2020학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	④	2	①	3	③	4	④	5	②
6	②	7	③	8	②	9	⑤	10	③
11	⑤	12	⑤	13	①	14	①	15	④
16	③	17	③	18	②	19	④	20	⑤
21	①	22	6	23	33	24	25	25	36
26	5	27	9	28	22	29	960	30	13

해 설

1. [출제의도] 다항식의 뺄셈을 계산한다.

$A-B=(2x^2-3xy)-(x^2-4xy-y^2)$

$\quad=x^2+xy+y^2$

2. [출제의도] 복소수를 계산한다.

$i^2=-1$ 이므로

$1+i^2=1+(-1)=0$

3. [출제의도] 절댓값 기호를 포함한 일차부등식을 계산한다.

$|x-2|<3$ 에서

$-3<x-2<3$

각 변에 2를 더하면

$-1<x<5$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

이므로 그 개수는 5이다.

[다른 풀이]

$|x-2|<3$ 에서

$-3<x-2<3$

$-3<x-2$ 에서

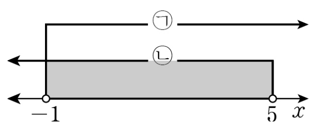
$x>-1$ …… ㉠

$x-2<3$ 에서

$x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$-1<x<5$



따라서 조건을 만족시키는 정수 x는

$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

이므로 그 개수는 5이다.

4. [출제의도] 두 직선이 수직일 조건을 이해하여 직선의 기울기를 구한다.

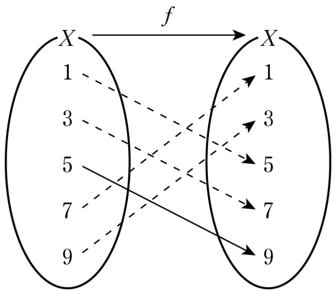
직선 $y=-2x+3$ 의 기울기는 -2이고

직선 $y=ax+1$ 의 기울기는 a이다.

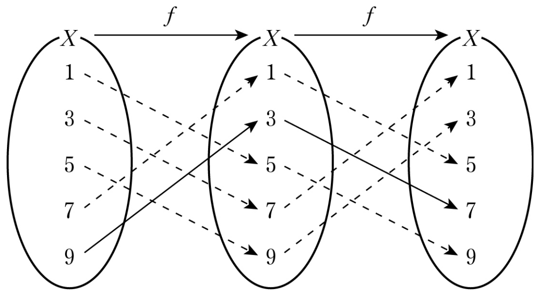
두 직선이 서로 수직이려면 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

따라서 $(-2)\times a=-1$ 이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 합성함수를 이해하여 함숫값을 구한다.



$f(5)=9$ 이다.



$f(9)=3$ 이고 $f(3)=7$ 이므로

$(f\circ f)(9)=f(f(9))=f(3)=7$

따라서 $f(5)+(f\circ f)(9)=9+7=16$

6. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 나머지를 구한다.

$P(x)=x^2+3x+6$ 이라 하자.

다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는

$P(-2)=(-2)^2+3\times(-2)+6=4$

7. [출제의도] 선분의 내분을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{6}{1+2},\ \dfrac{2a}{1+2}\right)$, 즉 $\left(2,\ \dfrac{2a}{3}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위의 점이므로

$\dfrac{2a}{3}=-2,\ a=(-2)\times\dfrac{3}{2}=-3$

8. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.

곡선 $y=2x^2-5x+a$와 직선 $y=x+12$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하자.

두 식 $y=2x^2-5x+a,\ y=x+12$를 연립하면

$2x^2-5x+a=x+12$

$2x^2-6x+a-12=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에서

$\alpha\beta=\dfrac{a-12}{2}$

이때 조건에서 $\alpha\beta=-4$이므로

$\dfrac{a-12}{2}=-4,\ a=4$

[보충 설명]

$a=4$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2-3x-4=0,\ (x+4)(x-1)=0$

따라서 곡선 $y=2x^2-5x+a$와 직선 $y=x+12$는 서로 다른 두 점에서 만나고 두 점의 x좌표는 각각 -4, 1이다.

9. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 차집합의 원소의 합을 구한다.

$B-A=\{5,\ 6\}$에서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 11

$B=(B-A)\cup(A\cap B),\ (B-A)\cap(A\cap B)=\varnothing$

이고

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

이므로 집합 B의 모든 원소의 합이 12이려면

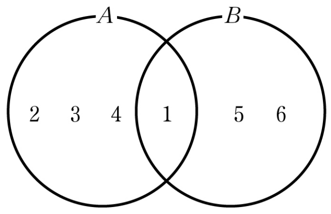
$A\cap B=\{1\}$

따라서

$A-B=A-(A\cap B)=\{2,\ 3,\ 4\}$

이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$2+3+4=9$



[다른 풀이]

$A\cup B=A\cup(B-A)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4+5+6=21$

$A-B=(A\cup B)-B,\ (A\cup B)\cap B=B$

이고, 집합 B의 모든 원소의 합이 12이므로 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$21-12=9$

10. [출제의도] 항등식의 성질을 이해하여 값을 구한다.

