2021학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	②	**2**	①	**3**	⑤	**4**	④	**5**	③
6	④	**7**	⑤	**8**	①	**9**	②	**10**	③
11	③	**12**	④	**13**	②	**14**	⑤	**15**	③
16	2	**17**	40	**18**	8	**19**	16	**20**	7
21	5	**22**	251						

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}=\left\{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}}=3$$

2. [출제의도] 등차수열 이해하기

$a_5-a_2=3\times2=6$

3. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+1$은

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서 닫힌구간 $[0,4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+1=10$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)=3+1=4$

5. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=2x+4$에서

$f(x)=\int(2x+4)dx$

$=x^2+4x+C$ (C는 적분상수)

$f(-1)+f(1)=0$에서

$(-3+C)+(5+C)=2C+2=0$

$C=-1$이므로 $f(x)=x^2+4x-1$

따라서 $f(2)=11$

6. [출제의도] 삼각함수 이해하기

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\frac{\pi}{6}\right)$의 주기는

$\frac{2\pi}{a}$이므로 $\frac{2\pi}{a}=4\pi$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(64-12)-(1-3)}{3}=18$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,f(k))$에서의

접선의 기울기는 $f'(k)=3k^2-3$이므로

$3k^2-3=18$, $k^2=7$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{7}$

8. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)$

$f(2)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=b-4$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b-4$

$\lim\limits_{x\to2-}(x-2)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to2-}(x^2+3x+a)=0$

$a+10=0$에서 $a=-10$

$\lim\limits_{x\to2-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to2-}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=7$이므로

$b-4=7$, $b=11$

따라서 $a+b=-10+11=1$

9. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$h(x)=2f(x)-3g(x)$라 하면 $f(x)=\frac{3g(x)+h(x)}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left\{\frac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}+g(x)}{3\left\{\frac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+4\times\frac{h(x)}{g(x)}}{7+3\times\frac{h(x)}{g(x)}}$$

$=2$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의

시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같으므로

시각 $t=1$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량은

0이다.

$\int_1^k v(t)dt=\int_1^k(4t-10)dt$

$=\left[2t^2-10t\right]_1^k$

$=(2k^2-10k)-(2-10)$

$=2k^2-10k+8$

$=2(k-1)(k-4)=0$

따라서 $k=4$

11. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$2\cos^2x-\sin(\pi+x)-2=2(1-\sin^2x)+\sin x-2$

$=-2\sin^2x+\sin x$

$=-\sin x(2\sin x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0<x<2\pi$이므로

$\sin x=0$에서 $x=\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은 2π이다.

12. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=a+4$이므로 $a+4=12$에서 $a=8$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_a^b|f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$

$=-\left(\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\right)$

$=-\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right)$

$=\frac{9}{2}$

14. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 추론하기

점 $\mathrm{A}(a,b)$에 대하여 점 $\mathrm{B}(c,d)$가

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면

$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로

$b<\frac{n}{2}$이다.

$\frac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수

a의 개수는 $n-2k$이다.

2 이상의 자연수 m에 대하여

(ⅰ) $n=2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는

1부터 $\boxed{m-1}$ 까지이므로

$T_{2m}=\sum\limits_{k=1}^{\boxed{m-1}}(2m-2k)$

$=2m(m-1)-m(m-1)$

$=\boxed{m^2-m}$

(ⅱ) $n=2m+1$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터 m까지이므로

$T_{2m+1}=\sum\limits_{k=1}^{m}(2m+1-2k)$

$=m(2m+1)-m(m+1)$

$=\boxed{m^2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\sum\limits_{n=4}^{20}T_n=614$

따라서 $f(m)=m-1$, $g(m)=m^2-m$, $h(m)=m^2$

이므로 $f(5)+g(6)+h(7)=4+30+49=83$

15. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

ㄱ. $\log_2|kx_1|=\log_2(x_1+4)$에서 $x_1<0$이므로

$-kx_1=x_1+4$, $x_1=\frac{-4}{k+1}$

$\log_2|kx_2|=\log_2(x_2+4)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=x_2+4$, $x_2=\frac{4}{k-1}$

