2021학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	②	**3**	③	**4**	⑤	**5**	②
6	③	**7**	①	**8**	⑤	**9**	②	**10**	⑤
11	①	**12**	④	**13**	①	**14**	①	**15**	③
16	⑤	**17**	②	**18**	④	**19**	③	**20**	⑤
21	③	**22**	3	**23**	4	**24**	11	**25**	2
26	7	**27**	29	**28**	18	**29**	71	**30**	44

1. [출제의도] 삼각함수의 값 계산하기

$\tan\frac{10}{3}\pi=\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 18-\log_3 2=\log_3\frac{18}{2}=\log_3 9=2$

3. [출제의도] 도함수 이해하기

$f'(x)=3x^2+3$에서 $f'(1)=3+3=6$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 0-}f(x)\times\lim_{x\to 1+}f(x)=2\times 1=2$

5. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7}\geq 9$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-7}\geq\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$에서

밑 $\frac{1}{3}$이 1보다 작으므로 $x-7\leq -2$, $x\leq 5$

따라서 모든 자연수 x의 개수는 5

6. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k-1)&=\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}1\\&=5+2\times 20-1\times 10\\&=35\end{aligned}$$

7. [출제의도] 평균변화율 이해하기

함수 $f(x)=x^3+x^2-2x$에서 x의 값이 0에서 k까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{(k^3+k^2-2k)-0}{k-0}=k^2+k-2$

$k^2+k-2=10$

$(k+4)(k-3)=0$에서 $k=-4$ 또는 $k=3$

따라서 양수 k의 값은 3

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_2 3\times\log_a 4=\frac{1}{\log_3 2}\times\frac{2\log_3 2}{\log_3 a}=\frac{2}{\log_3 a}$이므로

$\frac{2}{\log_3 a}=\frac{1}{2}$에서 $\log_3 a=4$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

닫힌구간 $[1,3]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a}+1$은

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 5를 갖는다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-a}+1=5$에서 $2^{a-1}=2^2$, $a=3$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값을 가지므로

구하는 최솟값은 $f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3}+1=2$

10. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin\theta=\frac{-3}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\sin\theta=\cos\theta-\sin\theta=\frac{7}{5}$

11. [출제의도] 삼각함수 이해하기

함수 $f(x)=4\cos\frac{\pi}{a}x+b$의 주기가 4이므로

$\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|}=4$

$a>0$이므로 $a=2$

함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이므로

$-4+b=-1$에서 $b=3$

따라서 $a+b=5$

12. [출제의도] 미분계수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서

$1-a+2b=-3+b$

$b=a-4$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^3-ax+2b)-(-3+b)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{x^3-ax+a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+1-a)\\&=3-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1+}\frac{(-3x+b)-(-3+b)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\frac{-3x+3}{x-1}\\&=-3\end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$3-a=-3$에서 $a=6$이고 $b=2$

따라서 $a\times b=12$

13. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

(i) 부등식 $\frac{1}{2}x^2+2x<f(x)<x^2+2x$에서

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)=\lim_{x\to 0}(x^2+2x)=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

(ii) $x>0$일 때, $\frac{1}{2}x+2<\frac{f(x)}{x}<x+2$이고

$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=\lim_{x\to 0+}(x+2)=2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=2$

$x<0$일 때, $x+2<\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{2}x+2$이고

$\lim_{x\to 0-}(x+2)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=2$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=2$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$

(i), (ii)에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+5x}{2f(x)-x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+5}{2\times\frac{f(x)}{x}-1}\\&=\frac{0+5}{2\times 2-1}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

14. [출제의도] 등비수열의 합을 활용하여 문제해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$r=1$이면

$\frac{S_6}{S_5-S_2}=\frac{3\times 6}{3\times 5-3\times 2}=2$, $\frac{a_2}{2}=\frac{3}{2}$에서

