• 수학 영역 •

수학 정답

1	④	2	④	3	③	4	②	5	②
6	①	7	③	8	③	9	⑤	10	①
11	④	12	②	13	①	14	⑤	15	⑤
16	10	17	20	18	18	19	7	20	2
21	84	22	108						

해 설

1. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 진수를 구한다.

$\log_3 x = 3$ 이므로 $x = 3^3 = 27$

2. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^3 (x+1)^2 dx = \int_0^3 (x^2+2x+1)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^3 = 21$$

3. [출제의도] 삼각함수의 주기를 이해한다.

$\tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \tan\left\{\pi(x+1) + \frac{\pi}{2}\right\}$

따라서 함수 $y = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기는 1

4. [출제의도] 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_1 = 1^2 - 5\times1 = -4$, $S_2 = 2^2 - 5\times2 = -6$

그러므로 $a_2 = S_2 - S_1 = -6-(-4) = -2$

따라서 $a_1 + d = a_2 = -2$

5. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

함수 $(x^2+ax+b)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}(x^2+ax+b)f(x) = \lim\limits_{x\to1+}(x^2+ax+b)f(x)$

그래프에서 $\lim\limits_{x\to1-}f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to1+}f(x) = 3$ 이므로

$\lim\limits_{x\to1-}(x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b)\times1 = 1+a+b$,

$\lim\limits_{x\to1+}(x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b)\times3 = 3(1+a+b)$

에서 $1+a+b = 3(1+a+b)$

따라서 $a+b = -1$

6. [출제의도] 지수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

정사각형의 한 변의 길이가 1이므로

$6^{-a} - 6^{-a-1} = 1$, $6^{-a} - \frac{6^{-a}}{6} = 1$, $\left(1-\frac{1}{6}\right)\times6^{-a} = 1$

따라서 $6^{-a} = \frac{6}{5}$

7. [출제의도] 미분가능성을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(x)g(x) = \begin{cases} -(x+3)(2x+a) & (x<-3) \\ (x+3)(2x+a) & (x\ge-3) \end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-3$에서 미분가능하다. 즉,

$\lim\limits_{x\to-3-}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$

$= \lim\limits_{x\to-3+}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$,

$\lim\limits_{x\to-3-}(-2x-a) = \lim\limits_{x\to-3+}(2x+a)$

따라서 $6-a = -6+a$에서 $a=6$

8. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

점 P는 두 곡선 $y=\log_2(-x+k)$, $y=-\log_2 x$ 의 교점이므로 $\log_2(-x_1+k) = -\log_2 x_1$, $-x_1+k = \frac{1}{x_1}$

즉, $x_1^2 - kx_1 + 1 = 0$ …… ㉠

점 R는 두 곡선 $y=-\log_2(-x+k)$, $y=\log_2 x$ 의 교점이므로 $-\log_2(-x_3+k) = \log_2 x_3$, $\frac{1}{-x_3+k} = x_3$

즉, $x_3^2 - kx_3 + 1 = 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 x_1, x_3은 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $x_1x_3 = 1$

그러므로 $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$ 에서

$(x_1+x_3)^2 = (x_3-x_1)^2 + 4x_1x_3 = (2\sqrt{3})^2 + 4\times1 = 16$

따라서 $x_1 + x_3 = 4$

9. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

자연수 k에 대하여

(i) $n=2k-1$일 때, $a_{2k-1} + a_{2k} = 2(2k-1) = 4k-2$

이므로 $\sum\limits_{n=1}^{22}a_n = \sum\limits_{k=1}^{11}(a_{2k-1}+a_{2k}) = \sum\limits_{k=1}^{11}(4k-2)$

$= 4\times\frac{11\times12}{2} - 2\times11 = 242$

(ii) $n=2k$일 때, $a_{2k} + a_{2k+1} = 2\times2k = 4k$

이므로 $\sum\limits_{n=2}^{21}a_n = \sum\limits_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k+1}) = \sum\limits_{k=1}^{10}4k$

$= 4\times\frac{10\times11}{2} = 220$

따라서 $a_1 + a_{22} = \sum\limits_{n=1}^{22}a_n - \sum\limits_{n=2}^{21}a_n = 242-220 = 22$

[다른 풀이]

자연수 k에 대하여 $a_{2k}+a_{2k+1} = 4k$, $a_{2k-1}+a_{2k} = 4k-2$

이므로 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 2$

즉, 수열 $\{a_{2k-1}\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

그러므로 $a_{2k-1} = a_1 + (k-1)\times2$ …… ㉠

㉠에 $k=11$을 대입하면 $a_{21} = a_1 + 20$ …… ㉡

모든 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+1} = 2n$이므로

$n=21$을 대입하면 $a_{21} + a_{22} = 42$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $(a_1+20) + a_{22} = 42$

따라서 $a_1 + a_{22} = 22$

10. [출제의도] 함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to a-}\frac{g(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a+}\frac{g(x)}{x-a}$,

$\lim\limits_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a} = \lim\limits_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$,

$\lim\limits_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a} = \lim\limits_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$

그러므로 $-|f(a)| = |f(a)|$에서 $f(a)=0$

$f(x) = (x-a)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

함수 $g(x) = |(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로 $g(x) = |(x-a)^2(x-3)|$

$h(x) = (x-a)^2(x-3)$이라 하면

$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x) = 2(x-a)(x-3) + (x-a)^2 = (x-a)(3x-6-a) = 0$

함수 $h(x)$는 $x = \frac{6+a}{3}$ 에서 극솟값 -32를 갖는다.

