2022학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	④	**3**	②	**4**	⑤	**5**	③
6	①	**7**	③	**8**	②	**9**	②	**10**	①
11	①	**12**	⑤	**13**	②	**14**	③	**15**	④
16	④	**17**	②	**18**	⑤	**19**	①	**20**	⑤
21	③	**22**	7	**23**	18	**24**	14	**25**	6
26	358	**27**	25	**28**	13	**29**	11	**30**	4

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$2^{\frac{7}{3}}\times 16^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{7}{3}}\times(2^4)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{7}{3}+\frac{8}{3}}=2^5=32$

2. [출제의도] 등차수열 이해하기

$a_7-a_2=(a_2+5\times 3)-a_2=15$

3. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_{81}12-\log_{81}4=\log_{81}\frac{12}{4}$

$=\log_{81}3$

$=\log_{3^4}3=\frac{1}{4}\log_3 3=\frac{1}{4}$

4. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$2x+1\le f(x)\le(x+1)^2$에서

$\lim_{x\to 0}(2x+1)=\lim_{x\to 0}(x+1)^2=1$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to 0}f(x)=1$

$\lim_{x\to 0}(x+5)f(x)=\lim_{x\to 0}(x+5)\times\lim_{x\to 0}f(x)=5\times 1=5$

5. [출제의도] 삼각방정식을 활용하여 문제해결하기

$\sqrt{2}\cos x-1=0$, $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x\le 3\pi$일 때, 방정식 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{7}{4}\pi$, $x=\frac{9}{4}\pi$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{17}{4}\pi$

6. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{\{f(x)\}^2+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2+3}$$

$$=\frac{2-0}{3^2+3}=\frac{1}{6}$$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+kg(x)\}=2+k\times 1=2+k$

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)+kg(x)\}=(-1)+k\times 3=-1+3k$

$\lim_{x\to 0}\{f(x)+kg(x)\}$의 값이 존재하므로

$2+k=-1+3k$에서 $k=\frac{3}{2}$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$a>1$이라 하면 닫힌구간 $[0,5]$에서 함수 $f(x)$의

최솟값은 $f(0)=2\ne\frac{2}{3}$이므로 $0<a<1$

그러므로 닫힌구간 $[0,5]$에서 함수 $f(x)$의

최솟값은 $f(5)=\log_a 16+2$

$\log_a 16+2=\frac{2}{3}$에서 $4\log_a 2=-\frac{4}{3}$, $a^{-\frac{1}{3}}=2$

따라서 $a=2^{-3}=\frac{1}{8}$

9. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$(x-1)f(x)=\sqrt{x^2+3}+a$의

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\sqrt{1^2+3}+a$에서 $a=-2$

$x\ne 1$일 때, $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1+1}{\sqrt{1^2+3}+2}=\frac{1}{2}$$

10. [출제의도] 평균변화율을 이용하여 추론하기

$f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 6까지 변할 때의

평균변화율이 0이므로

$\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{36+6a}{6}=0$에서 $a=-6$

$f(x)=x^2-6x+b$이므로 $f'(x)=2x-6$

따라서 $f'(4)=2\times 4-6=2$

11. [출제의도] 미분계수 이해하기

다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$6=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}=2f'(1)$$

에서 $f'(1)=3$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}$$

$$=f'(1)\times 3=9$$

12. [출제의도] $\sum$의 성질 이해하기

$$\sum_{k=1}^{9}(a_k+a_{k+1})=\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=1}^{9}a_{k+1}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{10}a_k-a_{10}\right)+\left(\sum_{k=1}^{10}a_k-a_1\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k-5=25$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=15$

13. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$a>0$이므로 $\tan\theta_1=\frac{b}{a}$, $\tan\theta_2=-\frac{2b^2}{a^2}$

$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{b}{a}+\left(-\frac{2b^2}{a^2}\right)=\frac{b(a-2b)}{a^2}=0$에서

$b>0$이므로 $a=2b$

따라서 $\sin\theta_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{5b^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

14. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=1$이므로

$a_2=a_1-4=-3$

$a_3={a_2}^2=9$

$a_4=a_3-4=5$

$a_5=a_4-4=1=a_1$

$a_6=a_5-4=-3=a_2$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+4}=a_n$을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{22}a_k=\sum_{k=1}^{20}a_k+a_{21}+a_{22}$$

$$=5\sum_{k=1}^{4}a_k+a_1+a_2$$

$$=5\times\{1+(-3)+9+5\}+1+(-3)=58$$

15. [출제의도] 등비수열의 합을 활용하여 문제해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=a_1(1+r^2+r^4+\cdots+r^{18})=\alpha$

라 하면 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=\alpha r$

$\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=0$이므로

$(\alpha+\alpha r)+\alpha r=0$, $(1+2r)\alpha=0$

$\alpha=0$이라 하면 $a_1=0$이므로 $a_3+a_4=0$

$a_3+a_4=3$이므로 $\alpha\ne 0$

그러므로 $r=-\frac{1}{2}$

$a_3+a_4=a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}a_1=3$

따라서 $a_1=24$

16. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\theta-\frac{\pi}{3}=\alpha$라 하면

$$3\sin^2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=3\sin^2(\pi+\alpha)$$

$$=3\sin^2\alpha=3-3\cos^2\alpha\text{이고}$$

$8\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=8\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=8\cos\alpha$

$3-3\cos^2\alpha=8\cos\alpha$에서

$3\cos^2\alpha+8\cos\alpha-3=0$

$(3\cos\alpha-1)(\cos\alpha+3)=0$

$-1\le\cos\alpha\le 1$이므로 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

따라서 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha=\frac{1}{3}$

17. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$g(x)=(x^2-2x+2)f(x)$에서 $g(2)=2f(2)$

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+2)f'(x)$에서

$g'(2)=2f(2)+2f'(2)$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=-2$에서

$f(2)\ne\frac{1}{2}$이라 하면

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\frac{g(2)-1}{2f(2)-1}=\frac{2f(2)-1}{2f(2)-1}=1\ne -2$

이므로 $f(2)=\frac{1}{2}$

그러므로 $g(2)=2f(2)=1$이고 $g'(2)=2f'(2)+1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{2f(x)-1}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{2\{f(x)-f(2)\}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}}{2\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}$$

이때 $f'(2)=0$이라 하면 $g'(2)=1$이므로

$\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1}$ 의 값이 존재하지 않는다.

그러므로 $f'(2) \neq 0$

$\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-1}{2f(x)-1} = \frac{g'(2)}{2f'(2)}$

$= \frac{g'(2)}{g'(2)-1} = -2$

따라서 $g'(2) = \frac{2}{3}$

18. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 추론하기

$x \neq 1$인 모든 양의 실수 x에 대하여

$f(f(x)) = 2^{\frac{1}{\log_2 f(x)}}$ 에서

$8 \times f(f(x)) = 2^{\left(\boxed{3} + \frac{1}{\log_2 f(x)}\right)}$이고,

$f(x) = 2^{\frac{1}{\log_2 x}}$ 에서 $\log_2 f(x) = \frac{1}{\boxed{\log_2 x}}$ 이다.

$f(x^2) = 2^{\frac{1}{\log_2 x^2}} = 2^{\frac{1}{2\log_2 x}}$ 이므로

방정식 $8 \times f(f(x)) = f(x^2)$에서

$2^{\left(\boxed{3} + \boxed{\log_2 x}\right)} = 2^{\frac{1}{2\log_2 x}}$

$\boxed{3} + \boxed{\log_2 x} = \frac{1}{2\log_2 x}$

그러므로 방정식 $8 \times f(f(x)) = f(x^2)$의 모든 해는 방정식 $\left(\boxed{3} + \boxed{\log_2 x}\right) \times 2\log_2 x = 1$의 모든 해와 같다.

$2(\log_2 x)^2 + 6\log_2 x - 1 = 0$에서

$\log_2 x = t$라 하자.

