2022학년도 6월
전국연합학력평가

정답 및 해설

고2

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	②	3	④	4	④	5	⑤
6	②	7	①	8	⑤	9	⑤	10	③
11	④	12	①	13	③	14	③	15	①
16	③	17	②	18	④	19	①	20	⑤
21	②	22	32	23	24	24	6	25	4
26	42	27	49	28	11	29	72	30	59

해 설

1. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3\times3^3}=\sqrt[4]{3^4}=3$

2. [출제의도] 로그 계산하기

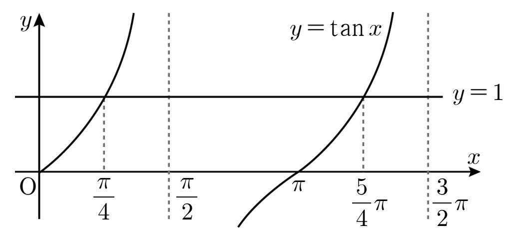
$\log_3 36-\log_3 4=\log_3\frac{36}{4}=\log_3 9=2$

3. [출제의도] 부채꼴의 중심각의 크기 계산하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 중심각의 크기를 θ라 하면

$r=6$, $l=4\pi$이고 $l=r\theta$이므로 $\theta=\frac{4\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

4. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기



방정식 $\tan x=1$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표와 같다.

$\tan\frac{\pi}{4}=1$이고 함수 $y=\tan x$의 주기가 π이므로

구하는 해는 $x=\frac{5}{4}\pi$

5. [출제의도] 상용로그표 이해하기

수	…	6	7	8	…
⋮		⋮	⋮	⋮	
5.0	…	.7042	.7050	.7059	…
5.1	…	.7126	.7135	.7143	…
5.2	…	.7210	.7218	.7226	…

상용로그표에서 $\log 5.17=0.7135$이므로

$\log 517=\log(5.17\times10^2)=2+\log 5.17=2.7135$

6. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=2^{-x}+5=\left(\frac{1}{2}\right)^x+5$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값이 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 가지고 최솟값은 $f(-1)=2^1+5=7$

7. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_3(x-2)+5$이다.

이 함수의 그래프가 점 $(5,\ a)$을 지나므로

$a=\log_3(5-2)+5$에서 $a=1+5$이다.

따라서 $a=6$

8. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 함숫값 계산하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos\theta=-\frac{2}{3}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$이다.

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=3^x+a$의 그래프가 점 $(2,\ b)$를 지나므로 $b=3^2+a$이다.

함수 $y=3^x+a$의 그래프의 점근선이 $y=a$이므로 $a=5$이고, $b=9+5=14$이다.

따라서 $a+b=19$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 삼각함수 $y=a\cos bx+c\ (a>0,\ b>0)$의 최댓값이 $a+c$, 최솟값이 $-a+c$이므로

$a+c=1$, $-a+c=-3$에서 $a=2$, $c=-1$이다.

한편, 주어진 그래프에서 삼각함수의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi$, 즉 $b=3$이다.

따라서 $a\times b\times c=-6$

11. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$a=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{9^2}=9^{\frac{2}{3}}$이므로

$\log_9 a=\log_9 9^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

12. [출제의도] 로그함수가 포함된 부등식 이해하기

진수 조건에서 $x+5>0$, 즉 $x>-5$ …… ㉠

$\log_3(x+5)<8\log_{3^2}2$에서

$\log_3(x+5)<\log_3 2^4$,

$x+5<16$, 즉 $x<11$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-5<x<11$이므로 정수 x의 최댓값은 10, 최솟값은 -4이다.

따라서 정수 x의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다.

13. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식 이해하기

$(2^x)^2-8\times2^x+15=0$에서

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$ …… ㉠

주어진 방정식은 $t^2-8t+15=0$이다.

$(t-3)(t-5)=0$에서 $t=3$ 또는 $t=5$이다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $2^x=3$ 또는 $2^x=5$이다.

$\alpha<\beta$이므로 $2^\alpha=3$이고 $2^\beta=5$이다.

따라서 $\beta=\log_2 5$이므로 $2^\alpha\times\beta=3\log_2 5$

14. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 B의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라 할 때 선분 AB의 중점이 $(0,\ 2)$이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=0$이고 $\frac{y_1+y_2}{2}=2$이다.

즉 $x_1+x_2=0$이고 $y_1+y_2=4$이다.

$x_2=-x_1$이므로 $3^{x_1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-x_1}-6=4$이다.

