• 수학 영역 •

정 답

1	③	*2*	②	*3*	③	*4*	④	*5*	⑤
6	③	*7*	①	*8*	②	*9*	③	*10*	⑤
11	④	*12*	④	*13*	①	*14*	②	*15*	①
16	5	*17*	15	*18*	109	*19*	80	*20*	226
21	8	*22*	82						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산한다.

$\sqrt{8}\times 4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=4$

2. [출제의도] 다항함수의 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^2(2x^3+3x^2)dx=\left[\frac{x^4}{2}+x^3\right]_0^2=16$

3. [출제의도] 등비수열의 항을 구한다.

$a_1a_3=(a_2)^2=4$, $a_3a_5=(a_4)^2=64$에서
$a_2=2$, $a_4=8$이고 등비수열 $\{a_n\}$의
공비는 2이므로 $a_6=8\times 2^2=32$

4. [출제의도] 함수의 극한값을 구한다.

$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 2-}f(x)=4+(-2)=2$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로 $\sin\theta=-2\cos\theta$이다.
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\cos\theta\tan\theta=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에서 $f'(x)=3x^2-4x+2$
$f(1)=a+1$, $f'(1)=1$이므로
곡선 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식은
$y=(x-1)+a+1$, 즉 $y=x+a$
두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(-a, 0)$, $(0, a)$이다.
$\overline{\mathrm{PQ}}=6$에서 $\sqrt{a^2+a^2}=6$, $a^2=18$
$a>0$이므로 $a=3\sqrt{2}$

7. [출제의도] 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분에서 $0\le x\le 2$인 부분과 $2\le x\le 4$인 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^4\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=2\int_0^2(-2x^2+6x)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^2=\frac{40}{3}$$

8. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

(i) $1\le n\le 10$인 경우
$a_1=20$, $a_{n+1}=a_n-2$이므로 $a_n=-2n+22$
$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(-2n+22)=110$
(ii) $11\le n\le 30$인 경우
$a_{10}=2$이므로 $a_n=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수인 경우})\\ -2 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$
$\sum_{n=11}^{30}a_n=(-2)\times 10=-20$
(i), (ii)에서 $\sum_{n=1}^{30}a_n=110+(-20)=90$

9. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$
다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하자.
(i) $n\le 1$일 때, 주어진 등식의 좌변의 차수는 1 이하이고, 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.
(ii) $n=2$일 때, 주어진 등식의 좌변의 이차항의 계수는 -1이고, 우변의 이차항의 계수는 2이므로 등식이 성립하지 않는다.
(iii) $n\ge 3$일 때, 주어진 등식의 좌변의 n차항의 계수가 $n-3$이고 우변의 차수는 2이므로 등식이 성립하기 위해서는 $n=3$이어야 한다.
(i), (ii), (iii)에서 $f(x)$는 삼차함수이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)
라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고
$xf'(x)-3f(x)=x(3x^2+2ax+b)-3(x^3+ax^2+bx)$
$=-ax^2-2bx$
주어진 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$-a=2$, $-2b=-8$
에서 $a=-2$, $b=4$이고 $f(x)=x^3-2x^2+4x$
따라서 $f(1)=1-2+4=3$

10. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자.
$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a)$에서
$\log_2(x+2a)+\log_2(-x)=0$
$\log_2\{-x(x+2a)\}=0$
$-x(x+2a)=1$
$x^2+2ax+1=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 두 실근이 x_1, x_2이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$x_1+x_2=-2a$, $x_1x_2=1$
이다. 이때
$y_1+y_2=-\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2)$
$=-\log_2x_1x_2$
$=-\log_21=0$
이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $(-a, 0)$이다.
선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있으므로 $-4a+5=0$에서 $a=\frac{5}{4}$
$a=\frac{5}{4}$를 ㉠에 대입하면
$x^2+\frac{5}{2}x+1=0$, $2x^2+5x+2=0$
$(x+2)(2x+1)=0$
$x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$
따라서 두 교점의 좌표는 $(-2, -1)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$이고
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$

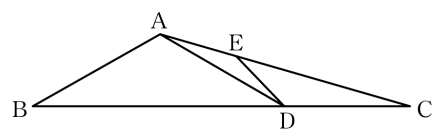
11. [출제의도] 연속함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
조건 (가)와 (나)에서
$f(4)=\lim_{x\to 4-}f(x)=16a+4b-24$이고
$f(0)=f(4)$이므로 $-24=16a+4b-24$에서
$b=-4a$ …… ㉠
$0\le x<4$에서 $f(x)=a(x-2)^2-4a-24$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로
$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않으면 $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.
$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 1개 가지면 $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로
$f(1)f(2)=(-3a-24)(-4a-24)$
$=12(a+8)(a+6)<0$
$-8<a<-6$이고 a는 정수이므로 $a=-7$
㉠에 의하여 $b=28$
따라서 $a+b=-7+28=21$

12. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 x좌표는 $0\le x<\frac{4\pi}{a}$일 때 방정식
$\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$ …… ㉠
의 실근과 같다.
$ax-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$이고
$|4\sin t+2|=2$ …… ㉡
에서 $\sin t=0$ 또는 $\sin t=-1$
$-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$일 때, 방정식 ㉡의 실근은
0, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, 3π, $\frac{7\pi}{2}$
의 6개이고 이 6개의 실근의 합은 11π이다.
따라서 $n=6$이고 방정식 ㉠의 6개의 실근의 합이 39이므로
$39a-\frac{\pi}{3}\times 6=11\pi$, $a=\frac{\pi}{3}$
따라서 $n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\frac{2^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times 2\times 3\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
이다. 삼각형 ABD에서
$\sin(\angle\mathrm{ABD})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$
이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ABD})}=\boxed{2}$이다.
삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ACD})}$
이므로
$\sin(\angle\mathrm{CAD})=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}\times\sin(\angle\mathrm{ACD})$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{39}}{26}$$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{DE}} = 2 \times 2 \times \sin(\angle\mathrm{CAD}) = \boxed{\frac{2\sqrt{39}}{13}}$$

이다.

따라서 $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $q = 2$, $r = \frac{2\sqrt{39}}{13}$ 이므로

$$p \times q \times r = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{39}}{13} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 방정식은 $\int_t^x f(s)\,ds = F(x) - F(t) = 0$ 이므로

$F(x) = F(t)$ 이다.

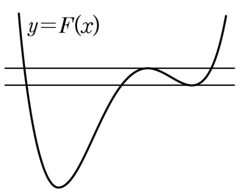
따라서 $g(t)$는 곡선 $y = F(x)$와 직선 $y = F(t)$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

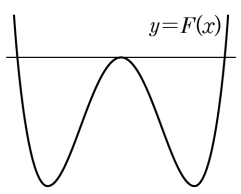
ㄱ. $F'(x) = f(x) = x^2(x-1)$ 이다.

함수 $F(x)$는 $x < 1$에서 감소, $x > 1$에서 증가하므로 $x = 1$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 곡선 $y = F(x)$와 직선 $y = F(1)$은 오직 한 점에서 만나므로 $g(1) = 1$이다. (참)

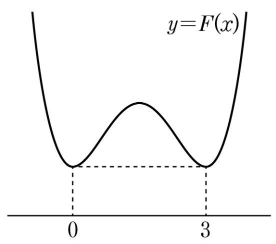
ㄴ. 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $F(x)$의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다. 각 경우 곡선 $y = F(x)$와 직선 $y = F(a)$가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a가 존재한다.





따라서 $g(a) = 3$인 실수 a가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극솟값의 크기가 다른 경우에는 $\lim_{t \to b} g(t) + g(b) = 6$인 실수 b가 존재하지 않는다. 따라서 곡선 $y = F(x)$의 개형은 다음과 같고, $F(0) = F(3)$이다.



$f(0) = F'(0) = 0$이고 $f(3) = F'(3) = 0$이므로

$$F(x) - F(0) = \frac{x^2(x-3)^2}{4} = \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2}{4}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

이므로 $f(4) = 64 - 72 + 18 = 10$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15. [출제의도] 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

S_n이 주어진 조건을 만족시키면 $i \neq j$인 임의의 두 자연수 i, j에 대하여

$S_i - S_j \neq 0$ 이므로

$$S_i - S_j = (pi^2 - 36i + q) - (pj^2 - 36j + q)$$
$$= (i-j)(pi + pj - 36) \neq 0$$

따라서 $i + j \neq \frac{36}{p}$

$p \le 4$이면 $i + j = \frac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 i, j가 존재한다.

$p = 5$이면 $i + j = \frac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 i, j가 존재하지 않는다.

따라서 p의 최솟값은 5, 즉 $p_1 = 5$이다.

$p = 5$일 때 $S_n = 5n^2 - 36n + q$이므로

$a_1 = S_1 = q - 31$,

$n \ge 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 41$

이때

$a_2 = -21$, $a_3 = -11$, $a_4 = -1$, $a_5 = 9$, $a_6 = 19$, $a_7 = 29$, $\cdots$

$|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로 k의 값은 3, 4, 5이다.