$h\left(\frac{6+a}{3}\right) = \left(\frac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\frac{6+a}{3}-3\right) = -4\left(1-\frac{a}{3}\right)^3 = -32$

$\left(1-\frac{a}{3}\right)^3 = 8$이므로 $1-\frac{a}{3} = 2$에서 $a=-3$

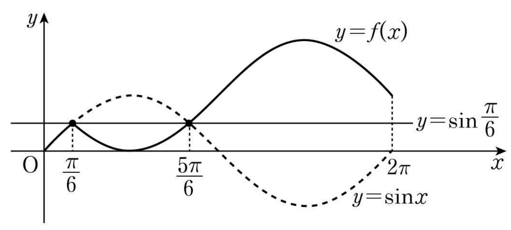
따라서 $f(x) = (x+3)(x-3)$에서 $f(4) = 7$

11. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 문제를 해결한다.

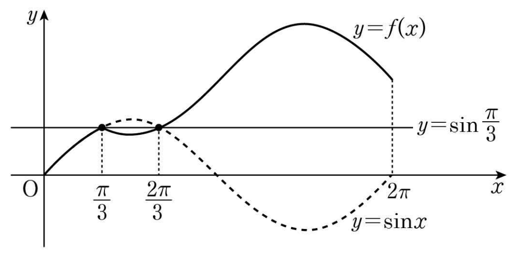
그림은 k의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$와 직선 $y = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

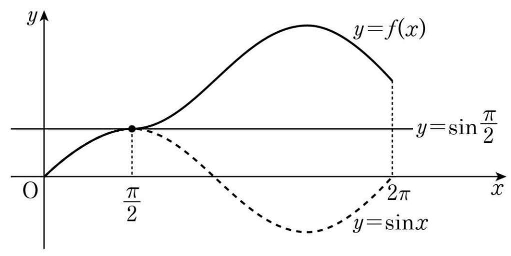
(i) $k=1$일 때, $a_1 = 2$



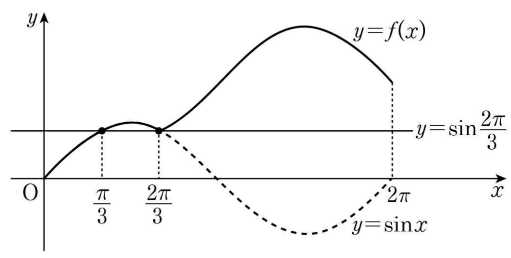
(ii) $k=2$일 때, $a_2 = 2$



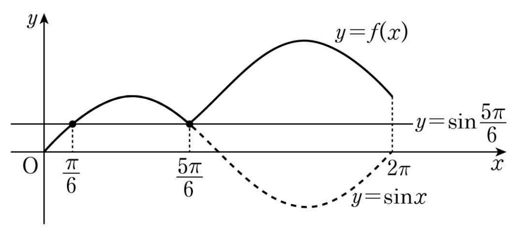
(iii) $k=3$일 때, $a_3 = 1$



(iv) $k=4$일 때, $a_4 = 2$



(v) $k=5$일 때, $a_5 = 2$



따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 2+2+1+2+2 = 9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x) = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(i) $0\le x\le\frac{k}{6}\pi$일 때, $\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ii) $\frac{k}{6}\pi < x \le 2\pi$일 때,

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) - \sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서 $\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0, 2\pi]$에서 방정식 $\sin x = \sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

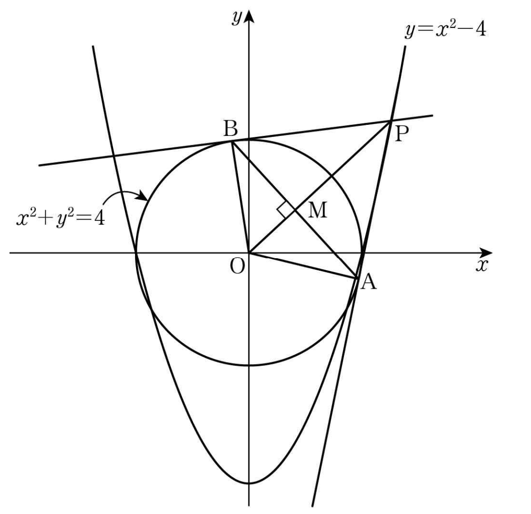
$k=1$, $k=5$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=2$, $k=4$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right) = 1$이므로 $\sin x = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 2+2+1+2+2 = 9$

12. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



두 선분 AB, OP의 교점을 M이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.
삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OA}}$이므로 넓이의 비는 $\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2$이다.
삼각형 OAP의 넓이는 $\dfrac{S(t)+T(t)}{2}$,
삼각형 OMA의 넓이는 $\dfrac{S(t)}{2}$이므로
$\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2=\dfrac{S(t)+T(t)}{2}:\dfrac{S(t)}{2}$
$\overline{\mathrm{OA}}^2\times\dfrac{S(t)+T(t)}{2}=\overline{\mathrm{OP}}^2\times\dfrac{S(t)}{2}$,
$\dfrac{T(t)}{S(t)}=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}$
$\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$이므로
$\dfrac{T(t)}{S(t)}=\dfrac{t^2+(t^2-4)^2-2^2}{2^2}=\dfrac{1}{4}(t+2)(t-2)(t^2-3)$
따라서
$\displaystyle\lim_{t\to2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$
$\displaystyle=\lim_{t\to2+}\frac{(t+2)(t^2-3)}{4}+\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$
$=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

13. [출제의도] 미분의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

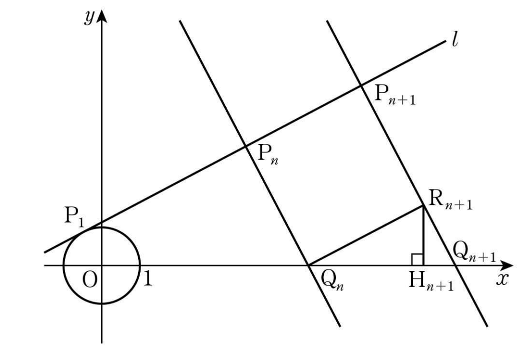
ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여
$g'(x)=3x^2+2ax+b\ge0$이 성립해야 한다.
그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=a^2-3b\le0$, $a^2\le3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서
$f(x)=\dfrac{g(x)-g(-x)}{2}$
$=\dfrac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}$
$=x^3+bx$
$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서 $3x^2+b=0$
이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D'이라 하면
$D'=0^2-4\times3\times b=-12b$
ㄱ에 의해 $b\ge\dfrac{a^2}{3}\ge0$이므로 $D'=-12b\le0$
그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$의 실근이 존재한다. 즉, $b\le0$
또한, ㄱ에 의해 $b\ge0$이므로 $b=0$이고 ㄱ에 의해 $a=0$이다. $g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

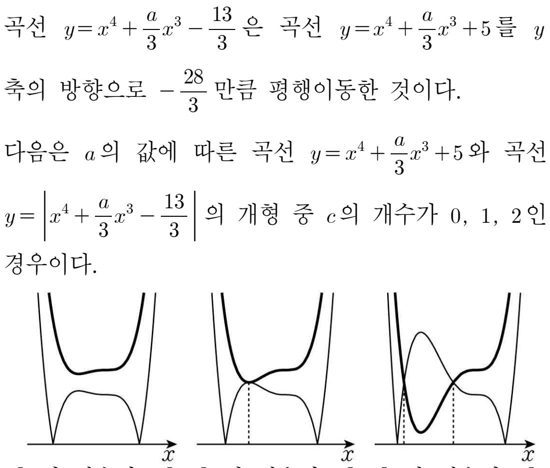
14. [출제의도] 등비수열을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 과정을 추론한다.



점 R_{n+1}에서 x축에 내린 수선의 발을 H_{n+1}이라 하면 직선 l의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로 직선 $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}$의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다. 즉, $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_{n+1}}:\overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}}=2:1$
직각삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$과 직각삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$은 서로 닮음이므로 $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}}:\overline{\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=2:1$에서
$\overline{\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}}$
$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로 $\boxed{(가)}=\dfrac{1}{2}$
$\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=\left(1+\boxed{(가)}\right)\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\dfrac{3}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이고
$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=1$이므로 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{3}{2}$인 등비수열이다. 즉, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$
그러므로 $\boxed{(나)}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$
$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이므로
$\displaystyle\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}=\frac{1\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$
그러므로 $\boxed{(다)}=2\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$
따라서 $p=\dfrac{1}{2}$, $f(n)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, $g(n)=2\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$
이므로 $f(6p)+g(8p)=f(3)+g(4)=\dfrac{9}{4}+\dfrac{19}{4}=7$

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=0$이므로
$f(x)=4x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면
$f'(x)=12x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$
즉, $f(x)=4x^3+ax^2$에서 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=x^4+\frac{a}{3}x^3$이므로
$$g(x)=\begin{cases}x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5 & (x<c)\\ \left|x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}\right| & (x\ge c)\end{cases}$$
곡선 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}$은 곡선 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5$를 y축의 방향으로 $-\dfrac{28}{3}$만큼 평행이동한 것이다.
다음은 a의 값에 따른 곡선 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5$와 곡선 $y=\left|x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}\right|$의 개형 중 c의 개수가 0, 1, 2인 경우이다.



