2021학년도 대학수학능력시험

수학영역 나형 정답 및 풀이

*수정일 : 20.12.04(금)

01.④	02.④	03.③	04.②	05.②
06.①	07.⑤	08.②	09.①	10.⑤
11.④	12.②	13.⑤	14.③	15.③
16.②	17.①	18.③	19.④	20.④
21.③	22. 24	23. 12	24. 2	25.15
26.6	27.36	28.21	29.587	30.39

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^0 \times 8^{\frac{2}{3}} = 1 \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

정답 ④

2. 출제의도 : 등비수열의 뜻을 알고 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_3}{a_2} = r = 2$이고,

첫째항이 $\frac{1}{8}$이므로

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = \frac{1}{8} \times 2^{n-1}$

이다.

따라서 $a_5 = \frac{1}{8} \times 2^{5-1} = 2$

정답 ④

3. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} (x+4)$

$= 2+4 = 6$

정답 ③

4. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 알고 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$-4+3 \leq 4\cos x+3 \leq 4+3$ 이다.

따라서 $-1 \leq 4\cos x+3 \leq 7$

이므로 함수 $f(x) = 4\cos x + 3$의 최댓값은 7이다.

정답 ②

5. 출제의도 : 두 사건이 서로 독립일 조건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$

이고

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

이다.

주어진 조건에서 $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$

따라서

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{9}$

에서

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3}$

정답 ②

6. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x) = 4x^3 + 3$ 이므로

$f'(2) = 32 + 3 = 35$

정답 ①

7. **출제의도** : 지수부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$에서

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$

$-2x < 21 - 4x$

$2x < 21$

$x < \dfrac{21}{2}$

따라서, 자연수 x는 1, 2, $\cdots$, 10이므로 그 개수는 10이다.

정답 ⑤

8. **출제의도** : 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 수를 곱해서 4가 나오는 경우는 1, 1, 4 또는 1, 2, 2이므로

(i) 1, 1, 4인 경우의 확률

$3 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{72}$

(ii) 1, 2, 2인 경우의 확률

$3 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{1}{72}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{72} = \dfrac{1}{36}$

정답 ②

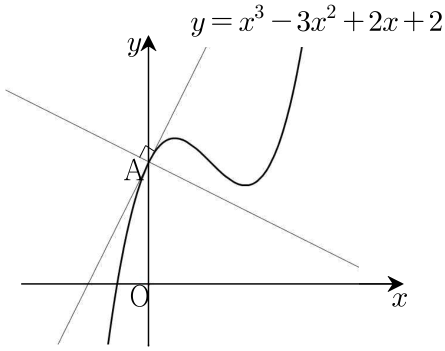
9. **출제의도** : 미분을 이용하여 접선의 x절편을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$에서

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

따라서 점 $\mathrm{A}(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.



따라서 점 $\mathrm{A}(0, 2)$를 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 0)$

즉, $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

이고 이 직선의 x절편은

$0 = -\dfrac{1}{2}x + 2$

에서

$x=4$

정답 ①

10. **출제의도** : 시그마의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k+4)$

$=2\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}b_k+\sum_{k=1}^{5}4$

$=2\times8-9+4\times5$

$=27$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 표본평균의 분포를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=20,\ \sigma(X)=5$

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$

$=\mathrm{E}(X)+\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}$

$=20+\dfrac{5}{4}=\dfrac{85}{4}$

정답 ④

12. **출제의도** : 시그마의 정의를 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$

$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots$

$+(a_n-a_{n+1})$

$=a_1-a_{n+1}=-n^2+n$

$1-a_{n+1}=-n^2+n$

$a_{n+1}=n^2-n+1$

따라서,

$a_{11}=10^2-10+1=91$

정답 ②

13. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1)$은 1, 2, 3, 4 중 어느 것이 되어도 되므로 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이다.