$11 < a_1 \le 19$, $11 < q - 31 \le 19$

$42 < q \le 50$

이다. 따라서 모든 q의 값의 합은

$$43 + 44 + \cdots + 50 = \frac{8 \times (43 + 50)}{2} = 372$$

16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 값을 계산한다.

$$\log_2 96 + \log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_2 96 + \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^{-2}}$$
$$= \log_2(2^5 \times 3) - \log_2 3 = 5$$

17. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 극댓값을 구한다.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 10$에서

$f'(x) = 3x^2 - 6x + a$

함수 $f(x)$는 $x = 3$에서 극소이므로

$f'(3) = 27 - 18 + a = 0$, $a = -9$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$

$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$이므로

함수 $f(x)$는 $x = -1$에서 극대이고 극댓값은

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 10 = 15$

18. [출제의도] 자연수의 합의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$$
$$= 7^2 + \sum_{k=1}^{5}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{5}(k-1)^2$$
$$= 49 + \sum_{k=1}^{5}\{(k+1)^2 - (k-1)^2\}$$
$$= 49 + 4\sum_{k=1}^{5}k = 49 + 4 \times \frac{5 \times 6}{2} = 109$$

19. [출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

점 P의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$는

$a(t) = v'(t) = 12t^2 - 48$

$a(k) = 12(k^2 - 4) = 0$에서 $k > 0$이므로 $k = 2$이다.

$0 \le t \le 2$일 때 $v(t) \le 0$이므로

시각 $t = 0$에서 $t = 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt = \int_0^2 (-4t^3 + 48t)\,dt$$
$$= \Big[-t^4 + 24t^2\Big]_0^2 = -16 + 96 = 80$$

20. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x \to 0} |f(x) - 1| = 0$

이므로 삼차식 $f(x) - 1$은 x를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$에 대하여 $f(x) - 1 = xg(x)$라 하자.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|f(x)-1|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{|xg(x)|}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{|x||g(x)|}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0+} |g(x)| = |g(0)|$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|f(x)-1|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{|xg(x)|}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0-} \frac{|x||g(x)|}{x}$$
$$= -\lim_{x \to 0-} |g(x)| = -|g(0)|$$

$|g(0)| = -|g(0)|$에서 $g(0) = 0$

이차식 $g(x)$도 x를 인수로 가지므로

$f(x) - 1 = x^2(x + a)$ (a는 실수)

라 하면 $f(x) = x^3 + ax^2 + 1$

$xf(x) \ge -4x^2 + x$에서

$x(x^3 + ax^2 + 1) \ge -4x^2 + x$

$x^4 + ax^3 + 4x^2 \ge 0$

$x^2(x^2 + ax + 4) \ge 0$

$x^2 \ge 0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2 + ax + 4 \ge 0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2 + ax + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = a^2 - 16 \le 0$

$-4 \le a \le 4$

$f(5) = 25a + 126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은 $a = 4$일 때 226이다.

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{3} : \sqrt{19}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{3}k$ $(k > 0)$

이라 하면 $\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{19}k$이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 4k$이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. 직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기가 $60°$ 이므로

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}k, \ y_1 = \frac{3}{2}k$$

따라서 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{3}{2}k\right)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 직선 AB와 x축이 이루는 예각의 크기가 $30°$이다.

$x_2 - x_1 = 4k\cos 30° = 2\sqrt{3}k$에서

$$x_2 = x_1 + 2\sqrt{3}k = \frac{3\sqrt{3}}{2}k$$

$y_2 - y_1 = 4k\sin 30° = 2k$에서

$$y_2 = y_1 + 2k = \frac{7}{2}k$$

따라서 $\mathrm{B}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k, \frac{7}{2}k\right)$

점 A는 곡선 $y = a^{-2x} - 1$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}k = a^{\sqrt{3}k} - 1$에서 $a^{\sqrt{3}k} = \frac{3k+2}{2}$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y = a^x - 1$ 위의 점이므로

$\frac{7}{2}k = a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} - 1$에서 $a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} = \frac{7k+2}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{3k+2}{2}\right)^3 = \left(\frac{7k+2}{2}\right)^2$$

$27k^3 - 44k^2 - 20k = 0$, $k(k-2)(27k+10) = 0$

$k > 0$이므로 $k = 2$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = 4k = 8$

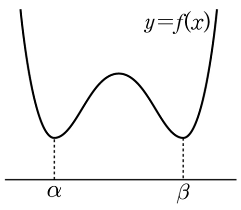
22. [출제의도] 다항함수의 도함수를 활용하여 함수에 대한 문제를 해결한다.