$x_2=-2x_1$에서

$\frac{4}{k-1}=\frac{8}{k+1}$, $k+1=2k-2$, $k=3$ (참)

ㄴ. $\log_2|kx_2|=\log_2(-x_2+m)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=-x_2+m$,

$m=(k+1)x_2=\frac{4(k+1)}{k-1}$

$\log_2|kx_3|=\log_2(-x_3+m)$에서 $x_3<0$이므로

$-kx_3=-x_3+m$,

$x_3=\frac{-m}{k-1}=\frac{-4(k+1)}{(k-1)^2}$

그러므로

$x_1x_3=\frac{-4}{k+1}\times\frac{-4(k+1)}{(k-1)^2}=\left(\frac{4}{k-1}\right)^2={x_2}^2$ (참)

ㄷ. ${x_2}^2=x_1x_3$에서 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}$

입시자료 전문 호랭이닷컴 www.horaeng.com

$\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{-k-1}{k-1}=-1-\dfrac{2}{k-1}<-1$

$\dfrac{x_2}{x_1}=r\,(r<-1)$이라 하면 $x_2=x_1r$, $x_3=x_1r^2$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면

두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$

$$=\frac{\log_2|kx_2|-\log_2|kx_1|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2|kx_3|-\log_2|kx_1|}{x_1(r^2-1)}$$

$$=\frac{\log_2\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2\left|\frac{x_3}{x_1}\right|}{x_1(r^2-1)}$$

$$=\frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)}+\frac{2\log_2(-r)}{x_1(r^2-1)}=0$$

에서 $1+\dfrac{2}{r+1}=0$, $r=-3$

$x_2=x_1r$에서

$\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{12}{k+1}$, $k+1=3k-3$, $k=2$이고,

$m=\dfrac{4(k+1)}{k-1}=12$이므로 $m+k^2=16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

16. [출제의도] 도함수 이해하기

$f(x)=x^2+ax$에서 $f'(x)=2x+a$

$f'(1)=2+a=4$에서 $a=2$

17. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{7}{18}=\dfrac{16}{9}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$

따라서 $30(\sin\theta+\cos\theta)=40$

18. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

다항함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(3)=2$, $f'(3)=0$

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$이므로

$g'(3)=4f(3)+3f'(3)=8$

19. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$a_3+a_5=\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_5}$에서

$a_3+a_5=\dfrac{a_3+a_5}{a_3a_5}$, $a_3a_5=1$이므로

$\dfrac{1}{4}r^2\times\dfrac{1}{4}r^4=1$, $r^6=16$, $r^3=4$

따라서 $a_{10}=\dfrac{1}{4}r^9=\dfrac{1}{4}(r^3)^3=16$

20. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BC}}:\overline{\text{CA}}=1:2:\sqrt{2}$에서

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를

각각 k, $2k$, $\sqrt{2}k\,(k>0)$이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$2k^2=k^2+4k^2-4k^2\cos(\angle\text{ABC})$

$4k^2\cos(\angle\text{ABC})=3k^2$

$\cos(\angle\text{ABC})=\dfrac{3}{4}$이므로

$\sin(\angle\text{ABC})=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\text{CA}}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$이므로 선분 CA의 길이는 7이다.