이차방정식 $2t^2 + 6t - 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 3^2 - 2 \times (-1) = 11 > 0$이므로

이차방정식 $2t^2 + 6t - 1 = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이차방정식 $2t^2 + 6t - 1 = 0$의 두 실근을 α, β라 하면 방정식 $2(\log_2 x)^2 + 6\log_2 x - 1 = 0$은 2^α, 2^β을 서로 다른 두 실근으로 갖는다.

이때 이차방정식 $2t^2 + 6t - 1 = 0$에서

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -3$

따라서 방정식 $8 \times f(f(x)) = f(x^2)$의 모든 해의 곱은

$2^\alpha \times 2^\beta = 2^{\alpha+\beta} = 2^{-3} = \boxed{\frac{1}{8}}$ 이다.

따라서 $p = 3$, $q = \frac{1}{8}$, $g(x) = \log_2 x$이므로

$p \times q \times g(4) = 3 \times \frac{1}{8} \times \log_2 4 = \frac{3}{4}$

19. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

직선 $y = m(x+5)$는 기울기가 $m(m>0)$이고 점 $(-5, 0)$을 지나는 직선이다.

함수 $y = 2|x|$의 그래프와 곡선 $x^2 + y^2 = 5(y \geq 0)$은 두 점 $(-1, 2)$, $(1, 2)$에서 만난다.

직선 $y = m(x+5)$가 점 $(1, 2)$를 지날 때 $m = \frac{1}{3}$

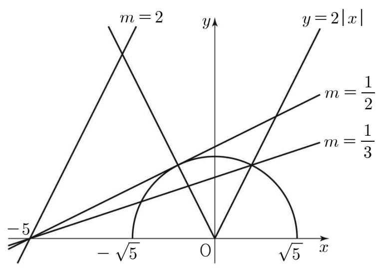
직선 $y = m(x+5)$가 점 $(-1, 2)$를 지날 때 $m = \frac{1}{2}$

이때 두 점 $(0, 0)$, $(-1, 2)$를 지나는 직선의 기울기가 -2이므로

곡선 $x^2 + y^2 = 5(y \geq 0)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

그러므로 직선 $y = \frac{1}{2}(x+5)$는

곡선 $x^2 + y^2 = 5(y \geq 0)$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선이다.



(i) $0 < m < \frac{1}{3}$일 때, $f(m) = 4$

(ii) $m = \frac{1}{3}$일 때, $f(m) = 3$

(iii) $\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$일 때, $f(m) = 4$

(iv) $\frac{1}{2} \leq m < 2$일 때, $f(m) = 2$

(v) $m \geq 2$일 때, $f(m) = 1$

(i) ~ (v)에 의하여

$$f(m) = \begin{cases} 1 & (m \geq 2) \\ 2 & \left(\frac{1}{2} \leq m < 2\right) \\ 3 & \left(m = \frac{1}{3}\right) \\ 4 & \left(0 < m < \frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 열린구간 $(0, \infty)$에서

함수 $f(m)$은 $m = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$, $m = 2$에서만

불연속이므로 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}$

20. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$\angle DAC = \angle BAD = \theta$라 하면

두 각 $\angle DAC$, $\angle DBC$가 모두 호 CD에 대한 원주각이므로 $\angle DBC = \theta$

ㄱ. 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)} = 2\sqrt{3}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\sin(\angle DBE) = \sin(\angle DBC) = \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $0 < \angle BAC = 2\theta < \pi$에서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고

$\sin\theta = \frac{1}{2}$이므로 $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\angle BAC = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 3$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\frac{\pi}{3}$

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC} + 9$ $\cdots$ (*) (참)

ㄷ. $\overline{BE} = a(0 < a < 3)$이라 하면

$\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = 3 - a$

삼각형 ABC에서 $\angle BAE = \angle EAC$이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BE} : \overline{CE}$에서