사차함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서만 극솟값을 갖는다고 하면 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-f(\alpha) & (t<\alpha) \\ f(\alpha)-f(t) & (t\ge\alpha) \end{cases}$$

구간 $(-\infty, \alpha)$에서 함수 $f(t)$가 감소하므로 함수 $g(t)$도 감소하고, 구간 $[\alpha, \infty)$에서 함수 $f(t)$가 증가하므로 함수 $g(t)$는 감소한다.
실수 전체의 집합에서 함수 $g(t)$가 감소하므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.
그러므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 가져야 한다.
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta\ (\alpha<\beta)$에서 극솟값을 가지고, $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$라 하자.

(ⅰ) $f(\alpha)=f(\beta)$인 경우

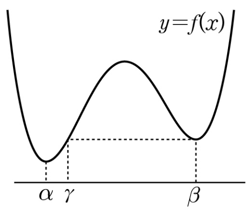


함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ 0 & (\alpha\le t\le\beta) \\ a-f(t) & (t>\beta) \end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f(\alpha)<f(\beta)$인 경우

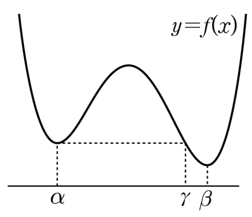


$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\beta)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ a-f(t) & (\alpha\le t<\gamma) \\ a-b & (\gamma\le t\le\beta) \\ a-f(t) & (t>\beta) \end{cases}$$

$a-b<0$이므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(ⅲ) $f(\alpha)>f(\beta)$인 경우



$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\alpha)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-b & (t<\alpha) \\ a-b & (\alpha\le t\le\gamma) \\ f(t)-b & (\gamma<t<\beta) \\ b-f(t) & (t\ge\beta) \end{cases}$$

$a-b>0$이므로 $k=a-b$, $\alpha=0$, $\gamma=2$이면 k는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
$f'(0)=0$, $f(0)=f(2)$
이다. 또 $g(4)=0$이므로 $\beta=4$이고 $f'(4)=0$이다.
$f(x)-f(0)=x^2(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하자.
$f'(x)=2x(x-2)(x-p)+x^2(2x-p-2)$이므로
$f'(4)=0$에서 $16(4-p)+16(6-p)=0$
$10-2p=0$, $p=5$
그러므로
$f(x)=x^2(x-2)(x-5)+f(0)$
$k=f(\alpha)-f(\beta)=f(0)-f(4)$
$=f(0)-\{-32+f(0)\}=32$
$g(-1)=f(-1)-f(4)$
$=\{18+f(0)\}-\{-32+f(0)\}=50$
따라서 $k+g(-1)=82$

[확률과 통계]

23	②	24	①	25	③	26	④	27	⑤
28	④	29	105	30	17				

23. [출제의도] 모표준편차와 표본의 크기를 이용하여 표본평균의 표준편차를 계산한다.

모표준편차가 12이고 표본의 크기가 36이므로

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{12}{\sqrt{36}}=\dfrac{12}{6}=2$

24. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구한다.

다항식 $(x^2+1)(x-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는 (x^2+1)에서 x^2의 계수 1과 $(x-2)^5$의 전개식에서 x^4의 계수를 곱한 것과 같다.
$(x-2)^5$의 전개식에서 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(-2)^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
$r=1$일 때 x^4의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_1\times(-2)=-10$
따라서 $(x^2+1)(x-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는 $1\times(-10)=-10$

25. [출제의도] 이산확률변수의 평균과 분산을 구한다.

$\mathrm{E}(X)=(-3)\times\dfrac{1}{2}+0\times\dfrac{1}{4}+a\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{4}$

$-\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{4}=-1$에서 $a=2$

$\mathrm{V}(X)=(-3+1)^2\times\dfrac{1}{2}+(0+1)^2\times\dfrac{1}{4}+(2+1)^2\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{9}{2}$

따라서 $\mathrm{V}(2X)=2^2\times\mathrm{V}(X)=4\times\dfrac{9}{2}=18$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.

조건 (가)를 만족시키는 네 자연수는
1, 1, 1, 8 또는 1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2
이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는
1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2

(ⅰ) 네 자연수 1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(ⅱ) 네 자연수 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $12+4=16$

27. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구한다.