등식

$x(x+1)(x+2)=(x+1)(x-1)P(x)+ax+b$

의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)\times0\times1=0\times(-2)\times P(-1)+a\times(-1)+b$

$0=-a+b$ …… ㉠

등식

$x(x+1)(x+2)=(x+1)(x-1)P(x)+ax+b$

의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1\times2\times3=2\times0\times P(1)+a\times1+b$

$6=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=3$

따라서 주어진 등식은

$x(x+1)(x+2)=(x+1)(x-1)P(x)+3x+3$

$a-b=0$이므로 위 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0\times1\times2=1\times(-1)\times P(0)+3\times0+3$

$P(0)=3$

따라서

$P(a-b)=P(0)=3$

[다른 풀이]

등식

$x(x+1)(x+2)=(x+1)(x-1)P(x)+ax+b$

의 좌변이

$x(x+1)(x+2)=(x^2+x)(x+2)$

$\quad=x^3+3x^2+2x$

이므로 다항식 x^3+3x^2+2x를 x^2-1로 나눈 몫이 다항식 $P(x)$이고 나머지가 $ax+b$이다.

$$\begin{array}{r}
x\ +3\quad\ \ \\
x^2-1\ \overline{)\ x^3+3x^2+2x}\\
\underline{x^3\qquad\ \ -x}\\
3x^2+3x\\
\underline{3x^2\qquad-3}\\
3x+3
\end{array}$$

즉 $P(x)=x+3$이고, $a=3,\ b=3$이다.

이때 $a-b=0$이므로 $x=0$을 대입하면

$P(0)=0+3=3$

따라서

$P(a-b)=P(0)=3$

11. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이해하여 점의 좌표를 구한다.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하자.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$

이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$0+3y_1=1$

$y_1=\dfrac{1}{3}$

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

${x_1}^2+{y_1}^2=1$

${x_1}^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=1$

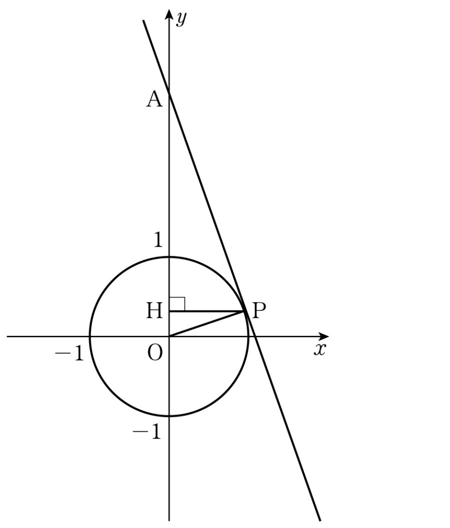
${x_1}^2=\dfrac{8}{9}$

$x_1>0$이므로

$x_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

[다른 풀이 1]
점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 이 직선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로 접선의 방정식은
$y=mx+3$
직선 $y=mx+3$이 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 한다.
$\dfrac{|0-0+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$
$\sqrt{m^2+1}=3$
$m^2=8$
이 원과 직선이 제1사분면에서 접하려면 $m<0$이어야 하므로
$m=-2\sqrt{2}$
두 식 $y=-2\sqrt{2}x+3$, $x^2+y^2=1$을 연립하여 점 P의 x좌표를 구하면
$x^2+(-2\sqrt{2}x+3)^2=1$
$9x^2-12\sqrt{2}x+8=0$
$(3x-2\sqrt{2})^2=0$
$x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

[다른 풀이 2]



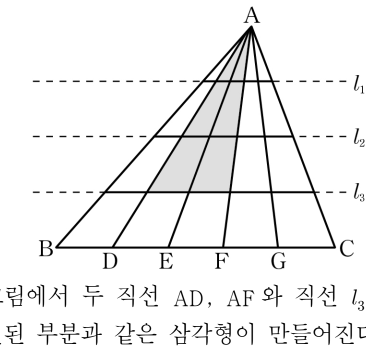
점 $(0,\ 3)$을 A라 하고 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.
직선 AP가 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로 원점 O에 대하여
$\angle \mathrm{OPA}=90°$
직각삼각형 OPA에서
$\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OP}}=1$
이므로
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$
이때 삼각형 OPA의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{AP}}$
$3\times\overline{\mathrm{PH}}=2\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
점 P의 x좌표는 선분 PH의 길이와 같으므로 구하는 값은 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

12. [출제의도] 부등식을 이용하여 필요조건이 되도록 하는 문제를 해결한다.
조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{x|a<x<5\}$
이고 조건 $\sim p$의 진리집합은
$P^C=\{x|x\le a$ 또는 $x\ge 5\}$
조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$x^2-x-2<0$에서
$(x-2)(x+1)<0$
$-1<x<2$
이므로
$Q=\{x|-1<x<2\}$
이때 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되려면 $Q\subset P^C$이어야 한다.
따라서 $2\le a<5$이므로 정수 a의 최솟값은 2이다.

