• 수학 영역 •

정 답

1	②	2	①	3	②	4	③	5	④
6	③	7	③	8	⑤	9	①	10	②
11	⑤	12	⑤	13	⑤	14	③	15	④
16	④	17	⑤	18	②	19	①	20	①
21	②	22	8	23	27	24	720	25	3
26	7	27	14	28	11	29	32	30	192

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$A+2B=(3x^2+2xy)+2(-x^2+xy)$
$=(3x^2+2xy)+(-2x^2+2xy)$
$=x^2+4xy$

2. [출제의도] 두 복소수가 서로 같을 조건을 이해하여 식의 값을 구한다.

$3x+(2+i)y=1+2i$
$(3x+2y)+yi=1+2i$
두 복소수의 실수부분과 허수부분을 각각 비교하면
$3x+2y=1,\ y=2$
$x=-1,\ y=2$ 이므로
$x+y=-1+2=1$

3. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 원소를 구한다.

두 집합 $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 3,\ a\}$에서
$3\in(A\cap B)$이고 $1\notin(A\cap B)$이다.
집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합이 8이려면
$a\in(A\cap B)$, 즉 $A\cap B=\{3,\ a\}$이고,
$3+a=8$
따라서 $a=5$

4. [출제의도] 순열과 조합의 수를 계산한다.

${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{{}_{10}\mathrm{P}_3}{3!}=\dfrac{{}_{10}\mathrm{P}_3}{6}$
이므로
$n=\dfrac{{}_{10}\mathrm{P}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=6$

5. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 최댓값을 구한다.

주어진 이차방정식이 허근을 갖도록 하려면 이차방정식 $x^2+ax+16=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.
$D=a^2-4\times1\times16$
$=a^2-64<0$
$-8<a<8$
이므로 자연수 a의 최댓값은 7이다.

6. [출제의도] 곱셈 공식을 이해하여 식의 값을 구한다.

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=2^3+3\times\dfrac{1}{3}\times2$
$=8+2$
$=10$

7. [출제의도] 합성함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(3)=4$이고 $g(4)=3$이므로
$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=3$
$g(3)=1$이고 $f(1)=5$이므로
$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(1)=5$
따라서 $(g\circ f)(3)-(f\circ g)(3)=3-5=-2$

8. [출제의도] 도형의 평행이동을 이해하여 식의 값을 구한다.

원 $x^2+(y+4)^2=10$을 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$(x+4)^2+\{(y-2)+4\}^2=10$
$(x+4)^2+(y+2)^2=10$
$x^2+y^2+8x+4y+10=0$
이므로
$a=8,\ b=4,\ c=10$
따라서 $a+b+c=8+4+10=22$

9. [출제의도] 연립방정식을 이해하여 해를 구한다.

$2x-y=1$에서 $y=2x-1$
$y=2x-1$을 $4x^2-x-y^2=5$에 대입하면
$4x^2-x-(2x-1)^2=5$
$3x=6,\ x=2$
$x=2$를 $y=2x-1$에 대입하면
$y=2\times2-1=3$
따라서 $\alpha=2,\ \beta=3$이므로 $\alpha\beta=2\times3=6$

[다른 풀이]

$4x^2-x-y^2=5$에서
$(2x+y)(2x-y)-x=5$ …… ㉠
㉠에 $2x-y=1$을 대입하여 정리하면
$x+y=5$
두 식 $2x-y=1,\ x+y=5$를 연립하여 풀면
$x=2,\ y=3$
따라서 $\alpha=2,\ \beta=3$이므로 $\alpha\beta=2\times3=6$

10. [출제의도] 직선에 접하는 원의 반지름의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

직선 $x+2y+5=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=r^2$에 접하므로 원의 반지름의 길이 r는 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 $r=\dfrac{|1\times1+2\times0+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

[다른 풀이]

$x+2y+5=0$에서 $x=-2y-5$
$x=-2y-5$를 $(x-1)^2+y^2=r^2$에 대입하면
$\{(-2y-5)-1\}^2+y^2=r^2$
$5y^2+24y+36-r^2=0$
이차방정식 $5y^2+24y+36-r^2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.
$\dfrac{D}{4}=12^2-5\times(36-r^2)$
$=5r^2-36=0$
이므로 $r^2=\dfrac{36}{5}$
$r>0$이므로 $r=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

11. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 합집합의 원소의 개수를 구한다.

