2021학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[확률과 통계]

23	⑤	24	②	25	①	26	④	27	③
28	⑤	29	288	30	206				

23. [출제의도] 중복순열 계산하기

${}_n\Pi_2=n^2=25$에서 $n=5$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식 $(x+2a)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(2a)^r x^{5-r}={}_5C_r 2^r a^r x^{5-r}$

x^3의 계수는 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2\times 2^2\times a^2=40a^2=640$

따라서 $a=4$

25. [출제의도] 중복조합 이해하기

빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $56\times 10=560$

26. [출제의도] 중복순열 이해하기

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로 만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

일의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 3 또는 5이므로 일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times 125\times 3=750$

27. [출제의도] 이항계수의 성질을 이용하여 추론하기

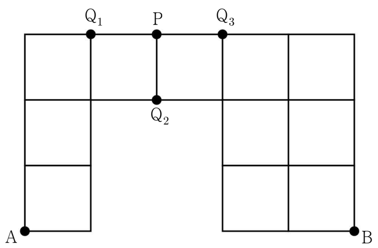
${}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}=2^{2n}$

이므로 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1}C_{2k}=2^{2n}-1$

$2^{2n}-1=1023$에서 $2^{2n}=2^{10}$

따라서 $n=5$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제 해결하기



그림과 같이 세 지점 Q_1, Q_2, Q_3을 정하면

A지점에서 출발하여 P지점까지 가기 위해서는 Q_1지점 또는 Q_2지점 중 한 지점을 지나야 하고 P지점에서 출발하여 B지점까지 가기 위해서는 Q_2지점 또는 Q_3지점 중 한 지점을 지나야 한다.

그러므로 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우와 각각의 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) $A\to Q_1\to P\to Q_2\to B$의 순서로 이동하는 경우

$\frac{4!}{1!\times 3!}\times 1\times 1\times 1\times \frac{4!}{2!\times 2!}=24$

(ⅱ) $A\to Q_1\to P\to Q_3\to B$의 순서로 이동하는 경우

$\frac{4!}{1!\times 3!}\times 1\times 1\times \frac{5!}{2!\times 3!}=40$

(ⅲ) $A\to Q_2\to P\to Q_3\to B$의 순서로 이동하는 경우

$\frac{3!}{1!\times 2!}\times 1\times 1\times 1\times \frac{5!}{2!\times 3!}=30$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는

$24+40+30=94$

29. [출제의도] 원순열을 이용하여 추론하기

남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면

(ⅰ) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우

A, B를 한 학생으로 생각하고,
D, C, E를 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는
$24\times 2!\times 2!=96$

(ⅱ) C가 A 또는 B 중 한 명과 이웃하는 경우

D 또는 E 중 한 명과 C, A, B의 총 4명을 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, A, B를 한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는
$24\times {}_2C_1\times 2!\times 2!=192$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는

$96+192=288$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

6 이하의 음이 아닌 네 정수 y_1, y_2, y_3, y_4에 대하여

$x_1=2y_1+1$, $x_2=2y_2+2$,

$x_3=2y_3+1$, $x_4=2y_4+2$라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4=34$에서

$(2y_1+1)+(2y_2+2)+(2y_3+1)+(2y_4+2)=34$,

$y_1+y_2+y_3+y_4=14$ ⋯ ㉠

구하는 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는

방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는 음이 아닌 네 정수 y_1, y_2, y_3, y_4의 모든 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)에서

$y_k\ge 7$인 4 이하의 자연수 k가 존재하는 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)를 제외한 개수와 같다.