$f(2)\le f(3)\le f(4)$를 만족시키도록 $f(2),\ f(3),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음, 크지 않은 수부터 순서대로 $f(2),\ f(3),\ f(4)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3$

$=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\times20=80$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$k>3$ 이므로

$\int_{3}^{k}|2t-6|dt$

$= \int_3^k (2t-6)dt$

$= [t^2-6t]_3^k$

$= (k^2-6k)-(9-18)$

$= k^2-6k+9=25$

$k^2-6k-16=0$

$(k-8)(k+2)=0$

따라서 $k>3$ 이므로 $k=8$ 이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

원 모양의 탁자에 우선 A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2!=2$

C가 나머지 4개의 자리 중 B와 이웃하지 않는 3개의 자리에 앉는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

나머지 3명이 나머지 3개의 자리에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times3\times6=36$

정답 ③

다른풀이 :

6명의 학생을 A, B, C, D, E, F라 하자.

조건 (가)에서 A와 B는 이웃하므로 A와 B를 묶어 X라 하면 X, C, D, E, F를 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 중에서 C가 B와 이웃하여 둘러앉는 경우는 A, B, C를 이 순서대로 묶어 Y라 놓고 Y, D, E, F를 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 A와 B는 이웃하고 B와 C는 이웃하지 않는 경우는 A, B, C와 C, B, A의 두 가지 경우가 있으므로 구하는 경우의 수는

$2\times(24-6)=36$

16. 출제의도 : 삼각함수로 표현된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$이므로 주어진 방정식은

$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$

이때, $0\le x<4\pi$ 이므로

$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ 2\pi+\frac{\pi}{6},\ 2\pi+\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+2\pi+\frac{\pi}{6}+2\pi+\frac{5}{6}\pi=6\pi$

정답 ②

17. 출제의도 : 극한의 성질과 미분계수의 정의 및 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=0$이다.

이때 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+g(0)=0$ ⋯ ㉠

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$$

$=f'(0)+g'(0)=3$ ⋯ ㉡

이다.

또, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이므로

$f(0)+3=0$에서

$f(0)=-3$

따라서 ㉠에서

$g(0)=3$

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$$

$$=\frac{f'(0)}{g(0)}$$

$$=\frac{f'(0)}{3}$$

$=2$

에서 $f'(0)=6$

따라서 ㉡에서

$g'(0)=-3$

그러므로 곱의 미분법에 의해

$h'(0)$

$=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times 3+(-3)\times(-3)=27$

정답 ①

18. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

점 A의 x좌표는

$\log_a x=1$

$x=a$

이므로 $\mathrm{A}(a,\ 1)$

또, 점 B의 x좌표는

$\log_{4a} x=1$

$x=4a$

이므로 $\mathrm{B}(4a,\ 1)$

그러므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times 4a-4\times a}{1-4},\ \frac{1\times 1-4\times 1}{1-4}\right)$$

$(0,\ 1)$ <참>

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x축과 평행하므로 두 점 A, D의 x좌표는 같아야 한다.

한편 점 D의 x좌표는

$\log_{4a} x=-1$

$$x=\frac{1}{4a}$$

이므로 $\mathrm{D}\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$

이때 $\mathrm{A}(a,\ 1)$이므로

$$a=\frac{1}{4a}$$

$$a^2=\frac{1}{4}$$

이때 $\frac{1}{4}<a<1$이므로

$a=\frac{1}{2}$ <참>

ㄷ.

$\overline{AB} = 4a - a = 3a$

한편, 점 C의 x좌표는

$\log_a x = -1$

$x = \frac{1}{a}$

이므로

$C\left(\frac{1}{a},\ -1\right)$

그러므로

$\overline{CD} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = \frac{3}{4a}$

한편, $\overline{AB} < \overline{CD}$이면

$3a < \frac{3}{4a}$

$a^2 < \frac{1}{4}$

이때 $\frac{1}{4} < a < 1$이므로

$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ <거짓>

정답 ③

19. **출제의도** : 정규분포의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 정규분포 $N(8,\ 3^2)$을 따르고 확률변수 Y가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$P(4 \le X \le 8) + P(Y \ge 8)$