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 99\}$에서
$n(A)=50$
$B=\{7,\ 14,\ 21,\ \cdots,\ 98\}$에서
$n(B)=14$
$A\cap B=\{7,\ 21,\ 35,\ 49,\ 63,\ 77,\ 91\}$에서
$n(A\cap B)=7$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=50+14-7$
$=57$

[다른 풀이]

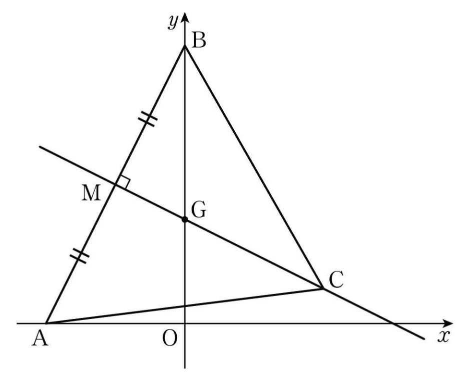
$A\cup(B-A)=A\cup B,\ A\cap(B-A)=\varnothing$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)$
100 이하의 홀수의 개수는 50이므로
$n(A)=50$
100 이하의 자연수 중에서 7의 배수인 짝수는
$7\times2,\ 7\times4,\ 7\times6,\ \cdots,\ 7\times14$
에서 7개이므로
$n(B-A)=7$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)$
$=50+7$
$=57$

12. [출제의도] 두 점 사이의 거리와 삼각형의 무게중심을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\{a-(-2)\}^2+(b-0)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2+4a+4}$
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(a-0)^2+(b-4)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2-8b+16}$
$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로
$a^2+b^2+4a+4=a^2+b^2-8b+16$
$4a+8b=12$
$a+2b=3$ …… ㉠
삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{-2+0+a}{3},\ \dfrac{0+4+b}{3}\right)$
즉, $\left(\dfrac{-2+a}{3},\ \dfrac{4+b}{3}\right)$이고 이 점이 y축 위에 있으므로
$\dfrac{-2+a}{3}=0,\ a=2$
㉠에서 $2+2b=3$, $b=\dfrac{1}{2}$
따라서 $a+b=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

[다른 풀이]

삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다.
선분 AB의 수직이등분선의 기울기를 m이라 하면 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{4-0}{0-(-2)}=2$이므로
$2m=-1$에서 $m=-\dfrac{1}{2}$
선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는
$\left(\dfrac{-2+0}{2},\ \dfrac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 2)$
따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{2}\{x-(-1)\}+2$
$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$
삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다. 또한 점 G가 y축 위에 있으므로 점 G는 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ 위에 있는 점 중에서 y축 위에 있는 점이다.
즉, $\mathrm{G}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$



이때 $\overline{\mathrm{MC}}:\overline{\mathrm{GC}}=3:2$이므로 점 C는 선분 MG를 $3:2$로 외분하는 점이다.
따라서
$a=\dfrac{3\times0-2\times(-1)}{3-2}=2$
$b=\dfrac{3\times\dfrac{3}{2}-2\times2}{3-2}=\dfrac{1}{2}$
이므로 $a+b=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

13. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.**

조건 (가)에서 $f(x)=a(x-1)^2+9$ (a는 $a<0$인 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$의 기울기가 2이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 기울기가 2이고 y절편이 9인 직선 $y=2x+9$가 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$a(x-1)^2+9=2x+9$

$ax^2-2(a+1)x+a=0$

이차방정식 $ax^2-2(a+1)x+a=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-a\times a$

$\quad=2a+1=0$

$a=-\frac{1}{2}$

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+9$

따라서

$f(2)=-\frac{1}{2}(2-1)^2+9$

$\quad=\frac{17}{2}$

14. [출제의도] 방정식과 부등식을 이용하여 충분조건에 관한 문제를 해결한다.

조건 p의 진리집합을 P라 하면

$x^2-4x-12=0$에서

$(x+2)(x-6)=0$

$x=-2$ 또는 $x=6$

이므로

$P=\{-2,\ 6\}$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면

조건 q에 대하여

$\sim q: |x-3|\le k$

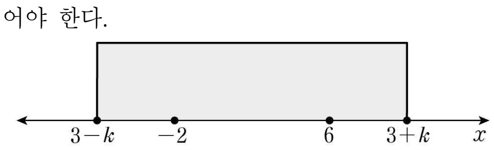
이고 k는 자연수이므로

$-k\le x-3\le k$

$3-k\le x\le 3+k$

즉, $Q^C=\{x\,|\,3-k\le x\le 3+k\}$

이때 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 한다.