[c의 개수가 0] [c의 개수가 1] [c의 개수가 2]

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1이기 위해서는 함수 $y=x^4+\dfrac{a}{3}x^3+5$ (→㉠)의 극솟값과 함수 $y=-\left(x^4+\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{13}{3}\right)$ (→㉡)의 극댓값이 서로 같아야 한다.
㉠, ㉡의 함수의 도함수는 각각 $f(x)$, $-f(x)$이고
$f(x)=x^2(4x+a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{a}{4}$ $(a\ne0)$
㉠, ㉡의 함수는 각각 $x=-\dfrac{a}{4}$에서 극값을 갖고
$c=-\dfrac{a}{4}$이다.
$\left(-\dfrac{a}{4}\right)^4+\dfrac{a}{3}\left(-\dfrac{a}{4}\right)^3+5=-\left\{\left(-\dfrac{a}{4}\right)^4+\dfrac{a}{3}\left(-\dfrac{a}{4}\right)^3-\dfrac{13}{3}\right\}$
이를 정리하여 풀면 $\begin{cases}a=4\\c=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=-4\\c=1\end{cases}$
그러므로 $a=4$일 때, $g(1)=\left|1+\dfrac{4}{3}-\dfrac{13}{3}\right|=2$,
$a=-4$일 때, $g(1)=\left|1-\dfrac{4}{3}-\dfrac{13}{3}\right|=\dfrac{14}{3}$
따라서 $g(1)$의 최댓값은 $\dfrac{14}{3}$

16. [출제의도] 미분계수를 이해하고 미정계수를 구한다.

$f'(x)=4x+a$이므로 $f'(2)=8+a=18$에서 $a=10$

17. [출제의도] 정적분을 활용하여 점이 움직인 거리를 구한다.

$0\le t\le3$일 때 $v(t)\ge0$, $3\le t\le4$일 때 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는
$\displaystyle\int_0^4|v(t)|dt=\int_0^3|v(t)|dt+\int_3^4|v(t)|dt$
$\displaystyle=\int_0^3(12-4t)dt+\int_3^4(4t-12)dt=18+2=20$

18. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

$\mathrm{A}(1,n)$, $\mathrm{B}(1,2)$, $\mathrm{C}(2,n^2)$, $\mathrm{D}(2,4)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=n-2$, $\overline{\mathrm{CD}}=n^2-4$
사다리꼴 ABDC의 넓이는 18 이하이므로
$\dfrac{1}{2}\times(n-2+n^2-4)\times1=\dfrac{1}{2}(n^2+n-6)\le18$, $-7\le n\le6$
그러므로 3 이상의 자연수 n의 값은 3, 4, 5, 6
따라서 조건을 만족시키는 n의 값의 합은 18

19. [출제의도] Σ의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

조건 (가)에서 $a_3=a_1-3$, $a_4=a_2+3$,
$a_5=a_3-3=a_1-6$, $a_6=a_4+3=a_2+6$이므로
$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+(a_1-3)+(a_2+3)+(a_1-6)+(a_2+6)$
$=3(a_1+a_2)$
조건 (나)에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{32}a_k=5\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2=16(a_1+a_2)$
따라서 $16(a_1+a_2)=112$이므로 $a_1+a_2=7$

20. [출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(1-x)=-f(1+x)$에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$f(1)=-f(1)$에서 $f(1)=0$, $f(0)=-f(2)$에서 $f(2)=0$
삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$
방정식 $f(x)=-6x^2$에서 $x^3+3x^2+2x=0$이므로
$x(x+1)(x+2)=0$, $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$
$-2\le x\le-1$에서 $x^3+3x^2+2x\ge0$이고
$-1\le x\le0$에서 $x^3+3x^2+2x\le0$이므로
$\displaystyle S=\int_{-2}^{0}|x^3+3x^2+2x|dx$
$\displaystyle=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx+\int_{-1}^{0}\{-(x^3+3x^2+2x)\}dx$
$=\left[\dfrac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\dfrac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\dfrac{1}{2}$
따라서 $4S=2$

21. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{DCB}$이다. 즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DC}}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DC}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$, $\angle\mathrm{CAD}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{DAB}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{DC}}^2$이므로 삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면

$6^2+b^2-2\times6\times b\times\cos\theta=b^2+8^2-2\times b\times8\times\cos\theta$,

$4b\cos\theta=28$이므로 직각삼각형 ADE에서 $k=b\cos\theta=7$

따라서 $12k=84$

22. [출제의도] 함수의 극값을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $x\neq0$, $x\neq2$일 때,

$g(x)=\dfrac{x(x-2)}{|x(x-2)|}(|f(x)|-a)$

$x<0$ 또는 $x>2$일 때, $x(x-2)>0$이고

$0<x<2$일 때, $x(x-2)<0$이므로

$g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ a-|f(x)| & (0<x<2)\end{cases}$

조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}g(x)$에서 $|f(0)|-a=a-|f(0)|$

그러므로 $|f(0)|=a$에서 $g(0)=\lim\limits_{x\to0+}g(x)=0$

같은 방법으로 $|f(2)|=a$에서 $g(2)=0$

그러므로 $g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2)\\ a-|f(x)| & (0\le x\le2)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

즉, $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|f(x)|-a}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{a-|f(x)|}{x}$ …… ㉠

(i) $f(0)=a$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)>0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)>0$이다. 그러므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|f(x)|-a}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$,

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{a-|f(x)|}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$

㉠에서 $f'(0)=-f'(0)$, $f'(0)=0$

(ii) $f(0)=-a$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)<0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}f(x)<0$이다. 그러므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|f(x)|-a}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-f(x)+f(0)}{x}=-f'(0)$,

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{a-|f(x)|}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{-f(0)+f(x)}{x}=f'(0)$

㉠에서 $-f'(0)=f'(0)$, $f'(0)=0$

(i), (ii)에 의해 $f'(0)=0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2)=0$이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-a$를 갖는다.

