2023학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	⑤	2	①	3	④	4	⑤	5	③
6	④	7	③	8	①	9	③	10	④
11	②	12	②	13	③	14	①	15	②
16	③	17	②	18	⑤	19	④	20	①
21	⑤	22	6	23	16	24	7	25	14
26	23	27	21	28	91	29	94	30	120

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$i(1-i)=i-i^2=1+i$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(2x^2-4x+3)+(-x^2+9x+6)$

$\quad =x^2+5x+9$

3. [출제의도] 나머지정리 계산하기

$P(x)=x^3-2x^2-8x+a$라 하면

$P(x)$가 $x-3$으로 나누어떨어지므로

나머지정리에 의해

$P(3)=3^3-2\times3^2-8\times3+a=0$

따라서 $a=15$이다.

4. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

등식 $x^2+ax-3=x(x+2)+b$가 x에 대한 항등식

이므로 $x^2+ax-3=x^2+2x+b$에서 $a=2$, $b=-3$

따라서 $a+b=-1$이다.

5. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 계산하기

부등식 $|2x-3|<5$를 풀면

$-5<2x-3<5$이므로 $-1<x<4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로 $a+b=3$이다.

6. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+5x+9$의 그래프와

직선 $y=x+k$가 만나지 않도록 하려면

$x^2+5x+9=x+k$에서

이차방정식 $x^2+4x+9-k=0$의 판별식

$D=4^2-4(9-k)=4k-20<0$

$k<5$이므로 자연수 k는 1, 2, 3, 4

따라서 자연수 k의 개수는 4이다.

7. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$a=2023$이라 하면

$\dfrac{2022\times(2023^2+2024)}{2024\times2023+1}=\dfrac{(a-1)\times(a^2+a+1)}{(a+1)\times a+1}$

$=\dfrac{(a-1)\times(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=a-1$

$=2023-1=2022$

8. [출제의도] 인수분해 계산하기

$x^3y+xy^3-x^2-y^2$

$=xy(x^2+y^2)-(x^2+y^2)$

$=(xy-1)(x^2+y^2)$

$x=1-2i$, $y=1+2i$에서 $x+y=2$, $xy=5$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\times5=-6$

따라서 $x^3y+xy^3-x^2-y^2=(5-1)\times(-6)=-24$

이다.

9. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 연립방정식 문제 해결하기

연립방정식

$$\begin{cases} 4x^2-y^2=27 & \cdots ㉠ \\ 2x+y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

에서 ㉠과 ㉡에 의해

$4x^2-y^2=(2x+y)(2x-y)=3(2x-y)=27$

이므로 $2x-y=9 \cdots$ ㉢

㉡과 ㉢을 더하면 $4x=12$, $x=3$이고

$x=3$을 ㉡에 대입하면 $y=-3$이므로

$\alpha=3$, $\beta=-3$

따라서 $\alpha-\beta=6$이다.

10. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2-i$이므로

x에 $2-i$를 대입하면

$2(2-i)^2+a(2-i)+b=(2a+b+6)-(8+a)i=0$

$2a+b+6=0$, $8+a=0$

따라서 $a=-8$, $b=10$이므로 $b-a=18$이다.

11. [출제의도] 나머지정리 이해하기

두 상수 a, b에 대해 $P(x)=x^2+ax+b$라 하자.

조건 (가)에서 나머지정리에 의해 $P(1)=1$이므로

$a+b=0 \cdots$ ㉠

조건 (나)에서 나머지정리에 의해

$2P(2)=2$, $P(2)=1$이므로

$2a+b=-3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-3$, $b=3$

따라서 $P(4)=4^2-3\times4+3=7$이다.

12. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -(2a+1) & (a+1)^2 & -(a^2+1) \\ & & 1 & -2a & a^2+1 \\ \hline & 1 & -2a & a^2+1 & \boxed{0} \end{array}$$

에서

$x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)$

$=(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)$이고

이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의

판별식 $D=4a^2-4(a^2+1)=-4<0$이므로

삼차방정식 $x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)=0$

의 서로 다른 두 허근 α, β는

이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$의

서로 다른 두 허근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2a=8$이므로 $a=4$

따라서 $\alpha\beta=a^2+1=17$이다.

13. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$x^5+ax^2+(a+1)x+2=(x-1)Q(x)+6 \cdots$ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$1+a+(a+1)+2=6$이므로 $a=1$

$x^5+x^2+2x+2=(x-1)Q(x)+6 \cdots$ ㉡

㉡에 $x=2$를 대입하면

$32+4+4+2=Q(2)+6$이므로 $Q(2)=36$

따라서 $a+Q(2)=37$이다.

