2023학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	②	3	①	4	④	5	④
6	③	7	②	8	⑤	9	④	10	⑤
11	①	12	①	13	①	14	③	15	⑤
16	⑤	17	③	18	④	19	①	20	②
21	⑤	22	81	23	13	24	9	25	7
26	52	27	56	28	35	29	17	30	5

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\left(3^{2+\sqrt{2}}\right)^{2-\sqrt{2}}=3^{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=3^{4-2}=3^2=9$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\dfrac{\log_4 64}{\log_4 8}=\log_8 64=\log_8 8^2=2$

3. [출제의도] 부채꼴의 넓이 계산하기

부채꼴의 넓이를 S, 중심각의 크기를 θ, 반지름의 길이를 r라 하면 $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ 이므로

$S=\dfrac{1}{2}\times 4^2\times\dfrac{5}{12}\pi=\dfrac{10}{3}\pi$

4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

방정식 $2\sin x-1=0$에서 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $2\sin x-1=0$의 해는

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 이다.

5. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

$\log 619=\log(6.19\times 10^2)=\log 6.19+2$

이고 상용로그표에서 $\log 6.19=0.7917$ 이므로

$\log 619=2.7917$ 이다.

수	⋯	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5.9	⋯	.7760	.7767	.7774
6.0	⋯	.7832	.7839	.7846
6.1	⋯	.7903	.7910	.7917

6. [출제의도] 코사인법칙 이해하기

코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos A$

$\quad=3^2+6^2-2\times 3\times 6\times\dfrac{5}{9}=25$

이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=5$ 이다.

7. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=2^{x+a}+b$의 그래프의 점근선이 직선 $y=3$이므로 $b=3$이다. 이 함수의 그래프가 점 $(0,5)$를 지나므로 $5=2^{0+a}+3$에서 $a=1$이다.

따라서 $a+b=4$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프를 나타낸 함수는

$y=\log_2(x-a)+1$ 이고

함수 $y=\log_2(x-a)+1$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타낸 함수는

$y=2^{x-1}+a$ 이다. 따라서 $a=5$

9. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 함숫값 계산하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이고 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$ 이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$ 이다.

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

따라서 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\dfrac{1}{3}}{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=a\sin bx+c$의 주기가 4π 이고 $b>0$ 이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=4\pi$ 에서 $b=\dfrac{1}{2}$

함수 $y=a\sin\dfrac{x}{2}+c$의 그래프가 점 $(\pi,5)$를 지나므로 $5=a\sin\dfrac{\pi}{2}+c$에서 $5=a+c$ ⋯ ①

함수 $y=a\sin\dfrac{x}{2}+c$의 그래프가 점 $(3\pi,1)$을 지나므로 $1=a\sin\dfrac{3\pi}{2}+c$에서 $1=-a+c$ ⋯ ②

①과 ②를 연립하면 $a=2$, $c=3$이 되어

$a\times b\times c=2\times\dfrac{1}{2}\times 3=3$ 이다.

11. [출제의도] 사인법칙 이해하기

삼각형의 세 각 A, B, C에 대응하는 선분의 길이를 각각 a, b, c라 하자. $A+B+C=\pi$ 이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$이다.

사인법칙에 의해 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=8$

이므로

$\sin A+\sin B+\sin(A+B)$

$=\sin A+\sin B+\sin C$

$=\dfrac{a+b+c}{8}$

$=\dfrac{3}{2}$

12. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=3^{x-2}+a$의 역함수의 그래프가 점 $(a+5,\,a+2)$를 지나므로 $f(a+2)=a+5$이다.

$3^{a+2-2}+a=a+5$에서 $3^a=5$이다.

13. [출제의도] 지수부등식 이해하기

(i) $2^x-8\ge 0$ 이고 $3^{-x}-9\ge 0$ 일 때

$2^x\ge 8$에서 $x\ge 3$이고 $3^{-x}\ge 9$에서 $x\le -2$

이다. 이를 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

(ii) $2^x-8\le 0$ 이고 $3^{-x}-9\le 0$ 일 때

$2^x\le 8$에서 $x\le 3$이고 $3^{-x}\le 9$에서 $x\ge -2$

이므로 $-2\le x\le 3$이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 정수 x의 개수는 6이다.

14. [출제의도] 거듭제곱근의 성질 이해하기

$\left(\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m\times n=5^{\frac{m}{6}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n=5^2\times 2^2$ 에서

$\dfrac{m}{6}$ 과 $\dfrac{m}{4}$ 이 자연수가 되어야 하므로 m은 12의 배수이다.

