x)=a\cos x+\sin x$, $g'(x)=2e^{2x-b}$이므로

$(a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1)$

$\qquad+(a\sin x-\cos x)(2e^{2x-b}-2)=0$

$(e^{2x-b}-1)\{(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x\}=0$

$e^{2x-b}-1=0$ 또는 $(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x=0$

$x=\frac{b}{2}$ 또는 $\tan x=\frac{2-a}{2a+1}$

㉠, ㉡에 의하여 $\tan\frac{b}{2}=\tan k=\frac{1}{a}$이고,

$\tan x=\frac{2-a}{2a+1}$인 실수 x를 $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라

하면 $\frac{1}{a}\neq\frac{2-a}{2a+1}$이므로 $\frac{b}{2}\neq\alpha$이다.

그러므로 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서

방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해는 $\frac{b}{2}$, α이다.

$\frac{b}{2}+\alpha=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{b}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a-1}{a+1}$$

$\tan\alpha=\frac{2-a}{2a+1}$이므로

$\frac{a-1}{a+1}=\frac{2-a}{2a+1}$에서 $3a^2-2a-3=0$

$2a=3(a^2-1)$, $a^2-1=\frac{2}{3}a$

$$\text{따라서 }\tan b=\tan\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)=\frac{2\tan\frac{b}{2}}{1-\tan^2\frac{b}{2}}$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{a}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2a}{a^2-1}=\frac{2a}{\frac{2}{3}a}=3$$

29. [출제의도] 음함수 미분을 활용하여 문제해결하기

$\angle\mathrm{APD}=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle\mathrm{ADQ}=\theta+\alpha$

삼각형 AQD에서 코사인법칙에 의하여

$\{f(\theta)\}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos(\theta+\alpha)$

$\{f(\theta)\}^2=5-4\cos(\theta+\alpha)$ ⋯ ㉠

삼각형 ADP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\alpha}$에서 $\sin\alpha=2\sin\theta$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\theta}=2\cos\theta$에서 $\frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos\alpha}$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$2f(\theta)f'(\theta)=4\sin(\theta+\alpha)\left(1+\frac{d\alpha}{d\theta}\right)$

$f(\theta)f'(\theta)=2\sin(\theta+\alpha)\left(1+\frac{2\cos\theta}{\cos\alpha}\right)$

$\theta=\theta_0$일 때 α의 값을 α_0이라 하면

$\cos\theta_0=\frac{7}{8}$이므로 $\sin\theta_0=\frac{\sqrt{15}}{8}$이고,

$\sin\alpha_0=2\sin\theta_0=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\alpha_0=\frac{1}{4}$

$\cos(\theta_0+\alpha_0)=\cos\theta_0\cos\alpha_0-\sin\theta_0\sin\alpha_0$

$\qquad=\frac{7}{8}\times\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{1}{4}$

이므로 $\sin(\theta_0+\alpha_0)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

㉠에 의하여 $\{f(\theta_0)\}^2=5-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=6$

에서 $f(\theta_0)=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}f'(\theta_0)=2\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times(1+7)$

그러므로 $k=f'(\theta_0)=2\sqrt{10}$

따라서 $k^2=40$

30. [출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

조건 (가)에 의하여 $\frac{a}{1-r}=4$ ⋯ ㉠

수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}1 & (|a_n|<\alpha)\\ -\frac{a_n^{\,2}}{5} & (|a_n|\geq\alpha)\end{cases}$$

모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|<\alpha$라 하면

$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{m}1=m$의 값이 최소가 되도록 하는

자연수 m의 값은 1이므로 조건 (나)에 의하여

$\sum_{n=1}^{1}b_n=\sum_{n=1}^{1}a_n=a=51$

㉠에 의하여 $r=-\frac{47}{4}<-1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|a_k|\geq\alpha$, $|a_{k+1}|<\alpha$인 자연수 k가 존재한다.

$1\leq n\leq k$일 때, $\frac{a_n}{b_n}=-\frac{a_n^{\,2}}{5}<0$

$n\geq k+1$일 때, $\frac{a_n}{b_n}=1>0$

그러므로 $\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는

자연수 m은 k이고

$\sum_{n=k+1}^{\infty}b_n=\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n=\frac{ar^k}{1-r}=\frac{1}{64}$

㉠에 의하여 $r^k=\frac{1}{256}$

$$\sum_{n=1}^{k}b_n=\sum_{n=1}^{k}\left(-\frac{5}{a_n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{k}\left\{-\frac{5}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{-\frac{5}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^k\right\}}{1-\frac{1}{r}}=51$$

$r^k=\frac{1}{256}$이므로 $a(r-1)=25r$

㉠에 의하여 $4(1-r)(r-1)=25r$, $4r^2+17r+4=0$

$-1<r<1$이므로 $r=-\frac{1}{4}$, $a=5$

그러므로 $p=k=4$

따라서 $32\times(a_3+p)=32\times\left\{5\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2+4\right\}=138$

[기하]