(ⅰ) 방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는 음이 아닌 네 정수 y_1, y_2, y_3, y_4의 모든 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 14개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_{14}={}_{17}C_{14}={}_{17}C_3=\frac{17\times 16\times 15}{3\times 2\times 1}=680$

(ⅱ) $y_k\ge 7$인 k의 값이 1개인 경우

$y_1\ge 7$이라 하자.
$z_1=y_1-7$이라 하면 방정식 ㉠은
$z_1+y_2+y_3+y_4=7$
방정식 $z_1+y_2+y_3+y_4=7$을 만족시키는 음이 아닌 네 정수 z_1, y_2, y_3, y_4의 모든 순서쌍 (z_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_7={}_{10}C_3=120$
이때 $y_l\ge 7$인 2 이상 4 이하의 자연수 l이 존재하는 순서쌍 (z_1, y_2, y_3, y_4)는
$(0, 7, 0, 0)$, $(0, 0, 7, 0)$, $(0, 0, 0, 7)$의 3가지이므로 $120-3=117$
같은 방법으로 $y_k\ge 7$인 2 이상 4 이하의 자연수 k가 존재하는 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의 개수도 각각 117이다.
따라서 $y_k\ge 7$인 k의 값이 1개인 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는
$4\times 117=468$

(ⅲ) $y_k\ge 7$인 k의 값이 2개인 경우

순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)는 $(7, 7, 0, 0)$, $(7, 0, 7, 0)$, $(7, 0, 0, 7)$, $(0, 7, 7, 0)$, $(0, 7, 0, 7)$, $(0, 0, 7, 7)$의 6가지이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해

구하는 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는

$680-(468+6)=206$

[미적분]

23	⑤	24	①	25	④	26	②	27	③
28	③	29	18	30	13				

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{0+3}{1+0}=3$$

24. [출제의도] 로그함수의 미분 이해하기

$f(x)=\log_3 6x=\log_3 6+\log_3 x$

$f'(x)=(\log_3 6+\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$

따라서 $f'(9)=\frac{1}{9\ln 3}$

25. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\times\frac{a_n}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$

$=\frac{2+3\times 2}{1+0}=8$

26. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

$x=t$일 때 두 점 P, Q의 y좌표는 각각
e^{2t+k}, e^{-3t+k}이고
$\overline{\mathrm{PQ}}=t$를 만족시키는 k의 값이 $f(t)$이므로

$$e^{2t+f(t)}-e^{-3t+f(t)}=t$$
$$e^{f(t)}\left(e^{2t}-e^{-3t}\right)=t$$
$$e^{f(t)}=\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$$
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}e^{f(t)}&=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{2\times\frac{e^{2t}-1}{2t}+3\times\frac{e^{-3t}-1}{-3t}}\\&=\frac{1}{2\times 1+3\times 1}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

27. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

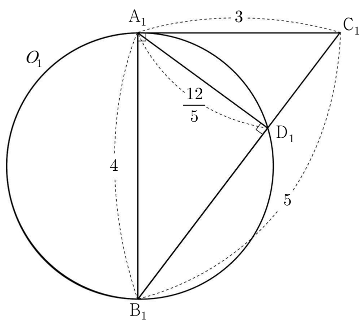
점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{OP'}}=t$, $\overline{\mathrm{OQ'}}=f(t)$

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$,
$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PQ}}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

삼각형 OPP′과 삼각형 OQQ′은 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{OP'}}:\overline{\mathrm{OQ'}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}$
$t:f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}:t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$에서

$$f(t)=\frac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$
$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^3}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}\\&=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}\\&=1^2\times\frac{1}{\sqrt{1}\times\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

28. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



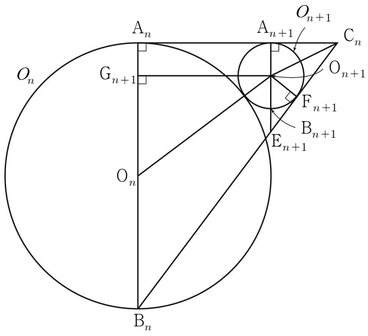
원 O_1의 반지름의 길이가 2이므로
반원의 넓이는 2π
직각삼각형 $\mathrm{C_1A_1B_1}$에서 $\overline{\mathrm{A_1C_1}}=3$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=4$이므로
$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$
선분 $\mathrm{A_1B_1}$은 원 O_1의 지름이므로 $\angle\mathrm{A_1D_1B_1}=\frac{\pi}{2}$
삼각형 $\mathrm{C_1A_1B_1}$에서
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A_1B_1}}\times\overline{\mathrm{A_1C_1}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{B_1C_1}}\times\overline{\mathrm{A_1D_1}}$이므로
$\overline{\mathrm{A_1D_1}}=\frac{12}{5}$