$f(x)=x^3+px^2+qx+a$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$p=-3$, $q=0$이다. 즉, $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f(2)=2^3-3\times2^2+a=-a$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2=|6^3-3\times6^2+2|-2=108$

[참고]

[1] $f(0)=f(2)=a$ 또는 $f(0)=f(2)=-a$인 경우

삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다.

[2] $f(0)=-a$, $f(2)=a$인 경우

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

[확률과 통계]

23	④	*24*	②	*25*	③	*26*	⑤	*27*	①
28	②	*29*	150	*30*	23				

23. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균을 계산한다.

이항분포 $\mathrm{B}\left(60,\ \dfrac{5}{12}\right)$를 따르는 확률변수 X의 평균은

$\mathrm{E}(X)=60\times\dfrac{5}{12}=25$

24. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이해하여 사건의 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}\times\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$

25. [출제의도] 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구한다.

A와 B에게 각각 공책을 2권씩 먼저 나누어 준 후 남은 6권의 공책을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

26. [출제의도] 여사건의 확률을 구한다.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 경우의 수는 $6\times6=36$

두 수 a, b의 최대공약수가 홀수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 a, b의 최대공약수가 짝수인 사건이다. a, b의 최대공약수가 짝수이면 a, b 모두 짝수이므로 이 경우의 수는 $3\times3=9$이다.

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

27. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

두 확률변수 X와 Y는 모두 정규분포를 따르고 표준편차가 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다. 따라서 $g(x)=f(x-4)$이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 a이므로

$f(a)=g(a)=f(a-4)$

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{a+(a-4)}{2}=8$

$a=10$

$\mathrm{P}(8\le Y\le a)=\mathrm{P}(8\le Y\le10)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{8-12}{2}\le Z\le\dfrac{10-12}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le-1)$

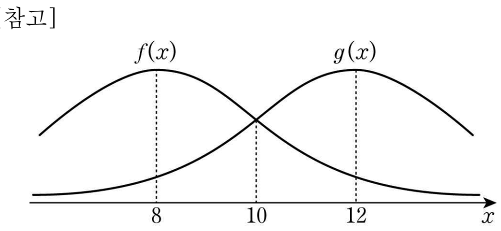
$=\mathrm{P}(1\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

[참고]



28. [출제의도] 조건부확률을 구하는 문제를 해결한다.

선택한 함수 f가 4 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$인 사건을 A, $f(1)=f(5)$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

X에서 X로의 모든 함수의 개수는 8^8이다.

4 이하의 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$인 $f(2n-1)$과 $f(2n)$을 정하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

4 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$인 경우의 수는 28^4이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{28^4}{8^8}$

(i) $f(1)=f(5)$, $f(2)=f(6)$인 경우

$f(1)=f(5)<f(2)=f(6)$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$을 정하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2$이고, $f(3)$과 $f(4)$, $f(7)$과 $f(8)$을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8\mathrm{C}_2$이므로 $f(2)=f(6)$인 경우의 수는 $({}_8\mathrm{C}_2)^3=28^3$이다.

(ii) $f(1)=f(5)$, $f(2)\neq f(6)$인 경우

$f(1)=f(5)<f(2)<f(6)$ 또는

$f(1)=f(5)<f(6)<f(2)$

이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(6)$을 정하는 경우의 수는 $2\times{}_8\mathrm{C}_3=2\times\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=112$이고, $f(3)$과 $f(4)$, $f(7)$과 $f(8)$을 정하는 경우의 수는 각각 ${}_8\mathrm{C}_2=28$이므로 $f(2)\neq f(6)$인 경우의 수는 112×28^2이다.

(i), (ii)에 의해

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{28^3+112\times28^2}{8^8}=\dfrac{140\times28^2}{8^8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\dfrac{140\times28^2}{8^8}}{\dfrac{28^4}{8^8}}=\dfrac{140}{28^2}=\dfrac{5}{28}$

29. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 자연수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(ii) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\dfrac{4!}{2!}=12$

이므로 (ii)의 경우의 수는 $2\times12=24$

(iii) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\dfrac{4!}{3!}=4$

이므로 (iii)의 경우의 수는 $2\times4=8$

(iv) 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

(i) ~ (iv)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1인 경우의 수는 $12+24+8+6=50$

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3\times50=150$

30. [출제의도] 표본평균의 성질을 이용하여 모집단의 확률분포를 추론한다.

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 할 때, 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$X=4$인 경우는 4개의 수가 모두 1이어야 하므로

$P(X=4)=a^4$

$a^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le a\le 1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

$X=16$인 경우는 4개의 수가 모두 4이어야 하므로

$P(X=16)=d^4$

$16d^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le d\le 1$이므로 $d=\frac{1}{6}$

$a+b+c+d=1$이므로

$b+c=\frac{1}{2}$ …… ㉠

확인한 4개의 수의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$X=4\overline{Y}$이다.