13. [출제의도] 인수분해를 이용하여 연립방정식의 해를 구하는 문제를 해결한다.
$x^2-3xy+2y^2=0$에서
$(x-y)(x-2y)=0$
$x=y$ 또는 $x=2y$
$x=y$일 때, $x^2-y^2=y^2-y^2=0$이므로 $x^2-y^2=9$라는 조건을 만족시키지 않는다.
$x=2y$일 때, $x^2-y^2=(2y)^2-y^2=3y^2=9$에서
$y^2=3$
$y=\sqrt{3}$ 또는 $y=-\sqrt{3}$
$y=\sqrt{3}$이면 $x=2\sqrt{3}$
$y=-\sqrt{3}$이면 $x=-2\sqrt{3}$
$\alpha_1<\alpha_2$이므로
$\alpha_1=-2\sqrt{3}$, $\beta_1=-\sqrt{3}$
$\alpha_2=2\sqrt{3}$, $\beta_2=\sqrt{3}$
따라서
$\beta_1-\beta_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

14. [출제의도] 이차함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.
$f(x)=x^2-2x+a$에서
$f(2)=2^2-4+a=a$
$f(4)=4^2-8+a=a+8$
$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$에서
$f(f(2))=f(f(4))$
$f(a)=f(a+8)$
이때 함수 $f(x)=x^2-2x+a$에서
$f(x)=(x-1)^2+a-1$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 축이 직선 $x=1$이고, 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
$a\neq a+8$이므로 $f(a)=f(a+8)$이려면
$\dfrac{a+(a+8)}{2}=1$
$a=-3$
따라서 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-2x-3$이므로
$f(6)=6^2-2\times6-3=21$
[다른 풀이]
$f(x)=x^2-2x+a$에서
$f(2)=2^2-4+a=a$
$f(4)=4^2-8+a=a+8$
$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$에서
$f(f(2))=f(f(4))$
$f(a)=f(a+8)$
$a^2-2a+a=(a+8)^2-2(a+8)+a$
$16a=-48$
$a=-3$
따라서 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-2x-3$이므로
$f(6)=6^2-2\times6-3=21$

15. [출제의도] 조합을 이용하여 삼각형의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

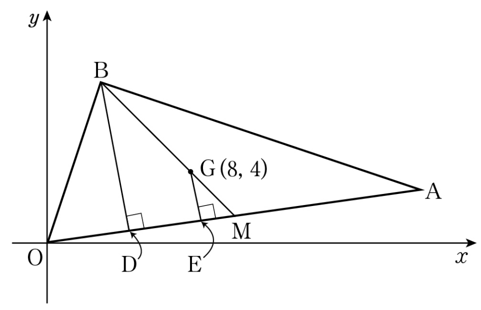


위의 그림에서 두 직선 AD, AF와 직선 l_3을 선택하면 색칠된 부분과 같은 삼각형이 만들어진다.
이와 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.
따라서 이 도형의 선들로 만들 수 있는 삼각형의 개수는
${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=15\times4=60$

16. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.
$f^{-1}(g(x))=2x$에서
$f(f^{-1}(g(x)))=f(2x)$
$g(x)=f(2x)$
따라서 $g(3)=f(6)=\sqrt{6}$
[다른 풀이]
$f(x)=\sqrt{3x-12}$에서
$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x^2+4\ \ (x\ge0)$
$f^{-1}(g(x))=2x$에서
$\dfrac{1}{3}\{g(x)\}^2+4=2x$
이때 $x\ge2$에서 $g(x)\ge0$이므로
$g(x)=\sqrt{6x-12}$
따라서 $g(3)=\sqrt{6\times3-12}=\sqrt{6}$

17. [출제의도] 곱의 법칙을 이용하여 색을 칠하는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.
1이 적힌 정사각형과 6이 적힌 정사각형에 같은 색을 칠해야 하고, 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠하므로 1, 6, 2, 3, 5, 4가 적힌 정사각형의 순서로 색을 칠한다고 생각하자.
서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 색을 칠하므로
1이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지
6이 적힌 정사각형에는 1이 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색을 칠해야 하므로 칠할 수 있는 색은 1가지
2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 조건을 만족시키도록 색을 칠하는 경우의 수는
$4\times1\times3\times2\times2\times2=96$

18. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 기울기를 추론한다.
선분 OA의 중점을 M, 두 점 B, G에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.