14. [출제의도] 다항식의 연산을 활용한 실생활 문제 해결하기

절대 온도가 T인 이상 기체가 담긴 두 강철 용기 A, B에 대하여 각 강철 용기에 담긴 이상 기체의 몰수를 각각 n_A, n_B라 하고, 압력을 각각 P_A, P_B라 하자.

$n_A=\dfrac{1}{4}n_B$, $P_A=\dfrac{3}{2}P_B$이므로

$V_A=R\left(\dfrac{n_AT}{P_A}\right)=R\left(\dfrac{\frac{1}{4}n_BT}{\frac{3}{2}P_B}\right)=\dfrac{1}{6}R\left(\dfrac{n_BT}{P_B}\right)=\dfrac{1}{6}V_B$

따라서 $\dfrac{V_A}{V_B}=\dfrac{1}{6}$이다.

15. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

두 점 P, Q는 각각

$\mathrm{P}(t,\ 2t^2+1)$, $\mathrm{Q}(t,\ -(t-3)^2+1)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2t^2+(t-3)^2=3t^2-6t+9$

$\overline{\mathrm{AB}}=3$이고 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 사각형 PAQB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{3}{2}(3t^2-6t+9)$이다.

사각형 PAQB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$0<t<3$에서 $S(t)=\dfrac{3}{2}(3t^2-6t+9)=\dfrac{9}{2}(t-1)^2+9$

$S(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 9를 갖는다.

따라서 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은 9이다.

16. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

(i) 1이 x에 대한 방정식 $x-a=0$의 근일 경우

$a=1$이므로 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-2x+4)=0$이고

방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식

$D=4-16=-12<0$

그러므로 방정식 $(x-1)(x^2-2x+4)=0$은

서로 다른 세 실근을 갖지 않는다.

(ii) 1이 x에 대한 방정식 $x^2+(1-3a)x+4=0$의 근일 경우

$1+(1-3a)+4=0$에서 $a=2$이므로 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-5x+4)=0$

방정식 $x^2-5x+4=0$이 두 실근 1, 4를 가지므로

방정식 $(x-2)(x^2-5x+4)=0$은 서로 다른

세 실근 1, 2, 4를 갖는다.

따라서 (i), (ii)에 의해

$\alpha=2$, $\beta=4$ (또는 $\alpha=4$, $\beta=2$)이므로

$\alpha\beta=8$이다.

17. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 이해하기

이차함수 $y=ax^2\,(a>0)$의 그래프와

직선 $y=x+6$이 만나는 점의 x좌표는 $ax^2=x+6$에서

이차방정식 $ax^2-x-6=0$의 두 실근 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$와

같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{a}$, $\alpha\beta=-\dfrac{6}{a}$

한편, $\overline{\mathrm{CA}}=\beta-\alpha$이고 직선 $y=x+6$의 기울기가

1이므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\beta-\alpha}=1$에서 $\beta-\alpha=\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{7}{2}$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2-4\times\left(-\dfrac{6}{a}\right)$,

$\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{24}{a}-\dfrac{49}{4}=0$이므로 $49a^2-96a-4=0$에서

$(49a+2)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\quad =\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\dfrac{6}{2}\right)$

$\quad =\dfrac{1}{4}+6=\dfrac{25}{4}$

이다.

18. [출제의도] 사차방정식 이해하기

$x^2=X$라 하면 주어진 방정식 $P(x)=0$은
$4X^2-4(n+2)X+(n-2)^2=0$이고
근의 공식에 의해

$$X=\frac{4(n+2)\pm\sqrt{16(n+2)^2-16(n-2)^2}}{8}$$
$$=\frac{n+2\pm\sqrt{\boxed{8n}}}{2}$$

그러므로 $X=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}+1\right)^2$ 또는 $X=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}-1\right)^2$

즉, $x^2=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}+1\right)^2$ 또는 $x^2=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}-1\right)^2$ 에서

$x=\sqrt{\frac{n}{2}}+1$ 또는 $x=-\sqrt{\frac{n}{2}}-1$ 또는

$x=\sqrt{\frac{n}{2}}-1$ 또는 $x=-\sqrt{\frac{n}{2}}+1$

방정식 $P(x)=0$이 정수해를 갖기 위해서는 $\sqrt{\frac{n}{2}}$ 이 자연수가 되어야 한다.
자연수 l에 대하여 $n=2l^2$이어야 하므로
20 이하의 자연수 n의 값은 2, 8, 18
(ⅰ) $n=2$인 경우
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
이므로 서로 다른 세 개의 정수해를 가진다.
(ⅱ) $n=8$인 경우
$x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
이므로 서로 다른 네 개의 정수해를 가진다.
(ⅲ) $n=18$인 경우
$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$
이므로 서로 다른 네 개의 정수해를 가진다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 네 개의 정수해를 갖도록 하는 20 이하의 모든 n의 값은 $\boxed{8}$, $\boxed{18}$이다.
따라서 $f(n)=8n$, $a=8$, $b=18$이므로
$f(b-a)=f(10)=80$이다.

19. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 도형 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{CH}}=1$, $\overline{\mathrm{BH}}=x$이고
삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$
직각삼각형 AHC와 직각삼각형 CHB는 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{CH}}:\overline{\mathrm{BH}}$이다.
$\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x$이므로 $3x^2-8x+3=0$

$0<x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ 이다.

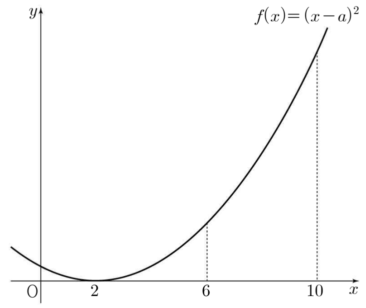
한편, 다항식 $3t^3-5t^2+4t+7$을 $3t^2-8t+3$으로 나누었을 때의 몫은 $t+1$, 나머지는 $9t+4$이므로
$3t^3-5t^2+4t+7=(3t^2-8t+3)(t+1)+9t+4$
따라서

$$3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$$
$$=9x+4=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4$$
$$=16-3\sqrt{7}$$

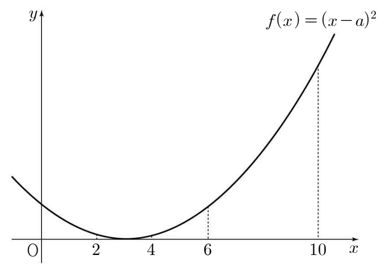
이다.

20. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

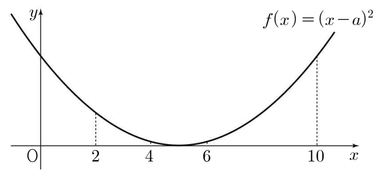
함수 $f(x)=(x-a)^2$이므로
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,0)$이고, 조건 (가)에 의해 $2\le a\le 10$이다.
(ⅰ) $a=2$인 경우
$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과
$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(6)$으로 같으므로 조건 (나)를 만족시킨다.
그러므로 $f(-1)=(-1-2)^2=9$



(ⅱ) $2<a\le 6$인 경우
$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(2)$ 또는 $f(6)$이고
$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(6)$이므로
조건 (나)에 의해 $f(2)\le f(6)$이다.
$(2-a)^2-(6-a)^2\le 0$에서 $a\le 4$이므로 $2<a\le 4$
$f(-1)=(-1-a)^2$이므로 $9<f(-1)\le 25$

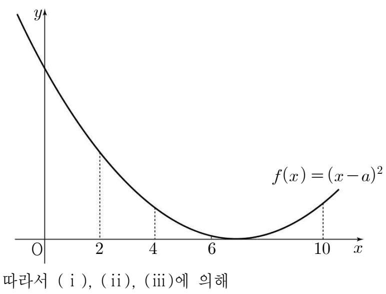


($2<a\le 4$인 경우)



($4<a\le 6$인 경우)

(ⅲ) $6<a\le 10$인 경우
$2\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)$이고
$6\le x\le 10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
$f(2)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해
$9\le f(-1)\le 25$이므로 $M+m=25+9=34$이다.

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 추론하기

ㄱ. 방정식 $x^2-6x+6=6$의 해는
$x=0$ 또는 $x=6$이므로 점 $\mathrm{C}(0,6)$, 점 $\mathrm{D}(6,6)$에서
$\overline{\mathrm{CD}}=6$이다. (참)
ㄴ. 방정식 $x^2=k$의 해는
$x=\pm\sqrt{k}$이므로 점 $\mathrm{A}(-\sqrt{k},k)$, 점 $\mathrm{B}(\sqrt{k},k)$
에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=4k$
두 점 C, D의 x좌표를 각각 α, β라 하면
방정식 $x^2-6x+6=k$에서
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=6-k$
$\overline{\mathrm{CD}}^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=12+4k$
따라서 $\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2=12$로 일정하다. (참)
ㄷ. $\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2=(\overline{CD}+\overline{AB})(\overline{CD}-\overline{AB})=12$에서
$\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{AB}=3$

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{7}{2}$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{k}=\frac{1}{2}$에서 $k=\frac{1}{16}$ 이다.