따라서 $2\times3^{x_1}=10$이고 점 A의 y좌표 y_1은

$y_1=3^{x_1}=5$

15. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ이고 $\overline{\mathrm{OP}}=r$이므로 $\sin\theta=\frac{a}{r}$이고 $\cos\theta=\frac{5}{r}$이다.

$\sin\theta+2\cos\theta=1$에서 $\frac{a}{r}+\frac{10}{r}=1$이므로

$r=a+10$이다. …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{5}{r}\right)^2=1$이므로

$a^2+25=r^2$이다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=-\frac{15}{4}$이고 $r=\frac{25}{4}$이다.

따라서 $a+r=\frac{5}{2}$

16. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제 해결하기

$\angle\mathrm{COA}=\theta$라 하면 삼각형 COA에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\frac{7}{8}$이다.

삼각형 BOD에서 $\angle\mathrm{BOD}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고

삼각형 BOD의 넓이가 $\frac{7}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{OD}}=x$라 놓으면

$\frac{1}{2}\times2\times x\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{7}{6}$이다.

한편, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\frac{7}{8}$이므로

$\frac{7}{8}x=\frac{7}{6}$, 즉 $x=\frac{4}{3}$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{OD}}=\frac{4}{3}$

17. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 방정식 문제 해결하기

함수 $y=|2^x-1|$의 그래프와 직선 $y=t$가 제1사분면에서 만나는 점이 A이므로 점 A의 x좌표는

$2^x-1=t$에서 $x=\log_2(1+t)$이다.

한편, 함수 $y=|2^x-1|$의 그래프와 직선 $y=t$가 제2사분면에서 만나는 점이 B이므로 점 B의 x좌표는 $1-2^x=t$에서 $x=\log_2(1-t)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=1$이므로 $\log_2(1+t)-\log_2(1-t)=1$에서

$\log_2(1+t)=1+\log_2(1-t)$,

$\log_2(1+t)=\log_2 2+\log_2(1-t)$, $1+t=2(1-t)$,

$3t=1$이다. 따라서 $t=\frac{1}{3}$이고

점 A의 좌표는 $\left(\log_2\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$이다.

점 C의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같고

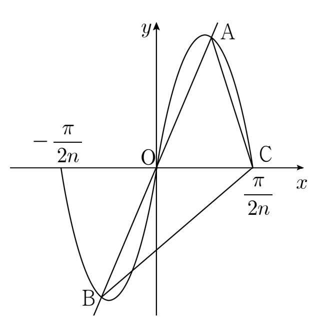
점 C는 함수 $y=-a|2^x-1|$의 그래프 위의 점이므로

점 C의 좌표는 $\left(\log_2\frac{4}{3},\ -\frac{a}{3}\right)$이다.

한편, $\overline{\mathrm{AC}}=1$이므로 $\frac{1}{3}-\left(-\frac{a}{3}\right)=1$에서 $a=2$이다.

따라서 $a+t=\frac{7}{3}$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 자연수의 최댓값 구하는 문제 해결하기



함수 $y=3\sin 2nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이다.

원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이 $-\frac{\pi}{2n}<x<\frac{\pi}{2n}$에서 함수 $y=3\sin 2nx$의 그래프와 만나는 원점이 아닌 두 점 A와 B는 원점에 대하

여 대칭이다. 따라서 실수 $t\left(-\dfrac{\pi}{2n}<t<\dfrac{\pi}{2n},\ t\neq 0\right)$에 대하여 점 A의 좌표를 $(t, 3\sin 2nt)$라 하면 점 B의 좌표는 $(-t, -3\sin 2nt)$이다.
삼각형 AOC의 넓이와 삼각형 BOC의 넓이가 같으므로 삼각형 ABC의 넓이는

$2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2n}\times 3|\sin 2nt| = \dfrac{\pi}{12}$

이고 $|\sin 2nt| = \dfrac{n}{18}$이다.

$0<|\sin 2nt|\leq 1$이므로 $0<\dfrac{n}{18}\leq 1$이다.

따라서 n의 최댓값은 18이다.

19. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이 추론하기

점 C가 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점이므로

$\angle\mathrm{BOC} = \boxed{\dfrac{2}{3}\theta}$

이다. 또한, 삼각형 BOC에서

$\angle\mathrm{OBC} = \angle\mathrm{OCB} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \boxed{\dfrac{2}{3}\theta}\right)$

이다. 한편, 삼각형 BOD에서

$\angle\mathrm{BDO} = \pi - \theta - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\theta}{3}$

이다. 따라서 삼각형 BOD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{OD}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right)} = \dfrac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\theta}{3}\right)}$,

$\overline{\mathrm{OD}} = \dfrac{\cos\dfrac{\theta}{3}}{\boxed{\cos\dfrac{2}{3}\theta}}$ 이다.