즉, $3-k\le -2$이고 $6\le 3+k$이어야 한다.

$k\ge 5$이고 $k\ge 3$이므로

$k\ge 5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다.

15. [출제의도] 직선의 수직 조건과 대칭이동을 이용하여 직선의 방정식을 구하는 문제를 해결한다.

직선 OA의 기울기는 $\frac{3-0}{1-0}=3$이고 직선 OB의 기울기를 m이라 하면 두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

$3m=-1$

에서

$m=-\frac{1}{3}$

즉, $a\ne 0$이고 직선 OB의 기울기는

$\frac{5-0}{a-0}=\frac{5}{a}=-\frac{1}{3}$

$a=-15$

점 B의 좌표는 $(-15,\ 5)$

또한 두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$b=5,\ c=-15$

즉, A$(1,\ 3)$, C$(5,\ -15)$이므로 직선 AC의 방정식은

$y-3=\frac{-15-3}{5-1}\times(x-1)$

$y=-\frac{9}{2}x+\frac{15}{2}$

따라서 직선 AC의 y절편은 $\frac{15}{2}$이다.

16. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 x축과 만나는 점은

$0=\frac{k}{x-2}+1$에서 A$(2-k,\ 0)$

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 y축과 만나는 점은

$y=\frac{k}{0-2}+1$에서 B$\left(0,\ -\frac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$의 두 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=1$이므로 C$(2,\ 1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\frac{1-0}{2-(2-k)}=\frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2-0}$

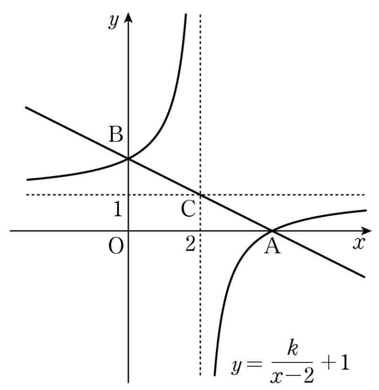
$\frac{1}{k}=\frac{k}{4}$

$k^2=4$

$k<0$이므로 $k=-2$

[다른 풀이]

유리함수 $y=\frac{p}{x-q}+r$ ($p\ne 0$, p, q, r는 상수)의 그래프는 두 점근선 $x=q$, $y=r$의 교점 $(q,\ r)$에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 $(q,\ r)$를 지나는 직선이 유리함수 $y=\frac{p}{x-q}+r$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면 두 교점은 항상 점 $(q,\ r)$에 대하여 대칭이다.



따라서 곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$ $(k<0)$의 두 점근선의 교점 C$(2,\ 1)$과 곡선 위의 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으려면 두 점 A, B는 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.

두 점 A, B가 각각 x축, y축 위의 점이므로 두 점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$로 놓을 수 있다. 점 C가 선분 AB의 중점이므로

$\frac{a+0}{2}=2,\ \frac{0+b}{2}=1$

즉, $a=4,\ b=2$

따라서 곡선 $y=\frac{k}{x-2}+1$이 점 A$(4,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{4-2}+1=\frac{k}{2}+1$

$k=-2$

17. [출제의도] 연립부등식을 이해하여 해를 구한다.

$a<0$이므로

$(x-a)^2<a^2$에서

$x^2-2ax+a^2<a^2$

$x(x-2a)<0$

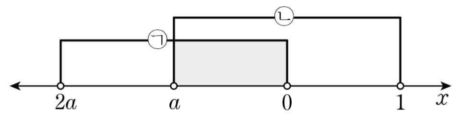
$2a<x<0$ …… ㉠

$x^2+a<(a+1)x$에서

$x^2-(a+1)x+a<0$

$(x-1)(x-a)<0$

$a<x<1$ …… ㉡



㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<0$

주어진 연립부등식의 해가 $b<x<b+1$이므로

$a=b,\ b+1=0$

에서 $a=-1,\ b=-1$

따라서 $a+b=(-1)+(-1)=-2$

18. [출제의도] 합의 법칙과 곱의 법칙, 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 과정을 추론한다.