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(4\overline{Y})=4\mathrm{E}(\overline{Y})=4\mathrm{E}(Y)$$
$$=4\left(\frac{1}{3}+2b+3c+\frac{4}{6}\right)=4(1+2b+3c)$$

$\mathrm{E}(X)=9$에서 $4(1+2b+3c)=9$이므로

$2b+3c=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{4}$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(4\overline{Y})=16\mathrm{V}(\overline{Y})=4\mathrm{V}(Y)$$
$$=4[\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2]$$
$$=4\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{6}\right)-\left(\frac{9}{4}\right)^2\right\}$$
$$=4\left(\frac{25}{4}-\frac{81}{16}\right)=\frac{19}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=19$이므로 $p+q=23$

[미적분]

23	①	24	③	25	④	26	②	27	⑤
28	③	29	14	30	10				

23. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_2^4 \frac{6}{x^2}dx=\left[-\frac{6}{x}\right]_2^4=-\frac{3}{2}-(-3)=\frac{3}{2}$$

24. [출제의도] 수렴하는 급수의 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+4\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+\lim_{n\to\infty}4$$
$$=0+4=4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{5+4}{3-0}=3$$

25. [출제의도] 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속력을 구한다.

$\frac{dx}{dt}=\ln t+1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}$이므로

시각 t에서의 점 P의 속력은

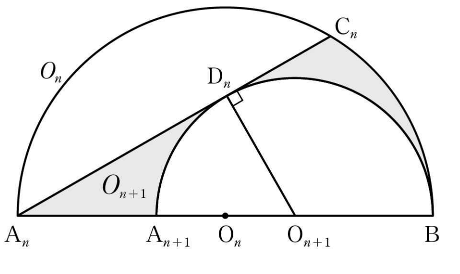
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(\ln t+1)^2+\left\{\frac{4\ln t-4}{(\ln t)^2}\right\}^2}$$

따라서 시각 $t=e^2$에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\ln e^2+1)^2+\left\{\frac{4\ln e^2-4}{(\ln e^2)^2}\right\}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

26. [출제의도] 도형 사이의 관계를 추론하여 등비급수의 합을 구한다.

반원 O_n의 중심을 O_n, 반지름을 r_n이라 하자.



삼각형 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$은 $\angle\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n=\frac{\pi}{6}$인 직각삼각형이므로 $\sin(\angle\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n)=\frac{1}{2}$

$\frac{\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{O}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{O}_{n+1}}}=\frac{1}{2}$, $\frac{r_{n+1}}{2r_n-r_{n+1}}=\frac{1}{2}$

$r_{n+1}=\frac{2}{3}r_n$ …… ㉠

$r_1=1$이므로 $r_2=\frac{2}{3}$

$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1=\frac{2\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1}=\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{O}_1}=1$이므로

삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1}\times\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{O}_1}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\angle\mathrm{BO}_1\mathrm{C}_1=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{O}_1}=\overline{\mathrm{BO}_1}=1$이므로

부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{BC}_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

반원 O_2의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(r_2)^2\times\pi=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{2\pi}{9}$

$S_1=$(삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1$의 넓이)+(부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{BC}_1$의 넓이)
$-$(반원 O_2의 넓이)

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{9}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$이고 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

27. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해 함수 $f(x)$는 감소한다.

그러므로 조건 (나)에 의해

$f(-1)=1$, $f(3)=-2$ 즉 $f^{-1}(1)=-1$, $f^{-1}(-2)=3$

$\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)dx$에서 $f^{-1}(x)=t$로 놓으면

$x=-2$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=-1$이고,

$x=f(t)$에서 $\frac{dx}{dt}=f'(t)$이므로

$$\int_{-2}^{1}f^{-1}(x)dx=\int_3^{-1}tf'(t)dt$$
$$=\Big[tf(t)\Big]_3^{-1}-\int_3^{-1}f(t)dt$$
$$=-f(-1)-3f(3)+\int_{-1}^{3}f(t)dt$$
$$=-1+6+3=8$$

28. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 $\angle$BAC의 이등분선이므로

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:\sqrt{5-4\cos\theta}$에서

$$\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

그러므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\sin(\angle\mathrm{CBA})$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\sin\theta$$
$$=\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{CDM}=\theta$, $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{DFE}$

이다. 이때 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{FAC}$이므로 삼각형 AMF는 이등변삼각형이다. 점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{\mathrm{FM}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$이고

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=1$, $\overline{\mathrm{DM}}=\frac{1}{2}$

그러므로 $\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{FM}}-\overline{\mathrm{DM}}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle\mathrm{FDC}=\pi-\angle\mathrm{CDM}=\pi-\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{DF}}\times\sin(\angle\mathrm{FDC})$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}\times\sin(\pi-\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4}\times\sin\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin\theta}{4}(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)}{\theta^2\times\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(\sqrt{5-4\cos\theta}-1)(\sqrt{5-4\cos\theta}+1)}{4\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(5-4\cos\theta)-1}{4\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

29. [출제의도] 정적분의 성질과 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{a}}\sin(ax)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{2}{a}$$

$\frac{2}{a}\ge\frac{1}{2}$이므로

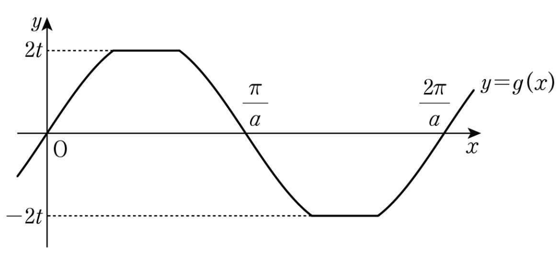
$0<a\le4$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi}\{|f(x)+t|-|f(x)-t|\}dx=0$$

$g(x)=|f(x)+t|-|f(x)-t|$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-2t & (-1\le\sin(ax)<-t)\\ 2\sin(ax) & (-t\le\sin(ax)<t)\\ 2t & (t\le\sin(ax)\le1)\end{cases}$$



함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같으므로

$0<k<\frac{2\pi}{a}$인 모든 실수 k에 대하여

$\int_0^k g(x)dx>0$이고, $\int_0^{\frac{2\pi}{a}}g(x)dx=0$이다.