점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로
$\overline{\mathrm{BG}}:\overline{\mathrm{GM}}=2:1$
이고, 삼각형 MBD와 삼각형 MGE는 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{GE}}=3:1$
이다.
점 B와 직선 OA 사이의 거리 $\overline{\mathrm{BD}}$가 $6\sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{GE}}=\dfrac{1}{3}\times6\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{2}}$

직선 OA의 기울기를 m이라 하면 직선 OA의 방정식은 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$이므로 점 G와 직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{\boxed{|8m-4|}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$

이고 $\boxed{2\sqrt{2}}$와 같다. 즉,

$$\frac{\boxed{|8m-4|}}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\boxed{2\sqrt{2}},$$

$$\boxed{|8m-4|}=\boxed{2\sqrt{2}}\times\sqrt{m^2+1}$$

이다. 양변을 제곱하면

$(8m-4)^2=8(m^2+1)$

$7m^2-8m+1=0$

$(7m-1)(m-1)=0$

$m=\frac{1}{7}$ 또는 $m=1$

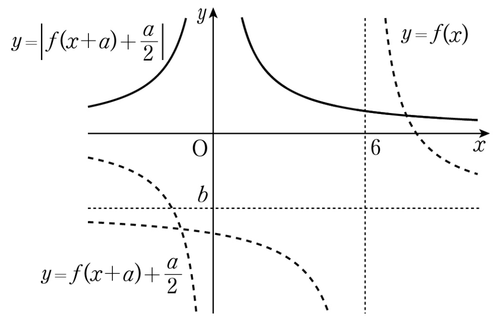
이때 직선 OG의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $m<\frac{1}{2}$을 만족시키는 직선 OA의 기울기는 $\boxed{\frac{1}{7}}$이다.

따라서 $p=2\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{7}$, $f(m)=|8m-4|$이므로

$$\frac{f(q)}{p^2}=\frac{\left|8\times\frac{1}{7}-4\right|}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{\frac{20}{7}}{8}=\frac{5}{14}$$

19. [출제의도] 평행이동을 이용하여 유리함수의 그래프를 추론한다.

곡선 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$는 곡선 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 x축 아래에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y축에 대하여 대칭이려면 곡선 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 점근선의 방정식은 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 함을 알 수 있다.



$f(x)=\frac{a}{x-6}+b$에서

$f(x+a)+\frac{a}{2}=\frac{a}{x+a-6}+b+\frac{a}{2}$

이고 곡선 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 점근선의 방정식은

$x=6-a$, $y=b+\frac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$6-a=0$, $b+\frac{a}{2}=0$

$a=6$, $b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{6}{x-6}-3$이므로

$f(b)=f(-3)$

$=-\frac{11}{3}$

20. [출제의도] 인수분해를 이용하여 사차방정식의 근을 추론한다.

ㄱ. $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$에서 $a=1$이면

$x^4+x^2-12=0$

$(x^2-3)(x^2+4)=0$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)=0$

$x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-2i$ 또는 $x=2i$

이때 실근은 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$이므로

모든 실근의 곱은 $(-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=-3$이다. (참)

ㄴ. $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$에서

$x^4+(3-2a)x^2+(a-5)(a+2)=0$

$(x^2-a+5)(x^2-a-2)=0$

$x^2=a-5$ 또는 $x^2=a+2$

$x^2=a-5$에서 $a-5\geq0$이면 실근을 갖고

$a-5<0$이면 허근을 갖는다.

$x^2=a+2$에서 $a+2\geq0$이면 실근을 갖고

$a+2<0$이면 허근을 갖는다.

방정식 $x^4+(3-2a)x^2+a^2-3a-10=0$이

실근과 허근을 모두 가지므로

$a+2\geq0$, $a-5<0$

에서

$-2\leq a<5$

$-2<a<5$일 때 방정식의 실근은

$x=-\sqrt{a+2}$ 또는 $x=\sqrt{a+2}$

이고, $a=-2$일 때

$x=0$

또, $-2\leq a<5$일 때 방정식의 허근은

$x=-\sqrt{5-a}\,i$ 또는 $x=\sqrt{5-a}\,i$

이다. 이때 모든 실근의 곱이 -4이려면 방정식의 실근은

$x=-\sqrt{a+2}$ 또는 $x=\sqrt{a+2}$

$(-\sqrt{a+2})\times\sqrt{a+2}=-4$

$a+2=4$, $a=2$

이므로 방정식의 허근은

$x=-\sqrt{3}i$ 또는 $x=\sqrt{3}i$

이다.