A, B가 선택하는 과목 중에서 서로 일치하는 과목이 수학 과목인 경우와 과학 과목인 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) 서로 일치하는 과목이 수학 과목일 때

3개의 수학 과목 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

위의 각 경우에 대하여 나머지 6개의 과목 중에서 A가 2개를 선택하고, 나머지 4개의 과목 중에서 B가 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2=\boxed{90}$

이때의 경우의 수는

3×90

(ii) 서로 일치하는 과목이 과학 과목일 때

4개의 과학 과목 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

위의 각 경우에 대하여 나머지 6개의 과목 중에서 A, B는 수학 과목을 1개 이상 선택해야 하므로 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ii−1) A, B 모두 수학 과목 1개와 과학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는

$({}_3C_1\times{}_3C_1)\times({}_2C_1\times{}_2C_1)=36$

(ii−2) A, B 중 한 명은 수학 과목 2개를 선택하고, 다른 한 명은 수학 과목 1개와 과학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

A, B 중 수학 과목 2개를 선택할 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, 이 학생이 3개의 수학 과목 중 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$, 다른 한 명이 남아 있는 수학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_1C_1$, 이 학생이 과학 과목 중 공통으로 선택한 한 과목을 제외한 3개의 과목 중 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$이다.

따라서

${}_2C_1\times{}_3C_2\times({}_1C_1\times{}_3C_1)=\boxed{18}$

이때의 경우의 수는

$4\times(36+18)$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times 90+4\times(36+18)$이다.

따라서 $p=90,\ q=18$이므로

$p+q=108$

19. [출제의도] 조건이 참인 명제가 되도록 하는 자연수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^2-8x+n$이라 하자. $2\le x\le 5$인 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이려면 $2\le x\le 5$이고 $f(x)\ge 0$인 실수 x가 적어도 하나 존재해야 하므로 이 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=x^2-8x+n$

$\quad=(x-4)^2+n-16$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4는 $2\le x\le 5$에 속한다.

$f(2)=n-12$

$f(4)=n-16$

$f(5)=n-15$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $n-12$를 갖는다.

따라서

$f(2)=n-12\geq 0$

$n\geq 12$

이므로 자연수 n의 최솟값은 12이다.

20. [출제의도] 일대일대응과 합성함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

ㄱ. 함수 f는 일대일대응이고 집합 $X\cap Y=\{2,\ 3,\ 4\}$의 모든 원소 x에 대하여 $g(x)-f(x)=1$이므로 $f(x)=5$인 x가 존재하면 $g(x)=6$이 되어 모순이다.

그러므로 집합 $X\cap Y=\{2,\ 3,\ 4\}$의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\leq 4$이고

함수 f는 일대일대응이므로

$\{f(2),\ f(3),\ f(4)\}=\{2,\ 3,\ 4\}$

$g(x)=f(x)+1$에서

$\{g(2),\ g(3),\ g(4)\}=\{3,\ 4,\ 5\}$

따라서 함수 $g\circ f$의 치역은 Z이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\{f(2),\ f(3),\ f(4)\}=\{2,\ 3,\ 4\}$이고

함수 f는 일대일대응이므로

$f(1)=5$

따라서 $f^{-1}(5)=1$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $f(1)=5$이므로

$f(3)<g(2)<f(1)$에서 $f(3)<g(2)<5$ …… ㉠

(i) $g(2)=3$인 경우

$f(2)=g(2)-1=2$

함수 f는 일대일대응이므로

$f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$

가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(2)=4$인 경우

$f(2)=g(2)-1=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(3)<3$이므로 $f(3)=2$

함수 f는 일대일대응이므로 $f(4)=4$

따라서 $f(4)+g(2)=4+4=8$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

21. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

그림과 같이 의자의 위치와 좌석 번호를 나타내고 각 가로줄을 1열, 2열이라고 하자.

1열 →	11	12	13	14	15	16	17
2열 →			23	24	25		

규칙 (가)에 의해 A는 좌석 번호가 24 또는 25인 의자에 앉을 수 있고, B는 좌석 번호가 11 또는 12 또는 13 또는 14인 의자에 앉을 수 있다. 규칙 (나), (다)에 의해 어느 두 학생도 양옆 또는 앞뒤로 이웃하여 앉지 않는다.

5명의 학생이 앉을 수 있는 5개의 의자를 선택한 후 규칙 (가)에 의해 A, B가 앉고 남은 3개의 의자에 나머지 3명의 학생이 앉는 것으로 경우의 수를 구할 수 있다.