$\frac{S_6}{S_5-S_2}=\frac{a_2}{2}$가 성립하지 않으므로 $r\neq 1$

$$\begin{aligned}\frac{S_6}{S_5-S_2}&=\frac{\frac{3(r^6-1)}{r-1}}{\frac{3(r^5-1)}{r-1}-\frac{3(r^2-1)}{r-1}}\\&=\frac{r^6-1}{r^5-r^2}\\&=\frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^2(r^3-1)}\\&=\frac{r^3+1}{r^2}\end{aligned}$$

$\frac{a_2}{2}=\frac{3r}{2}$이므로

$\frac{r^3+1}{r^2}=\frac{3r}{2}$에서 $2(r^3+1)=3r^3$, $r^3=2$

따라서 $a_4=ar^3=3\times 2=6$

15. [출제의도] 함수의 곱의 미분법 이해하기

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a+2}{x-1}=4$이고 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-a+2\}=0$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=a-2$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+a-2}{x-1}=a$이고 $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}\{g(x)+a-2\}=0$

함수 $g(x)$는 다항함수이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)=-a+2$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+a-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=a$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(1)g(1)+f(1)g'(1)&=4\times(-a+2)+(a-2)\times a\\&=a^2-6a+8=-1\end{aligned}$$

$a^2-6a+9=0$에서 $(a-3)^2=0$

따라서 $a=3$

16. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned}\sin^4\theta+\cos^4\theta&=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{23}{32}\end{aligned}$$

에서 $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{9}{64}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{4}$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

17. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 추론하기

$2\le n\le 5$일 때, $2^{n-3}-8<0$이므로

$f(n)=\begin{cases}1 & (n\text{은 홀수})\\ 0 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$n=6$일 때, $2^{6-3}-8=0$이므로 $f(6)=1$

$\sum_{n=2}^{6}f(n)=0+1+0+1+1=3<15$이므로 $m\ge 7$

$n\ge 7$일 때, $2^{n-3}-8>0$이므로

$f(n)=\begin{cases}1 & (n\text{은 홀수})\\ 2 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

그러므로 $f(7)=1$, $f(8)=2$, $f(9)=1$, $f(10)=2$, $f(11)=1$, $f(12)=2$, $f(13)=1$, $f(14)=2$에서

$\sum_{n=2}^{14}f(n)=\sum_{n=2}^{6}f(n)+\sum_{n=7}^{14}f(n)=3+12=15$

한편 $l\ge 15$인 자연수 l에 대하여 $f(l)\ge 1$이므로

$\sum_{n=2}^{l}f(n)>15$

따라서 $m=14$

18. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(\sqrt{2t},\,2t)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2},\,2t)$, $\mathrm{C}(\sqrt{t+1},\,t+1)$,

$\mathrm{D}\left(\sqrt{\frac{t+1}{t}},\,t+1\right)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}-\sqrt{2t}=\sqrt{2}(1-\sqrt{t})$

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\frac{t+1}{t}}-\sqrt{t+1}=\sqrt{\frac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=(t+1)-2t=1-t$이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{CH}}$

$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}(1-\sqrt{t})+\sqrt{\frac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})\right\}(1-t)$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}\right)(1-\sqrt{t})(1-t)$

따라서

$\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}=\lim_{t\to1-}\frac{1}{2(1+\sqrt{t})}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}\right)$

$=\frac{1}{4}\times 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

19. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 추론하기

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)a_k$라 하자.

(ⅰ) $T_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)a_1=1$이므로 $a_1=\boxed{2}$

(ⅱ) 2 이상의 자연수 n에 대하여

$T_n=n^2$에서

$T_n-T_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$이고

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n+1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{\boxed{n+1}}\times\sum_{k=1}^{n}a_k$

T_n-T_{n-1}

$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)$

$=\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\frac{1}{\boxed{n(n+1)}}\times\sum_{k=1}^{n}a_k$

$\frac{1}{\boxed{n(n+1)}}\times\sum_{k=1}^{n}a_k=2n-1$이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=(2n-1)\times\left(\boxed{n(n+1)}\right)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=(2n-1)\times\left(\boxed{n(n+1)}\right)$이다.