10장의 카드 중 임의로 카드 4장을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$이다.
$a_1\times a_2$의 값이 홀수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 순서쌍 (a_1, a_2)가 $(1, 3)$ 또는 $(1, 5)$ 또는 $(3, 5)$인 경우
$a_3+a_4\ge16$을 만족시키는 순서쌍 (a_3, a_4)는
$(6, 10)$, $(7, 9)$, $(7, 10)$, $(8, 9)$, $(8, 10)$, $(9, 10)$
으로 6가지이다.
이때 구하는 경우의 수는 $3\times6=18$

(ⅱ) 순서쌍 (a_1, a_2)가 $(1, 7)$ 또는 $(3, 7)$ 또는 $(5, 7)$인 경우
$a_3+a_4\ge16$을 만족시키는 순서쌍 (a_3, a_4)는
$(8, 9)$, $(8, 10)$, $(9, 10)$
으로 3가지이다.
이때 구하는 경우의 수는 $3\times3=9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은
$\dfrac{18}{210}+\dfrac{9}{210}=\dfrac{27}{210}=\dfrac{9}{70}$

28. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률변수의 평균과 표준편차를 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같다.
확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면
확률변수 Y의 평균은 $m-6$, 표준편차는 σ이다.
표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여
조건 (가)에서
$\mathrm{P}(X\le11)=\mathrm{P}(Y\ge23)$
$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{11-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{29-m}{\sigma}\right)$
$\dfrac{11-m}{\sigma}=-\dfrac{29-m}{\sigma}$에서 $m=20$
조건 (나)에서
$\mathrm{P}(X\le k)+\mathrm{P}(Y\le k)=1$
$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-20}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{k-14}{\sigma}\right)=1$
$\dfrac{k-20}{\sigma}=-\dfrac{k-14}{\sigma}$에서 $k=17$
$\mathrm{P}(X\le17)+\mathrm{P}(Y\ge17)$
$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{3}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{\sigma}\right)$
$=2\times\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{\sigma}\right)$
$\mathrm{P}(X\le17)+\mathrm{P}(Y\ge17)=0.1336$에서
$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{\sigma}\right)=0.0668$
표준정규분포표에서
$\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$, 즉 $\mathrm{P}(Z\ge1.5)=0.0668$
$\dfrac{3}{\sigma}=1.5$에서 $\sigma=2$
따라서 $\mathrm{E}(X)+\sigma(Y)=m+\sigma=20+2=22$

29. [출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

(ⅰ) 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우
$f(1)\ge4$인 함수 f의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

(ⅱ) 조건 (다)를 만족시키지 않는 경우
$f(3)-f(1)>4$에서
$f(1)=1$, $f(3)=6$이어야 하므로
$f(4)=6$, $1\le f(2)\le6$
이때 함수 f의 개수는 6

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족하는 경우는 없다.
따라서 구하는 함수의 개수는 $126-(15+6)=105$

30. [출제의도] 조건부확률을 구하는 문제를 해결한다.

[실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않은 사건을 X, [실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공 중 흰 공이 2개인 사건을 Y라 하자.

(ⅰ) [실행 1]에서 동전의 앞면이 나오고, [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않은 경우
[실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공이 흰 공 2개이고, [실행 2]에서 주머니 A에 넣은 공이 흰 공 5개이거나
[실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공이 흰 공 1개와 검은 공 1개이고, [실행 2]에서 주머니 A에 넣은 공이 흰 공 4개와 검은 공 1개일 확률은
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_5\mathrm{C}_5}{{}_6\mathrm{C}_5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_5}$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{8}$

(ⅱ) [실행 1]에서 동전의 뒷면이 나오고, [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않은

경우

[실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공이 흰 공 2개와 검은 공 1개이고, [실행 2]에서 주머니 A에 넣은 공이 흰 공 5개일 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2\times{}_1C_1}{{}_4C_3}\times\frac{{}_5C_5}{{}_7C_5}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{21}=\frac{1}{56}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$P(X)=\frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$

$P(X\cap Y)=\frac{1}{24}+\frac{1}{56}=\frac{10}{168}=\frac{5}{84}$

그러므로 구하는 확률은

$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{5}{84}}{\frac{1}{7}}=\frac{5}{12}$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로

$p+q=17$

[미적분]

23	①	24	③	25	⑤	26	②	27	④
28	②	29	20	30	12				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

24. [출제의도] 로그함수의 극한값을 구한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3}=\frac{f'(0)}{3}$$

$\frac{f'(0)}{3}=2$에서 $f'(0)=6$

25. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

$\frac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t+\cos t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}$ (단, $\cos t+\sin t\neq 0$)

$\frac{dy}{dx}=3$인 t의 값을 $\alpha\ (0<\alpha<\pi)$라 하면

$\cos\alpha=-3\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 $\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha>0$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$a=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,

$b=3\cos\alpha+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{10}}{5}$

따라서 $a+b=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

26. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}-2\right)^2}\times\frac{1}{n}=\int_{-2}^{-1}\frac{x+2}{x^2}dx$

$=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_{-2}^{-1}$

$=1-\ln 2$

27. [출제의도] 도형 사이의 관계를 이용하여 등비급수의 합을 구한다.