(i) $m=12$ 일 때

$5^{\frac{12}{6}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}}\times n=5^2\times 2^2$ 에서 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times n=2^2$ 이므로

$n=32$ 이다.

(ii) $m\ge 24$ 일 때

$5^{\frac{m}{6}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n=5^2\times 5^{\frac{m-12}{6}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n$

$\qquad\qquad\qquad\qquad=5^2\times 2^2$

에서 $5^{\frac{m-12}{6}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}}\times n=2^2$ 이고

$5^{\frac{m-12}{6}}\times n=2^{\frac{m+8}{4}}$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $m=12$, $n=32$ 이므로 $m+n=44$ 이다.

15. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$f(0)=a\cos 0+a=2a$ 이므로 점 A의 좌표는

$(0,\,2a)$ 이다. $-\dfrac{3}{2}\pi\le x\le\dfrac{3}{2}\pi$ 에서 직선 $y=\dfrac{a}{2}$ 와

함수 $y=a\cos\dfrac{2}{3}x+a$의 그래프가 만나는 두 점의

x좌표는 방정식 $a\cos\dfrac{2}{3}x+a=\dfrac{a}{2}$ 의 실근과 같다.

$a\cos\dfrac{2}{3}x+a=\dfrac{a}{2}$, $\cos\dfrac{2}{3}x=-\dfrac{1}{2}$ 에서

$x=-\pi$ 또는 $x=\pi$ 이므로 점 B와 C의 좌표는

각각 $\left(-\pi,\,\dfrac{a}{2}\right)$, $\left(\pi,\,\dfrac{a}{2}\right)$ 이다.

삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=2\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}a$

따라서 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제 추론하기

ㄱ. $t=1$일 때, $\mathrm{P}(2,1)$, $\mathrm{Q}(4,1)$ 이므로

$S(1)=\dfrac{1}{2}\times(4-2)\times 1=1$ (참)

ㄴ. $t=2$일 때, $\mathrm{P}(4,2)$, $\mathrm{Q}(16,2)$ 이므로

$S(2)=\dfrac{1}{2}\times(16-4)\times 2=12$

$t=-2$일 때, $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\,-2\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{16},\,-2\right)$ 이므로

$S(-2)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}\right)\times 2=\dfrac{3}{16}$

따라서 $S(2)=64\times S(-2)$ (참)

ㄷ. 0이 아닌 모든 실수 t에 대하여

$\mathrm{P}(2^t,t)$, $\mathrm{Q}(4^t,t)$ 이다. $t>0$일 때 $2^t<4^t$ 이므로

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times t\times(4^t-2^t)=\dfrac{t}{2}(4^t-2^t)$

$S(-t)=-\dfrac{t}{2}(4^{-t}-2^{-t})$

따라서 $\dfrac{S(t)}{S(-t)}=\dfrac{4^t-2^t}{2^{-t}-4^{-t}}=\dfrac{2^t(2^t-1)}{4^{-t}(2^t-1)}=8^t$

이므로, t의 값이 증가하면 $\dfrac{S(t)}{S(-t)}$ 의 값도 증가한다. (참)

17. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

점 $\mathrm{P}(t,\,\sqrt{t})\,(t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t}$ 이므로

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+t}}$, $\cos\theta=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+t}}$ 이다.

$\cos^2\theta-2\sin^2\theta=\dfrac{t^2}{t^2+t}-\dfrac{2t}{t^2+t}=-1$ 에서

$t^2-2t=-t^2-t$, $t(2t-1)=0$

$t>0$ 이므로 $t=\dfrac{1}{2}$ 이고 점 P는 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

두 직선 $y=k$, $y=2k$와 곡선 $y=2^{x+1}$이 만나는 점을 각각 구하면

$2^{x+1}=k$에서 $x=\log_2 k-1$이고 $2^{x+1}=2k$에서 $x=\log_2 k$이므로 점 D, F의 좌표는 각각 $(\log_2 k-1,\ k)$, $(\log_2 k,\ 2k)$이다.

두 곡선 $y=2^{x+1}$과 $y=2^{-x+1}$은 y축에 대하여 대칭이므로 점 E, G의 좌표는 각각 $(1-\log_2 k,\ k)$, $(-\log_2 k,\ 2k)$이다.