따라서 $p=2$, $f(n)=n+1$, $g(n)=n(n+1)$이므로

$f(2p)\times g(3p)=f(4)\times g(6)=5\times 42=210$

20. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(\log_2 a,\,a)$,

$\mathrm{B}\left(\log_{\frac{1}{4}}a,\,a\right)$, $\mathrm{C}\left(\log_2\frac{1}{b},\,\frac{1}{b}\right)$, $\mathrm{D}\left(\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{b},\,\frac{1}{b}\right)$이다.

ㄱ. $a=b$이면

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 a-\log_{\frac{1}{4}}a=\frac{3}{2}\log_2 a$

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{a}-\log_2\frac{1}{a}=\frac{3}{2}\log_2 a$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$ (참)

ㄴ. $m_1=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 a-\log_2\frac{1}{b}}=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}$이므로

$m_2=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_{\frac{1}{4}}a-\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{b}}=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_{\frac{1}{4}}ab}$

$=-2\times\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}$

$=-2m_1$

그러므로 $2m_1+m_2=0$ (참)

ㄷ. 직선 AC의 기울기를 $m\,(m>0)$이라 하면

직선 BD의 기울기는 $-2m$이고,

직선 AC와 직선 BD가 서로 수직이므로

$m\times(-2m)=-1$, $m^2=\frac{1}{2}$에서 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a-\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log_2 ab$ ⋯ ㉠

직선 AD의 기울기는

$\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 a-\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{b}}=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 a-\frac{1}{2}\log_2 b}=2\sqrt{2}$

이므로 $a-\frac{1}{b}=\sqrt{2}\log_2\frac{a^2}{b}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\frac{\sqrt{2}}{2}\log_2 ab=\sqrt{2}\log_2\frac{a^2}{b}$

$\log_2 ab=\log_2\frac{a^4}{b^2}$

$a^3=b^3$에서 $a=b$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$

사각형 ABCD는 평행사변형이고

두 대각선 AC, BD가 서로 수직이므로

사각형 ABCD는 마름모이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가), (나)에 의해

$a_2=1-a_1$

$a_3=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{1-a_1}$

$a_4=1-a_3=-\frac{a_1}{1-a_1}$

$a_5=\frac{1}{a_4}=1-\frac{1}{a_1}$

$a_6=1-a_5=\frac{1}{a_1}$

$a_7=\frac{1}{a_6}=a_1$

$a_8=1-a_7=1-a_1=a_2$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+6}=a_n$을 만족시킨다.

$|a_n|-a_n=\begin{cases}0 & (a_n\ge 0)\\ -2a_n & (a_n<0)\end{cases}$이므로

$\sum_{n=1}^{14}(|a_n|-a_n)=10$이 되기 위해서는

a_1, a_2, $\cdots$, a_{14} 중에서 음수인 모든 항의 합이 -5이어야 한다.

(ⅰ) $0<a_1<1$일 때

$a_2>0$, $a_3>0$, $a_4<0$, $a_5<0$, $a_6>0$

이므로

$a_4+a_5+a_{10}+a_{11}=-5$

$a_4=s$라 하면

$a_4+a_5+a_{10}+a_{11}=s+\frac{1}{s}+s+\frac{1}{s}$

$=2s+\frac{2}{s}=-5$

$2s^2+5s+2=0$, $(2s+1)(s+2)=0$에서

$s=-\frac{1}{2}$ 또는 $s=-2$

$s=-\frac{a_1}{1-a_1}$이므로 $a_1=\frac{1}{3}$ 또는 $a_1=\frac{2}{3}$

(ⅱ) $a_1>1$일 때

$a_2<0$, $a_3<0$, $a_4>0$, $a_5>0$, $a_6>0$

이므로

$a_2+a_3+a_8+a_9+a_{14}=-5$

$a_2=t$라 하면

$a_2+a_3+a_8+a_9+a_{14}=t+\frac{1}{t}+t+\frac{1}{t}+t$

$=3t+\frac{2}{t}=-5$

$3t^2+5t+2=0$, $(3t+2)(t+1)=0$에서

$t=-\frac{2}{3}$ 또는 $t=-1$

$t=1-a_1$이므로 $a_1=\frac{5}{3}$ 또는 $a_1=2$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}+2=\frac{14}{3}$