$\overline{AB} : \overline{AC} = a : (3-a)$

양수 k에 대하여

$\overline{AB} = ak$, $\overline{AC} = (3-a)k$라 하면

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a(3-a)k^2$이고

삼각형 BDE의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{BE} \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 BDE의 넓이의 4배이어야 하므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a(3-a)k^2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a$

$(3-a)k^2 = 4$ $\cdots$ (**)

(*)에 의하여

$(ak)^2 + \{(3-a)k\}^2 = (ak)(3-a)k + 9$

$k^2(a^2 - 3a + 3) = 3$

$(3-a)k^2(a^2 - 3a + 3) = 3(3-a)$

위 식에 (**)를 대입하면

$4(a^2 - 3a + 3) = 3(3-a)$

$4a^2 - 9a + 3 = 0$에서

$a = \frac{9+\sqrt{33}}{8}$ 또는 $a = \frac{9-\sqrt{33}}{8}$

그러므로 모든 a의 값의 합은 $\frac{9}{4}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 추론하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d<0)$이라 하자.

(i) $a_m = 2a_{m+2}$일 때

$a_{m+2} = a_m + 2d$이므로

$a_m = -4d$이고 $a_{m+1} = -3d$, $a_{m+2} = -2d$

$S_{m+1} = S_m + (-3d) > S_m$,

$S_{m+2} = S_{m+1} + (-2d) > S_{m+1}$이므로

$S_{m+2} > S_{m+1} > S_m$

그러므로 $S_{m+2} = 460$, $S_m = 450$

$S_{m+2} - S_m = a_{m+1} + a_{m+2}$에서

$460 - 450 = -3d + (-2d)$

$d = -2$

$a_m = 8 = a_1 + (m-1) \times (-2)$에서 $a_1 = 2m + 6$

$S_m = \frac{m(a_1 + a_m)}{2}$

$= \frac{m(2m+14)}{2} = 450$

$m^2 + 7m - 450 = 0$, $(m+25)(m-18) = 0$

m은 자연수이므로 $m = 18$

그러므로 $a_1 = 2 \times 18 + 6 = 42$

(ii) $a_m = -2a_{m+2}$일 때

$a_{m+2} = a_m + 2d$이므로

$a_m = -\frac{4}{3}d$이고 $a_{m+1} = -\frac{d}{3}$, $a_{m+2} = \frac{2}{3}d$

$S_{m+1} = S_m + \left(-\frac{d}{3}\right) > S_m$, $S_{m+2} = S_m + \frac{d}{3} < S_m$

이므로 $S_{m+1} > S_m > S_{m+2}$

그러므로 $S_{m+1} = 460$, $S_{m+2} = 450$

$S_{m+2} - S_{m+1} = a_{m+2}$에서 $450 - 460 = \frac{2}{3}d$

$d = -15$

$a_{m+1} = 5 = a_1 + m \times (-15)$에서 $a_1 = 15m + 5$

$S_{m+1} = \frac{(m+1)(a_1 + a_{m+1})}{2}$

$= \frac{(m+1)(15m+10)}{2} = 460$

$3m^2 + 5m - 182 = 0$, $(3m+26)(m-7) = 0$

m은 자연수이므로 $m=7$

그러므로 $a_1=15\times7+5=110$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$42+110=152$

22. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f(x)=x^3-5x+8$에서 $f'(x)=3x^2-5$

따라서 $f'(2)=3\times2^2-5=7$

23. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 수 $a_2,\ a_4,\ a_6$은

이 순서대로 등비수열을 이루므로

${a_4}^2=a_2\times a_6=18$

따라서 $a_3\times a_5={a_4}^2=18$

24. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 a만큼,

y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

곡선 $y=2^{x-a}+3$이다.

또한 곡선 $y=2^{x-a}+3$을 직선 $y=x$에 대하여

대칭이동하면 곡선 $y=\log_2(x-3)+a$이다.