직각삼각형 $\mathrm{B_1D_1A_1}$에서 $\overline{\mathrm{B_1D_1}}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$

삼각형 $\mathrm{B_1D_1A_1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{96}{25}$

그러므로 $S_1=2\pi+\frac{96}{25}$이다.

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



두 원 O_n과 O_{n+1}의 중심을 각각 O_n과 O_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 각각 r_n과 r_{n+1}이라 하자.
직선 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$이 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 만나는 점을 E_{n+1}이라 하고, 원 O_{n+1}과 직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$이 접하는 점을 F_{n+1}이라 하자.
$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이고
삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=3:5$에서 $\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\frac{5}{3}a_n$이고

$\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\frac{2}{3}a_n$이다.

삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$은 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=3:4$에서 $a_n=2r_{n+1}$이다.
점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}_n$에 내린 수선의 발을 G_{n+1}이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{G}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}$

$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}}=r_n-r_{n+1}$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$이므로
직각삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$에서

$$\left(r_n+r_{n+1}\right)^2=\left(r_n-r_{n+1}\right)^2+\left(\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}\right)^2$$
$$16{r_{n+1}}^2-40r_{n+1}r_n+9{r_n}^2=0$$
$$\left(4r_{n+1}-r_n\right)\left(4r_{n+1}-9r_n\right)=0$$

$r_n>r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\frac{1}{4}r_n$
원 O_n과 원 O_{n+1}의 닮음비가 $4:1$이며 넓이의 비는 $16:1$이다.
따라서 S_n은 첫째항이 $2\pi+\frac{96}{25}$이고 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

29. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{DCB}=\alpha$이고 $\angle\mathrm{CDA}=2\alpha$
삼각형 ADC에서 $\beta=\frac{\pi}{3}-2\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=2\cos^2\alpha-1=\frac{\sqrt{21}}{7}\end{aligned}$$

$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha=\frac{28}{49}$이고

$0<2\alpha<\pi$이므로 $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\begin{aligned}\tan\beta&=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\\&=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan 2\alpha}\\&=\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

따라서 $54\sqrt{3}\times\tan\beta=18$

30. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 추론하기

$|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=a+\frac{b}{x}$$

$x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+b+1}{3}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{a-b-1}{3}$

$|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

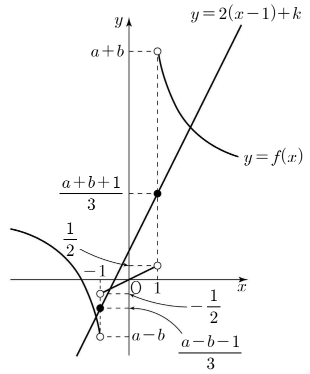
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}=\frac{0+0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

따라서

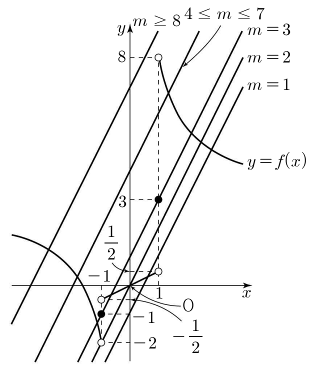
$$f(x)=\begin{cases}a+\frac{b}{x} & (|x|>1)\\ \frac{a+b+1}{3} & (x=1)\\ \frac{a-b-1}{3} & (x=-1)\\ \frac{x}{2} & (|x|<1)\end{cases}$$

함수 $g(x)=2(x-1)+m$이라 하면
방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수는
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.
$x<-1$에서 $f(x)$는 감소하고 $x>1$에서 $f(x)$는 감소하므로 $|x|>1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고,
$|x|<1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 일차함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 1이다.
그러므로 $c_k=5$인 자연수 k가 존재하려면