$= P\left(\frac{4-8}{3} \le \frac{X-8}{3} \le \frac{8-8}{3}\right)$

$\quad + P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$= P\left(-\frac{4}{3} \le Z \le 0\right) + P\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$= P\left(0 \le Z \le \frac{4}{3}\right) + P\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$= \frac{1}{2}$

그러므로

$\frac{8-m}{\sigma} = \frac{4}{3}$

$m = 8 - \frac{4}{3}\sigma$

따라서,

$P\left(Y \le 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$

$= P\left(\frac{Y - \left(8 - \frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma} \le \frac{8 + \frac{2\sigma}{3} - \left(8 - \frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)$

$= P(Z \le 2)$

$= \frac{1}{2} + P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 + 0.4772$

$= 0.9772$

정답 ④

20. **출제의도** : 정적분으로 표현된 함수가 오직 하나의 극값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g'(x) = 2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x)$

$\quad = 2x\int_0^x f(t)dt$

이고

$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)\ \ (a > 1)$

이므로

$g'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 변하는 값이 오직 한 개만 존재해야 한다.

이때, $g'(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 방정식 $\int_0^x f(t)dt=0$의 실근이다.

(i) $\int_0^{\alpha} f(t)dt=0$을 만족시키는 실수 α $(\alpha< -1)$가 반드시 존재하고, $x=\alpha$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극값을 갖는다.

(ii) $\int_0^0 f(t)dt=0$이고,

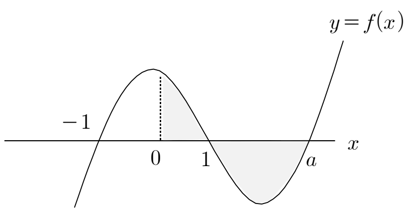
$-1<x<0$인 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt<0$,

$0<x<1$인 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt>0$이므로

$x=0$의 좌우에서 $\int_0^x f(t)dt$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 항상 0 이상이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서, a가 최대가 되는 조건을 만족시키는 경우는 그림과 같이 색칠된 두 부분의 넓이가 같을 때이다.



즉, $\int_0^a f(x)dx=0$ 이어야 하므로

$$\int_0^a (x+1)(x-1)(x-a)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a^4}{3}-\frac{a^2}{2}+a^2$$

$$=-\frac{a^4}{12}+\frac{a^2}{2}=0$$

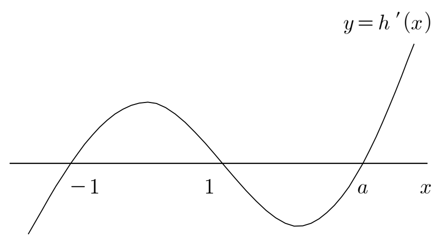
$a^2=6$

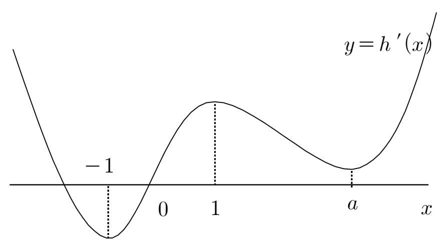
즉, a의 최댓값은 $\sqrt{6}$이다.

정답 ④

다른풀이 :

함수 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 두 함수 $y=h'(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.





따라서, $h(a)=\int_0^a f(t)dt \geq 0$이어야 하므로

$$\int_0^a (x+1)(x-1)(x-a)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a^4}{3}-\frac{a^2}{2}+a^2$$

$=-\dfrac{a^4}{12}+\dfrac{a^2}{2}\geq 0$

$a^2(a^2-6)\leq 0$

$a>1$ 이므로 $1<a\leq\sqrt{6}$

따라서 a의 최댓값은 $\sqrt{6}$이다.

21. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 (가), (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}=a_{2n}-3$ … ㉠

이 성립하므로

$a_3=a_2-3$ … ㉡

$a_5=a_4-3$,

$a_7=a_6-3$ … ㉢

이다.