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하자. $\angle A_nB_nD_n=\theta$라 하면

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{A_nD_n}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\theta=\frac{1}{5}$

두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $B_1B_2A_1$의 넓이에서 삼각형 $A_1B_1G_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times\sin\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}$

두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $D_1F_1D_2$의 넓이에서 삼각형 $D_1F_1H_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}$

그러므로

$a_1=\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{6}}{10}-\frac{1}{20}$

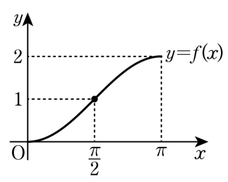
$\frac{\overline{B_{n+1}D_{n+1}}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{B_2D_2}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{\overline{B_1D_1}-\left(\overline{B_1B_2}+\overline{D_1D_2}\right)}{\overline{B_1D_1}}=\frac{3}{5}$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $5:3$이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

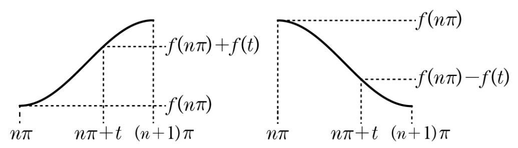
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$

28. [출제의도] 곡선의 오목과 볼록을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

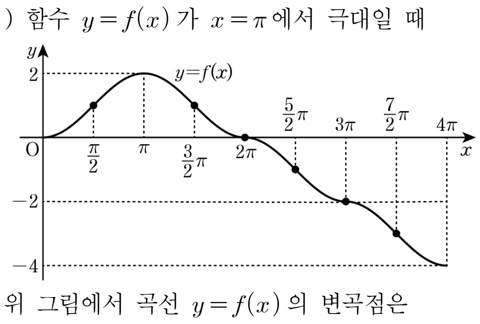


조건 (나)에 의하여 $n\pi<x\le(n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

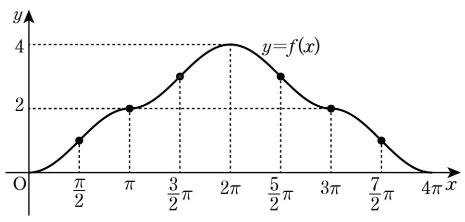
x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+\pi\times 2$

$=4\int_0^{\pi}(1-\cos x)\,dx+2\pi$

$=4\left[x-\sin x\right]_0^{\pi}+2\pi=6\pi$

(ⅱ) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때

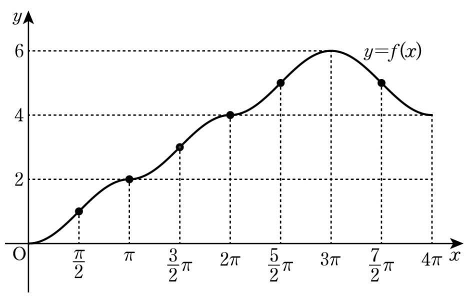


위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+2\pi\times 2=8\pi$

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$\int_0^{4\pi}|f(x)|\,dx=4\int_0^{\pi}f(x)\,dx+2\pi\times 5=14\pi$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최솟값은 6π이다.

29. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

$\angle RBO=\angle BRQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\theta$이므로

$\angle OST=2\theta$, $\angle OTS=\pi-3\theta$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OS}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-2\theta)}$, $\overline{OS}=\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OT}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}$, $\overline{OT}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\angle ROA=2\times\angle RBA=2\theta$, $\angle TOR=\pi-4\theta$

$f(\theta)=$(부채꼴 ORA의 넓이)

+ (삼각형 OTR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta+\frac{1}{2}\times 1\times\overline{OT}\times\sin(\pi-4\theta)$

$=\theta+\frac{\sin\theta\sin 4\theta}{2\sin 3\theta}$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(1+\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}{6\times\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}\right)$$

$=1+\frac{4\times 1\times 1}{6\times 1}=\frac{5}{3}$

$g(\theta)=$(부채꼴 OPQ의 넓이)