$f(1)=g(1)$, $f(-1)=g(-1)$이어야 하고,
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2(x-1)+k$는
두 점 $\left(1,\ \frac{a+b+1}{3}\right)$, $\left(-1,\ \frac{a-b-1}{3}\right)$을 지나므로
$\frac{a+b+1}{3}=k$, $\frac{a-b-1}{3}=k-4$에서
$b=5$
$k=\frac{a}{3}+2$가 자연수이므로 a는 3의 배수이다. … ㉠
$\lim_{x\to-1-}f(x)<f(-1)<\lim_{x\to-1+}f(x)$이어야 하므로
$a-5<\frac{a}{3}-2<-\frac{1}{2}$에서 $a<\frac{9}{2}$ … ㉡
$a>0$이므로 $\frac{1}{2}<\frac{a}{3}+2<a+5$가 성립하며
$\lim_{x\to1-}f(x)<f(1)<\lim_{x\to1+}f(x)$를 만족시킨다.
㉠, ㉡에 의해 $0<a<\frac{9}{2}$이므로 $a=3$, $k=3$



(ⅰ) $m=1$일 때
$g(-1)=-3$, $g(1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $-1<x<1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_1=2$

(ⅱ) $m=2$일 때
$g(-1)=-2$, $g(1)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_2=2$

(ⅲ) $m=3$일 때
$m=k=3$이므로 $c_3=5$

(ⅳ) $4\le m\le 7$일 때
$g(-1)>\lim_{x\to-1+}f(x)=-\frac{1}{2}$,
$g(1)<\lim_{x\to1+}f(x)=8$이므로
$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.
그러므로 $c_m=2$

(ⅴ) $m\ge 8$일 때
$g(-1)>\lim_{x\to-1+}f(x)=-\frac{1}{2}$,
$g(1)\ge\lim_{x\to1+}f(x)=8$이므로
$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$에서 1개의 교점을 갖는다.
그러므로 $c_m=1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해

$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)=3+1+1+4+1\times4=13$$

[기하]

23	①	**24**	③	**25**	②	**26**	④	**27**	⑤
28	⑤	**29**	115	**30**	63				

23. [출제의도] 벡터의 연산 계산하기

$(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=(2-n)\vec{a}-(m-4)\vec{b}$
$=\vec{a}-\vec{b}$
에서 $m-4=1$, $2-n=1$이므로
$m=5$, $n=1$
따라서 $m+n=6$

24. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식 이해하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(4,\ 7)$에서의
접선의 방정식은 $\frac{4x}{2}-\frac{7y}{7}=1$,
$2x-y=1$
따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}$

25. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

점 Q는 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점이므로
$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF}}$
$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=12$
삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 20이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{OP}}$에서 $\overline{\mathrm{OP}}=4$

26. [출제의도] 포물선의 정의 이해하기

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{FA}}=8$
$\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{HA}}-\overline{\mathrm{HC}}=8-p$
$\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OF}}=8-2p$
$\overline{\mathrm{AB}}=h$라 하면
사다리꼴 OFAC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\{(8-p)+p\}\times h=4h$
직각삼각형 FBA의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(8-2p)\times h=(4-p)h$
$4h:(4-p)h=2:1$이므로 $p=2$
$\overline{\mathrm{FB}}=4$이므로 직각삼각형 FBA에서
$h=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$
따라서 삼각형 ACF의 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

27. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 추론하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 4이므로
$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=7$
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$의 장축의 길이가 $2|a|$이므로
$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=7+3=2|a|$에서 $a^2=25$
타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{7}=1$에서 $c^2=25-7=18$
쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $4+b^2=c^2=18$, $b^2=14$
따라서 $a^2+b^2=25+14=39$