$a_7=2$이므로 ㉢에서

$a_6=5$

이때 조건 (가)에서

$a_6=a_2\times a_3+1=5$

즉, $a_2\times a_3=4$

이므로 ㉡에서

$a_2(a_2-3)=4$

${a_2}^2-3a_2-4=(a_2+1)(a_2-4)=0$

따라서 $a_2=-1$ 또는 $a_2=4$

(i) $a_2=-1$일 때

조건 (가)에서

$a_2=a_2\times a_1+1$

이므로

$-1=-a_1+1$

따라서 $a_1=2$이므로 $0<a_1<1$이라는 조건에 모순이다.

(ii) $a_2=4$일 때

조건 (가)에서

$a_2=a_2\times a_1+1$

이므로

$4=4a_1+1$

따라서 $a_1=\dfrac{3}{4}$이므로 $0<a_1<1$이라는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_2=4$

이때 ㉠에서

$a_{25}=a_{24}-3$

이고 조건 (가)에서

$a_{24}=a_2\times a_{12}+1$

$\quad=4a_{12}+1$

이때

$a_{12}=a_2\times a_6+1$

$\quad=4a_6+1$

$\quad=4\times 5+1=21$

이므로

$a_{24}=4\times 21+1=85$

따라서

$a_{25}=a_{24}-3$

$\quad=85-3=82$

정답 ③

22. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(3x+1)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r(3x)^r={}_8\mathrm{C}_r3^rx^r$ (단, $r=0,1,2,\cdots,8$)

따라서 x의 계수는 $r=1$일 때이므로

${}_8\mathrm{C}_1\times 3=24$

정답 24

23. **출제의도** : 부정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+4x+5$에서

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3x^2+4x+5)\,dx$

$=x^3+2x^2+5x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=4$이므로

$C=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+5x+4$이므로

$f(1)=1+2+5+4=12$

정답 12

24. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_3 72-\log_3 8=\log_3 9=2$

정답 2

25. **출제의도** : 미분을 이용하여 삼차함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

정답풀이 :

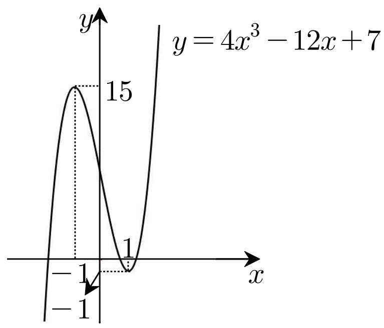
$y=4x^3-12x+7$에서

$y'=12x^2-12=12(x-1)(x+1)$

이므로 $y'=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$과 $x=1$이다.

따라서 함수 $y=4x^3-12x+7$은 $x=-1$에서 극댓값 15, $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다.



이때 곡선 $y=4x^3-12x+7$과 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이므로 직선 $y=k$는 점 $(-1,15)$ 또는 $(1,-1)$을 지나야 한다.

따라서 양수 k의 값은 15이다.

정답 15

26. **출제의도** : 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$ 이어야 하고

$\lim_{x\to1-}f(x)=-3+a$

이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}=-3+a$$

즉, $x\to1+$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $b=-1$ 이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)$$

$=4$

즉, $-3+a=4$ 이므로 $a=7$

따라서 $a+b=6$

정답 6

27. **출제의도** : 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

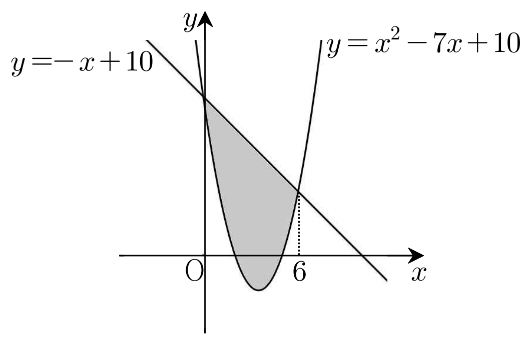
정답풀이 :

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$이 만나는 점의 x좌표는

$x^2-7x+10=-x+10$에서

$x^2-6x=x(x-6)=0$

이므로 $x=0$과 $x=6$이다.