함수 $g(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$이고 $\int_0^{3\pi}g(x)dx=0$이므로

$3\pi=\frac{2\pi}{a}\times n$ (n은 자연수), $a=\frac{2}{3}n$

㉠에서 $0<\frac{2}{3}n\le4$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값은

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$, 4이므로 그 합은 14이다.

30. [출제의도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=-\dfrac{ax^3+bx}{x^2+1}$ 에서

$f'(x)=-\dfrac{(3ax^2+b)(x^2+1)-(ax^3+bx)(2x)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$f'(x)=-\dfrac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ …… ㉠

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+1\neq 0$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\neq 0$ 이고 $f'(0)=-b<0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)<0$ 이다.

$h(x)=g(f(x))=f(f(x))-x$ 이므로

$h(0)=f(f(0))-0=f(0)=0$ 이다.

조건 (가)에서 $g(2)=f(2)-f^{-1}(2)=h(0)=0$ 이므로

$f(2)=f^{-1}(2)=t$ (t 는 상수)라 하면 $f(t)=2$ 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$ 이다.

즉 두 점 $(t,2)$, $(-2,-t)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있다.

$t\neq -2$ 일 때, 두 점 $(t,2)$, $(-2,-t)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{2-(-t)}{t-(-2)}=1$ 이므로 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$ 인 상수 c 가 존재한다. 그러나 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)<0$ 이므로 모순이다. 즉 $t=-2$

$f(2)=-2$ 에서 $-\dfrac{8a+2b}{5}=-2$

그러므로 $4a+b=5$ …… ㉡

$f^{-1}(2)=-2$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(-2)}$

㉠에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$ 이므로

$f'(-2)=f'(2)$ 이다.

즉 $g'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$

$h(x)=f(f(x))-x$ 에서 $h'(x)=f'(f(x))f'(x)-1$ 이므로

$h'(2)=f'(f(2))f'(2)-1=f'(-2)f'(2)-1=\{f'(2)\}^2-1$

조건 (나)에서 $g'(2)=-5h'(2)$ 이므로

$f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5\{f'(2)\}^2+5$

$5\{f'(2)\}^3+\{f'(2)\}^2-5f'(2)-1=0$

$\{5f'(2)+1\}\{f'(2)+1\}\{f'(2)-1\}=0$

$f'(x)<0$ 이므로 $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $f'(2)=-1$ 이다.

㉠에서 $f'(2)=-\dfrac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2}=-\dfrac{28a-3b}{25}$

(i) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$ 일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$ 이므로

$28a-3b=5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$ 이다.

(ii) $f'(2)=-1$ 일 때, $-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$ 이므로

$28a-3b=25$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하면 $a=1$, $b=1$ 이므로 모순이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $4(b-a)=4\times\left(3-\dfrac{1}{2}\right)=10$

[기하]

23	③	24	①	25	②	26	④	27	⑤
28	①	29	32	30	7				

23. [출제의도] 평행한 두 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 성분을 구한다.

0이 아닌 실수 k 에 대하여 $\vec{b}=k\vec{a}$

$(2m+1,\ 9)=(k(m-2),\ 3k)$ 이므로

$3k=9$, $k=3$

$2m+1=3(m-2)$, $2m+1=3m-6$

따라서 $m=7$

24. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

점 P는 선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2m-n}{m+n},\ \dfrac{4m+n}{m+n},\ \dfrac{m-2n}{m+n}\right)$ 이다.

xy 평면 위의 점 P의 z 좌표는 0이므로

$m-2n=0$, $m=2n$

그러므로 점 P의 좌표는 $(1,3,0)$ 이다.

따라서 선분 AP의 길이는

$\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(3-1)^2+\{0-(-2)\}^2}=2\sqrt{3}$

25. [출제의도] 타원과 포물선의 접선의 방정식을 이해한다.

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 에 접하고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 인

접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x\pm\sqrt{36\times\dfrac{1}{4}+16}$, $y=\dfrac{1}{2}x\pm 5$

포물선 $y^2=ax$ 에 접하고 기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 인

접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}}$, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{2}$

a 가 양수이므로 $\dfrac{a}{2}=5$, $a=10$

따라서 포물선 $y^2=ax$ 의 초점의 x 좌표는 $\dfrac{a}{4}=\dfrac{5}{2}$

26. [출제의도] 두 벡터의 합을 이해하여 벡터의 크기를 구한다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\overrightarrow{AM}$ 이다.