점 B의 x좌표는 $\frac{1}{4}$이고,

방정식 $x^2-6x+6=\frac{1}{16}$에서 $16x^2-96x+95=0$

이므로 $x=\frac{5}{4}$ 또는 $x=\frac{19}{4}$ 이다.

점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표보다 작으므로

점 C의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=1$

따라서 $k+\overline{\mathrm{BC}}=\frac{17}{16}$이다. (참)

22. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$(4x-y-3z)^2=16x^2+y^2+9z^2-8xy+6yz-24zx$
따라서 yz의 계수는 6이다.

23. [출제의도] 이차부등식 계산하기

이차항의 계수가 1이고 해가 $-2\le x\le 4$인
이차부등식은 $(x+2)(x-4)\le 0$
$x^2-2x-8\le 0$이므로 $a=-2$, $b=-8$
따라서 $ab=16$이다.

24. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 x^3+2를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면
$x^3+2=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$
$x=-1$을 대입하면 $-a+b=1 \cdots ㉠$
$x=2$를 대입하면 $2a+b=10 \cdots ㉡$
㉠과 ㉡을 연립하면 $a=3$, $b=4$이다.
따라서 $a+b=7$이다.

25. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2-6x+11=0$에서 $x=3\pm\sqrt{2}i$이므로
$\alpha=3+\sqrt{2}i$, $\beta=3-\sqrt{2}i$라 하면
β는 α의 켤레복소수이다.
즉, $\beta=\overline{\alpha}$이고 $\alpha=\overline{\beta}$이다.
또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=11$이다.

따라서 $11\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)=11\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=11\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)$

$$=11\left\{\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right\}$$
$$=11\times\frac{36-22}{11}$$
$$=14$$

이다.

26. [출제의도] 나머지정리 문제 해결하기

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+11$$
$$=(x-3)(x^2+x-2)+5$$

다항식 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는
$P(4)$이다.
따라서 $P(4)=1\times 18+5=23$이다.

27. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식과 이차부등식을 이용하여 연립부등식 이해하기

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} |x-n|>2 & \cdots ㉠ \\ x^2-14x+40 \le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

에서 부등식 ㉠의 해는

$x<n-2$ 또는 $x>n+2$이다.

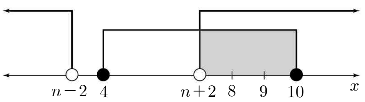
이차부등식 ㉡의 해는

$x^2-14x+40=(x-4)(x-10) \le 0$에서

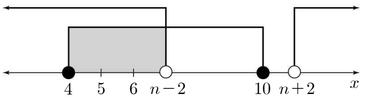
$4 \le x \le 10$이다.

(ⅰ) $n \le 5$ 또는 $n \ge 9$인 경우

① $n \le 5$인 경우

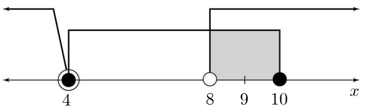


② $n \ge 9$인 경우



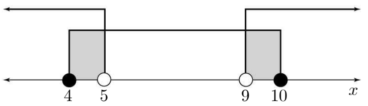
두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x의 개수는 3 이상이다.

(ⅱ) $n=6$인 경우



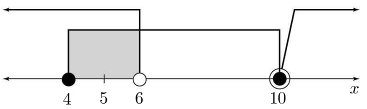
부등식 ㉠은 $|x-6|>2$이므로 해는 $x<4$ 또는 $x>8$이다. 두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수는 9, 10이다.

(ⅲ) $n=7$인 경우



부등식 ㉠은 $|x-7|>2$이므로 해는 $x<5$ 또는 $x>9$이다. 두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수는 4, 10이다.

(ⅳ) $n=8$인 경우



부등식 ㉠은 $|x-8|>2$이므로 해는 $x<6$ 또는 $x>10$이다. 두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수는 4, 5이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의해 자연수 n의 값은 6, 7, 8이므로 모든 자연수 n의 값의 합은 21이다.

28. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제 해결하기

이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 직선 $y=ax$와 한 점에서만 만나므로

$x^2-4x+\frac{25}{4}=ax$에서

이차방정식 $x^2-(a+4)x+\frac{25}{4}=0$의 판별식

$D=(a+4)^2-4\times1\times\frac{25}{4}=0$

$(a+4)^2=25$에서 $a>0$이므로 $a=1$

이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표는

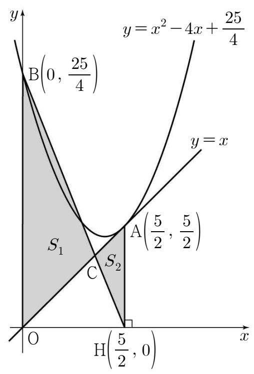
$x^2-4x+\frac{25}{4}=x$에서

이차방정식 $x^2-5x+\frac{25}{4}=0$의 실근과 같으므로

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=0$에서 $x=\frac{5}{2}$이고,

세 점 A, B, H는 각각

$\mathrm{A}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{25}{4}\right)$, $\mathrm{H}\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이다.