23	③	**24**	④	**25**	①	**26**	②	**27**	③
28	④	**29**	24	**30**	36				

23. [출제의도] 쌍곡선의 점근선 계산하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{6}{a}x$이므로 $\frac{6}{a}=2$에서 $a=3$

24. [출제의도] 벡터의 연산 이해하기

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 방향이 같으므로

$\vec{b}=k\vec{a}\,(k>0)$

$|\vec{a}-2\vec{b}|=|(1-2k)\vec{a}|$

$\qquad=|1-2k||\vec{a}|=6$

$|1-2k|=2$에서 $k>0$이므로 $k=\frac{3}{2}$

따라서 $|\vec{b}|=|k\vec{a}|=|k|\times|\vec{a}|=\frac{9}{2}$

25. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1}{2}x+y_1y=1$

직선 $\frac{x_1}{2}x+y_1y=1$의 기울기는 $-\frac{x_1}{2y_1}$

$\mathrm{F}(1, 0)$이므로 직선 PF의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1-1}$

$-\frac{x_1}{2y_1}\times\frac{y_1}{x_1-1}=1$이므로 $\frac{x_1}{x_1-1}=-2$에서 $x_1=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+{y_1}^2=1$에서 ${y_1}^2=\frac{7}{9}$

따라서 ${x_1}^2+{y_1}^2=\frac{4}{9}+\frac{7}{9}=\frac{11}{9}$

26. [출제의도] 쌍곡선의 정의 이해하기

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}}=k\,(k>0)$이라 하면

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 주축의 길이가 $2a$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=2a+k$

$\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QF'}}=2a$에서 $\overline{\mathrm{QF'}}=k-2a$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=(2a+k)-(k-2a)=4a$

$\overline{\mathrm{PQ}}=8$이므로 $a=2$

$c^2=a^2+16=20$에서 $c=2\sqrt{5}$

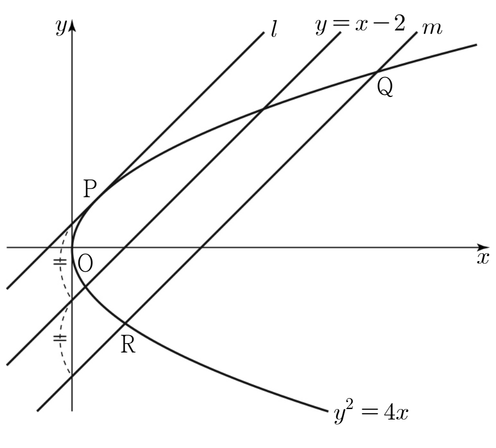
따라서 $\overline{\mathrm{FF'}}=2c=4\sqrt{5}$

27. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 추론하기

포물선 $y^2=4x$에 접하고 기울기가 1인 직선을 l, 기울기가 1인 직선 중 직선 $y=x-2$와의 거리가 두 직선 $y=x-2$, l 사이의 거리와 같으면서 포물선과 서로 다른 두 점에서 만나는 직선을 m이라 하자.

직선 $y=x-2$로부터의 거리가 같은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이 3개뿐이므로 세 점 P, Q, R 중 하나는 직선 l이 포물선에 접하는 점이고, 나머지 두 점은 직선 m과 포물선의 교점이어야 한다.

이제 직선 l이 포물선에 접하는 점을 P, 직선 m과 포물선이 만나는 두 점을 Q, R이라 하자.



직선 l의 방정식은 $y=x+1$

두 직선 $y=x-2$, m의 y절편의 차는

두 직선 $y=x+1$, $y=x-2$의 y절편의 차인

3이어야 하므로 직선 m의 방정식은 $y=x-5$

세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하면

$(x+1)^2=4x$에서 $x_1=1$

$(x-5)^2=4x$에서 $x^2-14x+25=0$이고

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_2+x_3=14$

세 점 P, Q, R에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{RF}}&=\overline{\mathrm{PH_1}}+\overline{\mathrm{QH_2}}+\overline{\mathrm{RH_3}}\\&=(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)\\&=x_1+(x_2+x_3)+3\end{aligned}$$

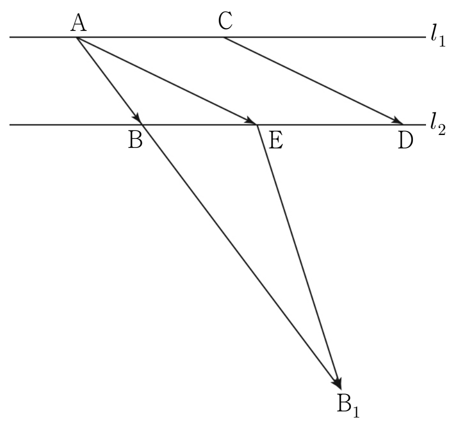
따라서 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{RF}}=1+14+3=18$

28. [출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기

점 A를 시점으로 하는 벡터 $4\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 종점을 $\mathrm{B_1}$이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 시점이 A가 되도록 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$를 평행이동시킨 벡터의 종점을 E라 하면