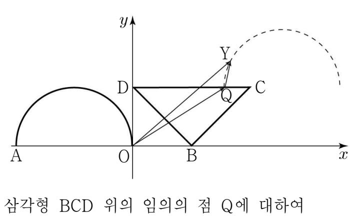
28. [출제의도] 이차곡선을 이용하여 추론하기

점 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$이 포물선의 초점이므로
준선의 방정식은 $x=-\frac{9}{4}$
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면
$\overline{\mathrm{PF}}=x_1+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$에서 $x_1=4$, $y_1=6$
포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은
$6y=\frac{9}{2}(x+4)$이고 점 F′을 지나므로 $c=4$
$\mathrm{P}(4,\ 6)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=10$
타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\frac{65}{4}$이고
$\overline{\mathrm{F'F}}=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$이므로
타원의 단축의 길이를 k라 하면
$\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-\left(\frac{25}{8}\right)^2=\frac{225}{4}$
따라서 타원의 단축의 길이는 15

29. [출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기

(ⅰ) 두 점 A, O의 중점을 M이라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{0}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$
$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$의 방향이 같고 $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 값은 최대이다. 그러므로 선분 MC와 반원의 호가 만나는 점을 X라 하면 점 Q가 점 C이고 점 P가 점 X일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 값은 최대이다.
$\overline{\mathrm{MC}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{MX}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}|=\sqrt{10}+1$
따라서 $M=\sqrt{10}+1$

(ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$
$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$



삼각형 BCD 위의 임의의 점 Q에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{QY}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$인 점을 Y라 하자.
$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QY}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OY}}|\ge|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$

이므로 점 Y가 점 Q일 때 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이다. 점 Q가 선분 BD 위에 있고 $\overline{OQ}\perp\overline{BD}$일 때 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값은 최소이므로

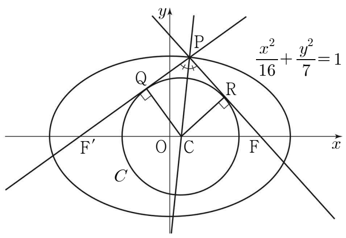
$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i), (ii)에 의해

$M^2+m^2=(11+2\sqrt{10})+\frac{1}{2}=\frac{23}{2}+2\sqrt{10}$

따라서 $p=\frac{23}{2}$, $q=10$이므로 $p\times q=115$

30. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기



$c^2=16-7=9$, $c=3$

$\overline{FF'}=2c=6$

직선 FP가 원 C와 접하는 점을 R라 하고

$\overline{PQ}=a$라 하면

$\overline{PF}=2\overline{PQ}=2a$이므로 $\overline{RF}=\overline{PF}-\overline{PR}=\overline{PF}-\overline{PQ}=a$

$\overline{PR}=\overline{RF}$이고, $\angle PRC=90^\circ$이므로

삼각형 PCR, FCR가 서로 합동이다.

$\overline{CP}=l$이라 하면 $\overline{CP}=\overline{FC}$에서 $\overline{F'C}=6-l$

$\overline{PF'}=\overline{PQ}+\overline{QF'}$이고

$\overline{PF'}+\overline{PF}=8$이므로 $\overline{QF'}=8-3a$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$\overline{PF'}>\overline{PF}$에서 $a<2$ … ㉠

삼각형 FPF′에서 $\angle F'PC=\angle CPF$이므로

$\overline{PF'}:\overline{PF}=\overline{F'C}:\overline{CF}$

$(8-2a):2a=(6-l):l$에서 $l=\frac{3}{2}a$ … ㉡

점 Q는 점 C에서 선분 PF′에 내린 수선의 발이므로 $\overline{F'C}^2-\overline{F'Q}^2=\overline{CP}^2-\overline{PQ}^2$

$(6-l)^2-(8-3a)^2=l^2-a^2$ … ㉢

㉡, ㉢에 의해 $4a^2-15a+14=0$

$(a-2)(4a-7)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=\frac{7}{4}$

㉠에 의해 $a=\frac{7}{4}$, $l=\frac{21}{8}$

따라서 $24\times\overline{CP}=63$