$\log_2(x-3)+a=\log_2(2^a x-3\times2^a)$이고,

함수 $y=\log_2(2^a x-3\times2^a)$의 그래프가

함수 $y=\log_2(4x-b)$의 그래프와 일치하므로

$2^a=4$에서 $a=2$이고 $b=3\times2^a=12$

따라서 $a+b=2+12=14$

25. [출제의도] 호도법의 정의를 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{OA}}=r\,(r>0)$, $\angle\mathrm{COA}=\theta\,(0<\theta<\pi)$라 하면

호 AC의 길이가 π이므로 $r\theta=\pi$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{r}$

부채꼴 OBC의 넓이가 15π이므로

$$15\pi=\frac{1}{2}r^2(\pi-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}r^2\left(\pi-\frac{\pi}{r}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\pi(r^2-r)$$

$r^2-r-30=0$, $(r-6)(r+5)=0$에서 $r=6$

따라서 선분 OA의 길이는 6

26. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_1=S_1=\dfrac{1}{3}$

$n\ge2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\frac{n}{2n+1}-\frac{n-1}{2n-1}=\frac{1}{4n^2-1}$$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{4n^2-1}$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{6}(4k^2-1)$

$$=4\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}1$$
$$=4\times\frac{6\times7\times13}{6}-6=358$$

27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

두 함수 $f(x)g(x)$, $f(x)+g(x)$는

$x=-3$에서 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2}=4$에서 $\displaystyle\lim_{x\to-3}(x+3)^2=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-3}f(x)g(x)=f(-3)g(-3)=0$ $\cdots$ ㉠

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{f(x)+g(x)}{x+3}=-4$에서 $\displaystyle\lim_{x\to-3}(x+3)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-3}\{f(x)+g(x)\}=f(-3)+g(-3)=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $f(-3)=g(-3)=0$이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x+3$을 인수로 갖는다.

$f(x)=a(x+3)$, $g(x)=(x+3)(x+b)$ (a, b는 상수)

라 하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)g(x)}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)^2(x+b)}{(x+3)^2}$$
$$=\lim_{x\to-3}a(x+b)$$
$$=a(-3+b)=4\ \cdots\ ㉢$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)+g(x)}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)+(x+3)(x+b)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-3}(a+x+b)$$
$$=a-3+b=-4\ \cdots\ ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하면

$a(-a-4)=4$, $a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0$에서 $a=-2$이고 $b=1$

$f(x)=-2(x+3)$, $g(x)=(x+3)(x+1)$

따라서 $g(2)-f(2)=5\times3-(-2)\times5=25$

28. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

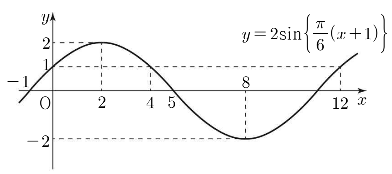
함수 $y=2\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(x+1)\right\}$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{\pi}{6}\right|}=12$이고, 최댓값과 최솟값은 각각 2, -2이다.

또한 함수 $y=2\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(x+1)\right\}$의 그래프는

함수 $y=2\sin\dfrac{\pi}{6}x$의 그래프를 x축의 방향으로

-1만큼 평행이동한 그래프이다.



(i) $1\le n\le5$일 때

$f(1)=\sqrt{3}$, $2\le n\le5$일 때 $f(n)=2$이고

$1\le n\le4$일 때 $g(n)=1$, $g(5)=0$이므로

$f(1)-g(1)=\sqrt{3}-1$, $f(5)-g(5)=2$,

$2\le n\le4$일 때 $f(n)-g(n)=1$

그러므로 부등식 $2<f(n)-g(n)<4$를

만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $n=6,\ 7$일 때

$f(n)=2$이고 $g(6)=-1$, $g(7)=-\sqrt{3}$이므로

$f(6)-g(6)=3$, $f(7)-g(7)=2+\sqrt{3}$

그러므로 부등식 $2<f(n)-g(n)<4$를

만족시키는 자연수 n의 값은 6, 7

(iii) $n\ge8$일 때

$f(n)=2$이고 $g(n)=-2$이므로 $f(n)-g(n)=4$

그러므로 부등식 $2<f(n)-g(n)<4$를

만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 부등식

$2<f(n)-g(n)<4$를 만족시키는 모든 자연수 n의

값의 합은 $6+7=13$

29. [출제의도] 함수의 미분가능성을 활용하여 문제해결하기

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i) $a\le10$일 때

$f(x)=\begin{cases}x+5 & (x<5)\\ 2x-a & (x\ge5)\end{cases}$이므로

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서

미분가능하기 위해서는

$x=5$에서 미분가능하여야 한다.