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1}{3x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}}=\frac{9+0}{3+0}=3$$

23. [출제의도] 등비중항 이해하기

$4\sqrt{2}$는 $\frac{a}{3}$와 $6a$의 등비중항이므로

$\frac{a}{3}\times 6a=(4\sqrt{2})^2$에서 $a^2=16$

따라서 양수 a의 값은 4

24. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-3$, $x-10$은 로그의 진수이므로

$x-3>0$, $x-10>0$에서 $x>10$

방정식 $2\log_4(x-3)+\log_2(x-10)=3$에서

$\log_2(x-3)+\log_2(x-10)=\log_2 8$

$\log_2(x-3)(x-10)=\log_2 8$

$(x-3)(x-10)=8$

$(x-2)(x-11)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=11$

따라서 $x>10$이므로 $x=11$

25. [출제의도] 거듭제곱의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2-ak)=\sum_{k=1}^{10}k^2-a\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}-a\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=385-55a=275$$

에서 $55a=110$

따라서 $a=2$

26. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$(2a+6)\cos x-a\sin^2 x+a+12<0$

$(2a+6)\cos x-a(1-\cos^2 x)+a+12<0$

$a\cos^2 x+(2a+6)\cos x+12<0$

$(a\cos x+6)(\cos x+2)<0$에서

$\cos x+2>0$이므로 $a\cos x+6<0$

$a>0$이므로 $\cos x<-\frac{6}{a}$

$0\le x<2\pi$에서 부등식 $\cos x<-\frac{6}{a}$의 해가

존재하기 위해서는 $-\frac{6}{a}>-1$이어야 한다.

따라서 $a>6$이며 자연수 a의 최솟값은 7

27. [출제의도] 등차수열의 합을 활용하여 문제해결하기

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=2$

$$\sum_{k=1}^{m}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{m}(a_k+m)=\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1}-a_k-m)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(2-m)$$
$$=m(2-m)$$

$2m-m^2=240-360$, $m^2-2m-120=0$

$(m+10)(m-12)=0$에서 $m=-10$ 또는 $m=12$

m은 자연수이므로 $m=12$

$$\sum_{k=1}^{12}(a_k+12)=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{12}12$$
$$=\frac{12(2a_1+11\times2)}{2}+12\times12=360$$

$6(2a_1+22)+144=360$에서 $a_1=7$

따라서 $a_m=a_{12}=7+11\times2=29$

28. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$이고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=0$ ⋯ ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\alpha\ (\alpha\ne1)$이고

$\lim_{x\to2}(x-2)f'(x)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=0$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x+a)$ (k, a는 상수, $k\ne0$)

$f'(x)=k\{(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)\}$

$a\ne-2$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\lim_{x\to2}\frac{k(x-1)(x+a)}{f'(x)}$$
$$=\frac{2+a}{2+a}$$
$$=1\ne\alpha$$

그러므로 $a=-2$이며 $f(x)=k(x-1)(x-2)^2$

$$\alpha=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{k(x-1)(x-2)^2}{(x-2)\{k(x-2)^2+2k(x-1)(x-2)\}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{(x-2)+2(x-1)}$$
$$=\frac{1}{0+2\times1}=\frac{1}{2}$$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$이므로 $k=3$

따라서 $\alpha\times f(4)=\frac{1}{2}\times(3\times3\times2^2)=18$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

조건 (가)에 의해

$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$a=\frac{\sqrt{15}}{2}R$ ⋯ ㉠