(i) A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의해 좌석 번호가 11, 13, 15, 17인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 규칙 (가)에 의해 좌석 번호가 11, 13인 2개의 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

이때의 경우의 수는

$2\times6=12$

(ii) A가 좌석 번호가 25인 의자를 선택할 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의해 좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나, 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나, 좌석 번호가 14인 의자, 좌석 번호가 23인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나를 선택하고(㉠) 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나를 선택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$

위의 각 경우에 대하여 B는 규칙 (가)에 의해 ㉠에서 선택된 의자와 좌석 번호가 14인 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

이때의 경우의 수는

$4\times2\times6=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+48=60$

22. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 계산한다.

$P(x)=x^3+x^2-2x$라 하자.

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$P(2)=2^3+2^2-2\times2=8$

[다른 풀이]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x+4 \\
\hline
x-2 & x^3+x^2-2x \\
 & x^3-2x^2 \\
\hline
 & 3x^2-2x \\
 & 3x^2-6x \\
\hline
 & 4x \\
 & 4x-8 \\
\hline
 & 8
\end{array}
$$

23. [출제의도] 역함수의 성질을 이해하여 무리함수의 역함수의 함숫값을 구한다.

$f^{-1}(7)=a$라 하면 $f(a)=7$이므로

$f(a)=\sqrt{a-2}+2=7$

$\sqrt{a-2}=5$

$a-2=25$에서 $a=27$

따라서 $f^{-1}(7)=27$

24. [출제의도] 순열을 이해하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

2개의 문자 e를 묶어 한 문자 E라고 생각하여 서로 다른 6개의 문자 c, h, E, r, u, p를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

위의 각 경우에 대하여 2개의 문자 e끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 1이므로 구하는 경우의 수는

$720\times1=720$

25. [출제의도] 다항식의 나눗셈과 항등식을 이해하여 다항식의 계수를 구한다.

다항식 $(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$을 x^2+4x+5로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)=(x^2+4x+5)Q(x)$

$(x-1)\{(x+2)(x+a)+b\}=(x^2+4x+5)Q(x)$

x^2+4x+5는 $x-1$을 인수로 갖지 않고, 좌변은 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$Q(x)=x-1$,

$x^2+4x+5=(x+2)(x+a)+b$

$\qquad\qquad=x^2+(2+a)x+2a+b$

양변의 계수를 비교하면

$4=2+a,\ 5=2a+b$

$a=2,\ b=1$

따라서 $a+b=3$

26. [출제의도] 인수분해를 이해하여 조건을 만족시키는 삼차방정식을 구한다.

방정식 $x^3-5x^2+(a+4)x-a=0$에 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -5 & a+4 & -a \\
 & & 1 & -4 & a \\
\hline
 & 1 & -4 & a & \boxed{0}
\end{array}
$$

$x^3-5x^2+(a+4)x-a=0$

$(x-1)(x^2-4x+a)=0$

에서

$x=1$ 또는 $x^2-4x+a=0$

이때 주어진 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 다음과 같다.

(i) $x^2-4x+a=0$이 1과 1이 아닌 실근을 갖는 경우

$x^2-4x+a=0$이 1을 근으로 가지므로

$1-4+a=0$

$a=3$

이때 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

즉, $x^3-5x^2+(a+4)x-a=0$의 실근은

$x=1$(중근) 또는 $x=3$

이므로 $a=3$은 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $x^2-4x+a=0$이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\times a=0$

$a=4$

이때 $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$에서

$x=2$

즉, $x^3-5x^2+(a+4)x-a=0$의 실근은

$x=1$ 또는 $x=2$(중근)

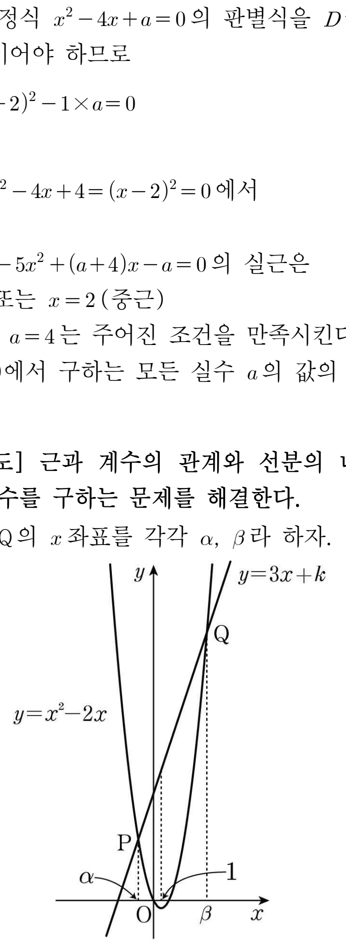
이므로 $a=4$는 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$3+4=7$

27. [출제의도] 근과 계수의 관계와 선분의 내분을 이용하여 상수를 구하는 문제를 해결한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하자.



곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3x+k$가 만나는 점이 P, Q이므로 두 식 $y=x^2-2x$, $y=3x+k$를 연립하여 얻은 방정식

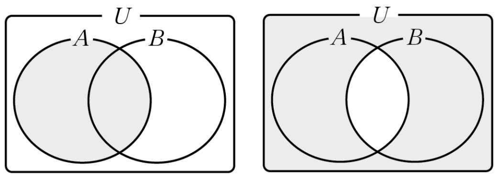
$x^2-2x=3x+k$

$x^2-5x-k=0$

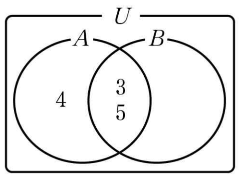
의 두 실근이 α, β이어야 한다.
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=5$ …… ㉠
$\alpha\beta=-k$ …… ㉡
선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로
$\frac{1\times\beta+2\times\alpha}{1+2}=1$
$2\alpha+\beta=3$ …… ㉢
㉠, ㉢을 연립하여 풀면
$\alpha=-2$, $\beta=7$
㉡에서 $-k=\alpha\beta=-14$
따라서 $k=14$

28. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 구하는 문제를 해결한다.

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로
$(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 4\}$
두 집합 A, $(A\cap B)^C$을 벤다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.



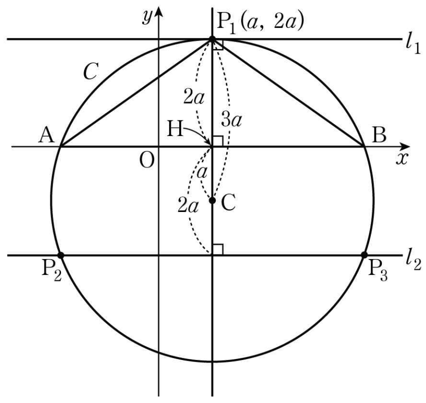
두 집합 A, $(A\cap B)^C$의 공통인 원소는 4이고, 두 그림에서 공통으로 색칠된 부분이 집합 $A-B$이므로
$A-B=\{4\}$이다.
또한
$A\cap B=A-(A-B)=\{3,\ 5\}$
$U=(A\cap B)\cup(A\cap B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$



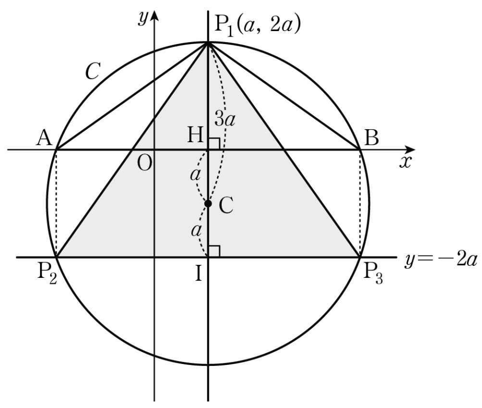
이때 $4\notin B$이고, $3\in B$, $5\in B$이다.
조건 (나)에서 집합의 분배법칙에 의하여
$$\begin{aligned}(A\cup X)-B&=(A\cup X)\cap B^C\\&=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)\\&=(A-B)\cup(X-B)\\&=\{4\}\cup(X-B)\end{aligned}$$
$4\in(A-B)$이므로 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이 되려면
집합 $X-B$가 공집합이 되거나 집합 $\{4\}$가 되어야 한다.
(i) $X=\{1\}$, $X=\{2\}$, $X=\{3\}$, $X=\{5\}$일 때,
집합 $X-B$는 공집합이어야 하므로
1, 2, 3, 5 모두 집합 B의 원소이어야 한다.
(ii) $X=\{4\}$일 때,
$X-B=\{4\}$이므로 집합 $\{4\}\cup(X-B)$는 집합 $\{4\}$가 되어 조건을 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이다.
따라서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은 $1+2+3+5=11$이다.