$$\lim_{x\to5-}\frac{f(x)g(x)-f(5)g(5)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5-}\frac{(x+5)(x-5)(x-b)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5-}(x+5)(x-b)=10(5-b)$$

$$\lim_{x\to5+}\frac{f(x)g(x)-f(5)g(5)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5+}\frac{(2x-a)(x-5)(x-b)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5+}(2x-a)(x-b)=(10-a)(5-b)$$

에서 $10(5-b)=(10-a)(5-b)$, $a(5-b)=0$

a는 자연수이므로 $b=5$

그러므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 5)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 5)$, $\cdots$, $(10,\ 5)$

(ii) $a\ge11$일 때

$f(x)=\begin{cases}x+5 & (x<5)\\ -2x+a & \left(5\le x<\dfrac{a}{2}\right)\\ 2x-a & \left(x\ge\dfrac{a}{2}\right)\end{cases}$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서

미분가능하기 위해서는 $x=5$와 $x=\dfrac{a}{2}$에서

미분가능하여야 한다.

$$\lim_{x\to5-}\frac{f(x)g(x)-f(5)g(5)}{x-5}=10(5-b)$$

$$\lim_{x\to5+}\frac{f(x)g(x)-f(5)g(5)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5+}\frac{(-2x+a)(x-5)(x-b)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5+}(-2x+a)(x-b)=(-10+a)(5-b)$$

에서 $10(5-b)=(-10+a)(5-b)$,

$(a-20)(5-b)=0$

$a=20$ 또는 $b=5$ $\cdots$ ㉠

또한 $$\lim_{x\to\frac{a}{2}-}\frac{f(x)g(x)-f\left(\frac{a}{2}\right)g\left(\frac{a}{2}\right)}{x-\frac{a}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{a}{2}-}\frac{(-2x+a)(x-5)(x-b)}{x-\frac{a}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{a}{2}-}\{-2(x-5)(x-b)\}=(-a+10)\left(\frac{a}{2}-b\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{a}{2}+}\frac{f(x)g(x)-f\left(\frac{a}{2}\right)g\left(\frac{a}{2}\right)}{x-\frac{a}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{a}{2}+}\frac{(2x-a)(x-5)(x-b)}{x-\frac{a}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{a}{2}+}2(x-5)(x-b)=(a-10)\left(\frac{a}{2}-b\right)$$

에서 $(-a+10)\left(\dfrac{a}{2}-b\right)=(a-10)\left(\dfrac{a}{2}-b\right)$

$(a-10)(a-2b)=0$

$a\ge11$이므로 $a=2b$ $\cdots$ ㉡

그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 순서쌍 (a, b)는
$(20, 10)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 11

30. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

$f_1(x)=2^x+2^{-a}-2$, $f_2(x)=2^{-x}+2^a-2$라 하면
함수 $y=f_1(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값이 증가하고, 함수 $y=f_2(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프의 점근선은 각각 $y=2^{-a}-2$, $y=2^a-2$이다.

$\alpha=2^{-a}-2$, $\beta=2^a-2$라 하면
두 함수 $y=|f_1(x)|$, $y=|f_2(x)|$의 그래프의 점근선은 각각 $y=|\alpha|$, $y=|\beta|$이다.