− (삼각형 OST의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OT}\times\sin\theta$

$=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin^3\theta}{2\sin 2\theta\sin 3\theta}$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3}{12\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1^3}{12\times1\times1} = \frac{5}{12}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta}} = \frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$ 이므로 $80a=80\times\frac{1}{4}=20$

30. [출제의도] 정적분의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 하자.
조건 (가)에서
$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)\,dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t)\,dt$$
$$G(3a+x)-G(2a)=G(2a+2)-G(3a-x)$$
위 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠
모든 실수 x 에 대하여 ㉠이 성립하므로
함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3a$ 에 대하여 대칭이다.
$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)\,dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t)\,dt = \int_{3a-x}^{4a} g(t)\,dt + \int_{4a}^{2a+2} g(t)\,dt$$
$\int_{2a}^{3a+x} g(t)\,dt = \int_{3a-x}^{4a} g(t)\,dt$ 에서 $\int_{4a}^{2a+2} g(t)\,dt = 0$
조건 (가)에서 $g(x)>0$ 이므로 $2a+2=4a$, $a=1$
$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이므로
$h(x)=f(x)+f'(x)+1=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하자.
함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로 $g(4)=g(2)$, 즉 $h(4)=h(2)$
$16+4p+q=4+2p+q$ 에서 $p=-6$
조건 (나)에서 $h(4)=5$ 이므로
$16-24+q=5$ 에서 $q=13$
$h(x)=x^2-6x+13$ 에서
$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$
$$\int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)\,dx$$
$$=\int_3^5 \{f'(x)+2\}g(x)\,dx = \int_3^5 h'(x)\ln h(x)\,dx$$
$$=\Big[h(x)\ln h(x)\Big]_3^5 - \int_3^5 \left\{h(x)\times\frac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$$
$$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$$
$$=8\ln8-4\ln4-(8-4)=-4+16\ln2$$
따라서 $m=-4$, $n=16$ 이므로
$m+n=12$

[기하]

23	③	24	⑤	25	④	26	②	27	①
28	⑤	29	54	30	48				

23. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 중점의 좌표를 계산한다.

선분 AB 의 중점이 xy 평면 위에 있으려면
중점의 z 좌표가 0 이어야 하므로
$\frac{-2+a}{2}=0$ 에서 $a=2$ 이다.

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 구한다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식은
$y=2x\pm\sqrt{16\times2^2+8}$, $y=2x\pm6\sqrt{2}$
두 직선의 y 절편은 각각 $6\sqrt{2}$, $-6\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=12\sqrt{2}$

25. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 벡터의 크기를 구한다.

조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$
조건 (나)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=6$
사각형 ABCD 는 평행사변형이면서 두 대각선 AC, BD 의 길이가 같으므로 직사각형이다.
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{\overline{\mathrm{BD}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

26. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH'}}\times\overline{\mathrm{BC}}=6$ 에서 $\overline{\mathrm{AH'}}=4$
$\overline{\mathrm{AH}}\perp$(평면 BCD), $\overline{\mathrm{AH'}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HH'}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$
두 직각삼각형 BH′H, BCD 의 닮음비는 $1:3$ 이므로
$\overline{\mathrm{HH'}}=1$, $\overline{\mathrm{H'C}}=2$
$\overline{\mathrm{HC}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$
따라서 삼각형 AHC 의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{HC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

27. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 미지수를 구한다.

포물선 $x^2=8(y+2)$ 에서
초점 F 의 좌표는 $(0,0)$, 준선의 방정식은 $y=-4$
점 P 의 좌표를 (a,b) $(a>0,\ b>0)$이라 하자.
점 P 는 포물선 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$
$\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PF}}=40$ 에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=20$
$\overline{\mathrm{PH}}=|b-(-4)|=20$ 에서 $b=16$
$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{a^2+16^2}=20$ 에서 $a=12$
점 $\mathrm{P}(12,16)$ 은 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로
$16^2=48p$ 이다.
따라서 $p=\frac{16}{3}$