따라서 모든 허근의 곱은

$(-\sqrt{3}i)\times\sqrt{3}i=3$

이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $-2\leq a<5$이고 $0\leq\sqrt{a+2}<\sqrt{7}$이므로 방정식이 가질 수 있는 정수인 근은 $\sqrt{a+2}$의 값이 0, 1, 2일 때이다. 즉,

$\sqrt{a+2}=0$일 때 $a=-2$

$\sqrt{a+2}=1$일 때 $a=-1$

$\sqrt{a+2}=2$일 때 $a=2$

따라서 정수인 근을 갖도록 하는 실수 a의 값이 -2, -1, 2이므로 그 합은 $(-2)+(-1)+2=-1$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

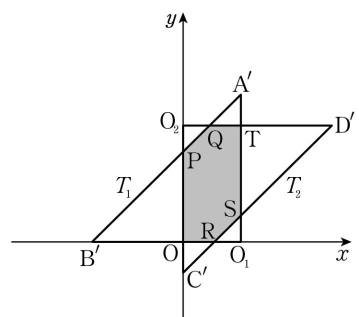
21. [출제의도] 평행이동을 이용하여 넓이의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_1}$, A′, B′이라 하면

$\mathrm{O_1}(t,\ 0)$, $\mathrm{A'}(t,\ 1)$, $\mathrm{B'}(-1+t,\ 0)$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 $\mathrm{O_2}$, C′, D′이라 하면

$\mathrm{O_2}(0,\ 2t)$, $\mathrm{C'}(0,\ -1+2t)$, $\mathrm{D'}(1,\ 2t)$



두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 선분 A′B′이 두 선분 $\mathrm{O_2C'}$, $\mathrm{O_2D'}$과 A′, B′이 아닌 두 점에서 만나야 한다. 또 선분 C′D′이 두 선분 $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1A'}$과 C′, D′이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

선분 A′B′이 두 선분 $\mathrm{O_2C'}$, $\mathrm{O_2D'}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 C′D′이 두 선분 $\mathrm{O_1B'}$, $\mathrm{O_1A'}$과 만나는 점을 각각 R, S라 하면

$\mathrm{P}(0,\ 1-t)$, $\mathrm{Q}(3t-1,\ 2t)$, $\mathrm{R}(1-2t,\ 0)$, $\mathrm{S}(t,\ 3t-1)$

따라서 조건을 만족시키는 육각형이 만들어지려면

(점 P의 y좌표)<(점 $\mathrm{O_2}$의 y좌표)

<(점 A′의 y좌표)

이어야 하므로

$1-t<2t<1$

$1-t<2t$에서 $t>\frac{1}{3}$

$2t<1$에서 $t<\frac{1}{2}$

두 부등식을 모두 만족시키는 t의 값의 범위는

$\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$

또한

(점 C′의 y좌표)<(점 $\mathrm{O_1}$의 y좌표)

<(점 S의 y좌표)

이어야 하고 위와 마찬가지로 $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$

이때 두 선분 $\mathrm{A'O_1}$, $\mathrm{O_2D'}$의 교점을 T라 하고, 육각형의 넓이를 $f(t)$ $\left(\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}\right)$이라 하면

$f(t)=$(직사각형 $\mathrm{OO_1TO_2}$의 넓이)

$-$(삼각형 $\mathrm{O_1SR}$의 넓이)

$-$(삼각형 $\mathrm{O_2PQ}$의 넓이)

$=t\times2t-2\times\frac{1}{2}(3t-1)^2$

$=-7t^2+6t-1$

$=-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{2}{7}$

이므로 $f(t)$는 $t=\frac{3}{7}$일 때 최대이고, 최댓값은

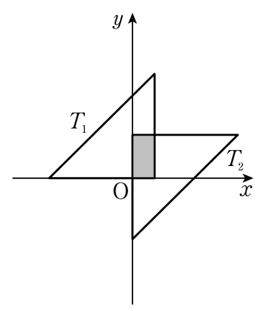
$M=\frac{2}{7}$

따라서

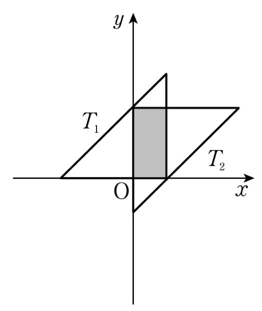
$a+M=\frac{1}{2}+\frac{2}{7}=\frac{11}{14}$

[보충 설명]

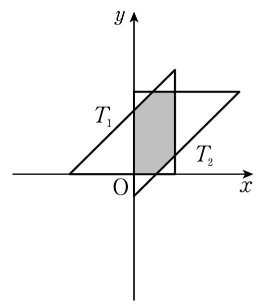
양의 실수 t의 값의 범위에 따른 두 삼각형 T_1, T_2는 다음과 같다.