삼각형 CFG의 넓이는

$\frac{1}{2}\{\log_2 k-(-\log_2 k)\}\times(2k-2)=2(k-1)\log_2 k$

이고 사각형 ABED의 넓이는

$\frac{1}{2}[\{1-\log_2 k-(\log_2 k-1)\}+2]\times(k-1)$

$=(2-\log_2 k)(k-1)$

이다. $1<k<2$이고 삼각형 CFG의 넓이와 사각형 ABED의 넓이가 같으므로

$2(k-1)\log_2 k=(2-\log_2 k)(k-1)$

$2\log_2 k=2-\log_2 k$

$\log_2 k=\frac{2}{3}$이다. 따라서 $k=2^{\frac{2}{3}}$

19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 넓이 추론하기

$\angle\mathrm{CAB}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{COB}=2\theta$이다. 삼각형 POB가 이등변삼각형이고 $\angle\mathrm{OQB}=\frac{\pi}{2}$이므로

점 Q는 선분 PB의 중점이고 $\angle\mathrm{POQ}=2\theta$이다.

선분 PO와 선분 QD가 평행하므로

삼각형 POB와 삼각형 QDB는 닮음이다.

따라서 $\overline{\mathrm{QD}}=\boxed{1}$이고 $\angle\mathrm{QDB}=\boxed{4\theta}$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\boxed{1}\times1\times\sin(\boxed{4\theta})$

이다. $\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CO}}-\overline{\mathrm{QO}}$이므로

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{CQ}}=\sin2\theta\times(2-\boxed{2\cos2\theta})$

이다. $p=1$, $f(\theta)=4\theta$, $g(\theta)=2\cos2\theta$이므로

$p\times f\left(\frac{\pi}{16}\right)\times g\left(\frac{\pi}{8}\right)=1\times\frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 최댓값을 구하는 문제 해결하기

조건 (나)에서 $\log_a b=\frac{n}{m}$ (m과 n은 서로소인 자연수)라 하면 $b=a^{\frac{n}{m}}$이다.

$\log a<\frac{3}{2}$에서 $a<10^{\frac{3}{2}}$이고, 조건 (가)에서

$1<a<a^{\frac{n}{m}}<a^2<1000$이다.

(i) $m=1$일 때, $1<a<a^n<a^2<1000$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $m=2$일 때, $1<a<a^{\frac{n}{2}}<a^2<1000$을 만족시키는 자연수 n은 3이고, a, b는 자연수이므로

$1<a<a^{\frac{3}{2}}<a^2<1000$을 만족시키는 순서쌍 (a,b)는 $(4,8)$, $(9,27)$, $(16,64)$, $(25,125)$이다.

(iii) $m=3$일 때, $1<a<a^{\frac{n}{3}}<a^2<1000$을 만족시키는 자연수 n은 4, 5이다.

① $m=3$, $n=4$일 때, a, b는 자연수이므로

$1<a<a^{\frac{4}{3}}<a^2<1000$을 만족시키는

순서쌍 (a,b)는 $(8,16)$, $(27,81)$이다.

② $m=3$, $n=5$일 때, a, b는 자연수이므로

$1<a<a^{\frac{5}{3}}<a^2<1000$을 만족시키는

순서쌍 (a,b)는 $(8,32)$, $(27,243)$이다.

(iv) $m=4$일 때, $1<a<a^{\frac{n}{4}}<a^2<1000$을 만족시키는 자연수 n은 5, 7이다.

① $m=4$, $n=5$일 때, a, b는 자연수이므로

$1<a<a^{\frac{5}{4}}<a^2<1000$을 만족시키는

순서쌍 (a,b)는 $(16,32)$이다.

② $m=4$, $n=7$일 때, a, b는 자연수이므로

$1<a<a^{\frac{7}{4}}<a^2<1000$을 만족시키는

순서쌍 (a,b)는 $(16,128)$이다.

(v) $m\geq5$일 때, $1<a<a^{\frac{n}{m}}<a^2<1000$에서

$a^{\frac{n}{m}}$이 자연수이므로 $a\geq2^5$이고

$a^2\geq2^{10}=1024$이다.

그러므로 $1<a<a^{\frac{n}{m}}<a^2<1000$을 만족시키는

자연수 a는 존재하지 않는다.

따라서 (i)~(v)에서 $a+b$의 최댓값은

$27+243=270$이다.

[다른 풀이]

$\log a<\frac{3}{2}$에서 $a^2<10^3$, $1<a<b<a^2<10^3$

$\log_a b=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수), $a^n=b^m$에서 $a=c^m$, $b=c^n$ (c는 2 이상의 자연수)라 하자.