28. [출제의도] 벡터의 내적의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

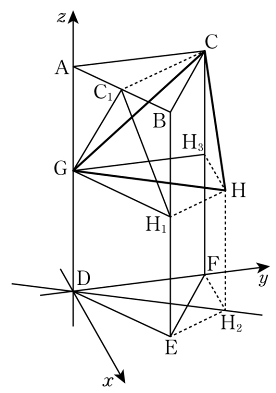
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ 에서 $\angle\mathrm{COB}=90^\circ$, $\angle\mathrm{AOC}=30^\circ$
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\times\cos30^\circ=2\sqrt{3}\times|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=24$ 에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=4\sqrt{3}$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-16 \text{ …… ㉠}$$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
$0^\circ\le\theta\le90^\circ$ 이고
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$$
$$=16\sqrt{3}\cos\theta+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$$
$\theta=0^\circ$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ 의 방향이 같을 때,
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 의 값이 최대이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\le16\sqrt{3}+4$ …… ㉡
$\theta=90^\circ$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ 의 방향이 반대일 때,
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 의 값이 최소이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ge-4$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$-4-16\le\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\le16\sqrt{3}+4-16$
$M=16\sqrt{3}-12$, $m=-20$
따라서 $M+m=16\sqrt{3}-32$

29. [출제의도] 이차곡선의 접선을 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{PF_2}}-\overline{\mathrm{PF_1}}=6$ 에서 점 P 는 두 초점이 $\mathrm{F_1}(4,0)$, $\mathrm{F_2}(-6,0)$ 이고 주축의 길이가 6 인 쌍곡선 위의 점이다. 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1,0)$ 이므로
쌍곡선의 방정식은
$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ …… ㉠
점 P 는 포물선 $y^2=16x$ 와 쌍곡선 ㉠의 교점이므로
$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{16x}{16}=1$, $x^2-7x-8=0$,
$(x-8)(x+1)=0$, $x=8$ 또는 $x=-1$
제1사분면 위의 점 P 의 좌표는 $(8, 8\sqrt{2})$ 이다.
포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P 에서의 접선의 방정식이
$8\sqrt{2}y=8(x+8)$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+8)$ …… ㉡
이므로 점 $\mathrm{F_3}$의 좌표는 $(-8,0)$ 이다.
두 점 $\mathrm{F_1}(4,0)$, $\mathrm{F_3}(-8,0)$ 을 초점으로 하는 타원의 꼭짓점은 x 축 또는 직선 $x=-2$ 위에 있다.
이때 선분 $\mathrm{PF_3}$ 위에 있는 꼭짓점은 직선 $x=-2$ 위에 있으므로 ㉡에 $x=-2$ 를 대입하면 $y=3\sqrt{2}$
이 타원의 단축의 길이는 $6\sqrt{2}$ 이고 두 초점 사이의 거리는 12 이다.
따라서 $a^2=6^2+(3\sqrt{2})^2=54$

30. [출제의도] 평면과 직선의 위치 관계를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

그림은 정삼각기둥 ABC−DEF 를 좌표공간에 나타낸 것이다.



두 점 C, H 의 평면 ADEB 위로의 정사영을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{H_1}$ 이라 하자.
$\overline{\mathrm{AC_1}}=2$, $\overline{\mathrm{AG}}=2\sqrt{3}$ 이므로
$\overline{\mathrm{GC_1}}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$, $\angle\mathrm{AGC_1}=30^\circ$
조건 (가)에서 삼각형 $\mathrm{GH_1C_1}$ 은 정삼각형이므로
$\angle\mathrm{C_1GH_1}=60^\circ$, $\overline{\mathrm{GH_1}}=4$
조건 (나)를 만족시키려면 점 $\mathrm{H_1}$ 은 점 G 에서 선분 BE 에 내린 수선의 발과 일치해야 한다.
점 H 의 평면 DEF 위로의 정사영을 $\mathrm{H_2}$ 라 하자.
조건 (나)에서 삼각형 CGH 의 평면 DEF 위로의 정사영인 삼각형 $\mathrm{FDH_2}$ 의 내부와 삼각형 DEF 의 내부의 공통부분의 넓이가 삼각형 DEF 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 인 $2\sqrt{3}$ 이므로 직선 $\mathrm{DH_2}$ 는 선분 EF 의 중점을 지난다.
그러므로 두 삼각형 $\mathrm{DEH_2}$, $\mathrm{DFH_2}$ 가 합동이고
$\angle\mathrm{DEH_2}=90^\circ$ 이므로 $\angle\mathrm{DFH_2}=90^\circ$ 이다.
점 H 의 평면 ADFC 위로의 정사영을 $\mathrm{H_3}$ 이라 하면 점 $\mathrm{H_3}$ 은 점 G 에서 선분 CF 에 내린 수선의 발과 일치한다.
그러므로 삼각형 CGH 의 평면 ADFC 위로의 정사영인 삼각형 $\mathrm{CGH_3}$ 의 넓이 S 는
$S=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
따라서 $S^2=48$