한편, 부채꼴 OAC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{\theta}{6}$ 이다.
$S(\theta)$는 삼각형 COD의 넓이에서
부채꼴 OAC의 넓이를 뺀 값이므로

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\cos\dfrac{\theta}{3}}{\boxed{\cos\dfrac{2}{3}\theta}}\times\sin\dfrac{\theta}{3} - \boxed{\dfrac{\theta}{6}}$ 이다.

따라서 $f(\theta) = \dfrac{2}{3}\theta$, $g(\theta) = \cos\dfrac{2}{3}\theta$, $h(\theta) = \dfrac{\theta}{6}$ 이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $h\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\pi}{48}$ 이다.

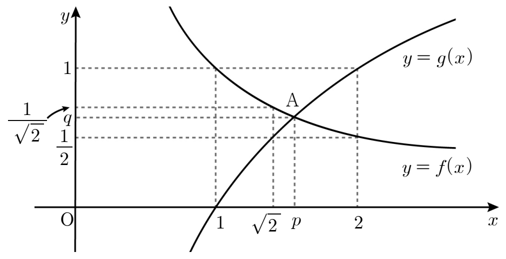
그러므로 $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{h\left(\dfrac{\pi}{8}\right)} = 8\sqrt{3}$

20. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제 추론하기

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \log_a x$ 라 하자.

ㄱ. 점 $\mathrm{A}(p, q)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $q = \dfrac{1}{p}$, 즉 $pq=1$ (참)

ㄴ. $f(x)>g(x)$이면 $0<x<p$이고 $f(x)<g(x)$이면 $x>p$이다.



$f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 $a=2$이므로 $g(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

$f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2})$ 이다.

따라서 $p>\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. 점 $\mathrm{B}(p+q, 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이 $S(p)$는

$S(p) = \dfrac{1}{2}\times(p+q)\times q = \dfrac{pq}{2} + \dfrac{q^2}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p^2}$

이다.

한편, $f(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 이고 $g(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

$1<\sqrt{a}<2$ 이므로 $f(\sqrt{a})>g(\sqrt{a})$ 이다.

따라서 $p>\sqrt{a}$ 이고, $\dfrac{1}{p}<\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ 이다.

그러므로 $S(p) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p^2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2a} = \dfrac{a+1}{2a}$ (참)

21. [출제의도] 지수함수와 삼각함수의 그래프를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

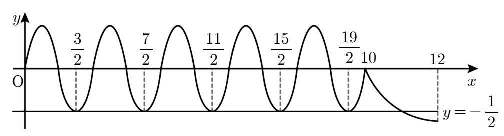
$0\leq x<k$에서 $-\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2}$ 이고,

함수 $y=\dfrac{1}{2}\sin\pi x$의 주기는 2이다.

$f(k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-k} - 1 = 0$ 이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(k, 0)$을 지난다.
방정식 $f(x)+a=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표와 같다.
$0\leq x\leq 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$의 실근의 최댓값이 12이므로 모든 실근의 합이 46이기 위하여 실근의 개수는 4 이상이어야 한다.

(i) $a=\dfrac{1}{2}$ 인 경우



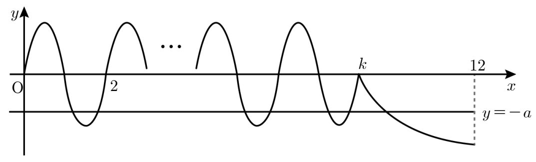
$k=10$일 때 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합이 최대이다. $0\leq x<10$에서 모든 실근의 합은

$\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}+\dfrac{11}{2}+\dfrac{15}{2}+\dfrac{19}{2} = \dfrac{55}{2} = 27.5$ 이고

$f(12) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{12-10} - 1 = \dfrac{4}{9} - 1 = -\dfrac{5}{9} < -\dfrac{1}{2}$ 이므로

$10\leq x\leq 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$은 오직 하나의 실근을 갖고 그 값은 12보다 작다.
따라서 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합은 39.5보다 작으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<\dfrac{1}{2}$ 인 경우



$k\leq x\leq 12$에서 방정식 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-k} - 1 + a = 0$의 실근의 개수는 최대 1이고 그 값은 12 이하이다.
$0\leq x\leq 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합이 46이기 위하여

$0\leq x<k$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$의 모든 실근의 합이 34 이상이어야 한다.