$a^2<1000$이므로

$1<c^m<c^n<c^{2m}<1000$, $m=2$, 3, 4이다.

(i) $m=2$일 때, $n=3$이고 $c=2$, 3, 4, 5이므로

$a+b=c^m+c^n\leq5^2+5^3=150$

(ii) $m=3$일 때, $n=4$, 5이고 $c=2$, 3이므로

$a+b=c^m+c^n\leq3^3+3^5=270$

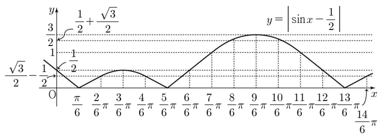
(iii) $m=4$일 때, $n=5$, 7이고 $c=2$이므로

$a+b=c^m+c^n\leq2^4+2^7=144$

(iv) $m\geq5$일 때, $c^{2m}<1000$인 자연수 c가 존재하지 않으므로 (가)와 (나)를 만족시키는 자연수 a와 b는 존재하지 않는다.

따라서 (i)~(iv)에서 $a+b$의 최댓값은 270이다.

21. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 최댓값 추론하기



함수 $y=f(x)$의 주기는 2π이다.

$n=1$일 때, $0\leq x\leq\frac{3}{6}\pi$에서 $g(1)=\frac{1}{2}$이다.

$n=2$일 때, $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{4}{6}\pi$에서 $g(2)=\frac{1}{2}$이다.

$n=3$일 때, $\frac{2}{6}\pi\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$에서 $g(3)=\frac{1}{2}$이다.

$n=4$일 때, $\frac{3}{6}\pi\leq x\leq\frac{6}{6}\pi$에서 $g(4)=\frac{1}{2}$이다.

$n=5$일 때, $\frac{4}{6}\pi\leq x\leq\frac{7}{6}\pi$에서 $g(5)=1$이다.

$n=6$일 때, $\frac{5}{6}\pi\leq x\leq\frac{8}{6}\pi$에서

$g(6)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$n=7$일 때, $\frac{6}{6}\pi\leq x\leq\frac{9}{6}\pi$에서 $g(7)=\frac{3}{2}$이다.

$n=8$일 때, $\frac{7}{6}\pi\leq x\leq\frac{10}{6}\pi$에서 $g(8)=\frac{3}{2}$이다.

$n=9$일 때, $\frac{8}{6}\pi\leq x\leq\frac{11}{6}\pi$에서 $g(9)=\frac{3}{2}$이다.

$n=10$일 때, $\frac{9}{6}\pi\leq x\leq\frac{12}{6}\pi$에서 $g(10)=\frac{3}{2}$이다.

$n=11$일 때, $\frac{10}{6}\pi\leq x\leq\frac{13}{6}\pi$에서

$g(11)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$n=12$일 때, $\frac{11}{6}\pi\leq x\leq\frac{14}{6}\pi$에서 $g(12)=1$이다.

따라서 $1\leq n\leq12$에서 $g(n)$이 무리수인 n은 6, 11이다. 함수 $f(x)$의 주기는 2π이므로 자연수 m에 대하여

$\frac{n-1}{6}\pi\leq x\leq\frac{n+2}{6}\pi$ … ①

$\frac{n-1}{6}\pi+2m\pi\leq x\leq\frac{n+2}{6}\pi+2m\pi$,

$\frac{n+12m-1}{6}\pi\leq x\leq\frac{n+12m+2}{6}\pi$ … ②

①, ②에서 $f(x)$의 최댓값은 서로 같다.

따라서 $g(n)=g(n+12m)$이다.

$g(6)=g(18)=g(30)$, $g(11)=g(23)=g(35)$이므로

40 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은

$6+11+18+23+30+35=123$이다.

22. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{27^2}\times3^2=27^{\frac{2}{3}}\times3^2=(3^3)^{\frac{2}{3}}\times3^2=3^2\times3^2=81$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

진수 조건에 의해 $x>-3$이고

$\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=-4$에서 $x+3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$이므로

$x=13$이다.

24. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 주기 이해하기

함수 $y=\cos\frac{2}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$

함수 $y=\tan\frac{3}{a}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{3}{a}}=\frac{a\pi}{3}$

두 함수의 주기가 같으므로 $3\pi=\frac{a\pi}{3}$

따라서 $a=9$

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=4\cos(x+\pi)+k$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ 5\right)$를 지나므로

$5=4\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+k=4\times\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+k$

이다. 따라서 $-2+k=5$이므로 $k=7$이다.

26. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 문제 해결하기

$3^a+3^{-a}=t$라 하면

$3^a+3^{-a}\geq2\sqrt{3^a\times3^{-a}}=2$이므로 $t\geq2$이다.

$t^2=2t+8$에서 $(t-4)(t+2)=0$이고 $t\geq2$이므로

$t=4$이다.

$27^a+27^{-a}=(3^a+3^{-a})^3-3(3^a+3^{-a})$

$=t^3-3t$

$=64-12=52$

27. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 집합 문제 해결하기

집합 B의 원소는 모두 자연수이므로 a, b, c는 모두 2^k(k는 자연수)의 꼴이다.

$a+b=24$이므로 $\{a,b\}=\{8,16\}$이고

$A=\{8,16,c\}$, $B=\{3,4,\log_2 c\}$이다.

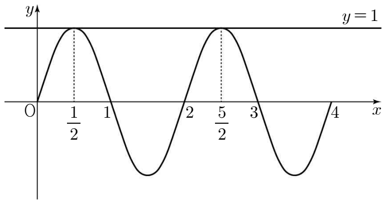
집합 B의 모든 원소의 합이 12이므로

$\log_2 c=5$이고 $c=2^5=32$이다.
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$8+16+32=56$이다.

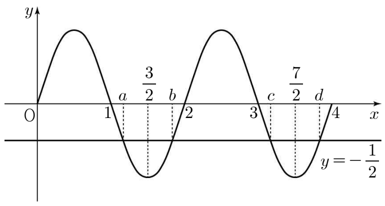
28. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 4$일 때, x에 대한 방정식 $\sin \pi x-\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0$의 실근의 합은 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 직선 $y=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$과 만나는 점의 x좌표의 합과 같다. 함수 $y=\sin \pi x$의 주기는 2이다.

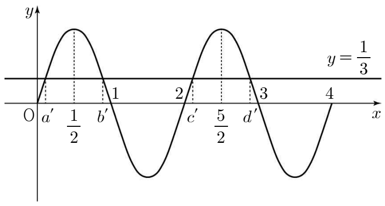
(i) $n=1$일 때, 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$이므로 $f(1)=3$이다.



(ii) $n=2$일 때, 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나는 점의 x좌표를 a, b, c, d라 하면 $\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{c+d}{2}=\frac{7}{2}$에서 $f(2)=10$이다.



(iii) $n=3$일 때, 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{3}$과 만나는 점의 x좌표를 a', b', c', d'이라 하면 $\frac{a'+b'}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{c'+d'}{2}=\frac{5}{2}$에서 $f(3)=6$이다.



(iv) $n \ge 4$일 때, (ii), (iii)과 같은 방법으로 n이 짝수일 때 $f(n)=10$, n이 1이 아닌 홀수일 때 $f(n)=6$이다. 따라서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$
$=3+10+6+10+6=35$

29. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{DF}}=x$, $\angle \mathrm{CDF}=\theta$라 하면 $\angle \mathrm{BDE}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고
$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DE}}$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=1-\overline{\mathrm{AE}}=1-\overline{\mathrm{DE}}$이다.
같은 방법으로
$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{DF}}$이므로 $\overline{\mathrm{CF}}=1-\overline{\mathrm{AF}}=1-\overline{\mathrm{DF}}$이다.
삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 사인법칙에 의해

삼각형 BDE에서 $\frac{1-\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2r_1$ ⋯ ①

삼각형 CDF에서 $\frac{1-\overline{\mathrm{DF}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{DF}}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2r_2$ ⋯ ②

이 성립한다.
$r_1=2r_2$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=2\overline{\mathrm{DF}}=2x$이고
①에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2x)=2x\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2x\cos\theta$
②에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)=x\sin\theta$이므로
두 식의 양변을 제곱하여 연립하면
$(1-2x)^2+4(1-x)^2=8x^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=8x^2$
$x=\frac{5}{12}$
따라서 $p=12$, $q=5$이므로 $p+q=17$이다.