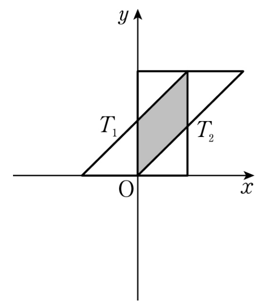
$0<t<\frac{1}{3}$일 때



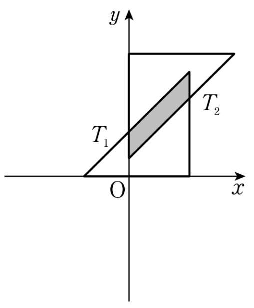
$t=\frac{1}{3}$일 때



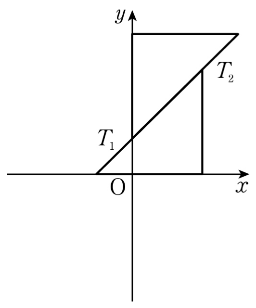
$\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$일 때



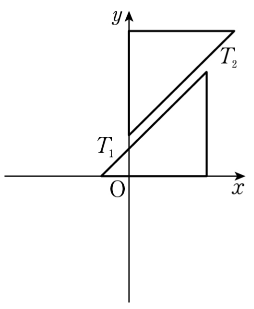
$t=\frac{1}{2}$일 때



$\frac{1}{2}<t<\frac{2}{3}$ 일 때



$t=\frac{2}{3}$ 일 때



$t>\frac{2}{3}$ 일 때

22. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

23. [출제의도] 합집합의 원소의 개수를 계산한다.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$\qquad\quad =12+25-4=33$

24. [출제의도] 원의 방정식을 이해하여 원의 넓이를 구한다.

$x^2+y^2-8x+6y=0$에서
$x^2-8x+16+y^2+6y+9=25$
$(x-4)^2+(y+3)^2=5^2$
따라서 원 $x^2+y^2-8x+6y=0$은 중심의 좌표가
$(4,\ -3)$이고 반지름의 길이가 5이므로 원의 넓이는
$5^2\times\pi=25\pi$
따라서 $k=25$이다.

25. [출제의도] 다항식의 곱셈을 이해하여 식의 값을 구한다.

$(x-y-2z)^2=x^2+y^2+4z^2-2xy+4yz-4zx$
$\qquad\qquad\quad =x^2+y^2+4z^2-2(xy-2yz+2zx)$
$\qquad\qquad\quad =62-2\times13$
$\qquad\qquad\quad =36$

[보충 설명]

$x=7,\ y=-2,\ z=\frac{3}{2}$일 때 주어진 식이 성립한다.

26. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이해하여 식의 값을 구한다.

방정식 $x^3+x-2=0$에 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	0	1	-2
		1	1	2
	1	1	2	0

$(x-1)(x^2+x+2)=0$
이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times2=-7<0$
즉, 이차방정식 $x^2+x+2=0$이 허근을 가지므로 α, β는 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 허근이다.
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$\qquad\quad =(-1)^3-3\times2\times(-1)$
$\qquad\quad =(-1)+6=5$

[다른 풀이]

방정식 $x^3+x-2=0$에 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	0	1	-2
		1	1	2
	1	1	2	0

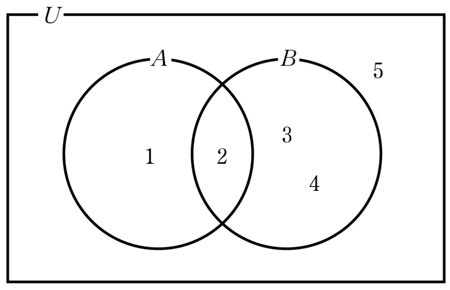
$(x-1)(x^2+x+2)=0$
이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times2=-7<0$
즉, 이차방정식 $x^2+x+2=0$이 허근을 가지므로 α, β는 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 허근이다.
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-1$
또한 $\alpha,\ \beta$는 $x^3+x-2=0$의 근이므로
$\alpha^3+\alpha-2=0$에서 $\alpha^3=-\alpha+2$
$\beta^3+\beta-2=0$에서 $\beta^3=-\beta+2$
$\alpha^3+\beta^3=(-\alpha+2)+(-\beta+2)$
$\qquad\quad =-(\alpha+\beta)+4$
$\qquad\quad =-(-1)+4=5$

27. [출제의도] 명제의 참, 거짓을 이해하여 조건을 만족시키는 최솟값을 구한다.

명제
'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1\le0$이다.'
가 거짓이려면 이 명제의 부정
'모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1>0$이다.'
가 참이어야 하므로 이차방정식 $x^2+8x+2k-1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=4^2-(2k-1)<0$
$k>\frac{17}{2}$
이므로 정수 k의 최솟값은 9이다.

28. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 부분집합의 개수를 추론한다.