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$ 이므로 $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{5}$

$\overline{AD}=\overline{BM}=\overline{CM}$ 이고 변 AD와 변 BC가 평행하므로

사각형 ABMD와 사각형 AMCD는 평행사변형이다.

평행사변형 AMCD에서 $\overline{CD}=\overline{AM}=\sqrt{5}$

사각형 ABMD가 평행사변형이므로

$\angle MBA=\angle CMD=\angle DCM$

즉 삼각형 DMC는 이등변삼각형이므로 $\overline{DM}=\sqrt{5}$

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CM}=2$ 이므로 $\overline{HM}=\overline{CH}=1$

직각삼각형 DMH에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{DM}^2-\overline{HM}^2}=\sqrt{5-1}=2$

$\overline{BH}=\overline{BM}+\overline{HM}=2+1=3$

직각삼각형 DBH에서

$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BH}|^2+|\overrightarrow{DH}|^2=3^2+2^2=13$

따라서 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$

27. [출제의도] 구의 방정식을 이용하여 구와 좌표축의 관계에 대한 문제를 해결한다.

좌표공간의 점 A의 좌표를 (a,b,c) 라 하면

$\overline{OA}=7$ 이므로 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$

$a^2+b^2+c^2=49$ …… ㉠

구 S 의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=64$

xy 평면 위의 모든 점의 z 좌표는 0이므로

구 S 와 xy 평면이 만나서 생기는 원 C 의 반지름의 길이는 $\sqrt{64-c^2}$ 이다. 원 C 의 넓이가 25π 이므로

$64-c^2=25$, $c^2=39$

㉠에서 $a^2+b^2=49-c^2=49-39=10$

점 A에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(0,0,c)$ 이다.

$\overline{AH}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2+(c-c)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$

점 B는 구 위의 점이므로 $\overline{AB}=8$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{64-10}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

따라서 $\overline{BC}=2\times\overline{BH}=2\times 3\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

$\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|}=3$ 에서 $|\overrightarrow{PC}|=t\ (t>0)$ 이라 하면 $|\overrightarrow{PA}|=3t$

두 벡터 $\overrightarrow{PB}$ 와 $\overrightarrow{PC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|$ 이므로

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=135^\circ$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|=-2|\overrightarrow{PC}|^2$ 에서

$|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{2}|\overrightarrow{PC}|$ 이므로 $|\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{2}t$

$\angle APB=\angle BPC=135^\circ$, $\angle CPA=90^\circ$ 이므로

세 삼각형 ABP, BCP, CAP의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 하면

$S_1:S_2:S_3=3t^2:t^2:\dfrac{3}{2}t^2=6:2:3$

직선 AP와 변 BC의 교점이 D이므로

$\overline{AD}:\overline{DP}=(S_1+S_2+S_3):S_2=11:2$

따라서 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{11}{2}\overrightarrow{PD}$ 이므로 $k=\dfrac{11}{2}$

29. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

직선 QR가 $\angle FQP$ 를 이등분하므로 $\overline{PQ}:\overline{QF}=\overline{PR}:\overline{RF}$

이때 $4\overline{PR}=3\overline{RF}$ 이므로 $\overline{PQ}:\overline{QF}=3:4$

$\overline{PQ}=3k\ (k>0)$ 이라 하면 $\overline{QF}=4k$ 이고 $\angle PQF=90^\circ$ 이므로 삼각형 PQF에서 $\overline{PF}=5k$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$ 이므로

$\overline{PF'}=5k+2$, $\overline{QF'}=\overline{PF'}-\overline{PQ}=(5k+2)-3k=2k+2$

$F(\sqrt{17},0)$, $F'(-\sqrt{17},0)$ 이므로 직각삼각형 QF′F에서

$\overline{FF'}^2=\overline{QF}^2+\overline{QF'}^2$, $(2\sqrt{17})^2=(4k)^2+(2k+2)^2$

$5k^2+2k-16=0$, $(5k-8)(k+2)=0$, $k=\dfrac{8}{5}\ (k>0)$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{QF}=\dfrac{1}{2}\times 10\times\dfrac{32}{5}=32$

30. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 정사영의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 $\angle CED=90^\circ$ 이므로 두 직선 BC, DE는 서로 수직이다.

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{HE}\perp\overline{BC}$ 이므로 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$

즉 직선 BC와 평면 AED는 서로 수직이므로

두 직선 BC, AD도 서로 수직이다. …… ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH는 닮음이므로

$\angle DAE=\angle EAH+\angle HAD=90^\circ$

그러므로 두 직선 AD, AE는 서로 수직이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 직선 AD는 평면 ABC와 서로 수직이다.

정삼각형 ABC에서 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$ 이므로 점 E는 선분 BC의 중점이다. 즉 $\overline{AE}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 AED에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{DE}^2-\overline{AE}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

직각삼각형 AED에서 $\overline{AE}\times\overline{AD}=\overline{AH}\times\overline{DE}$ 이므로

$2\sqrt{3}\times 2=\overline{AH}\times 4$, $\overline{AH}=\sqrt{3}$

직각삼각형 AHD에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

삼각형 AHD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

두 평면 ABD, AHD가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\theta=\angle BAE=30^\circ$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\cos 30^\circ=\dfrac{3}{4}$

따라서 $p=4$, $q=3$ 이므로 $p+q=4+3=7$