29. [출제의도] 조건을 만족시키는 원 위의 점의 위치를 추론한다.

원 $(x-a)^2+(y+a)^2=9a^2$을 C라 하자.
원 C의 방정식에 $y=0$을 대입하면
$(x-a)^2+(0+a)^2=9a^2$
에서
$(x-a)^2=8a^2$
$x=a\pm2\sqrt{2}a$
이므로 원 C와 x축이 만나는 두 점 A, B 사이의 거리는
$\overline{\text{AB}}=(a+2\sqrt{2}a)-(a-2\sqrt{2}a)=4\sqrt{2}a$
한편, 원 C의 중심을 C라 하면 C$(a,\ -a)$이다.
삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 할 때 높이를 h라 하고, 직선 AB에 평행하면서 직선 AB와의 거리가 h인 두 직선을 y절편이 큰 것부터 차례로 l_1, l_2라 하자. 삼각형 ABP의 넓이가 $8\sqrt{2}$가 되도록 하는 원 C 위의 점 P의 개수가 3이 되려면 원과 직선 l_1 또는 직선 l_2가 만나는 점의 개수가 3이어야 한다.
이때 선분 AB는 x축 위에 있고 점 C의 y좌표가 음수이므로 직선 l_1은 원 C와 한 점에서 만나고, 직선 l_2는 원 C와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 직선 l_1과 원 C가 만나는 점을 P_1, 직선 l_2와 원 C가 만나는 점을 P_2, P_3이라 하자.



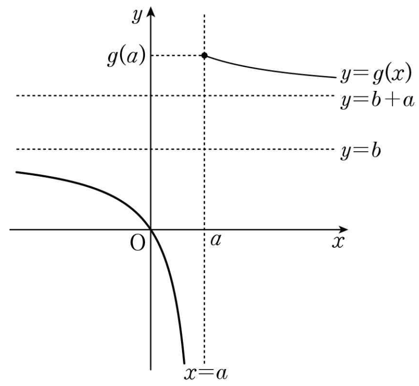
점 P_1의 좌표는 $(a,\ 2a)$이므로 점 P_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\text{P}_1\text{H}}=2a$
이때 삼각형 ABP_1의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{P}_1\text{H}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}a\times2a=4\sqrt{2}a^2$
이므로
$4\sqrt{2}a^2=8\sqrt{2}$에서
$a^2=2$
$a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$



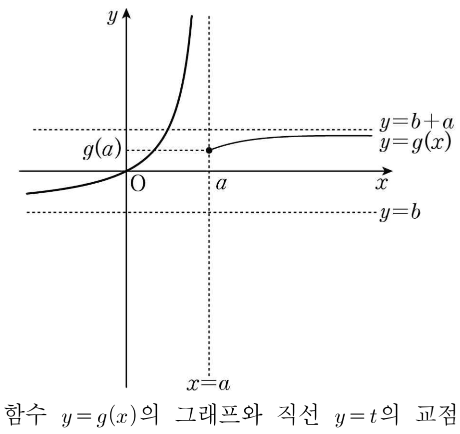
점 P가 될 수 있는 나머지 두 점 P_2, P_3에 대하여 점 C에서 선분 P_2P_3에 내린 수선의 발을 I라 하자.
삼각형 ABP_2와 삼각형 ABP_3의 넓이가 모두 $8\sqrt{2}$이려면 $\overline{\text{HI}}=\overline{\text{HP}_1}=2a$이어야 한다.
이때 $\overline{\text{CH}}=\overline{\text{CI}}=a$이므로 $\overline{\text{P}_2\text{P}_3}=\overline{\text{AB}}=4\sqrt{2}a$
삼각형 $\text{P}_1\text{P}_2\text{P}_3$의 넓이 S는
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\overline{\text{P}_2\text{P}_3}\times\overline{\text{P}_1\text{I}}\\&=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}a\times4a\\&=8\sqrt{2}a^2\\&=16\sqrt{2}\end{aligned}$$
따라서 $a\times S=\sqrt{2}\times16\sqrt{2}=32$