주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



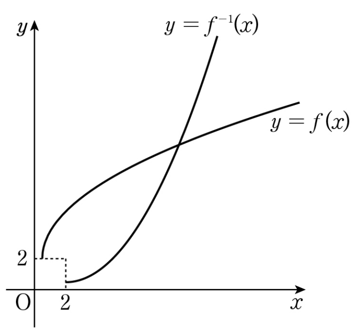
$A\cap B=\{2\}$이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.
(i) $2\in X$인 경우
이때 $X\cap A\neq\varnothing,\ X\cap B\neq\varnothing$을 만족시킨다.
그러므로 집합 X는 전체집합 U의 2가 아닌 원소인 $1,\ 3,\ 4,\ 5$의 일부 또는 전부를 원소로 갖거나 어느 것도 원소로 갖지 않을 수 있다. 따라서 $2\in X$인 경우의 집합 X의 개수는 집합
$\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$
의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^4=16$
(ii) $2\notin X$인 경우
2를 제외한 집합 A의 원소는 1이고, 2를 제외한 집합 B의 원소는 $3,\ 4$이므로 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$을 만족시키려면 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 원소로 가져야 한다.
이때 $1\in X,\ 3\in X,\ 4\notin X$인 경우와 $1\in X,\ 3\notin X$, $4\in X$인 경우와 $1\in X,\ 3\in X,\ 4\in X$인 경우의 3가지 경우가 있다.
이때 각 경우에서 집합 X는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소인 5를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있다.
따라서 $2\notin X$인 경우의 집합 X의 개수는
$3\times2=6$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는
$16+6=22$

29. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

꽃 4송이와 초콜릿 2개를 조건을 만족시키도록 5명의 학생에게 나누어 주는 경우는 다음과 같다.
(i) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우
초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이씩 나누어 주는 경우의 수는
$4!=4\times3\times2\times1=24$
이므로 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는 $5\times24=120$
(ii) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우
4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
이고, 이 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5, 남은 두 송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$
이고 꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수가 1이므로 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는
$6\times5\times12\times1=360$
(iii) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우
4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 주는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_4=5\times4\times3\times2=120$
이고 꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1=4$
이므로 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는
$120\times4=480$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$120+360+480=960$

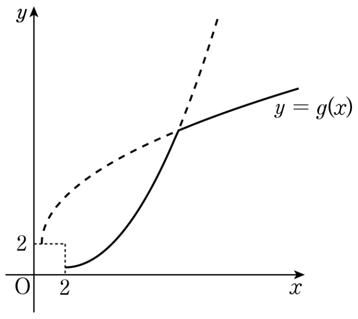
30. [출제의도] 무리함수의 역함수의 그래프를 이용하여 교점의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=\sqrt{ax-3}+2\left(x\ge\frac{3}{a}\right)$에서
$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}\ (x\ge2)$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우})\\ f^{-1}(x) & (f(x)\ge f^{-1}(x)\text{인 경우})\end{cases}$는 $x\ge2$인 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$ 중 크지 않은 값이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



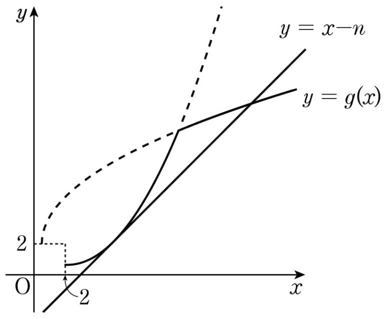
[그림 2]

$f(x)<f^{-1}(x)$인 경우, 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수는 항상 1이다.

따라서 $f(x)\geq f^{-1}(x)$일 때 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수와 이에 따른 $h(n)$은 다음과 같다.

(i) 교점의 개수가 1인 경우

[그림 3]과 같이 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하는 경우



[그림 3]

$\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}=x-n$에서

$(x-2)^2+3=ax-an$

$x^2-(a+4)x+an+7=0$

x에 대한 이차방정식 $x^2-(a+4)x+an+7=0$의 판별식을 D라 하면

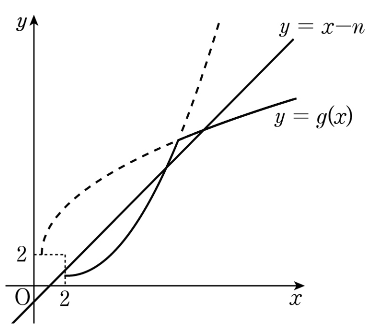
$D=\{-(a+4)\}^2-4(an+7)=0$

$a^2+8a-12-4an=0$

이므로

$n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

[그림 4]와 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 아랫부분에 있는 경우



[그림 4]

x좌표가 2일 때 직선 $y=x-n$의 y좌표인 $2-n$이 $f^{-1}(2)=\frac{3}{a}$보다 크므로

$\frac{3}{a}<2-n$

$n<2-\frac{3}{a}$

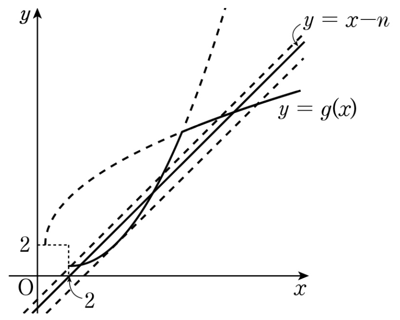
따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 1인 자연수 n의 값의 범위는

$n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ 또는 $n<2-\frac{3}{a}$

이고 이때 $h(n)=2$이다.