$0\leq x<2$에서 함수 $y=\dfrac{1}{2}\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=-a$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_1, α_2라 할 때, $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \dfrac{3}{2}$, 즉 $\alpha_1+\alpha_2 = 3$이다.

또한, 함수 $y=\dfrac{1}{2}\sin\pi x$의 주기가 2이므로

$2\leq x<4$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$의 모든 실근의 합은 7,

$4\leq x<6$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$의 모든 실근의 합은 11,

$6\leq x<8$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$의 모든 실근의 합은 15,

$8\leq x<10$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$의 모든 실근의 합은 19,

$10\leq x<11$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$은 실근을 갖지 않는다.
따라서 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① $k\leq 7$일 때

$0\leq x<k$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$의 모든 실근의 합이 34 미만이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $k=8$ 또는 $k=9$일 때

$0\leq x<k$에서 방정식 $\dfrac{1}{2}\sin\pi x + a = 0$의 모든 실근의 합은 $3+7+11+15=36$이므로
$k\leq x\leq 12$에서 실근이 10이면 조건을 만족시킨다.

$k=8$이면 $f(10)+a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10-8} - 1 + a = 0$에서

$a=\dfrac{5}{9}$이므로 $0<a<\dfrac{1}{2}$에 모순이다.

$k=9$이면 $f(10)+a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10-9} - 1 + a = 0$에서

$a=\dfrac{1}{3}$이므로 $0<a<\dfrac{1}{2}$을 만족시킨다.

③ $k=10$ 또는 $k=11$일 때

$0\leq x<k$에서 모든 실근의 합은
$3+7+11+15+19=55>46$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $a=\dfrac{1}{3}$, $k=9$이다.

따라서 $\dfrac{k}{a} = 27$

22. [출제의도] 지수 계산하기

$4^{\frac{3}{2}}\times 2^2 = (2^2)^{\frac{3}{2}}\times 2^2 = 2^3\times 2^2 = 2^5 = 32$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

진수 조건에 의해 $x>-1$이고
$\log_5(x+1) = 2$에서 $x+1=5^2$이므로 $x=24$

24. [출제의도] 지수함수가 포함된 부등식 이해하기

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1}\leq 5^{7-2x}$에서 $5^{1-x}\leq 5^{7-2x}$이므로
$1-x\leq 7-2x$, 즉 $x\leq 6$이다.
따라서 모든 자연수 x의 개수는 6이다.

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=3\sin(x+\pi)+k$의 그래프가 점 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{2}\right)$를 지나므로 $\dfrac{5}{2} = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right)+k = 3\times\left(-\sin\dfrac{\pi}{6}\right)+k$

이다. 따라서 $-\dfrac{3}{2}+k = \dfrac{5}{2}$, 즉 $k=4$

26. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

$\log_{16}a\times\log_b 4 = 1$에서 $\dfrac{1}{2}\log_4 a\times\log_b 4 = 1$이므로

$\dfrac{\log a}{\log 4}\times\dfrac{\log 4}{\log b} = 2$, $\dfrac{\log a}{\log b} = 2$,

$\log_b a = 2$, 즉 $a=b^2$이다.
한편, $\log_6 ab = 3$에서 $ab=6^3$이므로 $b^3=6^3$이다.
따라서 $b=6$, $a=6^2=36$이다. 그러므로 $a+b=42$

27. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

직선 $y=-x+5$ 의 기울기가 -1 이고
곡선 $y=\log_a x$ 를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이
곡선 $y=\log_a(x-1)-1$ 이므로
점 B를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점이 C이다.
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:1$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 이다.
점 A의 x좌표를 t라 하면 $\mathrm{A}(t,\,5-t)$ 이고 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 역함수 관계이므로
$\mathrm{B}(5-t,\,t)$ 이다. 그런데 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 이므로 두 점 A, B의 x좌표의 차는 2이고
$(5-t)-t=2$, 즉 $t=\dfrac{3}{2}$ 이다.
점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\,\dfrac{7}{2}\right)$ 이 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로
$a^{\frac{3}{2}}=\dfrac{7}{2}$, 즉 $a^3=\dfrac{49}{4}$ 이다.
따라서 $4a^3=49$

28. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제 해결하기

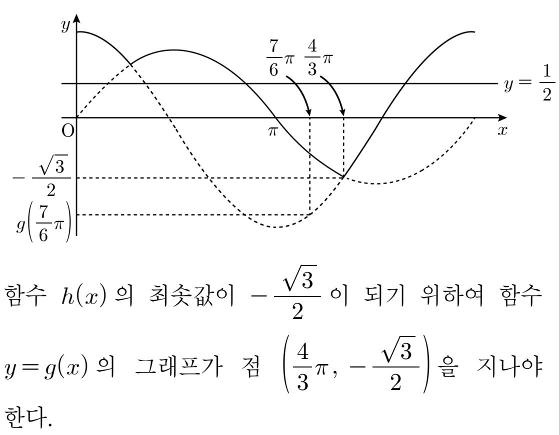
삼각형 ABD에서 $\angle\mathrm{ADB}=\theta$ 라 하자.
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}=2r_1$
이고, 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}=2r_2$
이다. $\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ 이므로
$t>0$ 인 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=3t$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{13}\,t$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$13t^2=9t^2+36-2\times3t\times6\times\cos\dfrac{\pi}{3}$,
$2t^2+9t-18=0$ 이므로 $t=\dfrac{3}{2}$ 또는 $t=-6$ 이다.
따라서 $t=\dfrac{3}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=3t=\dfrac{9}{2}$ 이므로
$p=2$, $q=9$ 이다. 그러므로 $p+q=11$

29. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 집합의 원소 추론하기

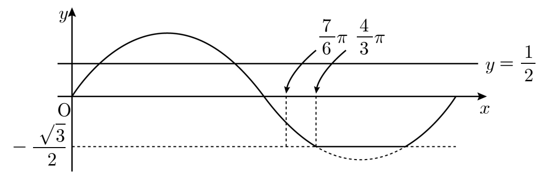
$A_4=\{\log_4 x \mid x$는 100이하의 자연수$\}$ 이고
10이하의 자연수 k에 대하여 $b=2^k$ 이므로
$A_b=\{\log_{2^k} y \mid y$는 100이하의 자연수$\}$ 이다.
집합 $A_4\cap A_b$ 의 원소의 개수는 $\log_4 x=\log_{2^k} y$ 가 성립하는 순서쌍 $(x,\,y)$ 의 개수와 같다.
$\log_4 x=\log_{2^k} y$ 이면 $\dfrac{1}{2}\log_2 x=\dfrac{1}{k}\log_2 y$,
$\log_2 x^k=\log_2 y^2$ 이므로 $x^k=y^2$ 이 성립한다.
따라서 $1\le x\le100$, $1\le y\le100$ 에서 $x^k=y^2$ 이 성립하는 순서쌍 $(x,\,y)$ 의 개수를 구하면 된다.
① $k=1$ 이면 $x=y^2$ 이므로
$(x,\,y)=(1^2,\,1),\ (2^2,\,2),\ (3^2,\,3),\ \cdots,\ (10^2,\,10)$
이고 $n(A_4\cap A_{2^1})=10$
② $k=2$ 이면 $x^2=y^2$ 이므로
$(x,\,y)=(1,\,1),\ (2,\,2),\ (3,\,3),\ \cdots,\ (100,\,100)$
이고 $n(A_4\cap A_{2^2})=100$
③ $k=3$ 이면 $x^3=y^2$ 이므로
$(x,\,y)=(1^2,\,1^3),\ (2^2,\,2^3),\ (3^2,\,3^3),\ (4^2,\,4^3)$ 이고
$n(A_4\cap A_{2^3})=4$
④ $k=4$ 이면 $x^4=y^2$, 즉 $x^2=y$ 이므로
$(x,\,y)=(1,\,1^2),\ (2,\,2^2),\ (3,\,3^2),\ \cdots,\ (10,\,10^2)$
이고 $n(A_4\cap A_{2^4})=10$
⑤ $k=5$ 이면 $x^5=y^2$ 이므로
$(x,\,y)=(1^2,\,1^5),\ (2^2,\,2^5)$ 이고 $n(A_4\cap A_{2^5})=2$
⑥ $k=6$ 이면 $x^6=y^2$, 즉 $x^3=y$ 이므로
$(x,\,y)=(1,\,1^3),\ (2,\,2^3),\ (3,\,3^3),\ (4,\,4^3)$ 이고
$n(A_4\cap A_{2^6})=4$
⑦ $k=7$ 이면 $x^7=y^2$ 이므로 $(x,\,y)=(1^2,\,1^7)$ 이고
$n(A_4\cap A_{2^7})=1$
⑧ $k=8$ 이면 $x^8=y^2$, 즉 $x^4=y$ 이므로
$(x,\,y)=(1,\,1^4),\ (2,\,2^4),\ (3,\,3^4)$ 이고
$n(A_4\cap A_{2^8})=3$
⑨ $k=9$ 이면 $x^9=y^2$ 이므로 $(x,\,y)=(1^2,\,1^9)$ 이고
$n(A_4\cap A_{2^9})=1$
⑩ $k=10$ 이면 $x^{10}=y^2$, 즉 $x^5=y$ 이므로
$(x,\,y)=(1,\,1^5),\ (2,\,2^5)$ 이고 $n(A_4\cap A_{2^{10}})=2$
그러므로 만족하는 집합 B의 원소는 2^3, 2^6 이므로 모든 b의 값의 합은 $8+64=72$