[다른 풀이]
$\angle \mathrm{AED}=\theta$라 두면 $\angle \mathrm{AFD}=\pi-\theta$이고
$\angle \mathrm{BED}=\pi-\theta$, $\angle \mathrm{CFD}=\theta$이다.
삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 사인법칙에 의해

삼각형 BDE에서 $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\theta}=2r_1$

$\overline{\mathrm{BD}}=2r_1\sin\theta$ ⋯ ①

삼각형 DCF에서 $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=2r_2$

$\overline{\mathrm{CD}}=2r_2\sin\theta$ ⋯ ②

①, ②에 의해 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=r_1:r_2=2:1$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=1$, $\angle \mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{DF}}=x$라 두면 $\overline{\mathrm{CF}}=1-x$가 되어
삼각형 DCF에서 코사인법칙에 의해

$x^2=(1-x)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-2(1-x)\times\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\frac{\pi}{4}$

$x=\frac{5}{12}$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로 $p+q=17$이다.

30. [출제의도] 지수함수의 그래프 추론하기

$f(x)=\begin{cases}-x+k-4 & (x<k)\\ x-k-4 & (x \ge k)\end{cases}$

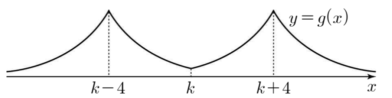
이며 $k-4<x<k+4$일 때 $f(x)<0$이고,
$x \le k-4$ 또는 $x \ge k+4$일 때 $f(x) \ge 0$이다.
따라서 $g(x)$는

$g(x)=\begin{cases}a^{-f(x)} & (k-4<x<k+4)\\ a^{f(x)} & (x \le k-4 \text{ 또는 } x \ge k+4)\end{cases}$

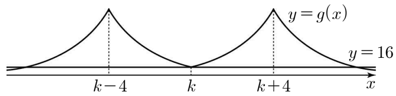
$=\begin{cases}a^{-x+k-4} & (x \le k-4)\\ a^{x-k+4} & (k-4<x<k)\\ a^{-x+k+4} & (k \le x<k+4)\\ a^{x-k-4} & (x \ge k+4)\end{cases}$

이다.

(i) $0<a<1$일 때
함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다. 따라서 함수 $g(x)$는
$k-4<x<k$ 또는 $x \ge k+4$일 때 $f(x)$의 값이 증가하므로 $g(x)$의 값은 감소하고,
$x \le k-4$ 또는 $k \le x<k+4$일 때 $f(x)$의 값이 감소하므로 $g(x)$의 값은 증가한다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

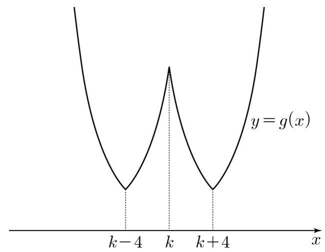


함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=16$의 교점의 개수가 3이므로 $g(k)=16$이다.

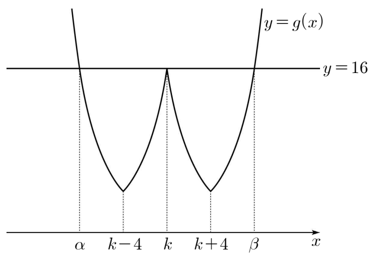


$g(k)=a^4=16$에서 $a=2$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>1$일 때
함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다. 따라서 함수 $g(x)$는
$k-4<x<k$ 또는 $x \ge k+4$일 때 $f(x)$의 값이 증가하므로 $g(x)$의 값도 증가하고,
$x \le k-4$ 또는 $k \le x<k+4$일 때 $f(x)$의 값이 감소하므로 $g(x)$의 값도 감소한다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=16$의 교점의 개수가 3이므로 $g(k)=16$이다.



$g(k)=a^4=16$에서 $a=2$이다.
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=16$의 서로 다른 세 교점의 x좌표를 α, k, β라 두면($\alpha<k<\beta$)
$g(1)=16$이므로 다음과 같은 세 가지 경우로 나눌 수 있다.
① $\alpha=1$일 때, $g(1)=g(k)=g(\beta)$이므로
$2^{-1+k-4}=2^4=2^{\beta-k-4}$
$-1+k-4=4$
따라서 $k=9$이므로 $f(x)=|x-9|-4$이다.
② $k=1$일 때, $f(x)=|x-1|-4$이다.
③ $\beta=1$일 때, $g(\alpha)=g(k)=g(1)$이므로
$2^{-\alpha+k-4}=2^4=2^{1-k-4}$
$4=1-k-4$
따라서 $k=-7$이므로 $f(x)=|x+7|-4$이다.
(i), (ii)에 의해 $a=2$이므로 $f(a-2)=f(0)$이고
①, ②, ③에서 모든 $f(0)$의 값의 합은 $5-3+3=5$이다.