(ii) 교점의 개수가 2인 경우

[그림 5]와 같이 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 윗부분에 있고, 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$을 지나거나 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 윗부분에 있는 경우이다.



[그림 5]

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$의 y절편인

$-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 작으므로

$-n>-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$

$n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$을 지나면

$\frac{3}{a}=2-n$

$n=2-\frac{3}{a}$

점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$이 직선 $y=x-n$의 윗부분에 있는 경우는 x좌표가 2일 때 직선 $y=x-n$의 y좌표인 $2-n$이 $f^{-1}(2)=\frac{3}{a}$보다 작으므로

$\frac{3}{a}>2-n$

$n>2-\frac{3}{a}$

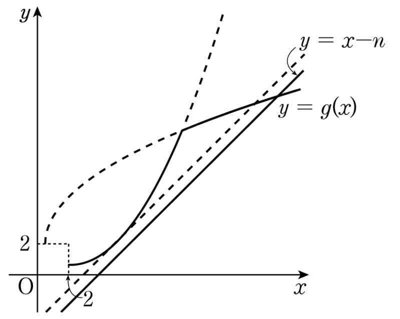
따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 2인 자연수 n의 값의 범위는

$2-\frac{3}{a}\leq n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

이고 이때 $h(n)=3$이다.

(iii) 교점이 없는 경우

[그림 6]과 같이 직선 $y=x-n$이 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선의 아랫부분에 있는 경우이다.



[그림 6]

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선 $y=x-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$의 y절편인

$-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$가 직선 $y=x-n$의 y절편인 $-n$보다 크므로

$-n<-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$

$n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 점이 없는 자연수 n의 값의 범위는

$n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

이고 이때 $h(n)=1$이다.

(i), (ii), (iii)에서

$$h(n)=\begin{cases}2 & \left(0<n<2-\frac{3}{a}\right)\\ 3 & \left(2-\frac{3}{a}\leq n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right)\\ 2 & \left(n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right)\\ 1 & \left(n>2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}\right)\end{cases}$$

$h(1)=h(3)<h(2)$를 만족시키려면

$h(1)=2,\ h(3)=2,\ h(2)=3$이어야 한다.

즉

$0<1<2-\frac{3}{a}$ …… ㉠

$2-\frac{3}{a}\leq 2<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ …… ㉡

$3=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ …… ㉢

㉢에서

$\frac{a}{4}-\frac{3}{a}-1=0$

$a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$

$a=-2$ 또는 $a=6$

이때 $a\geq\frac{3}{2}$이므로

$a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하면

$0<1<2-\frac{3}{6}=\frac{3}{2}$

이므로 ㉠을 만족시키고,

$a=6$을 ㉡에 대입하면

$2-\frac{3}{6}\leq 2<2-\frac{3}{6}+\frac{6}{4}$

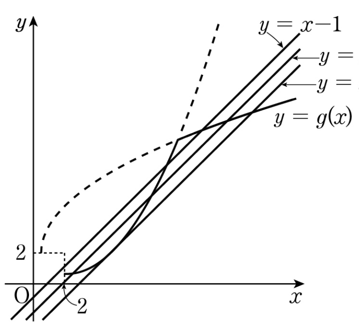
$\frac{3}{2}\leq 2<3$

이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$는 $a=6$일 때인

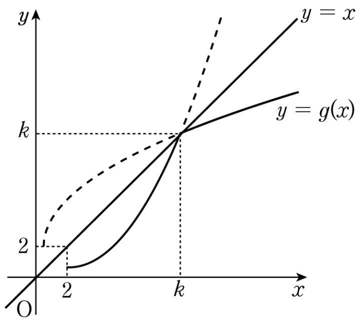
$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{6x-3}+2 & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우})\\ \frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2} & (f(x)\geq f^{-1}(x)\text{인 경우})\end{cases}$$

이고, 이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 7]과 같다.



[그림 7]

[그림 8]과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 k라 하면



[그림 8]

$\frac{1}{6}(k-2)^2+\frac{1}{2}=k$

$k^2-4k+7=6k$

$k^2-10k+7=0$

$k>2$ 이므로

$k=5+3\sqrt{2}$

따라서 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{6x-3}+2 & (x>5+3\sqrt{2}) \\ \frac{1}{6}(x-2)^2+\frac{1}{2} & (2\le x\le 5+3\sqrt{2})\end{cases}$$

이므로

$g(4)=\frac{1}{6}(4-2)^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

따라서 $p=6$, $q=7$ 이므로

$p+q=13$