30. [출제의도] 유리함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

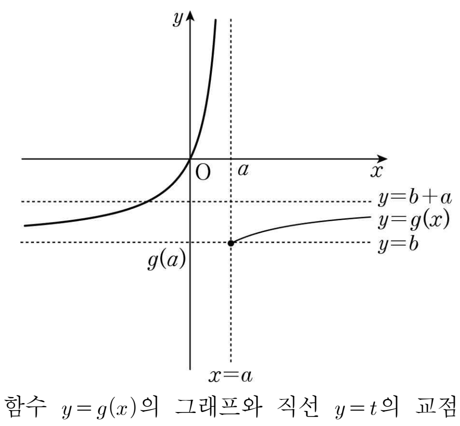
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{bx}{x-a}\\&=\frac{b(x-a)+ab}{x-a}\\&=\frac{ab}{x-a}+b\end{aligned}$$
에서 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이다.
이때 곡선 $y=f(x+2a)+a$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=f(x+2a)+a$의 점근선의 방정식은 $x=a-2a=-a$, $y=b+a$, 즉 $x=-a$와 $y=b+a$이다.
이제
$\{t\mid h(t)=1\}=\{t\mid-9\le t\le-8\}\cup\{t\mid t\ge k\}$ …… ㉠
를 만족시키는 경우를 찾아보자.
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 $h(t)$이므로 집합 $\{t\mid h(t)=1\}$은 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 집합을 나타낸다.
따라서 ㉠은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $-9\le t\le-8$ 또는 $t\ge k$임을 나타낸다.
(i) $b>0$인 경우
$ab>0$, $b+a>b>0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는
$t<b$ 또는 $b+a<t\le g(a)$
이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
(ii) $b<0$인 경우
$ab<0$이고 $b<b+a$이다.
이때
$g(a)=f(3a)+a=\frac{3}{2}b+a$ …… ㉡
이므로 다음의 경우로 나누어 살펴보자.
(ii-1) $b<g(a)$인 경우



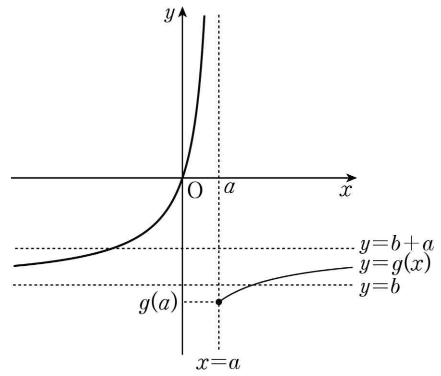
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $b<t<g(a)$ 또는 $t\ge b+a$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
(ii-2) $b=g(a)$인 경우



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의

개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $t=g(a)$ 또는 $t \ge b+a$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii-3) $b > g(a)$ 인 경우



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는

$g(a) \le t \le b$ 또는 $t \ge b+a$

이다.

따라서 ㉠을 만족시키기 위해서는

$g(a)=-9$

$b=-8$

$b+a=k$

이어야 한다.

㉡에서

$$g(a)=\frac{3}{2}\times(-8)+a$$

$$=-12+a=-9$$

이므로 $a=3$

$k=b+a$

$=(-8)+3$

$=-5$

(i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-8x}{x-3} & (x<3)\\[2ex] \dfrac{-8(x+6)}{x+3}+3 & (x \ge 3)\end{cases}$$

즉, $$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{24}{x-3}-8 & (x<3)\\[2ex] -\dfrac{24}{x+3}-5 & (x \ge 3)\end{cases}$$

$g(-k)=g(5)$

$$=-\frac{24}{5+3}-5$$

$=-8$

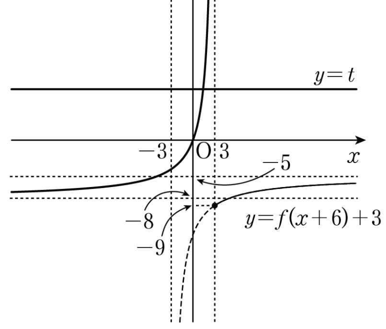
따라서 $a\times b\times g(-k)=3\times(-8)\times(-8)=192$

[보충설명]

함수 $f(x)=\dfrac{-8x}{x-3}$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<3)\\ f(x+6)+3 & (x \ge 3)\end{cases}$$

의 그래프와 직선 $y=t$ 는 그림과 같다.



이때 함수 $h(t)$ 는

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<-9)\\ 1 & (-9 \le t \le -8 \text{ 또는 } t \ge -5)\\ 2 & (-8<t<-5)\end{cases}$$

이다.