조건 (나)에 의해

$b+c=2R(\sin B+\sin C)=2R\times\frac{9}{8}=\frac{9}{4}R$ ⋯ ㉡

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$이므로

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$에서 $bc=8$ ⋯ ㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc$$
$$=(b+c)^2-\frac{3}{2}bc$$

㉠, ㉡, ㉢에 의해

$\left(\frac{\sqrt{15}}{2}R\right)^2=\left(\frac{9}{4}R\right)^2-\frac{3}{2}\times8$에서 $R^2=\frac{64}{7}$이므로

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{64}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=64$이며 $p+q=71$

30. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$이므로 이차함수 $y=f(x)$의

그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ -a^2+b)$

$f(x+a)=x^2-a^2+b$이므로 이차함수 $y=f(x+a)$의

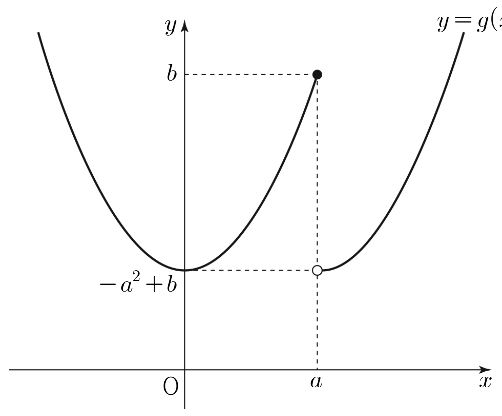
그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -a^2+b)$이고

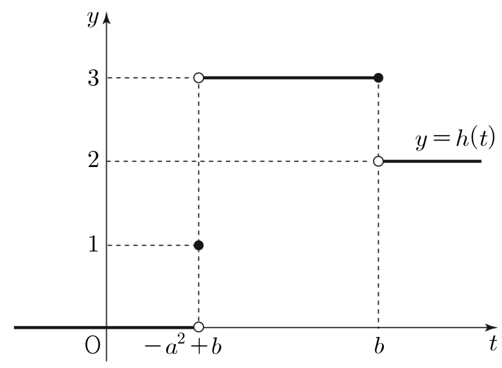
$g(a)=f(2a)=b$

(ⅰ) $a^2-b\le0$일 때

$-a^2+b\ge0$이므로

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>a^2$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=a^2$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\ne b)\\ 1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<a^2$일 때

$\lim_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_1\ (\alpha_1=2,\ 3)$이므로

$\lim_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

한편 $\lim_{t\to b-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim_{t\to b-}h(t-k)=\beta_1\ (\beta_1=2,\ 3)$이므로

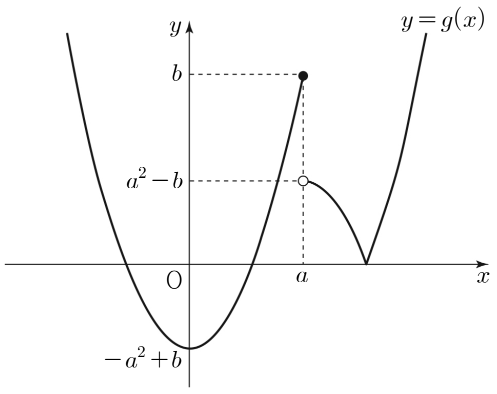
$\lim_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\ne0$

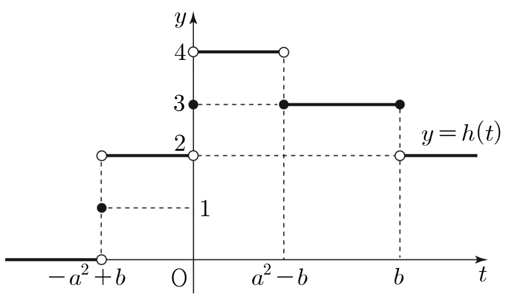
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(a), (b), (c)에 의해 $k>a^2$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅱ) $0<a^2-b<b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>a^2$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=a^2$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\neq b)\\ 1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<a^2$일 때

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_2(\alpha_2=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