한편, 삼각형 BOH의 넓이를 T_1, 삼각형 AOH의 넓이를 T_2라 할 때, $T_1-T_2=S_1-S_2$가 성립한다.

$$\begin{aligned} S_1-S_2 &= T_1-T_2 \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{25}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2} \\ &= \frac{75}{16} \end{aligned}$$

따라서 $p=16$, $q=75$이므로 $p+q=91$이다.

29. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

49 이하의 자연수 m에 대하여 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$의 값은 다음과 같다.

$m=1,\ 9,\ 17,\ \cdots,\ 49$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$m=2,\ 10,\ 18,\ \cdots,\ 42$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=i$

$m=3,\ 11,\ 19,\ \cdots,\ 43$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$m=4,\ 12,\ 20,\ \cdots,\ 44$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$

$m=5,\ 13,\ 21,\ \cdots,\ 45$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$m=6,\ 14,\ 22,\ \cdots,\ 46$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-i$

$m=7,\ 15,\ 23,\ \cdots,\ 47$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$m=8,\ 16,\ 24,\ \cdots,\ 48$일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$

49 이하의 자연수 n에 대하여 i^n의 값은 다음과 같다.

$n=1,\ 5,\ 9,\ \cdots,\ 49$일 때, $i^n=i$

$n=2,\ 6,\ 10,\ \cdots,\ 46$일 때, $i^n=-1$

$n=3,\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 47$일 때, $i^n=-i$

$n=4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 48$일 때, $i^n=1$

$\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$ 또는 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$

(ⅰ) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$인 경우

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$, $i^n=-1$이므로

$m=48$, $n=46$일 때 $m+n$은 최댓값 94를 갖는다.

(ⅱ) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$인 경우

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$, $i^n=1$이므로

$m=44$, $n=48$일 때 $m+n$은 최댓값 92를 갖는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $m+n$의 최댓값은 94이다.

30. [출제의도] 부등식을 활용하여 이차함수의 그래프 추론하기

조건 (가)에서 $f(x)=ax^2 (a\neq0)$

조건 (나)를 만족시키려면 $f(x)+g(x)$는 일차식이어야 하므로

$g(x)=-ax^2+bx+c\,(b\neq0)$으로 나타낼 수 있다.

$f(x)+g(x)=bx+c$이고

부등식 $bx+c\ge0$의 해가 $x\ge2$이므로

$b>0$, $-\frac{c}{b}=2$에서 $c=-2b$

조건 (다)를 만족시키려면 함수 $f(x)-g(x)=2ax^2-bx+2b$가 $x=1$에서 최솟값을 가지므로

$a>0$이고, $\frac{b}{4a}=1$에서 $b=4a$

조건 (나)에서 $c=-2b$이므로 $c=-8a$

즉, $g(x)=-a(x^2-4x+8)=-a(x-2)^2-4a$

두 조건 (가), (나)에서 $f(x)+g(x)=4a(x-2)$이다.

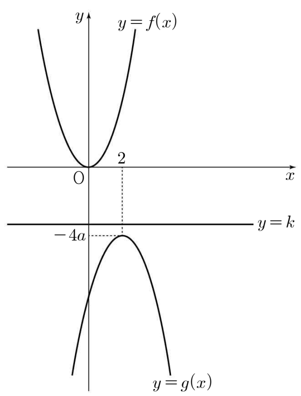
방정식 $\{f(x)-k\}\times\{g(x)-k\}=0$이 실근을 갖지 않기 위해서는

방정식 $f(x)-k=0$은 실근을 갖지 않고,

방정식 $g(x)-k=0$도 실근을 갖지 않아야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않고, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$도 만나지 않으므로 직선 $y=k$는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 사이에 있다.

그러므로 정수 k는 함수 $g(x)$의 최댓값인 $-4a$보다 크고, 함수 $f(x)$의 최솟값인 0보다 작다.



$-4a<k<0$을 만족시키는 정수 k의 개수가 5이므로

$-6\le-4a<-5$에서 $\frac{5}{4}<a\le\frac{3}{2}$

따라서 $f(22)+g(22)=4a(22-2)=80a$이므로

$f(22)+g(22)$의 최댓값은 120이다.