따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}\,dx$$

$$=\int_0^6 (-x^2+6x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$$

$$=-\frac{1}{3}\times 6^3+3\times 6^2$$

$$=-72+108=36$$

정답 36

28. **출제의도** : 코사인법칙과 사인법칙을 활용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times 7$$

$\overline{\mathrm{BC}}=7\sqrt{3}$ ----㉠

한편, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:1$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=k(k>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=3k$이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sqrt{9k^2+k^2-2\times 3k\times k\times\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{7k^2}$$

$=\sqrt{7}k$ ---㉡

㉠과 ㉡에서

$7\sqrt{3}=\sqrt{7}k$

$k=\sqrt{21}$

따라서,

$\overline{\mathrm{AC}}=k=\sqrt{21}$

이므로 $k^2=21$

정답 21

29. **출제의도** : 독립일 때의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) 꺼낸 공의 수가 3인 경우

주머니에서 꺼낸 공의 수가 3일 확률은

$\frac{2}{5}$ -----㉠

이때 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 3, 1 또는 6, 2, 2 또는 5, 4, 1

또는 5, 3, 2 또는 4, 4, 2 또는 4, 3, 3
이때의 확률은

$$\left(3!+\frac{3!}{2!1!}+3!+3!+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{2!1!}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8} \quad ----㉡$$

㉠과 ㉡에서 확률은

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{20}$$

(ⅱ) 꺼낸 공의 수가 4인 경우
주머니에서 꺼낸 공의 수가 4일 확률은

$$\frac{3}{5} \quad -----㉢$$

이때 주사위를 4번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면
6, 2, 1, 1 또는 5, 3, 1, 1
또는 5, 2, 2, 1 또는 4, 4, 1, 1
또는 4, 3, 2, 1 또는 4, 2, 2, 2
또는 3, 3, 3, 1 또는 3, 3, 2, 2
이때의 확률은

$$\left(\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!2!}+4!+\right.$$
$$\left.+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!2!}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$=80\times\left(\frac{1}{6}\right)^4 \quad -----㉣$$

㉢과 ㉣에서 확률은

$$\frac{3}{5}\times80\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{27}$$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$$

이므로 $p=540$, $q=47$
$p+q=587$

정답 587

30. **출제의도** : 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$h(0)=|f(0)-g(0)|=0$에서
$f(0)=g(0)$
또한, $x<1$일 때,
함수 $h(x)=|f(x)-g(x)|$가 미분가능하고 $f(0)=g(0)$이므로 $x=0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 접해야 한다.
즉, $f'(0)=g'(0)$ 이다.
또한, $x=1$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)$에서

$$\lim_{x\to1-}|f(x)-g(x)|=\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}\cdots㉠$$

(i) 1보다 작은 근방 x에서 $f(x)>g(x)$일 때, 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta x\to0-}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$
$g'(1)=0$
그런데 $g(x)$는 일차함수이므로 모순이다.
(ii) 1보다 작은 근방 x에서 $f(x)<g(x)$일 때, 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{\Delta x\to0-}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{h(1+\Delta x)-h(1)}{\Delta x}$$

$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$f'(1)=0$
또한, ㉠에서 $-f(1)+g(1)=f(1)+g(1)$
이므로
$f(1)=0$
따라서,
$f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=px+q$
(a, q는 상수, p는 0이 아닌 상수)
로 놓을 수 있으므로
$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$
$g'(x)=p$
이때 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$에서
$a=q$, $-2a+1=p$
이고

$$\begin{aligned}h(2)&=f(2)+g(2)\\&=(2+a)+2p+q\\&=2+a+2p+q=5\end{aligned}$$

$a+2p+q=3$
즉, $a=-\frac{1}{2}$, $p=2$, $q=-\frac{1}{2}$이므로
$f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$,
$g(x)=2x-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}h(4)&=f(4)+g(4)\\&=9\times\frac{7}{2}+8-\frac{1}{2}\\&=39\end{aligned}$$

정답 39