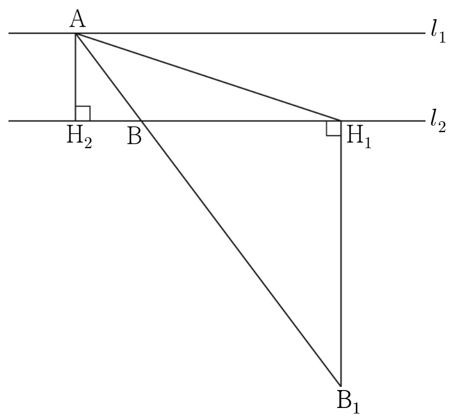
$4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{EB_1}}$



점 $\mathrm{B_1}$에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하면 점 E가 점 $\mathrm{H_1}$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{EB_1}}|$의 값은 최소이다.

$|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 최솟값이 12이므로 $\overline{\mathrm{B_1H_1}}=12$

점 A에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_2}$라 하자.



삼각형 $\mathrm{AH_2B}$, $\mathrm{B_1H_1B}$는 서로 닮음이고

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BB_1}}=15$이므로 닮음비는 $1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AH_2}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{B_1H_1}}=4$이므로 $d=4$

$\overline{\mathrm{BH_2}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH_2}}^2}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BH_1}}=3\overline{\mathrm{BH_2}}=9$

$\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{BH_1}}+\overline{\mathrm{BH_2}}=12$

그러므로

$$\begin{aligned}k=\overline{\mathrm{AH_1}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{AH_2}}^2+\overline{\mathrm{H_1H_2}}^2}\\&=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 $d\times k=16\sqrt{10}$

29. [출제의도] 포물선의 정의를 활용하여 문제해결하기

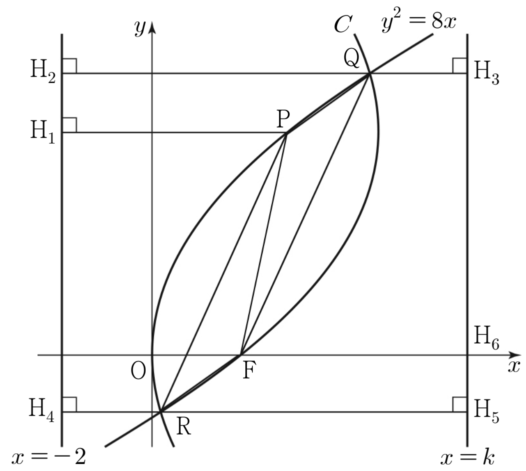
포물선 $y^2=8x$의 초점은 $\mathrm{F}(2, 0)$이고

준선의 방정식은 $x=-2$

점 P에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$,

점 Q에서 두 직선 $x=-2$, $x=k$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$,

점 R에서 두 직선 $x=-2$, $x=k$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_4}$, $\mathrm{H_5}$라 하자.



포물선 C에서 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RH_5}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QH_3}}$이고,

포물선 $y^2=8x$에서 $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{QH_2}}$, $\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{RH_4}}$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{RH_5}}+\overline{\mathrm{RH_4}}=\overline{\mathrm{H_4H_5}}=k+2$

$\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QH_2}}+\overline{\mathrm{QH_3}}=\overline{\mathrm{H_2H_3}}=k+2$

사각형 PRFQ의 둘레의 길이가 18이므로

$18=\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{FR}}+\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{PQ}}=2(k+2)$에서 $k=7$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하고, 직선 $x=7$이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{H_6}$이라 하자.

포물선 C에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FH_6}}=5$이고,

포물선 $y^2=8x$에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH_1}}=x_1+2$이므로 $x_1=3$

점 P가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로 $y_1=2\sqrt{6}$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 T라 하면

$\overline{\mathrm{PT}}=2\sqrt{6}$이고 삼각형 OFP의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{PT}}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

따라서 $S^2=24$

30. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 추론하기

$\mathrm{A}(a, 0)$이라 하면 타원 E_1의 장축의 길이가 $2a$이므로

$\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}}=2a$

타원 E_2가 x축과 만나는 점 중 F′이 아닌 점을 C라 하면 타원 E_2의 장축의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F'C}}&=\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{F'F}}\\&=(a+c)+2c=a+3c\end{aligned}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BA}}=a+3c$

$\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{BA}}=(\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}})-(\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BA}})=a-3c$

$\overline{\mathrm{AF'}}=a+c$이므로 $a-3c=\frac{1}{5}(a+c)$에서 $a=4c$

선분 FA의 중점을 O′이라 하면 $\mathrm{O'}\left(\frac{5}{2}c, 0\right)$이고

타원 E_2의 단축의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{O'F'}}^2-(2\sqrt{3})^2=\overline{\mathrm{O'F}}^2$

$\left(\frac{7}{2}c\right)^2-12=\left(\frac{3}{2}c\right)^2$에서 $c^2=\frac{6}{5}$

따라서 $30\times c^2=36$