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수 추론하기

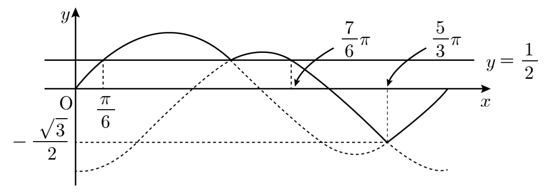
$f(x)=\sin x$ 이고 $g(x)=a\cos x+b$ 이다.
함수 $h(x)$ 는
$h(x)=\begin{cases} g(x) & (f(x)\le g(x)) \\ f(x) & (f(x)>g(x)) \end{cases}$ 이다.
조건 (나)에서 $0<c<\dfrac{\pi}{2}$ 인 어떤 실수 c에 대하여
$h(c)=h(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$ 이므로
$f(c)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $g(c)=\dfrac{1}{2}$ 이고
$f(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $g(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$ 이다.
한편, $0<c<\dfrac{\pi}{2}$ 이면
$f(c+\pi)=\sin(c+\pi)=-\sin c<0$ 이므로
$f(c+\pi)\ne\dfrac{1}{2}$ 이다.
따라서 $g(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$ 이다. …… ㉠
함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\pi$ 에 대하여 대칭이므로 $g(\pi-c)=\dfrac{1}{2}$ 이다. …… ㉡
$0\le x\le2\pi$ 에서 방정식 $g(x)=\dfrac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 최대 2이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $g(c)\ne\dfrac{1}{2}$ 이다.
따라서 $f(c)=\dfrac{1}{2}$ 이고 $\sin c=\dfrac{1}{2}$ 에서 $c=\dfrac{\pi}{6}$ 이다.
㉠에 의하여 $g\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ 이다. …… ㉢
(i) $a>0$ 인 경우



함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\dfrac{4}{3}\pi,\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 지나야 한다.
$g\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 $a>0$ 일 때 $g\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)>g\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)$
이므로 $g\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 이는 ㉢과 모순이다.
(ii) $a=0$ 인 경우 ($g(x)=b$)



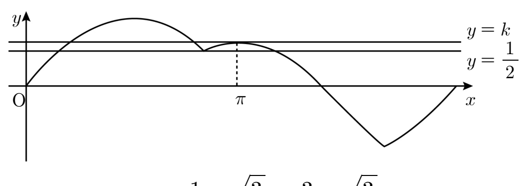
함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\dfrac{4}{3}\pi,\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 지나야 하므로 $g(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 함수 $g(x)$ 가 상수함수이므로 $g\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 이는 ㉢과 모순이다.
(iii) $a<0$ 인 경우



함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\dfrac{5}{3}\pi,\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 지나야 한다. 즉 $g\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. …… ㉣
㉢, ㉣에 의하여 연립방정식

$$\begin{cases} a\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)+b=\dfrac{1}{2} \\ a\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)+b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

을 풀면 $a=-1$, $b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ 이다.
따라서 $g(x)=-\cos x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ 이다.
(i), (ii), (iii)에 의하여
방정식 $h(x)=k\left(k>\dfrac{1}{2}\right)$ 가 서로 다른 세 실근을 가지는 경우는 그림과 같이 직선 $y=k$ 가 점 $(\pi,\,g(\pi))$ 를 지날 때이다.



$g(\pi)=-\cos\pi+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$,
즉 $k=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서

$$\frac{k}{b}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$$

이므로 $a+20\left(\dfrac{k}{b}\right)^2=-1+20\times3=59$