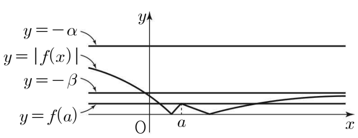
$\beta-\alpha=2^a-2^{-a}>0$이므로 $\beta>\alpha$,
$-2<\alpha<-1$이므로 $\alpha<0$이고 $|\alpha|=-\alpha$,
$f(a)=2^{-a}+2^a-2>2\sqrt{2^{-a}\times 2^a}-2=0$이므로
$f(a)>0$

(ⅰ) $0<a<1$일 때

$1<2^a<2$, $\frac{1}{2}<2^{-a}<1$이므로
$-\frac{1}{2}<f(a)<1$이고 $1<-\alpha<\frac{3}{2}$
그러므로 $f(a)<-\alpha$
한편 $-1<\beta<0$이므로 $|\beta|=-\beta$
$f(a)=-\beta$에서 $2^{-a}+2^a-2=-2^a+2$,
$2\times(2^a)^2-4\times 2^a+1=0$
$a=\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
그러므로 $a=\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}$의 좌우에서
$-\beta$, $f(a)$의 값의 대소 관계가 달라진다.

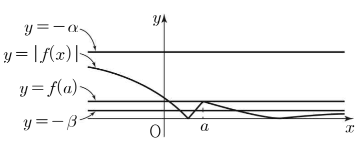
(a) $0<a<\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}$일 때

$f(a)<-\beta<-\alpha$이므로
그림과 같이 $f(a)<k<-\beta$인
임의의 양수 k에 대하여
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가
서로 다른 두 점에서 만난다.



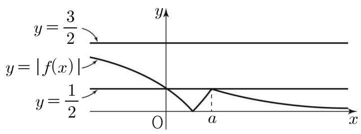
(b) $\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}\le a<1$일 때

$-\beta\le f(a)<-\alpha$이므로
그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와
직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록
하는 양수 k의 값은 $k=f(a)$뿐이다.



(ⅱ) $a=1$일 때

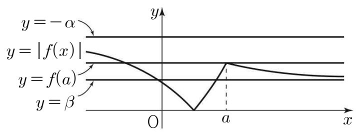
$-\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=0$이고 $f(a)=\frac{1}{2}$이므로
그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와
직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는
양수 k의 값은 $k=\frac{1}{2}$뿐이다.



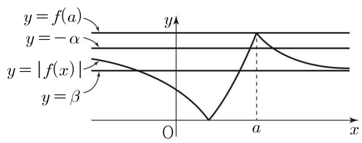
(ⅲ) $a>1$일 때

$\beta>0$이므로 $|\beta|=\beta$
$f(a)=-\alpha$에서 $2^{-a}+2^a-2=-2^{-a}+2$,
$(2^a)^2-4\times 2^a+2=0$
$a=\log_2(2+\sqrt{2})$
또한 $-\alpha=\beta$에서 $-2^{-a}+2=2^a-2$,
$(2^a)^2-4\times 2^a+1=0$
$a=\log_2(2+\sqrt{3})$
그러므로 $a=\log_2(2+\sqrt{2})$, $a=\log_2(2+\sqrt{3})$의
좌우에서 $-\alpha$, β, $f(a)$의 값의
대소 관계가 달라진다.

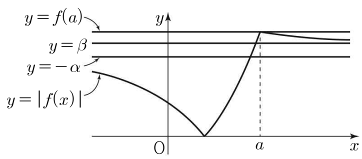
(a) $1<a\le\log_2(2+\sqrt{2})$일 때



(b) $\log_2(2+\sqrt{2})<a<\log_2(2+\sqrt{3})$일 때



(c) $a\ge\log_2(2+\sqrt{3})$일 때



(a), (b), (c)에 의하여
$-\alpha$, β 중 크지 않은 값을 s라 하면
$0<k<s$인 임의의 양수 k에 대하여
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$는
서로 다른 두 점에서 만난다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가
서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k가
오직 하나뿐인 a의 값의 범위는
$\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}\le a\le 1$이므로
$M=1$, $m=\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
$2^{M+m}=2^{1+\log_2\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=2+\sqrt{2}$에서 $p=2$, $q=2$
따라서 $p+q=4$