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

(ⅰ) $a_1=1$일 때

$a_1\ge0$이므로 $a_2=a_1-2=-1$

$a_2<0$이므로 $a_3=a_2+5=4$

$a_3\ge0$이므로 $a_4=a_3-2=2$

$a_4\ge0$이므로 $a_5=a_4-2=0$

$a_5\ge0$이므로 $a_6=a_5-2=-2$

$a_6<0$이므로 $a_7=a_6+5=3$

$a_7\ge0$이므로 $a_8=a_7-2=1=a_1$

$a_8\ge0$이므로 $a_9=a_8-2=-1=a_2$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고 $a_{15}=a_8=a_1=1$

(ⅱ) $a_1=2$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=2$

(ⅲ) $a_1=3$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=3$

(ⅳ) $a_1=4$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=4$

(ⅴ) $a_1=5$일 때

$a_1\ge0$이므로 $a_2=a_1-2=3$

$a_2\ge0$이므로 $a_3=a_2-2=1$

$a_3\ge0$이므로 $a_4=a_3-2=-1$

$a_4<0$이므로 $a_5=a_4+5=4$

$a_5\ge0$이므로 $a_6=a_5-2=2$

$a_6\ge0$이므로 $a_7=a_6-2=0$

$a_7\ge0$이므로 $a_8=a_7-2=-2$

$a_8<0$이므로 $a_9=a_8+5=3=a_2$

$a_9\ge0$이므로 $a_{10}=a_9-2=1=a_3$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=-2<0$

따라서 $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

22. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$f(x)=3x+a$이므로

$$g(x)=\int_2^x(t+a)(3t+a)\,dt$$

$$=\int_2^x(3t^2+4at+a^2)\,dt$$

$$=\left[t^3+2at^2+a^2t\right]_2^x$$

$$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$$

$g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

$h(x)=(x-2)(3x+a)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

조건 (가)에 의해 곡선 $y=h(x)$ 위의

어떤 점에서의 접선이 x축이므로

$h(k)=h'(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 존재한다.

그러므로 다항식 $h(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 가진다.

(ⅰ) $k=2$인 경우

다항식 $h(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $3x+a$가 $3(x-2)$이거나

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를 인수로 가진다.

(a) $3x+a=3(x-2)$인 경우

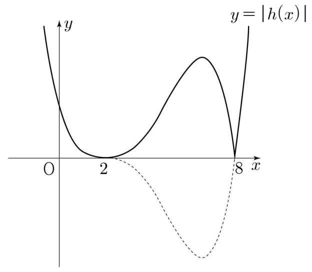
$a=-6$이므로

$h(x)=(x-2)(3x-6)(x^2-10x+16)$

$\quad=3(x-2)^3(x-8)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=729$이다.

(b) 다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이

$x-2$를 인수로 갖는 경우

$4+4(a+1)+(a+2)^2$

$=a^2+8a+12$

$=(a+2)(a+6)=0$

에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$

$a=-6$이면 (a)와 같다.

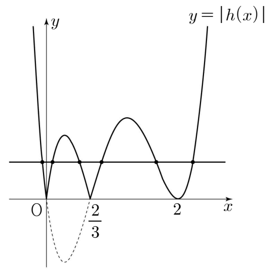
$a=-2$이면

$h(x)=(x-2)(3x-2)(x^2-2x)$

$\quad=x(3x-2)(x-2)^2$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅱ) $k=-\dfrac{a}{3}\,(a\ne-6)$인 경우

다항식 $h(x)$가 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x+\dfrac{a}{3}$를

인수로 가진다.

호랑이닷컴
www.horaeng.com

$\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}a(a+1)+(a+2)^2$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{10}{3}a+4$

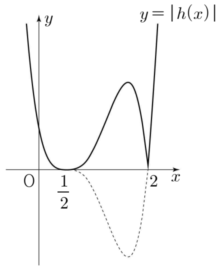
$=\frac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$

에서 $a=-\frac{3}{2}$이므로

$h(x)=(x-2)\left(3x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$

$=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로
함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=\frac{243}{8}$

(iii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$인 경우
$x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=x^2-2kx+k^2$에서
$a+1=-k$, $(a+2)^2=k^2$
$(a+2)^2=(-a-1)^2$에서 $a=-\frac{3}{2}$
$a=-\frac{3}{2}$이면 (ii)와 같다.

따라서 $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{243}{8}$이므로
$p=8$, $q=243$에서 $p+q=251$

입시자료 제공 호랭이닷컴 www.horaeng.com