한편 $\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim\limits_{t\to b-}h(t-k)=\beta_2(\beta_2=2,\ 3,\ 4)$이므로

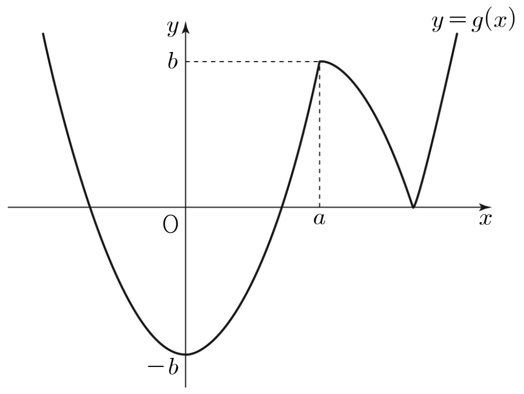
$\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$

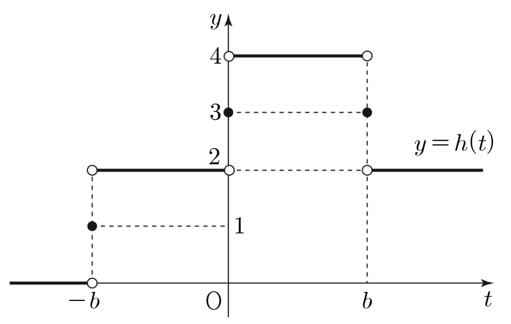
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(a), (b), (c)에 의해 $k>a^2$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(iii) $a^2-b=b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>2b$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=2b$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\neq b)\\ 1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<2b$일 때

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_3(\alpha_3=2,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이다.

한편 $\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}=2$이고

$\lim\limits_{t\to b-}h(t-k)=\beta_3(\beta_3=2,\ 4)$이므로

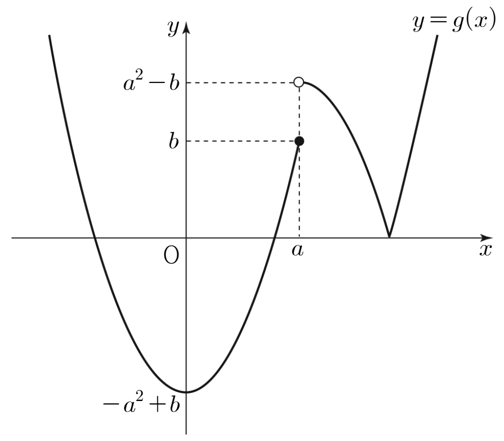
$\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$이다.

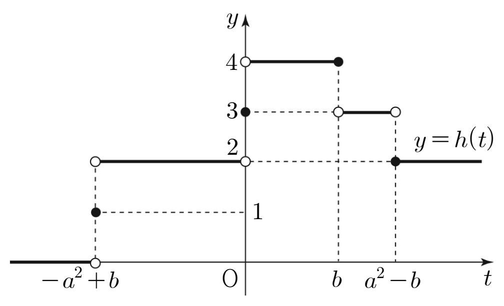
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(a), (b), (c)에 의해 $k>2b$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(iv) $a^2-b>b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t\geq a^2-b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k\geq 2(a^2-b)$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k<2(a^2-b)$일 때

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)+}h(t-k)=\alpha_4(\alpha_4=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이다.

한편 $\lim\limits_{t\to(a^2-b)-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)-}h(t-k)=\beta_4(\beta_4=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to(a^2-b)-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$이다.

그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=a^2-b$에서 불연속이다.

(a), (b)에 의해 $k\geq 2(a^2-b)$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 경우는 (iv)이므로

$2(a^2-b)=24$

$a^2-b=12$에서

$b=a^2-12>0$이므로 $a^2>12$

$a^2-b>b$에서 $a^2-2b=a^2-2(a^2-12)$

$=24-a^2>0$

이므로 $a^2<24$

그러므로 $12<a^2<24$

a는 자연수이므로 $a=4$, $b=4$

따라서 $10a+b=44$